PREDA - UNED

Programación y Estructuras de Datos Avanzadas

Capítulo 5

Programación dinámica

Planteamiento

- Almacenar resultados parciales ya calculados para reutilizarlos repetidamente durante la resolución del problema, reduciendo el coste de cómputo
- Comparte algunos casos de aplicación con el esquema "divide y vencerás"
- Conviene si:
  - existen llamadas recursivas repetidas
  - se cumple el **Principio de Optimalidad de Bellman**
    - dada una secuencia óptima de decisiones, toda sub secuencia de ella es, a su vez, óptima
- Se suele usar una tabla para guardar los resultados parciales (coste temporal vs. coste espacial)

PD vs. DyV

- PD
  1. Divide el problema en subproblemas
  2. Los subproblemas son <u>dependientes</u> entre sí
  3. <u>Se almacena</u> la solución de un subproblema
  4. Algoritmo <u>Bottom-Up</u>

- DyV
  1. Divide el problema en subproblemas
  2. Los subproblemas son <u>independientes</u> entre sí
  3. <u>No se almacena</u> la solución de un subproblema
  4. Algoritmo <u>Top-Down</u>

Proceso

- Establecimiento de las ecuaciones que representan el problema
- Identificación de los resultados parciales
- Construcción de la tabla de resultados parciales:
  - Inicialización de la tabla con los casos base que establece la ecuación del problema
  - Establecimiento del orden de llenado de la tabla, de forma que se calculen en primer lugar los resultados parciales que requieren pasos posteriores
  - Sustitución de las llamadas recursivas del algoritmo por consultas a la tabla

Ejemplo

- $Fibonacci(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, 1 \\ Fibonacci(n-1) + Finonacci(n-2) & \text{si } n > 1 \end{cases}$

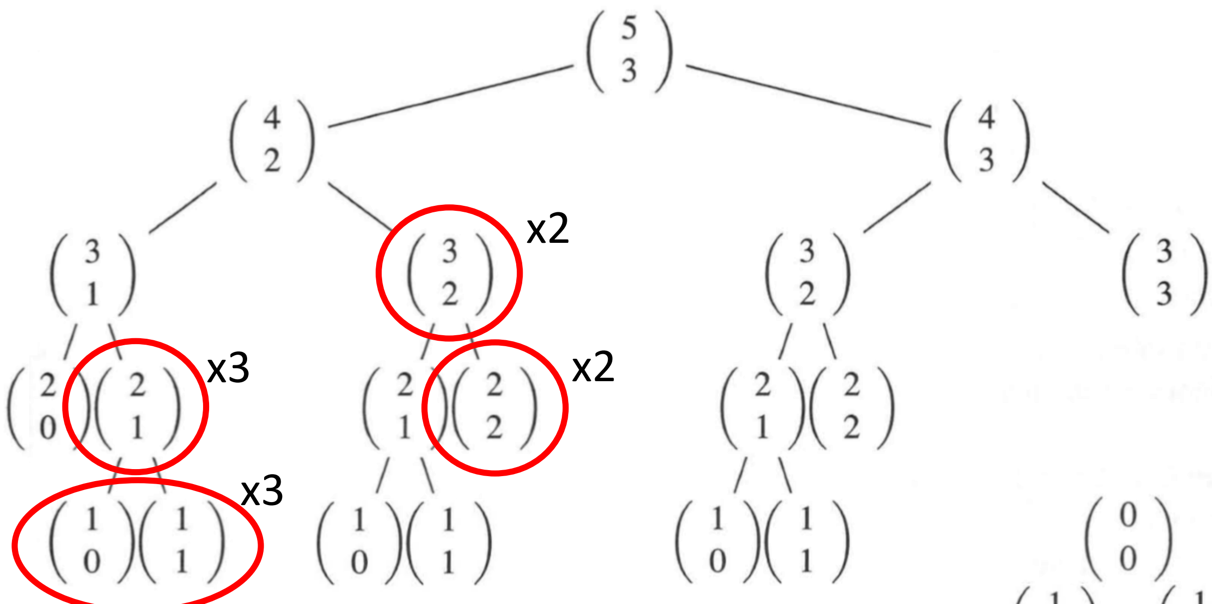
```
fun Fib(n: entero): entero
    si n ≤ 1 entonces
        dev 1
    sino
        dev Fib(n-1) + Fib(n-2)
    fsi
ffun
```

```
fun FibDin(n: entero): entero
    var
        i,suma: entero
        t: tabla[0..n] de entero
    fvar
    si n ≤ 1 entonces
        dev 1
    sino
        t[0] ← 1
        t[1] ← 1
        para i ← 2 hasta n hacer
            t[i] ← t[i-1] + t[i-2]
        fpara
    fsi
ffun
```

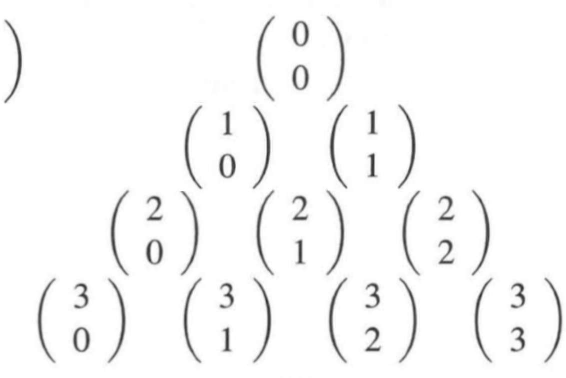
Añadir:
dev t[n]

