

# Στοχαστικές Αριθμητικές Μέθοδοι και Εφαρμογές

Διδάσκων: Σαμπάνης Σ.

Κάρλος Μαύρος - ΣΕΜΦΕ ΕΜΠ

November 3, 2021

## 1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- ◇ MCMC (Markov Chain Monte Carlo).
- ◇ Langevin Stochastic DEs: βλέπουμε τις στοχαστικές λύσεις σαν στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις.
- ◇ Βελτιστοποίηση μη κυρτών συναρτήσεων σε χώρους μεγάλων διαστάσεων.

Στα gradient methods & stochastic gradient methods υπάρχουν 2 σχολές:

- ◇ Επιχειρησιακή έρευνα (κυρτές συναρτήσεις).
- ◇ Μέσα από την θεωρία του Stochastic Approximation: χρησιμοποιεί  $\Delta E$  σαν εργαλεία

Το stochastic gradient methods δεν είναι πραγματικά στοχαστικές (υπολογίζουμε απλώς μια μέση τιμή) Οι stochastic gradient methods είναι ένα υποσύνολο της θεωρίας Stochastic Approximation, η οποία χρησιμοποιεί πραγματικά στοχαστικά εργαλεία (έχουμε μέσα στοχαστικές διαδικασίες).

Tools:

- ◇ a.s. convergence
- ◇ convergence with probability
- ◇ Ito's formula (σημαντικό) διαχωρίζει το δυναμικό σύστημα τ.ω. να μπορούμε να αναγνωρίζουμε ποια είναι τα martingales. Βλέπω τις τάσεις του δυναμικού συστήματος.

## 2 ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

- ◊ θα γίνει εξέταση
- ◊ βιβλιογραφία:
  - (Θεωρία Πιθανοτήτων) David Williams : Probability with martingales
  - (Στοχαστικές Διαδικασίες/Ανάλυση) Καραντζάς & Steven

## 3 Μάθημα 1

### 3.1 Εισαγωγή

- ◊ Ονομάζουμε σύνολο κάθε συλλογή αντικειμένων όπου η διάταξη δεν έχει σημασία.
- ◊ Κάθε μέρος του συνόλου ονομάζεται υποσύνολο του συνόλου.
- ◊ Έστω  $\Omega$  σύνολο, τότε το δυναμοσύνολο του  $\Omega$  είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του  $\Omega$  και το συμβολίζουμε  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
- ◊ Για κάθε σύνολο  $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$  όπου  $n \in \mathbb{N}$  το  $\mathcal{P}(\Omega)$  έχει  $2^n$  στοιχεία.

#### Παράδειγμα 1.

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\} = 2^\Omega$$

**Ορισμός 1.** (σ-άλγεβρα): ονομάζουμε σ-άλγεβρα  $\mathcal{F}$  ενός συνόλου  $\Omega$  κάθε σύνολο υποσυνόλων του  $\Omega$  με τις εξής ιδιότητες:

1.  $\emptyset \in \mathcal{F}$
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$
3.  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$

**Παράδειγμα 2.** Τετριμμένη σ-άλγεβρα:  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$

**Παράδειγμα 3.** Για κάθε  $A \subset \Omega$  μπορώ να φτιάξω την  $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  που είναι σ-άλγεβρα.

Αν έχω μια αριθμήσιμη συλλογή από pairwise disjoint sets  $A_1, A_2, \dots$  δηλαδή  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$  και  $\bigcup_i A_i = \Omega$  διαμέριση του  $\Omega$ , τότε

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, \dots, \text{όλες τις πιθανές ενώσεις των } A_i\}$$

Αν έχω μια διαμέριση μπορώ να πάρω όλα τα συμπληρώματα με μόνο ενώσεις, δηλαδή αν είχα τα σύνολα διαμέρισης  $A_1, A_2, A_3, A_4$  θα είχαμε  $(A_1 \cup A_2)^c = A_3 \cup A_4$

## 4 Μάθημα 2

### 4.1 Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

**Ορισμός 2.** (Παραγόμενη σ-άλγεβρα): Αν  $\mathcal{A}$  είναι μια συλλογή υποσυνόλων του  $\Omega$ , τότε μπορούμε να βρούμε πάντοτε μια σ-άλγεβρα που να περιέχει το  $\mathcal{A}$ , η οποία είναι το δυναμοσύνολο  $\mathcal{P}(\Omega)$ .

Παίρνωντας την τομή όλων των σ-αλγεβρών που περιέχουν το  $\mathcal{A}$  καταλήγουμε στην παραγόμενη σ-άλγεβρα (ή ελάχιστη σ-άλγεβρα).

