Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Computação Pararela - 4º ano MIEIC – 2012/2013

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Projeto 1

02/04/2013

Carlos Miguel Correia da Costa
ei09097@fe.up.pt / Carlos.costa@fe.up.pt
200903044

Descrição do projeto

Contextualização

O presente projeto tem como objetivo comparar a implementação de uma mesma funcionalidade usando estratégias de programação diferentes, de forma a salientar que a forma de aumentar a eficiência e rapidez de um sistema começa sempre pelo conhecimento da plataforma onde este irá correr, e só depois é que se deverá ponderar a paralelização do código para tirar total partido dos processadores multicore existentes.

Descrição do projeto

O projeto consiste em implementar algoritmos de multiplicação de matrizes de forma a tirar partido da cache dos processadores para acelerar o processo dos cálculos matemáticos envolvidos.

Para tal foram implementados 3 algoritmos diferentes.

Um algoritmo simples, para servir como referência, e 2 outros que tiram partido da forma como o sistema operativo usa a cache para aumentar o seu desempenho, (ao evitar o constante uso da memória principal / RAM, que é consideravelmente mais lenta que a cache dos processadores).

Algoritmos

A1. Algoritmo simples

O primeiro algoritmo implementado funciona da forma tradicional que se costuma usar quando se multiplicam matrizes sem recurso a sistemas computacionais. Ou seja, cada elemento da matriz final é obtido pelo produto interno entre cada linha da matriz da esquerda em conjunto com a respetiva coluna da matriz da direita.

Esta implementação serve apenas como comparativo para os restantes algoritmos dado que não tira partido dos princípios de localidade usados pelos sistemas operativos recentes e tenta por outro lado, caraterizar uma implementação simples, mas também um pouco *naïve*.

A2. Algoritmo de multiplicação das matrizes por linhas

O segundo algoritmo tira partido da cache ao agrupar os cálculos das variáveis que são repetidamente usadas.

Ou seja, dado que os elementos da matriz da esquerda têm que ser multiplicados por todos os elementos da respetiva fila da matriz da direita, tenta-se então agrupar esses cálculos para que os elementos da esquerda estejam sempre prontos (na cache), para serem usados para cada uma das multiplicações a realizar com os elementos das linhas da matriz da direita.

Isto foi implementado pegando em cada elemento da matriz da esquerda e multiplica-lo pelas linhas respetivas da matriz da direita, somando os resultados parciais nos elementos correspondentes na matriz final.

A3. Algoritmo de multiplicação usando blocos

Este terceiro algoritmo é uma refinação do anterior, dado que para matrizes de maior dimensão, o uso de apenas um elemento da matriz da esquerda por linha da matriz da direita, desperdiça a localidade dos dados da matriz da esquerda.

Dado que o sistema coloca sempre dados para a cache em bloco e não um de cada vez, uma forma de aproveitar tal facto é processar seções de dados agrupados em ambas as matrizes

Como tal, a matriz principal foi subdividida em blocos mais pequenos de forma a agrupar a computação dos dados e rentabilizar os dados que o sistema operativo automaticamente coloca na cache.