Los coeficientes binomiales

- Definición: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \text{ ó } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{si } 0 < k < n \end{cases}$
- Ejemplo:



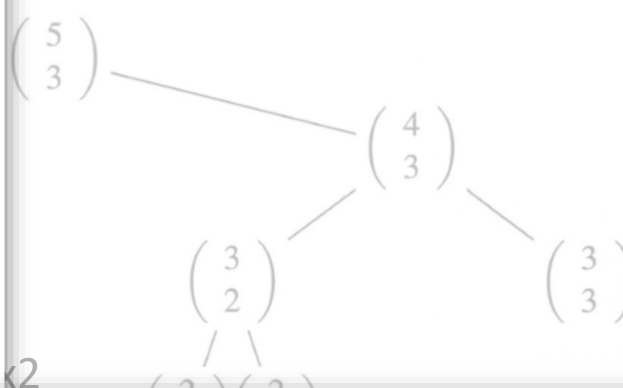
- Solución: PD + Triángulo de Pascal



omiales

si $k = 0$ ó $k = n$

si $0 < k < n$



```
fun CoefBin(n,k: entero): entero
    var
        i,j: entero
        t: matriz[0..n, 0..k] de entero
    fvar
    si k ≤ 0 ∨ k = n entonces
        dev 1
    sino
        para i ← 0 hasta n hacer t[i,0] ← 1 fpara
        para i ← 1 hasta n hacer t[i,1] ← i fpara
        para i ← 2 hasta k hacer t[i,i] ← 1 fpara
        para i ← 3 hasta n hacer
            para j ← 2 hasta  i-1 hacer
                si j ≤ k entonces
                    t[i,j] ← t[i-1,j-1] + t[i-1,j]
                fsi
            fpara
        fpara
    fsi
ffun
```

Añadir:
dev t[n, k]

	0	1	2	3	⋯	$k-1$	k
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
⋯	⋯		⋯	⋯	⋯		
n-1	⋯		⋯	⋯	⋯	C(n-1,k-1)	C(n-1,k)
n	⋯		⋯	⋯	⋯	⋯	C(n-1,k-1) + C(n-1,k)

• Solución: PD

Devolución del cambio

- Con N tipos de monedas
  (imposible con algoritmo voraz)
- Coste O(NC)
- Construcción de la tabla
  - T[i,j] = Nº monedas de tipo x_i o menos para la cantidad C_j

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_2 = 6$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	2
$x_3 = 10$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	2

  - Posibilidad de usar un algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
    var
        t: Tabla
        i,j: entero
    fvar
    para i ← 1 hasta N hacer
        t[i,0] ← 0
    fpara
    para j ← 1 hasta C hacer
        para i ← 1 hasta N hacer
            si i = 1 ∧ moneda[i] > j entonces
                t[i,j] ← ∞
            sino
                si i = 1 entonces
                    t[i,j] ← 1 + t[1,j-moneda[i]]
                sino
                    si j < moneda[i] entonces
                        t[i,j] ← t[i-1,j]
                    sino
                        t[i,j] ← min(t[i-1,j], t[i,j-moneda[i]] + 1)
                    fsi
                fsi
            fsi
        fpara
    fpara
    dev t
ffun
```

Devolución del cambio

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
   var
```

- Con N tipo
  (imposible cor
- Coste O(NC)

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

T[i,j] = min (t[i-1,j] , t[i, j-x_i] + 1) si $x_i \leq j$

```
      para i ← 1 hasta N hacer
```

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1=1 {**1**}	0								
x_2=4 {1,**4**}	0								
x_3=6 {1,4,**6**}	0								

+ 1)

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

```
            fsi
         fpara
      fpara
      dev t
   ffun
```

Devolución del cambio

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
    var
```

- Con N tipo
  (imposible cor
- Coste O(NC)

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

T[i,j] = min (t[i-1,j] , t[i, j-x_i] + 1) si $x_i \leq j$

```
    para i ← 1 hasta N hacer
```

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1=1 {**1**}	0	1	2	3					
x_2=4 {1,**4**}	0	1	2	3					
x_3=6 {1,4,**6**}	0	1	2	3					

+1 +1 +1

+ 1)

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

```
        fsi
    fpara
  fpara
  dev t
ffun
```

Devolución del cambio

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
    var
```

- Con N tipo
  (imposible co
- Coste O(NC)

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

$T[i,j] = \min(\ t[i-1,j]\ ,\ t[i, j-x_i] + 1\ )\ \text{ si }\ x_i \leq j$

```
para i ← 1 hasta N hacer
+ 1)
fsi
fpara
fpara
dev t
ffun
```

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1=1 {1}	0	1	2	3	4				
x_2=4 {1,4}	0	1	2	3	1				
x_3=6 {1,4,6}	0	1	2	3	1				

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
var

Devolución del cambio

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

$T[i,j] = \min(\, t[i-1,j]\,,\, t[i, j-x_i] + 1\,)$ si $x_i \leq j$

- Con N tipo
  (imposible con
- Coste O(NC)

para i ← 1 hasta N hacer

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1=1$ {**1**}	0	1	2	3	4	5			
$x_2=4$ {1,**4**}	0	1	2	3	1	2			
$x_3=6$ {1,4,**6**}	0	1	2	3	1	2			

+ 1)

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

fsi
fpara
fpara
dev t
ffun

Devolución del cambio

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
    var
```

- Con N tipo
  (imposible cor
- Coste O(NC)

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

$T[i,j] = \min(\, t[i-1,j]\ ,\ t[i, j-x_i] + 1\,)$ si $x_i \leq j$