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{F}} \mathcal{F} \quad \text{όπου κάθε } \mathcal{F} \text{ σ-άλγεβρα}$$

**Σημαντικές Ιδιότητες:** Έστω  $\mathcal{F}$  μια σ-άλγεβρα ενός συνόλου  $\Omega$

$$\diamond A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$$

$\diamond$  Η τομή δύο ή περισσότερων σ-αλγεβρών είναι επίσης σ-άλγεβρα.

**Ορισμός 3.** (Borel σ-άλγεβρα)

Ονομάζουμε σ-άλγεβρα Borel (ή Borel σύνολα), συμβ.  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  (στο  $\mathbb{R}$ ,  $d = 1, 2, \dots$ ), την ελάχιστη σ-άλγεβρα (παραγόμενη) που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^d$ .

**Πρόταση 1.** Η σ-άλγεβρα Borel είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει τα διαστήματα της μορφής

$$(-\infty, \alpha] \quad \alpha \in \mathbb{Z}$$

**Απόδειξη**

Έστω  $\mathcal{O}$  το σύνολο όλων των ανοικτών συνόλων του  $\mathbb{R}$ , τότε  $\sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

Έστω  $\mathcal{D}$  το σύνολο όλων των διαστημάτων της μορφής  $(-\infty, \alpha] \quad \alpha \in \mathbb{Z}$ .

Έστω τώρα μια φθίνουσα ακολουθία  $\{\alpha_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{Z}$  ρητών αριθμών τ.ω.  $\alpha_k \downarrow \alpha \in \mathbb{R}$  και έστω μια αύξουσα ακολουθία  $\{\beta_k\}_{k \geq 1} \subset \mathbb{Z}$  τ.ω.  $\beta_k b \in \mathbb{R}$ . Συνεπώς μιας και

$$(\alpha, \beta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((-\infty, \beta_n] \cap (-\infty, \alpha_n]^c)$$

Καταλήγουμε στο ότι το  $(\alpha, \beta)$  ανήκει στην  $\sigma(\mathcal{D})$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  και άρα έχουμε  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\mathcal{D})$ .

Από την άλλη έχουμε  $\sigma(\mathcal{D}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$  αφού τα διαστήματα στο  $\mathcal{D}$  μπορούμε να τα δούμε ως συμπληρώματα ανοικτών διαστημάτων, συνεπώς η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει τέτοια ανοικτά υποσύνολα/διαστήματα θα είναι υποσύνολο της ελάχιστης σ-άλγεβρας που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$ .  $\square$

**Σημείωση:** Γενικά αν  $A \subset B \Rightarrow \sigma(A) \subset \sigma(B)$  και αν  $\mathcal{F}$  είναι σ-άλγεβρα τότε  $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$

- ◊ Μονοσύνολα της μορφής  $\{a\}$  όπου  $a \in \mathbb{R}$  ανήκουν στην  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
- ◊  $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Ορισμός 4.** (Μετρήσιμο σύνολο)

Έστω  $\mathcal{F}$  —  $A \in \mathcal{F}$  λέγεται  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμο ( $\mathcal{F}$ -measurable).

**Ορισμός 5.** (Μετρήσιμος χώρος)

Έστω  $\mathcal{F}$  μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων ενός συνόλου  $\Omega$ . Τότε το ζεύγος  $(\Omega, \mathcal{F})$  ονομάζεται μετρήσιμος χώρος (measurable space)

**Ορισμός 6.** (Μετρήσιμη συνάρτηση)

Έστω  $\Omega$  ένα μη-κενό σύνολο,  $\mathcal{F}$  μια σ-άλγεβρα του  $\Omega$  και  $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ . Η συνάρτηση  $f$  ονομάζεται  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη (ή απλώς μετρήσιμη) αν για κάθε σύνολο Borel  $B$ , δηλαδή  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

**Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα**

- ◊ Η  $f$  είναι μετρήσιμη
- ◊ Για κάθε ανοικτό σύνολο  $A \subset \mathbb{R}^n$  ισχύει  $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ .
- ◊ Για κάθε κλειστό σύνολο  $B \subset \mathbb{R}^n$  ισχύει  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ .

**Σημείωση:** Η μετρησιμότητα (measurability) μιας συνάρτησης εξαρτάται από το πόσο μεγάλη είναι η σ-άλγεβρα.

- ◊ Αν  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  τότε μετρήσιμες είναι μόνο οι σταθερές συναρτήσεις, δηλ.  $f(\omega) = c \in \mathbb{R}, \forall \omega \in \Omega$ .  
Αν  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , όπου  $B$  ανοικτό σύνολο, τότε

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & , c \notin B \\ \Omega & , c \in B \end{cases}$$

- ◊ Αν  $A \subset \Omega, \mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$  τότε:

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & , \omega \in A \\ 0 & , \omega \in A^c \end{cases}$$

$$f(\omega) = \begin{cases} c_1 & , \omega \in A \\ c_2 & , \omega \in A^c \end{cases}$$

Γιατί; Έστω  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  τότε

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset & , 0, 1 \notin B \\ A & , 1 \in B \\ A^c & , 0 \in B \\ \Omega & , 0, 1, \in B \end{cases}$$

## 5 Μάθημα 3

### 5.1 Ιδιότητες μετρήσιμων συναρτήσεων

1. Οι δείκτριες συναρτήσεις ενός μετρήσιμου συνόλου είναι μετρήσιμες (  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{1}_A$  είναι  $\mathcal{F}$ -μετρήσιμη )
2. Το άθροισμα, η διαφορά, το γινόμενο και το πηλίκο (όπου ορίζεται) μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμα.
3. Το μέγιστο και το ελάχιστο δύο ή περισσότερων (πεπερασμένων) μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμα.
4. Το όριο (όταν υπάρχει) μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμο όπως επίσης το  $\liminf$  και το  $\limsup$ .
5. Το  $\sup$  και το  $\inf$  μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμα.
6. Η σύνθετη συνάρτηση  $g \circ f$  μιας μετρήσιμης συνάρτησης  $f$  με μια συνεχή συνάρτηση  $g$  είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

Ως αποτέλεσμα, οι συναρτήσεις  $f^+$  και  $f^-$  οι οποίες ορίζονται ως

$$f^+(x) = \max(f(x), 0) \quad f^-(x) = -\min(f(x), 0)$$

είναι μετρήσιμες αν η  $f$  είναι μετρήσιμη.

(Για τα παραπάνω δεν θα κάνουμε απόδειξη σε αυτό το μάθημα, τα χρησιμοποιούμε ελεύθερα στις ασκήσεις και στην εξέταση με απλή αναφορά τους)

### 5.2 Θεωρία Μέτρου

**Ορισμός 7.** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  είναι μετρήσιμος χώρος και έστω  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  είναι μια συνάρτηση. Τότε, η  $\mu$  ονομάζεται **μέτρο** αν:

1. Για όλα τα  $A \in \mathcal{F}$  έχουμε  $\mu(A) \geq 0$ .
2.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
3. Αν τα σύνολα  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο τότε  $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$  (αριθμήσιμη προσθετικότητα)

**Ορισμός 8.** Ως **μέτρο πιθανότητας** ορίζουμε σε μία  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathcal{F}$  ενός συνόλου  $\Omega$ , μια συνάρτηση  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός μέτρου και  $P(\Omega) = 1$ .

**Ορισμός 9.** Ονομάζουμε **χώρο πιθανότητας** την τριάδα  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , όπου  $\Omega$  είναι ένα σύνολο (που συχνά ονομάζεται δειγματοχώρος/sample space),  $\mathcal{F}$  είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του  $\Omega$  και  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

### 5.2.1 Ιδιότητες μέτρων πιθανότητας

Θεωρούμε τον χ.π.  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Τότε ισχύουν τα εξής:

1. (countable subadditivity). Για κάθε  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  έχουμε  $P(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i \geq 1} P(A_i)$ .
2. (monotonicity). Για κάθε  $A, B \in \mathcal{F}$  με  $A \subset B$  έχουμε  $P(A) \leq P(B)$ .
3. (continuity). Έστω  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$  όπου  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$  μια αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων, τότε  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$

**Σημείωση:** Οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν για οποιοδήποτε μέτρο.

Πιο κάτω παραθέτουμε μια απόδειξη της Ιδιότητας 3.

$$\begin{aligned}
 P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})\right) \\
 (\text{countable additivity}) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \setminus A_{n-1}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(A_i \setminus A_{i-1}) \\
 (\text{countable additivity}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \setminus A_{i-1})\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n)
 \end{aligned}$$

**Ιδιότητα** (πηγάζει από την 3) Έστω  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  (contracting sequence of events), τότε ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$



**Ορισμός 10.** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος και  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  είναι ένα μέτρο. Τότε ονομάζουμε αυτό το μέτρο:

