Como os peixes crescem?

Carlos Rauta
car.rauta@gmail.com

Todos os organismos crescem. Essa afirmação óbvia tem chamado a atenção dos biólogos e engenheiros. Compreender o crescimento (ou seja, as mudanças no tamanho do corpo ao longo do tempo) é fundamental para o setor pesqueiro e aquicultura [1]. Previsões precisas sobre o crescimento permitem o gerenciamento eficaz dos recursos pesqueiros.

O modelo de crescimento mais conhecido da área pesqueira é a de von Bertalanffy [2], tendo como base a equação de Pütter:

$$\frac{dm}{dt} = \alpha S - \beta m, \tag{1}$$

onde α é o coeficiente de anabolismo (síntese de proteína), β é o coeficiente de catabolismo (perda de massa), S é a superfície fisiológica do organismo e m é o peso do peixe.

Em outras palavras, a taxa de variação do peso é dada pela diferença entre a síntese de proteína e a perda de massa do organismo.

Podemos expressar S e m em termos do comprimento linear l. Usualmente, assume-se que S e m são proporcionais ao quadrado e ao cubo do comprimento:

$$S = al^2$$

$$m = bl^3$$

Substituindo em (1), temos:

$$\frac{dbl^3}{dt} = \alpha al^2 - \beta bl^3 \tag{2}$$

Pela regra da cadeia sabemos que:

$$\frac{dbl^3}{dt} = 3bl^2\frac{dl}{dt}$$

Rearranjando em (2), temos:

$$3bl^2\frac{dl}{dt} = \alpha a l^2 - \beta b l^3$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\alpha a}{3b} - \frac{\beta}{3}l$$

Esta é uma equação diferencial ordinária do tipo:

$$\frac{dl}{dt} + kl = \lambda, \tag{3}$$

onde $k = \frac{\beta}{3}$ e $\lambda = \frac{a\alpha}{3b}$.

Felizmente, a equação (3) possui solução e podemos usar a técnica do fator integrante para resolver a equação. Eu não vou entrar em detalhes específicos sobre a técnica. O leitor interessado pode assistir a aula introdutória da Prof. Ketty Abaroa de Rezende no Youtube [3] ou consultar o livro do Bassanezi [4]. Apenas fornecerei uma espécie de algoritmo aqui.

O primeiro passo é achar o fator integrante $u(t) = e^{\int p(t)}$. No caso da equação (3) o $p(t)$ é k. Logo,

$$u(t) = e^{\int kdt} = e^{kt+C}$$

A constante de integração pode ser 0, assim $u(t) = e^{kt}$.

O segundo passo é pegar a equação (3) e multiplicar pelo fator integrante:

$$e^{kt}\frac{dl}{dt} + e^{kt}kl = \lambda e^{kt} \tag{4}$$

Observe que o lado esquerdo da equação é a derivada do fator integrante vezes a função desconhecida. Assim, podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}[e^{kt}l] = \lambda e^{kt} \tag{5}$$

O terceiro passo é integrar ambos os lados da equação:

$$\int \frac{d}{dt}[e^{kt}l]dt = \int \lambda e^{kt}dt \tag{6}$$

A integral do lado esquerdo é simplesmente $e^{kt}l + C$. Não precisa nem fazer as contas. Basta a gente resolver o lado direito que é onde vamos ter um pequeno trabalhinho para fazer.

$$e^{kt}l + C = \int \lambda e^{kt}dt$$

Para resolver o lado direito temos de usar o método da substituição.

Faça $u = kt$ e $du = kdt$. Com isso, temos:

$$= \frac{\lambda}{k} \int e^u du$$

Pelas regras de integração sabemos que $\int e^u du = e^u + C$. Assim:

$$= \frac{\lambda}{k} e^u + C$$

Substituindo u pela variável original, temos:

$$= \frac{\lambda}{k} e^{kt} + C$$

Com isso temos que o resultado das integrações em (6) é:

$$e^{kt} l = \frac{\lambda}{k} e^{kt} + C \tag{7}$$

Isolando l, temos:

$$l(t) = \frac{\lambda}{k} + Ce^{-kt} \tag{8}$$

Esta é a solução geral da equação diferencial. Frequentemente, em problemas biológicos não estamos interessados na solução geral visto que não existem infinitas soluções para uma certa situação ocorrida na Natureza. Assim, vamos assumir que o comprimento do peixe no momento $t = 0$ é l_0 e descobrir o valor de C que sastifaz essa condição.

$$l_0 = \frac{\lambda}{k} + Ce^{-k0} \Longrightarrow C = l_0 - \frac{\lambda}{k}$$

Substituindo C em (8), temos:

$$l(t) = \frac{\lambda}{k} + (l_0 - \frac{\lambda}{k}) e^{-kt} \tag{9}$$

Observe atentamente esta equação. Quando $t \to \infty$, $l(t)$ tende a $l_\infty = \frac{\lambda}{k}$. Portanto, podemos reescrever a equação (9) em termos de l_∞:

$$l(t) = l_\infty + (l_0 - l_\infty) e^{-kt} \tag{10}$$

Uma versão simplificada da equação acima foi obtida por Beverton e Holt [5]. Colocando $l(t) = 0$ e $t = t_0$ em (10), temos:

$$
\begin{aligned}
0 &= l_\infty + (l_0 - l_\infty)e^{-kt_0} \\
-l_\infty &= (l_0 - l_\infty)e^{-kt_0} \\
-l_\infty e^{kt_0} &= l_0 - l_\infty \\
l_0 = -l_\infty e^{kt_0} + l_\infty &= l_\infty(1 - e^{kt_0})
\end{aligned}
$$

Substituindo l_0 em (10), temos:

$$
l(t) = l_\infty(1 - e^{-k(t-t_0)}) \tag{11}
$$

Exercício. Resolva o caso particular do modelo de crescimento de von Bertalanffy para o peso.

$$
\frac{dm}{dt} + \beta m = \alpha^{\frac{2}{3}}
$$

Sugestão: use a equação diferencial de Bernoulli.

Referências

[1] Lee, L., Atkinson, D., Hirst, A.G. et al. A new framework for growth curve fitting based on the von Bertalanffy Growth Function. Sci Rep 10, 7953 (2020).

https://doi.org/10.1038/s41598-020-64839-y

[2] Bertalanffy, Lvon A quantitative theory of organic growth (inquiries on growth laws. II). Hum. Biol. 10(2), 181–213 (1938).

[3] UNIVESP. Cálculo III. Youtube. Acesso em 02/02/2023.

https://www.youtube.com/playlist?list=PLFBA21F349930F92F

[4] Bassanezi, R. C. e Ferreira Jr, W. C. (1978). Equações diferenciais com aplicações. Ed. Harbra, S. Paulo.

[5] Beverton, Raymond JH; H, Sidney J. On the dynamics of exploited fish populations.