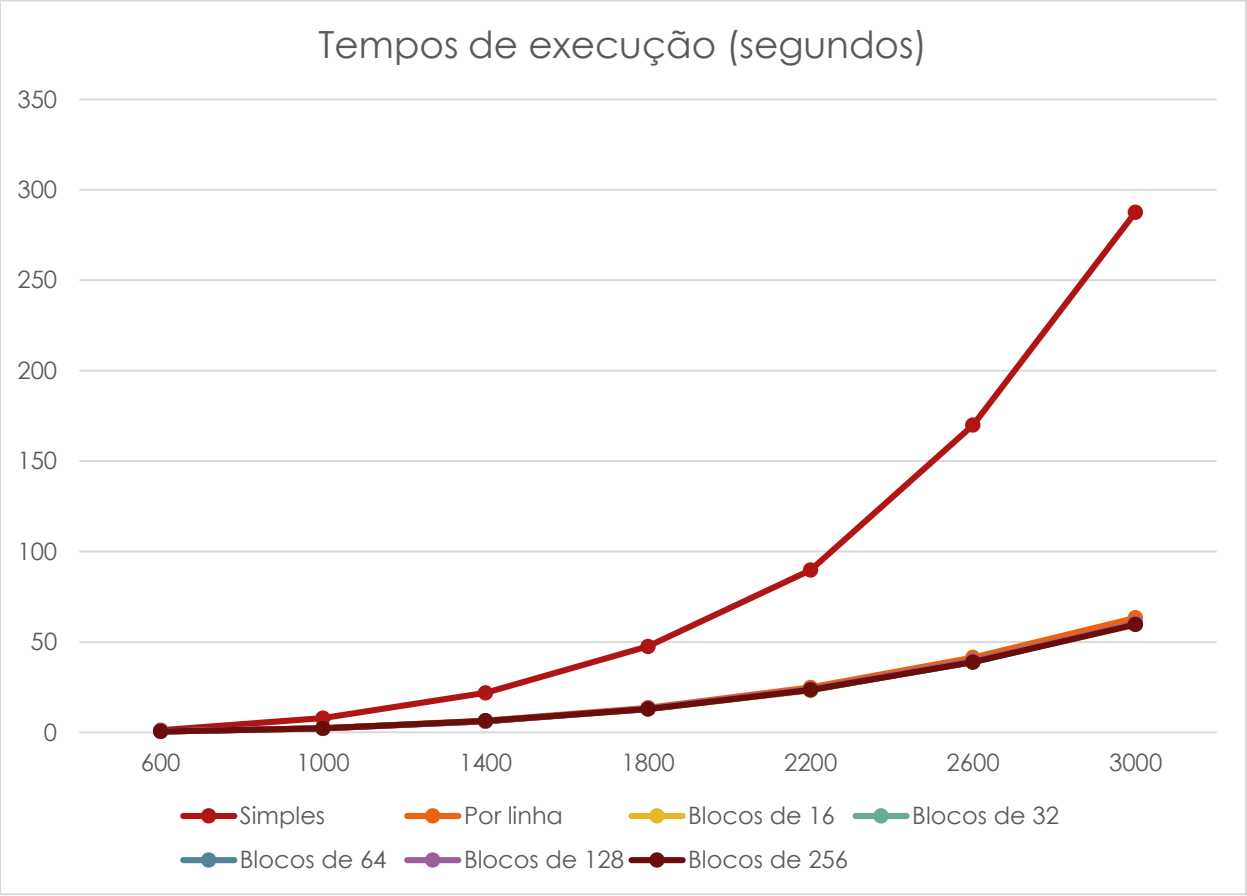
Após essa agrupação por blocos, é aplicado um algoritmo semelhante ao anterior em cada uma dessas submatrizes.

Resultados

Medições de tempo

Tempos de execução (segundos)								
Algoritmo	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000	Complexidade
Simples	1.13537	7.83	21.8059	47.4859	89.7186	169.856	287.637	2*n^3
Por linha	0.491302	2.3026	6.41935	13.6234	24.8088	41.3855	63.3101	
Blocos de 16	0.471722	2.20033	6.0539	12.8937	23.0492	39.1633	59.9282	
Blocos de 32	0.4667	2.20708	6.11502	12.897	23.5001	38.9365	59.8617	
Blocos de 64	0.4704437	2.2066	6.08121	12.9498	23.4644	38.9282	60.1345	
Blocos de 128	0.471841	2.20155	6.12964	13.2095	23.8462	39.6362	60.1566	
Blocos de 256	0.488362	2.25061	6.30796	12.8911	23.4911	38.7937	59.5919	

T1. Tabela com os tempos de execução de acordo com o algoritmo e tamanho da matriz usada