1. **πεπερασμένο**, αν  $\mu(\Omega) < \infty$ .
2.  **$\sigma$ -πεπερασμένο**, αν υπάρχει μια ακολουθία  $\{A_n\}_{n \geq 0}$  στοιχείων της  $\mathcal{F}$  τέτοια ώστε  $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$  και  $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \Omega$

### 5.2.2 Θεώρημα Καραθεοδωρή (εκτός ύλης)

**Ορισμός 11.** Έστω  $\Omega$  είναι ένα μη-κενό σύνολο. Ονομάζουμε ένα σύνολο υποσυνόλων  $\mathcal{G}$  του  $\Omega$  ως  **$\pi$ -σύστημα (ή άλγεβρα)** αν είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, δηλαδή:

$$G_1, G_2 \in \mathcal{G} \Rightarrow G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$$

**Πρόταση 2.** Αν δύο μέτρα πιθανότητας συμπίπτουν σε ένα  $\pi$ -σύστημα, τότε συμπίπτουν και στην  $\sigma$ -άλγεβρα που παράγεται από το  $\pi$ -σύστημα.

#### Θεώρημα 1. Caratheodory's Extension Theorem

Έστω  $\Omega$  είναι ένα σύνολο,  $\mathcal{G}$  ένα  $\pi$ -σύστημα του  $\Omega$  και  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ . Αν το  $\mu_0$  είναι μια αριθμήσιμα προσθετική συνάρτηση από το  $\mathcal{G}$  στο  $[0, +\infty]$ , δηλ.  $\mu_0 : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ .

Τότε υπάρχει μέτρο στο  $(\Omega, \mathcal{F})$  τέτοιο ώστε

$$\mu(A) = \mu_0(A) \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

Αν μάλιστα  $\mu_0(\Omega) < \infty$ , τότε υπάρχει μοναδικό τέτοιο μέτρο  $\mu$ .

**Παράδειγμα 4.** Μέτρο Lebesgue στο  $(\Omega, \mathcal{F}) = ((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$ . Θεωρούμε όλα εκείνα τα υποσύνολα του  $\Omega$  τα οποία μπορούν να γραφτούν ως πεπερασμένες ενώσεις των διαστημάτων  $(a_1, b_1], \dots, (a_n, b_n]$  όπου  $n \in \mathbb{N}$  και  $0 < a_1 \leq b_1 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq 1$ . Αν  $\mathcal{G}$  είναι το  $\pi$ -σύστημα (άλγεβρα) που περιέχει όλα αυτά τα υποσύνολα, τότε  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{B}((0, 1])$

Ορίζουμε επίσης για κάθε σύνολο  $G \in \mathcal{G}$ , τη συνάρτηση

$$\mu_0(G) = \sum_{k \leq r} (b_k - a_k)$$

όπου αυτό το  $G$  είναι  $G = (a_1, b_1] \cup \dots \cup (a_r, b_r]$  και  $r \leq n$ . Έτσι η  $\mu_0$  είναι καλώς ορισμένη (well-defined) και είναι αριθμήσιμα προσθετική.

Συνεπώς, σύμφωνα με το Θ. Καραθεοδωρή υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο στον  $((0, 1], \mathcal{B}((0, 1]))$  που είναι η προέκταση του  $\mu_0$  στο  $\mathcal{G}$  και το οποίο ονομάζεται μέτρο Lebesgue. (γενίκευση της Ευκλείδειας απόστασης)

### 5.3 Ολοκλήρωση

**Μια παρατήρηση:** Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  η οποία ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \forall x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1, & \forall x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Καθορίζουμε πρώτα μια διαμέριση  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$  και μετά εξετάζουμε τα αθροίσματα Riemann για ρητούς αριθμούς  $\xi_i$  και παρατηρούμε

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

Αν διαλέξω άρρητους  $\xi_i$  τότε

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = 1$$

Συνεπώς είναι προφανές ότι αυτή η συνάρτηση δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Ωστόσο παρατηρώ ότι η  $f$  είναι η  $\mathbf{1}_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ . Ποιο είναι το μέτρο Lebesgue του  $A = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ ; Γνωρίζουμε ότι οι ρητοί ως αριθμήσιμη ένωση (ξένων) μονοσυνόλων είναι μετρήσιμοι, συνεπώς  $\mathbb{Q} = \sum_{i=1}^{\infty} \{a_i\} = 0$  αφού τα μονοσύνολα είναι σύνολα μέτρου 0, άρα έπεται ότι το σύνολο των αρρήτων είναι:

$$\mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$$

Ουσιαστικά με τα παραπάνω συλλογίζόμαστε ότι:

$$\int_{[0,1]} f(x) d\mu(x) = 1 \cdot \mu([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) + 0 \cdot \mu([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = 1$$