```
para i ← 1 hasta N hacer
```

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1=1$ {**1**}	0	1	2	3	4	5	+1 6		
$x_2=4$ {1,**4**}	0	1	2	3	1	2	+1 3		
$x_3=6$ {1,4,**6**}	0	1	2	3	1	2	+1 1		

+ 1)

```
        fsi
      fpara
    fpara
    dev t
ffun
```

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

```
tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
    var
```

Devolución del cambio

- Con N tipo
  (imposible co
- Coste O(NC)

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

$T[i,j] = \min(\, t[i-1,j] \,,\, t[i, j-x_i] + 1 \,) \;\; \text{si} \;\; x_i \leq j$

```
        para i ← 1 hasta N hacer
```

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1=1$ {**1**}	0	1	2	3	4	5	6	7	
$x_2=4$ {1,**4**}	0	1	2	3	1	2	3	4	
$x_3=6$ {1,4,**6**}	0	1	2	3	1	2	1	2	

```
+ 1)
            fsi
        fpara
    fpara
    dev t
ffun
```

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

Devolución del cambio

tipo Tabla = matriz[1..N, 0..C] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun DarCambio(C: entero, moneda: Vector): Tabla
var

Ejemplo:

- Monedas = {1, 4, 6}
- C = 8

$T[i,j] = \min\ (\ t[i-1,j]\ ,\ t[i,\ j-x_i] + 1\ )\ \text{ si }\ x_i \leq j$

- Con N tipo
  (imposible co
- Coste O(NC)

para i ← 1 hasta N hacer

T	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_1=1$ {**1**}	0	1	2	3	4	5	6	7	+1 8
$x_2=4$ {1,**4**}	0	1	2	3	1	2	3	4	+1 2
$x_3=6$ {1,4,**6**}	0	1	2	3	1	2	1	2	+1 **2**

+ 1)

fsi
fpara
fpara
dev t
ffun

algoritmo voraz (O(C)) para saber las monedas usadas

Ejercicio de examen

2. Sea el problema de la devolución de cambio con monedas de valores 1,6 y 10 solucionado con programación dinámica para pagar una cantidad de 12 unidades. Identifica cuál de las siguientes respuestas correspondería al contenido de la tabla de resultados parciales de cantidades en la fila correspondiente a la moneda de valor 6, si dichas monedas se consideran por orden creciente de valores:

   (a) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 3
   (b) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 7
   (c) 0 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 2
   (d) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio de examen

2. Sea el problema de la devolución de cambio con monedas de valores 1,6 y 10 solucionado con programación dinámica para pagar una cantidad de 12 unidades. Identifica cuál de las siguientes respuestas correspondería al contenido de la tabla de resultados parciales de cantidades en la fila correspondiente a la moneda de valor 6, si dichas monedas se consideran por orden creciente de valores:

   (a) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 3
   (b) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 7
   (c) 0 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 2
   (d) Ninguna de las anteriores.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1 = 1$													
$x_1 = 6$													
$x_1 = 10$													

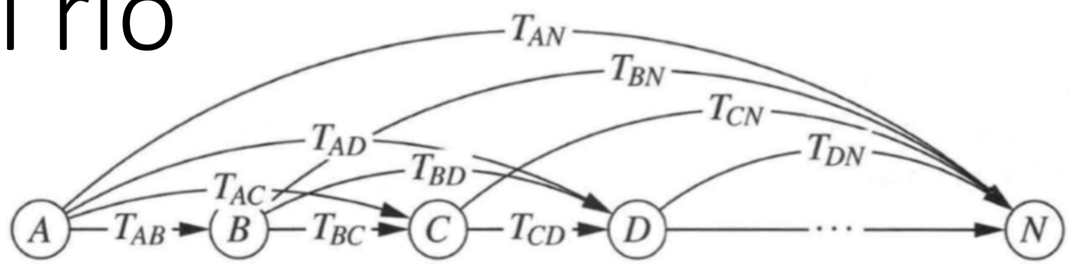
Ejercicio de examen

2. Sea el problema de la devolución de cambio con monedas de valores 1,6 y 10 solucionado con programación dinámica para pagar una cantidad de 12 unidades. Identifica cuál de las siguientes respuestas correspondería al contenido de la tabla de resultados parciales de cantidades en la fila correspondiente a la moneda de valor 6, si dichas monedas se consideran por orden creciente de valores:

   (a) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 3
   (b) 0 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 7
   (c) 0 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 6 2
   (d) Ninguna de las anteriores.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1 = 1$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1 = 6$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	2
$x_1 = 10$	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	1	2	2

El viaje por el río

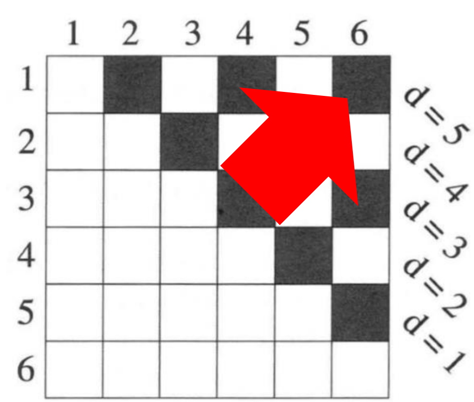


- ¿Cuál es la forma más barata de ir de uno de los embarcaderos a cualquier otro que esté río abajo?

$$C(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ min_{i<k\leq j}\{T[i,k] + C(k,j)\} & \text{si } i < j \end{cases}$$

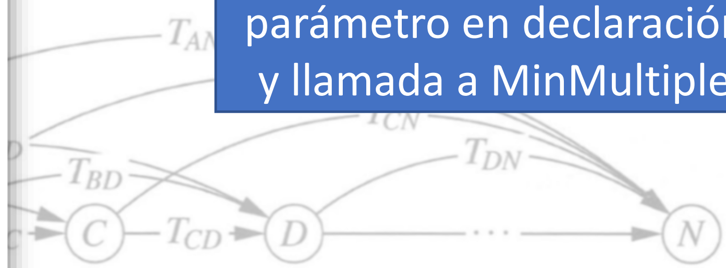
T: Tabla de precios
C: Tabla de costes mínimos

- Construcción de la tabla C por diagonales



