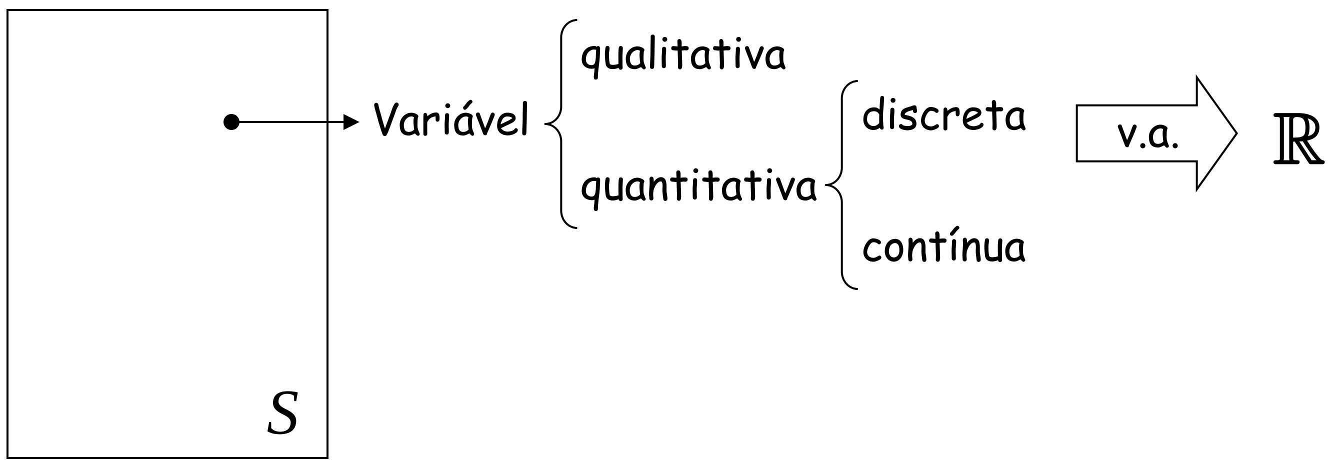
Estatística

Wagner Pinheiro
wagner2235@gmail.com

Variável Aleatória

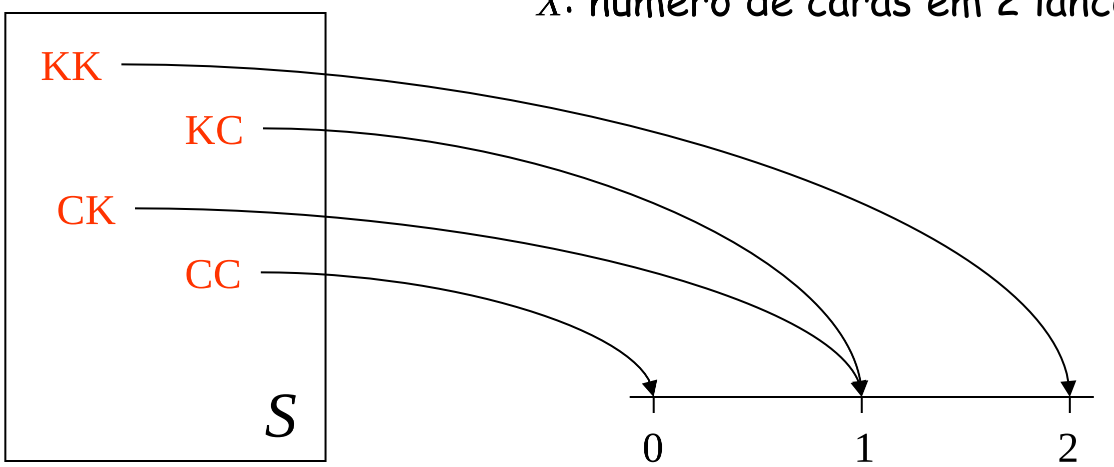


Definição: variável aleatória é a função que associa cada elemento de S a um número real.

Variável Aleatória

Experimento: jogar 2 moedas e observar o resultado
(K = cara e C = coroa)

X: número de caras em 2 lances de moeda



$X(S)$ (imagem)

$X(\text{CC}) = 0$
$X(\text{KC}) = X(\text{CK}) = 1$
$X(\text{KK}) = 2$

$P(X = 0) = P(\text{CC})$
$P(X = 1) = P(\text{KC} \cup \text{CK})$
$P(X = 2) = P(\text{KK})$

OBS: em $P(X = x)$, a natureza funcional da v.a. foi suprimida. De fato, a expressão mais correta seria $P(s \in S \mid X(s) = x)$.
por definição, os valores de uma v.a. são sempre mutuamente exclusivos

Variável Aleatória Discreta

Definição: uma v.a. é discreta quando o conjunto de valores possíveis for finito ou infinito numerável.