## 6 Μάθημα 4

Το ερώτημα είναι: **μπορώ να ολοκληρώσω τις απλές συναρτήσεις;**

Απλές συναρτήσεις (step functions) είναι συναρτήσεις της μορφής

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{όπου } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ και } \bigcup_i A_i = \Omega$$

Στόχος μας είναι να ξεκινήσουμε να κτίζουμε το ολοκλήρωμα από απλές συναρτήσεις και να γενικεύσουμε, καταλήγοντας στο ολοκλήρωμα γενικά για μετρήσιμες συναρτήσεις.

### 6.1 Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue σε τρία βήματα.

Έστω  $(\Omega, \mathcal{F})$  μετρήσιμος χώρος και  $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ένα μέτρο. Επίσης έστω

$$F : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{μετρήσιμη συνάρτηση}$$

#### Βήμα 1

Θεωρώ ότι έχω  $f \geq 0$  απλές και μετρήσιμες συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{όπου } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ και } \bigcup_i A_i = \Omega$$

τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της  $f$  ως:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A_i) \in [0, +\infty]$$

με την σύμβαση ότι στο ολοκλήρωμα Lebesgue  $(0 \cdot \infty = 0)$ .

#### Βήμα 2

Τώρα θεωρούμε ότι έχουμε  $f \geq 0$  μετρήσιμες συναρτήσεις. Στην συνέχεια θα χρειασούμε το Θ. Μονότονης Σύγκλισης/Monotone Convergence Theorem.

**Θεώρημα 2. Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης.** Έστω  $f \geq 0$  μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε μπορώ να βρώ (πάντοτε) μια ακολουθία μη-αρνητικών απλών συναρτήσεων (που όπως είδαμε είναι μετρήσιμες), έστω  $\{f_n\}_{n \geq 1}$ , έτσι ώστε η  $\{f_n\}_n$  να είναι αύξουσα ακολουθία ( $f_n \leq f_{n+1} \forall n$ ) και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad (\text{pointwise - σημειαστικά})$$

Για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για  $f \geq 0$  μετρήσιμες, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα Μονότονης σύγκλισης:

$$\left( \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \right) = \left( \int_{\Omega} f d\mu \right) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \right)$$

και τότε, χρησιμοποιώντας το Θ. Μονότονης Σύγκλισης μπορούμε να αποδείξουμε ότι το

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu \right)$$

$G_1$  είναι καλώς ορισμένο και δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας  $\{f_n\}_{n \geq 1}$ .

### **Βήμα 3**

Τέλος, έστω  $f$  μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε μπορώ να γράψω την  $f$  χρησιμοποιώντας το θετικό και το αρνητικό της μέρος, δηλαδή

$$f = f^+ - f^-$$

όπου  $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$  και  $f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$ .

Τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται ως

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f^+ d\mu - \int_{\Omega} f^- d\mu$$

## 6.2 Ιδιότητες

1. Το ολοκλήρωμα Lebesgue μιας μετρήσιμης συνάρτησης, όπου αυτό ορίζεται, είναι ένα στοιχείο του  $[0, \infty]$ .
2. Αν το μέτρο ενός έστω από τα  $A_i$  είναι ίσο με άπειρο, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue παίρνει την τιμή  $+\infty$  (για κάθε  $c_i > 0, i \geq 1$ ).
3. Αν τα ολοκληρώματα  $\int_{\Omega} f^+ d\mu$  και  $\int_{\Omega} f^- d\mu$  παίρνουν την τιμή  $+\infty$  τότε το  $\int_{\Omega} f d\mu$  **δεν ορίζεται**.
4. Αν έχουμε ένα **φραγμένο διάστημα**  $[a, b]$  με  $a, b \in \mathbb{R}$ , το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x) d(x)$$

είναι καλώς ορισμένο για  $f$  μετρήσιμη, τότε το ολοκλήρωμα Lebesgue

$$\int_{[a, b]} f d\mu$$

ισούται με το ολοκλήρωμα Riemann.

5. Αν για μια μετρήσιμη συνάρτηση  $f$  υπάρχει το γενικευμένο ολ. Riemann

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty \quad \text{ή} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

τότε, το ολοκλήρωμα Lebesgue  $\equiv$  Riemann.

