Práctica Dirigida #2
Econometría Intermedia
Maestría en Economía - Pontificia Universidad Católica del Perú
Profesor: Jorge Rodas. J.P: Martín Villarán/Carlos Rodríguez

---

1. Considere un proceso y_t estacionario y ergódico, y un procesos ruido blanco independiente ε_t. Demuestre que el estimador MCO de la regresión:

$$y_t = \phi y_{t-1} + \varepsilon_t$$

es consistente y asintóticamente normal. Para ello, enuncie y explique los supuestos necesario para obtener dicho resultado.

Solución:

Empezaremos demostrado que el estimado de MCO es consistente. Partimos de la fórmula del estimador de MCO:

$$\hat{\phi}_{MCO} = (X'X)^{-1}X'Y$$
$$\hat{\phi}_{MCO} = \left(Y'_{t-1}Y_{t-1}\right)^{-1} Y'_{t-1}Y_t$$
$$\hat{\phi}_{MCO} = \phi + (Y'_{t-1}Y_{t-1})^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t$$

Expresando en sumatorias la ecuación anterior:

$$\hat{\phi}_{MCO} = \phi + \left(\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2\right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t\right)$$

Para que el estimador sea consistente, este debe converger en probabilidad al verdadero coeficiente. Es decir:

$$P\lim(\hat{\phi}_{MCO}) = \phi$$
$$\hat{\phi}_{MCO} \xrightarrow{p} \phi$$

El estimador se puede expresar como:

$$\hat{\phi}_{MCO} = \phi + [T^{-1}Y'_{t-1}Y_{t-1}]^{-1}[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$$

$$\hat{\phi}_{MCO} = \phi + \left[T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2\right]^{-1} \left[T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}\varepsilon_t\right]$$

Se puede notar que $T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2$ resulta ser un valor positivo. Definamos:

$$\lim_{T\to\infty}\left[T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2\right] = Q$$

donde Q es una matriz definida positiva, entonces por la regla de Cramer tenemos que:

$$P\lim(\hat{\phi}_{MCO}) = \phi + Q^{-1}P\lim[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$$

Ahora evaluemos $P\lim[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$ Como $\varepsilon_t \sim i.i.d(0,\ \sigma^2)$, entonces:

$$E[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t] = 0$$

Además,

$$Var(T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t) = E\left[(T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t)(T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t)'\right] = E\left[Y'_{t-1}\varepsilon_t\varepsilon'_tY_{t-1}T^{-1}\right]$$

$$T^{-1}Y'_{t-1}E[\varepsilon_t\varepsilon_t^{'}]Y_{t-1}T^{-1} = \sigma^2T^{-2}Y'_{t-1}Y_{t-1} = \frac{\sigma^2}{T}(T^{-1}Y'_{t-1}Y_{t-1})$$

$$\lim_{T\to\infty} Var\left(T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t\right) = 0 \times Q = 0$$

Como:

$$\lim_{T\to\infty} E[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t] = 0$$

$$\lim_{T\to\infty} Var(T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t) = 0$$

Entonces $[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$ converge en media cuadrática a cero:

$$P\lim[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t] = 0$$

Por lo tanto, se cumple que:

$$P\lim(\hat{\phi}_{MCO}) = \phi$$

Con lo cual se demuestra que el estimador $\hat{\phi}_{MCO}$ es consistente.

Lo siguiente es evaluar si el estimador $\hat{\phi}_{MCO}$ es asintóticamente normal. Partiendo de:

$$\hat{\phi}_{MCO} = \phi + [T^{-1}Y'_{t-1}Y_{t-1}]^{-1}[T^{-1}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$$

Se puede llegar a:

$$T^{1/2}\left(\hat{\phi}_{MCO} - \phi\right) = \left[T^{-1}Y'_{t-1}Y_{t-1}\right]^{-1}\left[T^{-1/2}Y'_{t-1}\varepsilon_t\right]$$

Sabiendo que $\lim_{T\to\infty}[T^{-1}\sum_{t=1}^{T} y^2_{t-1}] = Q$ y que $\varepsilon_t \sim i.i.d(O,\ \sigma^2)$. Analicemos $\lim_{T\to\infty}[T^{-1/2}Y'_{t-1}\varepsilon_t]$.