```
tipo Tabla = matriz[1..N,1..N] de entero
fun ViajeRio(T: Tabla, N: entero, C: Tabla)
    var
        i,diag: entero
    fvar
    para i ← 1 hasta N hacer
        C[i,i] ← 0
    fpara
    para diag ← 1 hasta N-1 hacer
        para i ← 1 hasta N-diag hacer
            C[i,i+diag] ← MinMultiple(C,i,i+diag)
        fpara
    fpara
ffun
```

Añadir T como 1er parámetro en declaración y llamada a MinMultiple



de ir de uno de los
o que esté río abajo?

si $i = j$

T: Tabla de precios
C: Tabla de costes

```
fun MinMultiple(C: Tabla, i: entero, j: entero): entero
    var
        k, minimo: entero
    fvar
    minimo ← ∞
    para k ← i+1 hasta j hacer
        minimo ← min(minimo, C[k,j] + T[i,k])
    fpara
    dev minimo
ffun
```

Coste $O(N^3)$
(2 bucles anidados más llamada)

La mochila

- Se dispone de n objetos con un volumen entero v_i y un beneficio positivo b_i , y una mochila con una capacidad máxima V (o W)
- Objetivo: llenar la mochila de manera que se maximice el beneficio total considerando el volumen máximo:

$$maximizar \sum_{i=0}^{n} x_i b_i \text{ cumpliendo } \sum_{i=0}^{n} x_i v_i \leq V$$

x_i = 0 ó 1

- Ecuación de recurrencia:

$$\text{mochila}(i,W) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 0 \ \mathbf{y} \ W \geq 0 \\ -\infty & \text{si } W < 0 \\ \text{mochila}(i-1,W) & \text{si } i > 0 \ \mathbf{y} \ v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W), & \text{si } i > 0 \ \mathbf{y} \ v_i \leq W \\ \qquad b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & \end{cases}$$

máximo beneficio para un volumen libre W considerando los objetos entre 1 e i, siendo i≤n

La mochila

- Construimos la tabla M (objetos x volumen)
  - Sólo es posible si los volúmenes son enteros
  - Para calcular M[i, j] necesitamos 2 posiciones de la fila i-1
    - Si solo queremos el beneficio (no los objetos) basta con un vector
  - El valor M[n, V] de la última fila nos da la solución
- Ejemplo:

Límite de volumen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
posición 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_1 = 1, \quad b_1 = 2$	0	2	2	2	2	2	2	2	2
$v_2 = 3, \quad b_2 = 5$	0	2	2	5	7	7	7	7	7
$v_3 = 4, \quad b_3 = 10$	0	2	2	5	10	12	12	15	15
$v_4 = 5, \quad b_4 = 14$	0	2	2	5	10	14	16	16	19
$v_5 = 7, \quad b_5 = 15$	0	2	2	5	10	14	16	16	19

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1, W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1, W),\, b_i + \text{mochila}(i-1, W - v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

- Coste: O(nV)
- Posibilidad de recorrer la tabla y construir un vector binario indicando los objetos seleccionados

La mochila

- ¿Cómo saber los objetos incluidos?

> - Empezamos en t[n, W]
> - Si t[i, j] == t[i-1, j]: el objeto i **NO** se incluye y seguir en t[i-1, j]
> - Si t[i, j] != t[i-1, j]: el objeto i **SI** se incluye y seguir en t[i-1, j-v_i]

Límite de volumen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
posición 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_1 = 1, \quad b_1 = 2$	0	2	2	2	2	2	2	2	2
$v_2 = 3, \quad b_2 = 5$	0	2	2	5	7	7	7	7	7
$v_3 = 4, \quad b_3 = 10$	0	2	2	5	10	12	12	15	15
$v_4 = 5, \quad b_4 = 14$	0	2	2	5	10	14	16	16	19
$v_5 = 7, \quad b_5 = 15$	0	2	2	5	10	14	16	16	19

(, , , ,) → (, , , ,0) → (, , ,1,0) → (, ,0,1,0) → (,1,0,1,0) → (0,1,0,1,0)

La mochila

