PD #2 – MÓDULO 4 (Series de Tiempo) – Econometría Intermedia (2018-1)

1

Carlos Rodríguez

2) Considere el sgte modelo de Regresión con Componentes Determinísticos

$$y_t = \psi' z_t + \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

donde: $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$, $y_0 = 0$ y $\psi = [\alpha \ \delta]'$

Determine $t_{\hat{\rho}}$ y su distribución asintótica, para c/u de los sgtes casos:

Caso 2: $z_t = \{1\}$

Solución: Para este ejercicio es útil recordar los siguientes resultados de convergencia en distribución:

$$T^{-1/2} \sum_{t=1}^{T} u_t \Rightarrow \sigma W(1)$$

$$T^{-3/2} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \Rightarrow \sigma \int_0^1 W(r)\, dr$$

$$T^{-2} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \Rightarrow \sigma^2 \int_0^1 W(r)^2\, dr$$

$$T^{-5/2} \sum_{t=1}^{T} t\, y_{t-1} \Rightarrow \sigma \int_0^1 r\, W(r)\, dr$$

$$T^{-1} \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} u_t \Rightarrow \frac{1}{2} \sigma^2 W(1)^2 - \frac{1}{2} \sigma^2$$

Partiendo el Proceso Generador de Datos:

$$y_t = \alpha + \rho y_{t-1} + u_t$$

$$u_t \sim iid\ N(0, \sigma^2)$$

Se tiene el sgte modelo de Regresión:

$$y_t = \psi' z_t + \rho y_{t-1} + u_t$$

donde: $\psi' = [\alpha]$ y $z_t = [1]$

Hipótesis Nula de Raíz unitaria:

$$H_0: \alpha = 0,\ \rho = 1$$

Regresionando por MCO:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_t \\ \vdots \\ y_T \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & y_0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_{t-1} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & y_{T-1} \end{bmatrix}}_{X} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \rho \end{bmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_t \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix}}_{u}$$

Podemos escribir X_t de la siguiente manera:

$$x_t' = [1 \quad y_{t-1}]$$

Por lo que:

$$X'X = \sum_{t=1}^{T} x_t x_t' = \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} 1 \\ y_{t-1} \end{bmatrix} [1 \quad y_{t-1}]$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \begin{bmatrix} 1 & y_{t-1} \\ y_{t-1} & y_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T & \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} \\ \sum_{t=1}^{T} y_{t-1} & \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

- $$X'X = \sum_{t=1}^{T} x_t x_t' = \begin{bmatrix} T & \sum Y_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}$$

- $$X'u = \sum_{t=1}^{T} x_t u_t = \begin{bmatrix} \sum u_t \\ \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix}$$

A partir del estimador de MCO, tenemos que:

$$\underbrace{\hat{\beta}_T - \beta} = (X'X)^{-1}(X'u)$$

Reemplazando por las variables correspondientes del modelo de Regresión planteado:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T - \alpha \\ \hat{\rho}_T - \rho \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum Y_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_t \\ \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix}$$

Según la Hipótesis Nula $\alpha = 0$, $\rho = 1$, por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T \\ \hat{\rho}_T - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & \sum Y_{t-1} \\ \sum Y_{t-1} & \sum Y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_t \\ \sum Y_{t-1} u_t \end{bmatrix}$$

El orden de convergencia de c/u de los términos anteriores es:

$$\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T \\ \hat{\rho}_{T} - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O(T) & O(T^{3/2}) \\ O(T^{3/2}) & O(T^2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} O(T^{1/2}) \\ O(T) \end{bmatrix}$$

Debido a que los Ratios Asintóticos de Convergencia que poseen los estimadores MCO $\hat{\alpha}_T$ y $\hat{\rho}_T$ son diferentes, necesitaremos hacer un ajuste al vector de estimadores premultiplicándolo por la "matriz de Escalamiento" Y_T, definida como:

$$Y_T \equiv \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

De manera que los estimadores puedan ser descritos como distribuciones límite:

1

$$Y_T(\hat{\beta}_T - \beta) = Y_T (x'x)^{-1}(x'u)$$
$$= Y_T (x'x)^{-1} Y_T Y_T^{-1} (x'u)$$
$$= [Y_T^{-1}(x'x)Y_T^{-1}]^{-1}[Y_T^{-1}(x'u)]$$

Desarrollando:

$$\begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_T \\ \hat{\rho}_{T-1} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T & \sum y_{t-1} \\ \sum y_{t-1} & \sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \right]^{-1}$$
$$\times \left[\begin{bmatrix} T^{1/2} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum u_t \\ \sum y_{t-1} u_t \end{bmatrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}\hat{\alpha}_T \\ T(\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T^{-3/2}\sum y_{t-1} \\ T^{-3/2}\sum y_{t-1} & T^{-2}\sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum u_t \\ T^{-1}\sum y_{t-1}u_t \end{bmatrix}$$

A partir de las convergencias de Probabilidad mencionados al inicio, tenemos que:

- El 1º término del lado derecho presenta la sgte convergencia débil:

$$\begin{bmatrix} 1 & T^{-3/2}\sum y_{t-1} \\ T^{-3/2}\sum y_{t-1} & T^{-2}\sum y_{t-1}^2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \sigma\int W(r)dr \\ \sigma\int W(r)dr & \sigma^2\int W(r)^2 dr \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma\int W(r)dr \\ \sigma\int W(r)dr & \sigma^2\int W(r)^2 dr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