6. Μπορώ να έχω το γενικευμένο ολ. Riemann αλλά όχι το αντίστοιχο Lebesgue.  
(π.χ.  $f(x) = \frac{\sin x}{x} \mathbf{1}_{\{x \neq 0\}}$ )

## 6.3 Κύριες Ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue:

- ◇ (Γραμμικότητα - Linearity)

$$\int_{\mathbb{R}} (c_1 f + c_2 g) d\mu = c_1 \int_{\mathbb{R}} f d\mu + c_2 \int_{\mathbb{R}} g d\mu$$

.

- ◇ (Ξένα Σύνολα - Disjoint Sets) Αν  $A, B$  είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα, τότε

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

- ◇ (Μονοτονία - Comparison) Αν  $f(x) \leq g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu(x)$$

.

## 7 Μάθημα 5

### 7.0.1 Θεωρήματα Σύγκλισης

**Θεώρημα 3. Μονότονης Σύγκλισης - Monotone Convergence Theorem (MCT).** Έστω  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων, οι οποίες συγκλίνουν σε μια συνάρτηση μετρήσιμη  $f$ , τότε

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

όπου οι δύο πλευρές μπορούν να πάρουν την τιμή άπειρο.

**Θεώρημα 4. Λήμμα Fatou - Fatou Lemma (FL).** Έστω  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  μια ακολουθία μετρήσιμων, μη-αρνητικών συναρτήσεων, τότε

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

*Proof.* Δημιουργώ την ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων  $\{g_n\}_{n \geq 1}$ , όπου  $g_k := \inf_{n \geq k} f_n$ . Η  $\{g_n\}$  συνεπώς είναι μια αύξουσα ακολουθία μη-αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων, όπου

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$$

Συνεπώς, από MCT έχουμε  $\int_{\mathbb{R}} \lim_{k \rightarrow \infty} g_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_k d\mu$ , συνεπώς

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \inf_{n \geq k} f_n d\mu \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n \geq k} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \\ (*) \quad &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \end{aligned}$$

Όπου  $(*)$  ισχύει διότι για κάθε  $n \geq k$ ,  $f_n \geq g_k$ , συνεπώς  $\int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \geq \int_{\mathbb{R}} g_k d\mu$ .  $\square$

Το λήμμα Fatou μας λέει ότι μπορεί να έχω μια ακολουθία μετρήσιμων τ.μ. που να συγκλίνει σε μια (μετρήσιμη) τ.μ. αλλά οι ροπές τους (moments) να μην συγκλίνουν!!

**Θεώρημα 5. Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης - (Lebesgue) Dominated Convergence Theorem (LDCT).** Έστω  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει στην  $f$  (σημειακή σύγκλιση - σύγκλιση σ.π/α.ε.). Αν υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $g \geq 0$  τέτοια ώστε  $|f_n| \leq g$  (σχεδόν παντού) για κάθε  $n \geq 1$ , τότε η  $f$  είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu$$

*Proof.* Παρατηρούμε πρώτα ότι  $|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g \leq 2g$  και ότι

$$\int_{\mathbb{R}} 2g d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}} g d\mu < \infty$$

Τώρα θα κάνουμε χρήση του FT. Έστω  $h_n := 2g - |f_n - f|$ , άρα η  $\{h_n\}$  είναι μια μη-αρνητική ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων, εφαρμόζω το λήμμα Fatou και

$$\int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} h_n d\mu$$

Συνεπώς

$$\int_{\mathbb{R}} 2g d\mu + \int_{\mathbb{R}} \liminf_{n \rightarrow \infty} (-|f_n - f|) d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} 2g d\mu + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} (-|f_n - f|) d\mu$$

χρησιμοποιώντας ότι  $-\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = \liminf_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|$

$$- \int_{\mathbb{R}} \limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| d\mu \leq - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu$$

Συνεπώς, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $-1$ , παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = 0$$

καθώς το  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f| = 0$ . Έχουμε δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = 0$$

Ισχύει από comparison/monotonicity property ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f_n d\mu \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\mathbb{R}} (f_n - f) d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n - f| d\mu = 0$$

□

**Σημείωση:** Τα παραπάνω τρία θεωρήματα σύγκλισης (MCT, FL, LDCT) ισχύουν σε  $\sigma$ -πεπερασμένους χώρους μέτρου  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

**Ορισμός 12.** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ένας χώρος πιθανότητας. Τότε, μια συνάρτηση  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** αν και μόνο αν