```
tipo Tabla = matriz[0..n,0..V] de entero
tipo Vector = matriz[0..n] de entero
fun MochilaEntera(vol:Vector, ben:Vector, n: entero, V: entero, M:Tabla)
    var
        i,j: entero
    fvar
    para i ← 1 hasta n hacer
        M[i,0] ← 0
    fpara
    para j ← 1 hasta V hacer
            M[0,j] ← 0
    fpara
    para i ← 1 hasta n hacer
        para j ← 1 hasta V hacer
            si vol[i] > j entonces
                M[i,j] ← M[i-1,j]
            sino
                M[i,j] ← max(M[i-1,j], M[i-1,j-vol[i]] + ben[i])
            fsi
        fpara
    fpara
ffun
```

Ejercicio de examen

2.- Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado con programación dinámica. Supongamos que se dispone de 5 objetos con pesos: 1,3,4,5,7 y beneficios: 2,5,10,14,15 respectivamente, y un volumen máximo de 8.Identifica cuál de las siguientes respuestas correspondería al contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 5, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

a. 0 2 2 5 10 12 12 15 15
b. 0 2 2 5 10 14 16 16 19
c. 0 2 2 5 10 12 14 16 19
d. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio de examen

2.- Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado con programación dinámica. Supongamos que se dispone de 5 objetos con pesos: 1,3,4,5,7 y beneficios: 2,5,10,14,15 respectivamente, y un volumen máximo de 8.Identifica cuál de las siguientes respuestas correspondería al contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 5, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

a. 0 2 2 5 10 12 12 15 15
b. 0 2 2 5 10 14 16 16 19
c. 0 2 2 5 10 12 14 16 19
d. Ninguna de las anteriores.

Límite de volumen	0	1	2	3	4	5	6	7	8
posición 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$v_1 = 1, \quad b_1 = 2$	0	2	2	2	2	2	2	2	2
$v_2 = 3, \quad b_2 = 5$	0	2	2	5	7	7	7	7	7
$v_3 = 4, \quad b_3 = 10$	0	2	2	5	10	12	12	15	15
$v_4 = 5, \quad b_4 = 14$	0	2	2	5	10	14	16	16	19
$v_5 = 7, \quad b_5 = 15$	0	2	2	5	10	14	16	16	19

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\text{mochila}(i,W)=\begin{cases}\text{mochila}(i-1,W) & v_i > W\\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i+\text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W\end{cases}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0											
2/6	0											
5/18	0											
6/22	0											
7/28	0											

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	**1**										
2/6	0											
5/18	0											
6/22	0											
7/28	0											

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	**1**										
5/18	0	**1**										
6/22	0	**1**										
7/28	0	**1**										

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	**6**									
5/18	0	1										
6/22	0	1										
7/28	0	1										

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	**7**								
5/18	0	1										
6/22	0	1										
7/28	0	1										

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$
\begin{array}{rl}
\text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\
max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W
\end{array}
$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	**6**	**7**	**7**							
6/22	0	1	**6**	**7**	**7**							
7/28	0	1	**6**	**7**	**7**							

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	**18**						
6/22	0	1	6	7	7							
7/28	0	1	6	7	7							

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{cases} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{cases}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	**19**					
6/22	0	1	6	7	7							
7/28	0	1	6	7	7							

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	**24**				
6/22	0	1	6	7	7							
7/28	0	1	6	7	7							

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	**25**			
6/22	0	1	6	7	7							
7/28	0	1	6	7	7							

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$
\begin{array}{rl}
\text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\
max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W
\end{array}
$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	**18**						
7/28	0	1	6	7	7	**18**						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	**22**					
7/28	0	1	6	7	7	18						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$
\begin{array}{rl}
\text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\
max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W
\end{array}
$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	**24**				
7/28	0	1	6	7	7	18						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	**28**			
7/28	0	1	6	7	7	18						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{cases} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{cases}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	**29**		
7/28	0	1	6	7	7	18						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	**40**
7/28	0	1	6	7	7	18						

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$
\begin{array}{lr}
\text{mochila}(i-1, W) & v_i > W \\
max\{\text{mochila}(i-1, W), b_i + \text{mochila}(i-1, W - v_i)\} & v_i \leq W
\end{array}
$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	**22**					

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	**28**				

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	**29**			