- El 2º término del lado derecho presenta la sgte convergencia débil:

$$\begin{bmatrix} T^{-1/2}\sum u_t \\ T^{-1}\sum y_{t-1}u_t \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma W(1) \\ \frac{1}{2}\sigma^2 W(1)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{bmatrix} \sigma W(1) \\ \frac{1}{2}\sigma^2 W(r)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(1) \\ \frac{1}{2}[W(1)^2 - 1] \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}\hat{\alpha}_T \\ T(\hat{\rho}_T - 1) \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$\times \left[\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(1) \\ \frac{1}{2}[W(1)^2 - 1] \end{bmatrix} \right]$$

Scanned by CamScanner

Desarrollando la Distribución Asintótica:

$$\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\right]^{-1}\times\left[\sigma\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}\right]$$

$$\cancel{\left[\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\right]^{-1}\times}$$

$$\cancel{\left[\sigma\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}\right]}$$

$$=\left[\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}\right]^{-1}\times\left[\sigma\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}\right]$$

$$=\sigma\begin{bmatrix}1&0\\0&\sigma\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sigma&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix}T^{1/2}\hat{\alpha}_T\\ T(\hat{\rho}_T-1)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\sigma&0\\0&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \int W(r)dr\\ \int W(r)dr & \int W(r)^2dr\end{bmatrix}^{-1}}\begin{bmatrix}W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}\cdots(1)$$

Calculando la Inversa:

$$\frac{1}{\int W(r)^2dr-[\int W(r)dr]^2}\begin{bmatrix}\int W(r)^2dr & -\int W(r)dr\\ -\int W(r)dr & 1\end{bmatrix}\cdots(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\begin{bmatrix} T^{1/2}\hat{\alpha}_T \\ T(\hat{\rho}_T-1)\end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\int W(r)^2dr-\left[\int W(r)dr\right]^2}}_{(*)} \begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\int W(r)^2dr & -\int W(r)dr\\ -\int W(r)dr & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}$$

$$= (*)\begin{bmatrix}\sigma\int W(r)^2dr & -\sigma\int W(r)dr\\ -\int W(r)dr & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} W(1)\\ \frac{1}{2}[W(1)^2-1]\end{bmatrix}$$

$$= (*)\begin{bmatrix}\sigma W(1)\int W(r)^2dr-\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right]\int W(r)dr\\ \frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right]-W(1)\int W(r)dr\end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$T^{1/2}\hat{\alpha}_T \Rightarrow \frac{\sigma W(1)\int W(r)^2dr-\frac{1}{2}\sigma\frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right]\int W(r)dr}{\int W(r)^2dr-\left[\int W(r)dr\right]^2}$$

$$\boxed{T(\hat{\rho}_T-1) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left[W(1)^2-1\right]-W(1)\int W(r)dr}{\int W(r)^2dr-\left[\int W(r)dr\right]^2}}$$

El t-estadístico basado en MCO para la Hipótesis nula $\rho=1$:

$$t_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho}_T-1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$$

donde:

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\rho}} = S_T^2 \cdot (X'X)^{-1}_{2,2} = S_T^2 \cdot [0 \quad 1](X'X)^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = S_T^2 \cdot [0 \quad 1]\begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Multiplicando por T^2:

$$T^2 \hat{\sigma}^2_{\hat{\rho}} = S_T^2 \cdot \underbrace{[0 \quad T]}_{[0 \quad 1]\begin{bmatrix}T^{1/2} & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}} \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1} \underbrace{\begin{bmatrix}0\\T\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}T^{1/2} & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}$$

$$= S_T^2 \cdot [0 \quad 1]\, Y_T \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix} Y_T \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

Luego:

$$Y_T \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1} Y_T = \left[Y_T^{-1} \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix} Y_T^{-1} \right]^{-1}$$

$$= \left[\begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-1}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^{-1/2} & 0 \\ 0 & T^{-1}\end{bmatrix} \right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & T^{-3/2}\Sigma Y_{t-1} \\ T^{-3/2}\Sigma Y_{t-1} & T^{-2}\Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1}$$

A partir de:

$$\begin{bmatrix} 1 & T^{-3/2}\Sigma Y_{t-1} \\ T^{-3/2}\Sigma Y_{t-1} & T^{-2}\Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \sigma\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \sigma\end{bmatrix}$$

Tenemos que:

$$Y_T \begin{bmatrix} T & \Sigma Y_{t-1} \\ \Sigma Y_{t-1} & \Sigma Y_{t-1}^2\end{bmatrix}^{-1} Y_T \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \sigma\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \sigma\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix}\sigma & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sigma & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

Y por lo tanto:

$$T^2 \hat{\sigma}^2_{\hat{\rho}} \Rightarrow \sigma^2 \times [0 \quad 1] \left[\frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= [0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & \int W(r)dr \\ \int W(r)dr & \int W(r)^2 dr \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\int W(r)^2 dr - \left(\int W(r) dr \right)^2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \int W(r)^2 dr & -\int W(r)dr \\ -\int W(r)dr & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\int W(r)^2 dr - \left(\int W(r) dr \right)^2}$$

Es decir:

$$T \hat{\sigma}_{\hat{\rho}} \Rightarrow \frac{1}{\left[\int W(r)^2 dr - \left(\int W(r) dr \right)^2 \right]^{1/2}}$$

Finalmente, el t-estadístico de MCO:

$$t_{\hat{\rho}} = \frac{\hat{\rho}_T - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}} = \frac{T(\hat{\rho}_T - 1)}{T \hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$$

Converge Asintóticamente a la siguiente expresión:

$$\boxed{t_{\hat{\rho}} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\left[W(1)^2 - 1 \right] - W(1) \int W(r) dr}{\left[\int W(r)^2 dr - \left(\int W(r) dr \right)^2 \right]^{1/2}}}$$