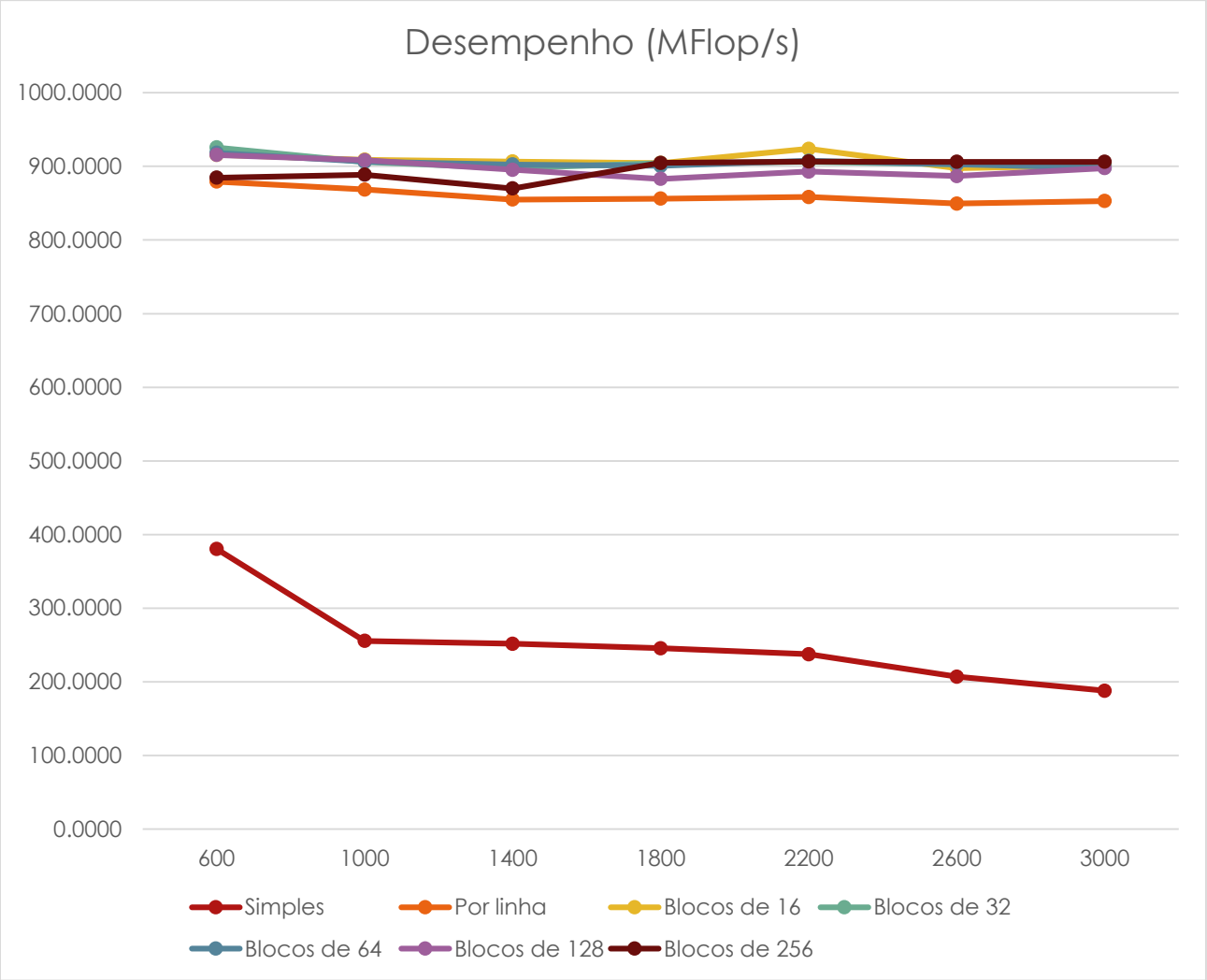


G1. Gráfico com o resumo dos dados da tabela T1

Cálculo de desempenho em MFlop/s

Desempenho (Mflop/s)								
Algoritmo	600	1000	1400	1800	2200	2600	3000	Complexidade
Simples	380.4927	255.4278	251.6750	245.6308	237.3644	206.9518	187.7366	2*n^3
Por linha	879.2962	868.5833	854.9152	856.1739	858.4051	849.3796	852.9445	
Blocos de 16	915.7936	908.9546	906.5231	904.6278	923.9366	897.5750	901.0783	
Blocos de 32	925.6482	906.1747	897.4623	904.3964	906.2089	902.8033	902.0793	
Blocos de 64	918.2820	906.3718	902.4520	900.7089	907.5877	902.9958	897.9870	
Blocos de 128	915.5627	908.4509	895.3217	883.0009	893.0563	886.8660	897.6571	
Blocos de 256	884.5897	888.6480	870.0119	904.8103	906.5561	906.1265	906.1634	

T2. Tabela com a conversão dos tempos medidos para MFlop/s



G2. Gráfico com o resumo da informação da tabela de desempenho em MFlop/s

Análise

Pela análise das tabelas e dos gráficos, consegue-se imediatamente ver que a implementação simples é a que tem pior desempenho e que está muito distante dos dois restantes algoritmos.

Tal diferença nota-se particularmente à medida que a dimensão das matrizes aumenta, dado que quanto forem as matrizes, maior será a impacto das falhas de cache.

Pelo gráfico de MFlop/s, consegue-se ver que a 2 e 3 implementação conseguem ser cerca de 3 a 4 vezes melhores do que a primeira.

A terceira implementação, apesar de ser a melhor das 3, só se revelou vantajosa em relação à segunda para matrizes de grande dimensão, e mesmo com vários tamanhos de blocos usados, tal diferença não foi muito significativa.

Há que referir também, que este problema de multiplicação tem um comportamento exponencial em relação ao tempo de computação, consoante se aumenta o tamanho das matrizes.

Conclusões

Pelos resultados obtidos nos algoritmos anteriores, consegue-se concluir que uma boa implementação paralela tem que estar sempre aliada a uma robusta implementação das seções não paralelizáveis, de forma a aproveitar todo o potencial do sistema que se está a usar.