•$E\left[T^{-1/2}Y'_{t-1}\varepsilon_t\right] = 0$

•$Var\left(T^{-1/2}Y'_{t-1}\varepsilon_t\right) = T^{-1}Y'_{t-1}E[\varepsilon'_{t\epsilon t}]Y_{t-1} = \sigma^2T^{-1}Y'_{t-1}Y_{t-1}$

$$\lim_{T\to\infty} Var[T^{-1/2}Y'_{t-1}\epsilon_t] = \sigma^2 Q$$

Por el Teorema del Límite Central (Linderberg-Levy):

$$[T^{-1/2}Y'_{t-1}\epsilon_t] \xrightarrow{d} N[0, \sigma^2Q]$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$T^{1/2}\left(\hat{\phi}_{MCO} - \phi\right) \xrightarrow{d} Q^{-1}N[0,\sigma^2Q] \xrightarrow{d} N[0,\sigma^2Q^{-1}]$$

$$\hat{\phi}_{MCO} \xrightarrow{d} N\left[\phi, \frac{\sigma^2}{T}Q^{-1}\right]$$

Con lo cual se demuestra que el estimador de MCO es asintóticamente normal.

2. Considere el siguiente modelo de regresión con componentes determinísticos:

$$y_t = \psi' z_t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde $\varepsilon_t \sim iid(0,\ \sigma^2)$, $y_0 = 0$ y $\psi = [\alpha\ \delta]'$

Determine $t_{\hat{\rho}}$ y su respectiva distribución asintótica para cada uno de los siguientes modelos:

- $z_t = \{0\}$
- $z_t = \{1\}$
- $z_t = \{1,\ t\}$

3. Considere la siguiente regresión estimada con un intercepto:

$$y_t = \hat{\mu} + \hat{\alpha} y_{t-1} + \hat{u}_t$$

y asuma que la serie $\{y_t\}_{t=0}^{T}$ es generada por el siguiente proceso generador de datos:

$$y_t = \mu + y_{t-1} + u_t$$

i.e existe una raíz unitaria con "drift”.

Demostrar que:

$$T^{3/2}(\hat{\alpha} - 1) \Rightarrow \mathbb{N}\left(0, 12\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right)$$

Solución:
El proceso generador de datos con raíz unitaria y drift puede representarse como:

$$y_t = y_0 + \alpha t + (u_1 + u_2 + \cdots + u_t) = y_0 + \alpha t + \epsilon_t$$

donde $\epsilon_t = u_1 + u_2 + \cdots + u_t$ para todo $t = 1, 2,\ \ldots,\ T.$, con $\epsilon_0 = 0$.

Considerando el comportamiento de la suma:

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} = \sum_{t=1}^{T} [y_0 + \alpha\ (t\ - 1) + \epsilon_t] \tag{1}$$

observemos que el primer término del lado derecho de la ecuación anterior es igual a $Ty_0,$. y si está dividido por T, el resultado será un valor fijo. El segundo término de la ecuación, $\sum_{t=1}^{T}[\alpha(t-1)]$ debe ser dividido por T^2 para que pueda converger:

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T}[\alpha\ (t\ - 1)] \to \frac{\alpha}{2}$$

Por otro lado, el tercer término converge cuando es dividido por $T^{3/2}$:

$$T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{t-1} \to \sigma\int_0^1 W(r)dr$$

donde la ecuación (1) se puede representar:

$$\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} = \underbrace{\sum_{t=1}^{T} y_0}_{O_p(T)} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \alpha[t-1]}_{O_p(T^2)} + \underbrace{\sum_{t=1}^{T} \epsilon_{t-1}}_{O_p(T^{3/2})}$$