$P(X = x_i) \geq 0$ para todo i

$$\sum_i P(X = x_i) = 1$$

Função de Probabilidade

$$f(x) = P(X = x)$$

Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \sum_j f(x_j) \quad \text{para todo } j \text{ onde } x_j < x$$

Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

a) jogar um dado

X: ponto obtido no dado

$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

X: = 1 se ponto for igual a 6

= 0 caso contrário

$X = \{0, 1\}$

b) jogar 5 moedas (ou uma moeda 5 vezes)

X: número de caras em 5 lances

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

c) jogar uma moeda até tirar uma cara

X: número de jogadas até tirar uma cara (incluindo-se a cara)

$X = \{1, 2, 3, ...\}$

X: número de coroas até tirar uma cara

$X = \{0, 1, 2, ...\}$

Variável Aleatória Discreta

Exemplos:

d) sortear um ponto de uma imagem (8*bits*)
X: valor de nível de cinza
$X = \{0, 1, ..., 255\}$
X: = 1 se valor de nível de cinza for menor que 100
= 0 caso contrário
$X = \{0, 1\}$

e) sortear 5 pontos em um mapa pedológico
X: número de pontos correspondentes à classe Argissolo
$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

f) sortear pontos em um mapa de vegetação até que se encontre a classe Cerrado
X: número de pontos sorteados (incluindo-se o ponto da classe Cerrado)
$X = \{1, 2, 3, ...\}$
X: número de pontos sorteados (excluindo-se o ponto da classe Cerrado)
$X = \{0, 1, 2, ...\}$

Variável Aleatória Contínua

Definição: uma v.a. é contínua quando o conjunto de valores possíveis (imagem) for inumerável.

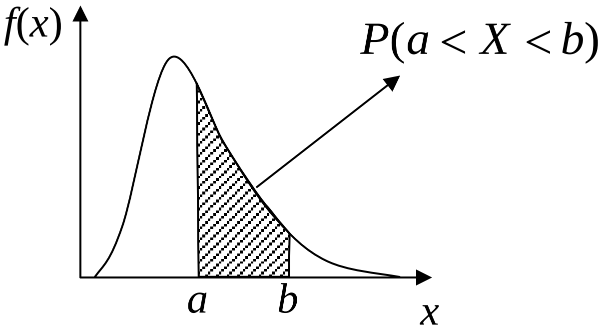
$$\boxed{P(a < X < b) \geq 0}$$

Função Densidade de Probabilidade (fdp)

$$f(x) \geq 0$$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$



Função de Distribuição Acumulada

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Variável Aleatória Contínua

Exemplos:

a) X: distância entre dois pontos
X = [0,+∞[

b) X: distância vertical de um ponto, relativa a uma superfície plana pré-definida
X =]-∞,+∞[

c) X: reflectância de um objeto
X = [0,1]

. o balanço (receita – despesa) de uma empresa (em reais) é uma v.a. contínua ou discreta?
. temperatura é uma v.a. contínua ou discreta?

Variável Aleatória e Probabilidade

Problema: Define-se uma variável X como o número de caras em 6 lances de moeda. Qual a probabilidade de se obter mais que 4 caras nesses 6 lances?

$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$P(X > 4) = P(X = 5) + P(X = 6)$

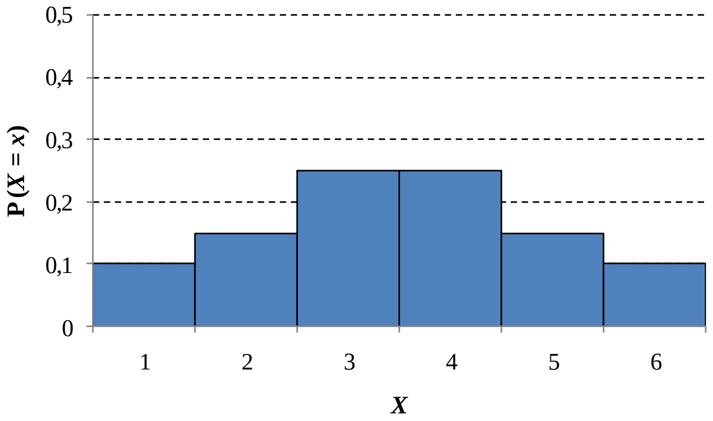
$$\begin{aligned} P(X = 5) &= P(\text{KKKKKC} \cup \text{KKKKCK} \cup \text{KKKCKK} \cup \text{KKCKKK} \cup \text{KCKKKK} \cup \text{CKKKKK}) \\ &= 6/64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 6) &= P(\text{KKKKKK}) \\ &= 1/64 \end{aligned}$$