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{cases} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{cases}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	29	**34**		

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{rl} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \leq W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	**35**	

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1/1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	**40**

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{cases} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{cases}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6					
-	0	0	0	0	0	0	0					
1/1	0	1	1	1	1	1	1					
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

¿Qué objetos hemos introducido?

?	?	?	?	?

Ejercicio de examen

3. Sea el problema de la mochila en su versión de objetos no fraccionables solucionado mediante programación dinámica. Suponga que se dispone de 5 objetos con volúmenes {1,2,5,6,7} y que aportan unos beneficios de {1,6,18,22,28}, respectivamente. Suponga también que dispone de una mochila con una capacidad máxima de 11. Indique cuál sería el contenido de la tabla de resultados parciales en la fila correspondiente al objeto de peso 7, si dichos objetos se consideran en orden creciente de pesos.

   a) 0 1 6 7 7 18 19 24 25 25 28 29
   b) 0 1 6 7 7 18 22 24 28 29 29 40
   c) 0 1 6 7 7 18 22 28 29 34 35 40
   d) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{array}{lr} \text{mochila}(i-1,W) & v_i > W \\ max\{\text{mochila}(i-1,W),\, b_i + \text{mochila}(i-1,W-v_i)\} & v_i \le W \end{array}$$

v/b	0	1	2	3	4	5	6					
-	0	0	0	0	0	0	0					
1/1	0	1	1	1	1	1	1					
2/6	0	1	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7
5/18	0	1	6	7	7	18	19	24	25	25	25	25
6/22	0	1	6	7	7	18	22	24	28	29	29	40
7/28	0	1	6	7	7	18	22	28	29	34	35	40

¿Qué objetos hemos introducido?

0	0	1	1	0

0 + 0 + 18 + 22 + 0

Multiplicación asociativa de matrices

- Multiplicar A (m x n) por B (n x p) da una matriz de m x p y requiere m x n x p productos escalares

$$\begin{pmatrix} \boxed{2 \quad 1} \\ 0 \quad -3 \\ 1 \quad 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4} & \mathbf{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2)} \\ \mathbf{0 \cdot 3 + (-3) \cdot 4} & \mathbf{0 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2)} \\ \mathbf{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4} & \mathbf{1 \cdot 2 + 2 \cdot (-2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-12} & \mathbf{6} \\ \mathbf{11} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

- Objetivo: hallar el número mínimo de multiplicaciones escalares para el producto de una secuencia de matrices
- Ejemplo:

Matriz	Dimensiones
A	60×2
B	2×30
C	30×5
D	5×20

Producto	Coste	Cálculo
((AB)C)D	18600	$60 \times 2 \times 30 + 60 \times 30 \times 5 + 60 \times 5 \times 20$
A((BC)D)	2900	$2 \times 30 \times 5 + 2 \times 5 \times 20 + 60 \times 2 \times 20$
(AB)(CD)	42600	$60 \times 2 \times 30 + 30 \times 5 \times 20 + 60 \times 30 \times 20$
A(B(CD))	6600	$30 \times 5 \times 20 + 2 \times 30 \times 20 + 2 \times 20 \times 60$
(A(BC))D	6900	$2 \times 30 \times 5 + 60 \times 2 \times 5 + 60 \times 5 \times 20$

Multiplicación asociativa de matrices

- ¿Y si lo hacemos por fuerza bruta?
  ¿De cuantas formas podemos agrupar las matrices?
  - *Si hay 1 o 2 matrices…*
    solo hay 1 agrupación posible: (A) o (AB)
  - *Si hay 3 matrices…*
    hay 2: ((AB)C), (A(BC))
  - *Si hay 4 matrices…*
    hay 5: (((AB)C)D)), ((AB)(CD)), ((A(BC))D), (A((BC)D)), (A(B(CD)))
  - *Si hay 5 matrices…*
    hay… ¡14 agrupaciones posibles!
  - *Y con más…* ***¡sigue creciendo exponencialmente!***
    Siguen la secuencia de los números de Catalan

n	1	2	3	4	5	10	15
$T(n)$	1	1	2	5	14	4862	2674440

- No es una solución válida

Multiplicación asociativa de matrices

- Ecuación de recurrencia

$$E(i,j) = \begin{cases} min_{i \le k < j}\{E(i,k) + E(k+1,j) + d_{i-1}d_k d_j\} & \text{si } i < j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

> - **d_i**: Nº columnas de la matriz M_i (número de filas será d_{i-1})
> - **E(i, j)**: Nº mínimo de productos escalares para multiplicar las matrices $M_i..M_j$

- Ejemplo: M1(60x2) x M2(2x30) x M3(30x5) x M4(5x20)

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0			
i=2		0		
i=3			0	
i=4				0

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0	3600		
i=2		0	300	
i=3			0	3000
i=4				0

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0	3600	900	
i=2		0	300	500
i=3			0	3000
i=4				0

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0	3600	900	**2900**
i=2		0	300	500
i=3			0	3000
i=4				0

Multiplicación asociativa de matrices

M1(**60**x2) x M2(2x30) x M3(30x5) x M4(5x**20**)

• Ecuación

$E(i,j) = \{$

• d_i: Nº columnas de la matriz M_i (número de filas será d_{i-1})

• Ejemplo

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0	3600	900	?
i=2		0	300	500
i=3			0	3000
i=4				0

mínimo

+ 60x2x20 = $\boxed{2900}$

+ 60x30x20 = 39000

+ 60x5x20 = 6900

mejor K	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	-	1	1	**1**
i=2		-	2	**3**
i=3			-	3
i=4				-

Posibilidad de guardar la posición de los paréntesis: Función recursiva que empieza en [1,N] y se bifurca en [i,k] y [k+1, j] siendo k el valor almacenado

ABCD → (A((BC)D))