Caso contrário, até uma implementação não paralelizada pode ter melhor desempenho do que uma paralelizada.

Este estudo vem reforçara ia deia de que para fazer sistemas eficientes, as implementações têm que ter em conta as plataformas na qual vão correr, e que que as abstrações dadas pelos sistemas operativos e *frameworks* devem ser estuadas de perto antes de serem usadas.

Interface

Estrutura

Para facilitar o teste das matrizes, a implementação aceita uma forma *default* de inicialização das matrizes, no qual a matriz da esquerda é a matriz identidade e a da direita é uma matriz com as linhas com o mesmo número e estando esse número a aumentar de uma unidade entre linhas (começando em 1).

Esta forma de inicialização permite testar se a implementação está correta dado que o resultado final em todas as células é igual e é facilmente calculável pela suma de potências. Desta forma é possível testar se matrizes gigantes estão a ser calculadas corretamente.

Por outro lado permite também a importação de matrizes a partir de ficheiros, quer as que serão usadas para calcular (matriz esquerda e direita), quer a matriz com os resultados finais, de forma a confirmar automaticamente com a matriz que foi calculada. As matrizes a importar devem ter os números separados por um espaço, sendo que as matrizes esquerda e direita devem ter na primeira linha do ficheiro o número de colunas e linhas da matriz em questão (a matriz final não precisa desta linha inicial).

Para uma depuração mais apurada, permite também a exportação das matrizes que foram usadas nos cálculos (matrizes esquerda, direita e final).

Para além disso, a implementação suporta matrizes e blocos não quadrados, para poder ser usada com qualquer matriz e para poder-se melhorar o desempenho do terceiro algoritmo (ao permitir blocos retangulares).

Por fim, a implementação foi desenhada para triar partido dos timers de performance quer do Windows quer do Linux, e como tal, é multiplataforma.

