Solucionario Práctica Dirigida #1 - Ejercicios Matemáticos
Econometría Intermedia - Módulo 4
Maestría en Economía - Pontificia Universidad Católica del Perú
Prof.: Jorge Rodas. J.P: Martín Villarán / Carlos Rodríguez

---

1. **(Basada en los ejercicios 3.1 y 3.8 del Hamilton)** Considere el siguiente proceso MA(2):

$$Y_t = \left(1 + 2.4L + 0.8L^2\right)\varepsilon_t$$

$$E\varepsilon_t\varepsilon_\tau = \begin{cases} 1 & \text{para} \quad t = \tau \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

(a) **¿Este proceso es estacionario en covarianzas? De ser así, calcule las autocovarianzas**

Sabemos que todo proceso MA es estacionario en covarianzas, por lo tanto, el proceso MA(2) dado también lo es. Antes de calcular las autocovarianzas, calculamos la media de este proceso:

$$\mathrm{E}\ [Y_t] = \mu = \mathrm{E}[(1 + 2.4L + 0.8L^2)\epsilon_t] = 0$$

Calculando las autocovatianzas:

$$\begin{aligned}
\gamma_j &= \mathrm{E}[(Y_t - \mu)(Y_{t-j} - \mu)] \\
&= \mathrm{E}\left[(\epsilon_t + 2.4\epsilon_{t-1} + 0.8\epsilon_{t-2})(\epsilon_{t-j} + 2.4\epsilon_{t-1-j} + 0.8\epsilon_{t-2-j})\right] \\
&= \mathrm{E}[\epsilon_t\epsilon_{t-j} + 2.4\epsilon_t\epsilon_{t-1-j} + 0.8\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2-j} \\
&\quad +2.4\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-j} + 5.76\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-1-j} + 1.92\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2-j} \\
&\quad +0.8\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-j} + 1.92\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-1-j} + 0.64\epsilon_{t-2}\epsilon_{t-2-j}]
\end{aligned}$$

La autocovarianza de orden 0 está dada por:

$$\gamma_0 = \mathrm{E}[\epsilon_t^2 + 5.76\epsilon_{t-1}^2 + 0.64\epsilon_{t-2}^2] = 7.4$$

La autocovarianza de orden 1:

$$\gamma_1 = \mathrm{E}[2.4\epsilon_{t-1}^2 + 1.92\epsilon_{t-2}^2] = 4.32$$

La autocovarianza de orden 2

$$\gamma_2 = \mathrm{E}[0.8\epsilon_{t-2}^2] = 0.8$$

La autocovarianzas de orden j :

$$\gamma_j = 0,\ \forall j \geq 3 \text{ pues } E[\epsilon_t\epsilon_j] = 0$$

(b) **Verifique si este proceso MA(2) es invertible**.

Calculando las raíces del MA (2):

$$1 + 2.4Z + 0.8Z^2 = 0$$

Las raíces son:

$$Z = \frac{-2.4 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(0.8)}}{2(0.8)}$$

$$Z_1 = -0.5$$
$$Z_2 = -2.5$$

De lo anterior, se concluye que el proceso MA(2) no es invertible, pues solo la raíz Z_2 cae fuera del círculo unitario $|Z_2| > 1$, y la condición de invertibilidad exige que todas las raíces del polinomio caigan fuera del círculo unitario..

(c) **Hallar una representación invertible para este proceso.**

Transformando el proceso a un MA invertible:

$$\widetilde{Y}_t = \left(1 + \frac{L}{2.5}\right)(1 + 0.5L)\,\tilde{\epsilon}_t$$

$$\widetilde{Y}_t = (1 + 0.9L + 0.2L^2)\tilde{\epsilon}_t$$

Donde:

$$E[\epsilon_t \epsilon_j] = \begin{cases} \left(\frac{1}{0.5}\right)^2 = 4 & \text{Si } t = j \\ 0 & \text{Si } t \neq j \end{cases}$$

(d) **Calcule las autocovarianzas de la nueva representación invertible. ¿Cómo se relacionan con las autocovarianzas calculadas en la parte a)?** .

Reemplazando $\tilde{\epsilon}_t$ por ϵ_t en la solución de la parte (a), tenemos que las autocovarianzas son:

$$\tilde{\gamma}_0 = 4(1 + 0.9^2 + 0.2^2) = 7.4$$

$$\tilde{\gamma}_1 = 4(0.9 + 0.2 \times 0.9) = 4.32$$

$$\tilde{\gamma}_2 = 4(0.2) = 0.8$$

$$\tilde{\gamma}_j = 0,\ \forall j = 3, 4,$$

Podemos ver que las autocovarianzas del nuevo proceso MA(2) invertible, son equivalentes a las del proceso MA(2) original.