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

**Ορισμός 13.** Έστω  $\mu, \nu$  δύο μέτρα ορισμένα σε ένα μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Αν για κάθε  $A \in \mathcal{F}$  τ.ω.  $\mu(A) = 0$  τότε  $\nu(A) = 0$ , τότε λέμε ότι το  $\nu$  είναι **απόλυτα συνεχές ως προς το  $\mu$**  (absolutely continuous w.r.t  $\mu$ ), και συμβολικά γράφουμε  $\nu \ll \mu$

**Θεώρημα 6. Radon-Nikodym** Έστω  $\mu$  και  $\nu$  δύο  $\sigma$ -πεπερασμένα μέτρα ορισμένα σε ένα μετρήσιμο χώρο  $(\Omega, \mathcal{F})$  και  $\nu \ll \mu$ . Τότε υπάρχει μοναδική (σχεδόν παντού) μη αρνητική και ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f$  στο  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  τ.ω.

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Χρησιμοποιούμε σαν συμβολισμό  $d\nu = f d\mu$  (shorthand notation) για να δηλώσουμε την σχέση μεταξύ των δύο μέτρων, και η  $f = \frac{d\nu}{d\mu}$  είναι γνωστή ως παράγωγος Radon-Nikodym (Radon-Nikodym derivative) ή απλώς πυκνότητα (density) του  $\nu$  ως προς το  $\mu$ .



## 8 Μάθημα 6

**Παρατήρηση:** Στο Θεώρημα Radon Nikodym αυστηρά δεν έχουμε ορίσει κάποια παράγωγο μέτρου σε σχέση με κάποιο άλλο μέτρο, και ο συμβολισμός της πυκνότητας

$$f = \frac{d\nu}{d\mu} \quad \text{ή} \quad d\nu = f d\mu$$

ωστόσο, αν δούμε την απόδειξη του Θεωρήματος, αν έχουμε τρία μέτρα  $\nu, \mu, \rho$  και πυκνότητες  $g = \frac{d\nu}{d\mu}$  και  $f = \frac{d\mu}{d\rho}$  μπορούμε να πούμε  $gf = \frac{d\nu}{d\rho}$ , δηλαδή συμβολικά:

$$\frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\rho} = \frac{d\nu}{d\rho}$$

όπου πρακτικά “απλοποιούμε” το κλάσμα. Υπενθυμίζουμε ότι δεν έχουμε παραγώγους και όλα αυτά τα κάνουμε συμβολικά αλλά παίρνουμε έγκυρα αποτελέσματα.

**Σύνδεση/εφαρμογή με τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά:** Προσπαθούμε να βρούμε ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας ως προς το “φυσικό” μέτρο πιθανότητας έτσι ώστε να δημιουργήσουμε στο νέο μέτρο martingales (δίκαια παιχνίδια). Υπό το νέο μέτρο, όταν γίνεται η αποτίμηση να μην υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

**Ορισμός 14.** Έστω  $X : \Omega \Rightarrow \mathbb{R}$  τ.μ. σε ένα χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Η απεικόνιση  $\mathbb{F}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  που ορίζεται ως

$$\mathbb{F}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) \in [0, 1] \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και ονομάζεται **κατανομή** της  $X$  (distribution or law of the r.v.  $X$ ).

**Σημείωση:** Στην θέση του μετρήσιμου χώρου  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποιος άλλος μετρήσιμος χώρος  $(S, \mathcal{H})$ .

**Πρόταση 3.** Η κατανομή  $\mathbb{F}_X$  είναι μέτρο πιθανότητας στον  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ .

*Proof.* Αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες ενός μέτρου πιθανότητας.

1.  $\mathbb{F}_X(B) \in [0, 1]$  για κάθε  $B \in \mathcal{B}$ .
2.  $\mathbb{F}_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}[X^{-1}(\mathbb{R})] = \mathbb{P}[\Omega]$ . Ομοίως δείχνω ότι  $\mathbb{F}_X(\emptyset) = \mathbb{P}[X^{-1}(\emptyset)] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0$ .
3. Αν τα  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}$  είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, τότε:

$$\mathbb{F}_X(\cup_i A_i) = \mathbb{P}[X^{-1}(\cup_i A_i)] = \mathbb{P}[\cup_i X^{-1}(A_i)]$$