```
tipo Tabla = matriz[1..N,1..N] de entero
tipo Vector = matriz[0..N] de entero
fun MultMatrices(d: Vector, N: entero, mult: Tabla)
    var
        i,diag: entero
    fvar
    para i ← 1 hasta N hacer
        mult[i,i] ← 0
    fpara
    para diag ← 1 hasta N-1 hacer
        para i ← 1 hasta N-diag hacer
        mult[i,i+diag] ← MinMultiple(mult,d,i,i+diag)
    fpara
  fpara
ffun
```

Coste $O(N^3)$
(2 bucles anidados más llamada)

Coste espacial $O(N^2)$
(tabla de NxN)

$_{1}d_k d_j\}$ si $i < j$

si $i = j$

de filas será d_{i-1})

Ejemplo:

	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	0			
i=2		0		
i=3			0	
i=4				0

```
fun MinMultiple(mult: Tabla, d: Vector, i: entero, j: entero): entero
    var
        k, minimo: entero
    fvar
    minimo ← ∞
    para k ← i hasta j-1 hacer
        minimo ← min(minimo, mult[i,k] + mult[k+1,j] + d[i-1]*d[k]*d[j])
    fpara
    dev minimo
ffun
```

Ejercicio de examen

6. Sean $A_1..A_6$ matrices de dimensiones 30x35, 35x15, 15x5, 5x10, 10x20 y 20x25; y sea m[i,j] el número mínimo de productos escalares para multiplicar $A_i \cdot .. \cdot A_j$; es decir, el subrango *i..j* con $i,j \in \{1..6\}$, siendo *i* la abscisa y *j* la ordenada, y siendo la matriz con los diferentes valores m[i,j] la siguiente:

Antes vimos T girada 90° a la dcha.

	1	2	3	4	5	6
6	15.125	10,500	5,375	3.500	5.000	0
5	11.875	7,125	2,500	1,000	0	
4	9,375	4,375	750	0		
3	7.875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

¿Cuál de las siguientes opciones es la parametrización óptima del producto de las seis matrices $A_1..A_6$?

(a) $(A_1(A_2A_3)(A_4A_5)A_6)$
(b) $(A_1A_2)(A_3A_4)(A_5A_6)$
(c) $(A_1(A_2(A_3A_4)A_5)A_6)$
(d) Ninguna de las anteriores

Ejercicio de examen

6. Sean $A_1..A_6$ matrices de dimensiones 30x35, 35x15, 15x5, 5x10, 10x20 y 20x25; y sea m[i,j] el número mínimo de productos escalares para multiplicar $A_i \cdot .. \cdot A_j$; es decir, el subrango *i..j* con *i,j* ∈ {1..6}, siendo *i* la abscisa y *j* la ordenada, y siendo la matriz con los diferentes valores m[i,j] la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
6	15,125	10,500	5,375	3,500	5,000	0
5	11,875	7,125	2,500	1,000	0	
4	9,375	4,375	750	0		
3	7,875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

T'	1	2	3	4	5	6
6	**3**	?	?	?	?	-
5	?				-	
4	?			-		
3	?		-			
2	?	-				
1	-					

¿Cuál de las siguientes opciones es la parametrización óptima del producto de las seis matrices $A_1..A_6$?

(a) $(A_1(A_2A_3)(A_4A_5)A_6)$
(b) $(A_1A_2)(A_3A_4)(A_5A_6)$
(c) $(A_1(A_2(A_3A_4)A_5)A_6)$
(d) Ninguna de las anteriores

- T'[6,1] = min(0+10500+30·35·25, 15750+5375+30·15·25, **7875+3500+30·5·25**, 9375+5000+30·10·25, 11875+0+30·20·25)
- T'[6,1] = min(36750, 32375, **15125**, 21875, 26875)

Ejercicio de examen

6. Sean $A_1..A_6$ matrices de dimensiones 30x35, 35x15, 15x5, 5x10, 10x20 y 20x25; y sea m[i,j] el número mínimo de productos escalares para multiplicar $A_i \cdot .. \cdot A_j$; es decir, el subrango *i..j* con *i,j* $\in$ {1..6}, siendo *i* la abscisa y *j* la ordenada, y siendo la matriz con los diferentes valores m[i,j] la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
6	15,125	10,500	5,375	3,500	5,000	0
5	11,875	7,125	2,500	1,000	0	
4	9,375	4,375	750	0		
3	7,875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

T’	1	2	3	4	5	6
6	3			**5**	?	-
5				?	-	
4				-		
3	**1**	?	-			
2	?	-				
1	-					

¿Cuál de las siguientes opciones es la parametrización óptima del producto de las seis matrices $A_1..A_6$?

(a) $(A_1(A_2A_3)(A_4A_5)A_6)$
(b) $(A_1A_2)(A_3A_4)(A_5A_6)$
(c) $(A_1(A_2(A_3A_4)A_5)A_6)$
(d) Ninguna de las anteriores

- T’[3,1] = min(0+2625+30·35·5, 15750+0+30·15·5)
- T’[3,1] = min(**7875**, 18000)
- T’[6,4] = min(0+5000+5·10·25, 1000+0+5·20·25)
- T’[6,4] = min(6250, **3500**)

Ejercicio de examen

6. Sean $A_1..A_6$ matrices de dimensiones 30x35, 35x15, 15x5, 5x10, 10x20 y 20x25; y sea m[i,j] el número mínimo de productos escalares para multiplicar $A_i \cdot .. \cdot A_j$; es decir, el subrango *i..j* con *i,j* ∈ {1..6}, siendo *i* la abscisa y *j* la ordenada, y siendo la matriz con los diferentes valores m[i,j] la siguiente:

	1	2	3	4	5	6
6	15.125	10,500	5,375	3,500	5,000	0
5	11,875	7,125	2,500	1,000	0	
4	9,375	4,375	750	0		
3	7,875	2,625	0			
2	15,750	0				
1	0					

T'	1	2	3	4	5	6
6	3			5		-
5					-	
4				-		
3	1		-			
2		-				
1	-					

¿Cuál de las siguientes opciones es la parametrización óptima del producto de las seis matrices $A_1..A_6$?

(a) $(A_1(A_2A_3)(A_4A_5)A_6)$
(b) $(A_1A_2)(A_3A_4)(A_5A_6)$
(c) $(A_1(A_2(A_3A_4)A_5)A_6)$
(d) Ninguna de las anteriores

$(A_1A_2A_3A_4A_5A_6) \rightarrow$
$((A_1A_2A_3)(A_4A_5A_6)) \rightarrow$
$((A_1(A_2A_3))((A_4A_5)A_6))$

Camino de coste mínimo en un grafo dirigido

- Algoritmo de Floyd como alternativa al algoritmo de Dijkstra (ver alg. voraz), los dos con $O(N^3)$
- Ecuación de recurrencia

> - **M(i, j, k)**: Coste mínimo entre los nodos i y j pudiendo pasar por los nodos entre 1 y k
> - **A[i, j]**: el coste de la arista entre i y j

$$M(i,j,k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 0 \text{ y } i = j \\ A[i,j] & \text{si } k = 0 \text{ y } i \neq j \\ min(M(i,j,k-1), & \text{si } k > 0 \\ \qquad M(i,k,k-1) + M(k,j,k-1)) & \end{cases}$$

- Para calcular M(i, j, k) sólo necesitamos los datos tras incluir el nodo k-1, así que utilizamos una tabla NxN que se va reescribiendo

Cami... grafo...

- Algori... tmo de Dij...
- Ecuaci...

re los nodos i y j
os entre 1 y k
ntre i y j

M