Forma de uso

A aplicação começa por pedir para se escolher o algoritmo a usar para a multiplicação das matrizes.

Depois pergunta se o utilizador quer carregar matrizes a partir de ficheiros ou se quer usar o inicializar por *default*.

De seguida são pedidos os tamanhos das matrizes, tendo em conta que o número de colunas da matriz da esquerda tem que ser igual ao número de linhas da matriz da direita (como tal, apenas 3 tamanhos são pedidos).

Depois caso seja o algoritmo de blocos é pedido o número de colunas e linhas a dar aos blocos.

Estando a configuração feita, passa-se ao cálculo da matriz final, findo o qual é apresentado quanto essa computação demorou e mostrando se a matriz foi validade ou não (ou pela suma das potências para a inicialização *default*, ou pela comparação com o ficheiro dado com a matriz com os resultados finais).

Por fim, é perguntado se o utilizador quer exportar apenas a matriz resultado, ou também as matrizes esquerda e direita, ou então se não pretende exportar nenhuma.

Acabada a computação das matrizes em questão, é apresentado novamente o menu principal.

Screenshots

```
################   Parallel computing - Project 1 - Carlos Costa   ######################
  >>>                           Matrix multiplication                                <<<
#############################################################################################


 1 - Basic matrix multiplication
 2 - Line matrix multiplication
 3 - Block matrix multiplication

 0 - Exit


  >>> Option: 1

   ## Load matrices from files? (Y/N): n
    > Using default initialization...

   ## Number of columns of left matrix: 1400
   ## Number of lines of left matrix: 14000
   ## Number of columns of right matrix: 1400


    > Multiplying matrices...
    -> Multiplication finished in 217.238 seconds

    > Validating result matrix from default initialization (result should be sum of powers)...
    -> Result matrix validated!

   ## Export matrices? (1-Only result, 2-All, 0-None):
```

A1. Interface para o algoritmo simples

```
################   Parallel computing - Project 1 - Carlos Costa   ######################
  >>>                           Matrix multiplication                                <<<
#############################################################################################


 1 - Basic matrix multiplication
 2 - Line matrix multiplication
 3 - Block matrix multiplication

 0 - Exit


  >>> Option: 2

   ## Load matrices from files? (Y/N): n
    > Using default initialization...

   ## Number of columns of left matrix: 1000
   ## Number of lines of left matrix: 1000
   ## Number of columns of right matrix: 1000


    > Multiplying matrices...
    -> Multiplication finished in 2.3026 seconds

    > Validating result matrix from default initialization (result should be sum of powers)...
    -> Result matrix validated!

   ## Export matrices? (1-Only result, 2-All, 0-None):  2
    > Exporting left matrix to leftMatrix.txt...
    > Exporting right matrix to rightMatrix.txt...
    > Exporting result matrix to resultMatrix.txt...
    -> Export finished!


Press ENTER to continue...
```

A2. Interface para o algoritmo por linhas

```
################   Parallel computing - Project 1 - Carlos Costa   ########################
  >>>                              Matrix multiplication                                <<<
#############################################################################################


 1 - Basic matrix multiplication
 2 - Line matrix multiplication
 3 - Block matrix multiplication

 0 - Exit


  >>> Option: 3

   ## Load matrices from files? (Y/N): n
    > Using default initialization...

   ## Number of columns of left matrix: 1400
   ## Number of lines of left matrix: 1400
   ## Number of columns of right matrix: 1400
   ## Block column size: 16
   ## Block line size: 16


    > Multiplying matrices...
    -> Multiplication finished in 6.0539 seconds

    > Validating result matrix from default initialization (result should be sum of powers)...
    -> Result matrix validated!

   ## Export matrices? (1-Only result, 2-All, 0-None):  2
    > Exporting left matrix to leftMatrix.txt...
    > Exporting right matrix to rightMatrix.txt...
    > Exporting result matrix to resultMatrix.txt...
    -> Export finished!


Press ENTER to continue...
```

A3. Interface para o algoritmo por blocos