Podemos ver que la tendencia temporal $\alpha(t\ -1)$ domina asintóticamente los otros dos componentes:

$$T^{-2}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1} = T^{-1}y_0 + T^{-2}\sum_{t=1}^{T}\alpha[t-1] + T^{-1/2}\left[T^{-3/2}\sum_{t=1}^{T}\epsilon_{t-1}\right] \rightarrow 0 + \frac{\alpha}{2} + 0 \tag{2}$$

Del mismo modo, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 &= \sum_{t=1}^{T}[y_0 + \alpha(t-1) + \epsilon_{t-1}]^2 \\
&= \sum_{t=1}^{T} y_0^2 + \sum_{t=1}^{T}\alpha^2(t-1)^2 + \sum_{t=1}^{T}\epsilon_{t-1}^2 \\
+\sum_{t=1}^{T} 2y_0\alpha(t-1) &+ \sum_{t=1}^{T} 2y_0\epsilon_{t-1} + \sum_{t=1}^{T} 2\alpha(t\ -1)\epsilon_{t-1}
\end{aligned}$$

dividiendo por T^3 observamos que solo hay un término no desaparece asintóticamente debido a la tendencia temporal $\alpha^2(t-1)^2$

$$T^{-3}\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \rightarrow \frac{\alpha^2}{3} \tag{3}$$

Por último, teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}u_t &= \sum_{t=1}^{T}\left[y_0 + \alpha(t-1) + \epsilon_{t-1}\right]u_t \\
&= \sum y_0 u_t + \sum \alpha(t-1)u_t + \sum \epsilon_{t-1}u_t
\end{aligned}$$

Se obtiene:

$$T^{-3/2}\sum y_{t-1}u_t \rightarrow T^{-3/2}\sum \alpha(t-1)u_t \tag{4}$$

Los resultados (2) a (4) implican que cuando el verdadero proceso es un Random Walk con deriva, los coeficientes estimados por MCO satisfacen:

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_T - \alpha \\ \hat{\rho}_T - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O_p(T) & O_p(T^2) \\ O_p(T^2) & O_p(T^3) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O_p\left(T^{1/2}\right) \\ O_p\left(T^{3/2}\right) \end{bmatrix}$$

para este caso la matriz de escalamiento sería:

$$\Upsilon_t = \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T^{3/2} \end{bmatrix} \Rightarrow \Upsilon_t^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-3/2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\Upsilon_t \begin{bmatrix} (\hat{u}_T - \alpha) \\ (\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} = \Upsilon_t \begin{bmatrix} T & \sum y_{t-1} \\ \sum y_{t-1} & \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_{t-1} \\ \sum y_{t-1}u_t \end{bmatrix}$$

$$= \left(\mathrm{Y}_t \begin{bmatrix} T & \sum y_{t-1} \\ \sum y_{t-1} & \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \mathrm{Y}_t \right) \left(\mathrm{Y}_t^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_{t-1} \\ \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\mathrm{Y}_t^{-1} \begin{bmatrix} T & \sum y_{t-1} \\ \sum y_{t-1} & \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix} \mathrm{Y}_t^{-1} \right)^{-1} \left(\mathrm{Y}_t^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_{t-1} \\ \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix} \right)$$

reemplazando Y_t y Y_t^{-1} en la última ecuación, y luego de simplificar llegamos a:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{u}_T - \alpha) \\ T^{-3/2}(\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T^{-2} \sum y_{t-1} \\ T^{-2} \sum y_{t-1} & T^{-3} \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1/2} \sum u_{t-1} \\ T^{-3/2} \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix} \tag{5}$$

Por lo tanto la expresión anterior converge a:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{u}_T - \alpha) \\ T^{-3/2}(\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} \to N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\alpha^2}{3} \end{bmatrix} \right) \tag{6}$$

combinando la ecuación (5) y (6) tenemos:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}(\hat{u}_T - \alpha) \\ T^{-3/2}(\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} \to N \left(0, \ Q^{-1} \sigma^2 Q Q^{-1}\right) = N \left(0, \ \frac{12\sigma^2}{u^2}\right)$$