```
tipo Tabla = matriz[1..N,1..N] de entero
fun Floyd(A: Tabla, N: entero, M: Tabla)
    var
        i, j, k: entero
    fvar
    para i ← 1 hasta N hacer
        para j ← 1 hasta N hacer
            M[i,j] ← A[i,j]
        fpara
    fpara
    para k ← 1 hasta N hacer
        para i ← 1 hasta N hacer
            para j ← 1 hasta N hacer
                M[i,j] ← min(M[i,j], M[i,k] + M[k,j])
            fpara
        fpara
    fpara
ffun
```

- Para c... tos tras in... tabla NxN q...

Distancia de edición

- Objetivo: encontrar el número mínimo de cambios para transformar la cadena $X=x_1,\ldots,x_n$ en la cadena $Y=y_1,\ldots,y_m$ con los siguientes cambios posibles:
  - Borrar un carácter de X
  - Insertar uno de los caracteres de Y en X
  - Sustituir un carácter de X por uno de los de Y
- Ecuación de recurrencia:

- **C(i, j)**: Nº mínimo de cambios para convertir $x_1,\ldots, x_i$ en $y_1,\ldots y_j$

$$C(i,j) = \begin{cases} i & \text{si } j=0 \\ j & \text{si } i=0 \\ 1+min\{C(i-1,j),C(i,j-1),C(i-1,j-1)\} & \text{si } i\neq 0, j\neq 0, x_i\neq y_j \\ min\{C(i-1,j)+1,C(i,j-1)+1,C(i-1,j-1)\} & \text{si } i\neq 0, j\neq 0, x_i = y_j \end{cases}$$

```
tipo Tabla = matriz[0..n,0..m] de entero
fun DistanciaEdicion(X: Vector[1..n] de caracter, Y: Vector[1..m] de caracter,
                     n,m: entero, C: Tabla)
    var
        i,j,tmp: entero
    fvar
    para i ← 0 hasta n hacer
        C[i,0] ← i
    fpara
    para j ← 0 hasta m hacer
        C[0,j] ← j
    fpara
    para i ← 1 hasta n hacer
        para j ← 1 hasta m hacer
            tmp ← min(1 + C[i-1,j], 1 + C[i,j-1])
            si X[i] = Y[j] entonces
                C[i,j] ← min(tmp, C[i-1,j-1])
            sino
                C[i,j] ← min(tmp, C[i-1,j-1]+1)
            fsi
        fpara
    fpara
ffun
```

Coste O(nm)
(2 bucles anidados)

Coste espacial O(nm)
(tabla de n x m)

Ejercicio de examen

6. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa** con respecto al esquema de programación dinámica:

   (a) El objetivo de este esquema es la reducción del coste del algoritmo mediante la memorización de soluciones parciales que se necesitan para llegar a la solución final.

   (b) Es igual de eficiente que el esquema divide y vencerás cuando en este último esquema se dan llamadas recursivas que se repiten en la secuencia de llamadas recursivas.

   (c) El problema de la multiplicación asociativa de matrices resuelto con programación dinámica tiene un coste temporal de $O(N^3)$, siendo N el número de matrices para multiplicar.

   (d) El problema de la distancia de edición entre dos cadenas resuelto con programación dinámica tiene un coste temporal de $O(nm)$, siendo n la longitud de una cadena y m la longitud de la otra.

Ejercicio de examen

6. Indique cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa** con respecto al esquema de programación dinámica:

   (a) El objetivo de este esquema es la reducción del coste del algoritmo mediante la memorización de soluciones parciales que se necesitan para llegar a la solución final.

   (b) Es igual de eficiente que el esquema divide y vencerás cuando en este último esquema se dan llamadas recursivas que se repiten en la secuencia de llamadas recursivas.

   (c) El problema de la multiplicación asociativa de matrices resuelto con programación dinámica tiene un coste temporal de $O(N^3)$, siendo *N* el número de matrices para multiplicar.

   (d) El problema de la distancia de edición entre dos cadenas resuelto con programación dinámica tiene un coste temporal de $O(nm)$, siendo *n* la longitud de una cadena y *m* la longitud de la otra.

Resumen de ejemplos

- Fibonacci
  - Almacenar los 2 últimos valores
- Coeficientes binomiales
  - Triángulo de Pascal
- Devolución del cambio (para cualquier tipo de monedas)
  - T[i,j] = nº monedas de tipo xi o menos para la cantidad Cj
- Viaje por el río
  - Ir almacenando el coste en saltos de distancia 1, 2,…
- Mochila (objetos NO fraccionables)
  - T[i,j] = beneficio máximo con objetos 1..i y volumen libre j
- Multiplicación asociativa de matrices
  - T(i, j) = Nº mínimo de productos escalares para las matrices Mi..Mj
- Camino de coste mínimo en un grafo dirigido
  - Alg. de Floyd (alternativa a Dijkstra): consideramos cada vez más nodos
- Distancia de edición
  - T(i, j) = Nº mínimo de cambios para las posiciones i y j de las cadenas x,y