Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Prof. Dr. Rupert Klein, Dr. Thomas von Larcher

5. Übung zur Vorlesung

Computerorientierte Mathematik 2

Sommersemester 2013
`https://dms-numerik.mi.fu-berlin.de/`

Abgabe: Bis Montag, 27.05.2013

1. Aufgabe *Wie oft?* (4 Punkte)

a) Gegeben sei das Integral
$$J := \int_0^1 sin(\pi x)dx \ .$$
Wieviele Funktionsauswertungen des Integranden sind erforderlich, um mit der summierten Trapezregel zur Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ das Integral J mit einer Genauigkeit von 10^{-4} zu berechnen?

b) Gegeben sei das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ und die Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1/4$ und $x_2 = 1$. Bestimmen Sie dazu eine Quadraturformel mit Ordnung drei.

2. Aufgabe *Riemann-Summe* (4 Punkte)
Wir wollen versuchen, das Integral
$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$
numerisch zu approximieren. Dazu unterteilen wir das Intervall $[0, 1]$ äquidistant in n Teilintervalle mit den Grenzen $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ und berechnen die sogenannte *Riemann-Summe*
$$\int_0^1 f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$
mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Schreiben Sie ein `matlab`-Programm `riemann(I,f,n,q)`, das diese Riemann-Summe berechnet. Dabei bezeichnet der Vektor `I` das Integrationsintervall, `f` die Funktion, `n` die Anzahl der Teilintervalle und $0 \leq$ `q` ≤ 1 einen Wert, der durch $\xi_k = x_{k-1} + \mathtt{q}(x_k - x_{k-1})$ die Lage des Wertes ξ_k festlegt.
Berechnen Sie nun für $n = 1, \ldots, 500$ den Fehler der Riemann-Summe, und plotten Sie diesen Fehler in einer logarithmischen Skala gegen n. Werten Sie dazu einmal die Funktion

an den Anfangspunkten der Teilintervalle aus (d.h. `q` $= 0$), ein anderes Mal an deren Mittelpunkten (d.h. `q` $= 0.5$). Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse. Was beobachten Sie?
Tip: Für die Berechnung des Fehlers können Sie `0.5 * erf(1) * sqrt(pi)` als Vergleichswert heranziehen.

3. Aufgabe *Konvergenz der Riemann-Summe?* (4 Punkte)
Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $q \in [0, 1]$ und eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ betrachte die *Riemann-Summe*

$$I_q^n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_{q,k})(x_k - x_{k-1}), \qquad x_k = a + \frac{k}{n}(b-a), \qquad \xi_{q,k} = x_{k-1} + q(x_k - x_{k-1}).$$

a) Beweisen Sie für Lipschitz-stetiges f mit Lipschitz-Konstante L_f die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_q^n(f) \right| \leq L_f \frac{(b-a)^2}{n}.$$

b) Zeigen Sie, daß für stetig differenzierbares f mit Lipschitz-stetiger Ableitung f' und Lipschitz-Konstante $L_{f'}$ im Falle $q = 0.5$ sogar die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - I_q^n(f) \right| \leq L_{f'} \frac{(b-a)^3}{4n^2}$$

gilt. Geben Sie für $q \neq 0.5$ ein Gegenbeispiel an.
Tip: Betrachten Sie zunächst für $n = 1$ eine Taylorentwicklung von f.

Allgemeine Hinweise

- Bitte die Hinweise auf der Homepage zu den Übungszetteln durchlesen!
- Sie können selbstverständlich auch andere Programme als Matlab verwenden, z.B. Octave. Bitte halten Sie dazu Rücksprache in den Tutorien.
- Bitte denken Sie an eine ordentliche und ausführliche Beschriftung Ihrer Plots! Entsprechende Matlabbefehle finden Sie mit „help“ oder „doc“ in Matlab, in der „Freundlichen Einführung“ die auf der Homepage verlinkt ist, im Tutorium oder per Internet.