και παρατηρώ ότι τα  $X^{-1}(A_i)$  είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο, οπότε χρησιμοποιώ την αρ. προσθετικότητα του  $\mathbb{P}$  και παίρνω

$$\mathbb{F}_X(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_X(A_i)$$

□

- ◇ Οι συναρτήσεις κατανομής ορίζονται από την σχέση  $\mathbb{F}_X(x) := \mathbb{F}((-\infty, x]) = \mathbb{P}(X \leq x)$
- ◇ Οι συνάρτηση κατανομής είναι μοναδική (να γίνει απόδειξη).
- ◇ Το αντίστροφο επίσης ισχύει, δηλαδή: για κάθε συνάρτηση κατανομής  $F$  υπάρχει μοναδική κατανομή  $\mathbb{F}$  τ.ω. η σχέση που έχουμε πιο πάνω να ικανοποιείται, δηλαδή

$$F(x) = \mathbb{F}((-\infty, x])$$

να ικανοποιείται.

Εμείς επιθυμούμε να ορίσουμε την  $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ , και θα χρησιμοποιήσουμε το πιο κάτω θεώρημα έτσι ώστε να μην απαιτείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος Lebesgue μέσω απλών συναρτήσεων, αλλά μέσω ολοκληρωμάτων Riemann με τα οποία είμαστε εξοικειωμένοι.

**Θεώρημα 7. (αλλαγής μεταβλητής)** Έστω  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  μια τ.μ. που ορίζεται στον χ.π.  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  και  $g$  μια (Borel) μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{F}_X(x)$$

δηλαδή αντί να κάνω τον υπολογισμό στον  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  τον κάνω στον  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{F}_X)$

*Proof.* Κάνουμε την απόδειξη σε τρία βήματα.

1. Αν  $g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$ , όπου  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  και  $\cup_{i=1}^n A_i = \mathbb{R}$ , τότε

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{A_i}(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\Omega} \mathbf{1}_{A_i}(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{\{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A_i\}} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{X^{-1}(A_i)} 1 d\mathbb{P} \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{P}(X^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{F}_X(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n c_i \int_{A_i} 1 d\mathbb{F}_X(x) = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{A_i}(x) d\mathbb{F}_X(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{1}_{A_i}(x) d\mathbb{F}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{F}_X(x) \end{aligned}$$

συνεπώς έχουμε δείξει ότι ισχύει για απλές συναρτήσεις.

2. Αν η  $g$  είναι (Borel) μετρήσιμη συνάρτηση η οποία παίρνει μη αρνητικές τιμές. Τότε, υπάρχει αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  ώστε  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$  σ.π. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης παρατηρούμε ότι:

$$\int_{\Omega} g(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n(X(\omega)) d\mathbb{P}(\omega)$$

Επίσης, το όριο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x) d\mathbb{F}_X(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{F}_X(x)$$

3. Τέλος, αν η  $g$  είναι μια (Borel) μετρήσιμη συνάρτηση, τότε χρησιμοποιούμε την σχέση

$$g = g^+ - g^-$$

για να καταλήξουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

□

Και πάλι, στην θέση του  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  μπορούμε να έχουμε τον  $(S, \mathcal{H})$  η  $g$  θα πρέπει να είναι  $\mathcal{H}$  μετρήσιμη και η  $X$  θα πηγαινεί από το  $\Omega$  στο  $\mathbb{R}$ .

**Ορισμός 15.** Αν υπάρχει Borel μετρήσιμη συνάρτηση  $f_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $\forall B \in \mathcal{B}$

$$\mathbf{F}_X(B) = \int_B f_X(x) d\mu(x)$$

όπου  $\mu$  είναι το μέτρο Lebesgue, τότε λέμε ότι η  $X$  είναι τυχαία μεταβλητή με **συνεχή κατανομή** και η  $f_X$  ονομάζεται **πυκνότητα** (density) της  $X$  (αλλά και της κατανομής  $\mathbb{F}_X$ ).

## 9 Μάθημα 7

**Ορισμός 16.** Έστω  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ένας χώρος πιθανότητας και  $X : \Omega \rightarrow S$  μια τυχαία μεταβλητή στον χώρο αυτό που παίρνει διακριτές τιμές  $x_1, x_2, \dots \in S$ , όπου  $(S, \mathcal{H})$  ένας μετρήσιμος χώρος. Τότε λέμε ότι η  $X$  έχει διακριτή κατανομή με μάζα  $\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\})$ .

**Ορισμός 17.** Έστω  $X$  μια τ.μ. στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Ορίζουμε ως μέση τιμή (expectation) της  $X$  το ολοκλήρωμα  $\int_{\Omega} X d\mathbb{P}$ , δηλαδή  $\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P}$