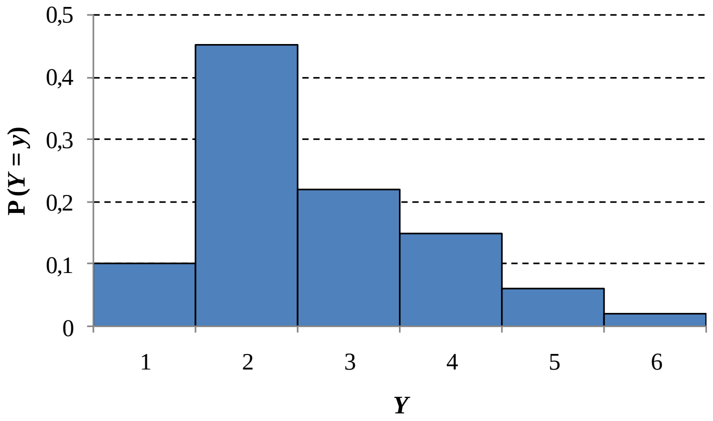
$P(X > 4) = 7/64$

Distribuição de uma Variável Aleatória

Variável X



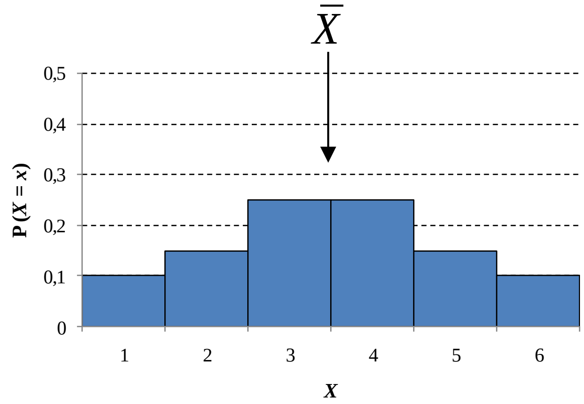
Variável Y



X	$P(X = x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

Y	$P(Y = y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

Medidas de Tendência Central



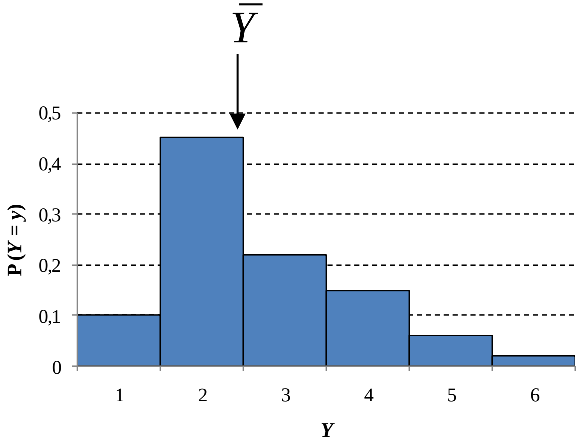
X	$P(X = x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

- Calcular o valor médio
  Média

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = 1*0,10 + 2*0,15 + 3*0,25 + 4*0,25 + 5*0,15 + 6*0,10 = 3,5$$

Medidas de Tendência Central



Y	$P(Y = y)$
1	0,10
2	0,45
3	0,22
4	0,15
5	0,06
6	0,02

- Calcular o valor médio
  Média

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{N} y_i P(Y = y_i)$$

$$E(Y) = 1*0,10 + 2*0,45 + 3*0,22 + 4*0,15 + 5*0,06 + 6*0,02 = 2,68$$

Medidas de Tendência Central

Média

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(x_i)$$ v.a. discretas

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$ v.a. contínuas

OBS: média = 1º momento = esperança matemática = esperança = valor esperado

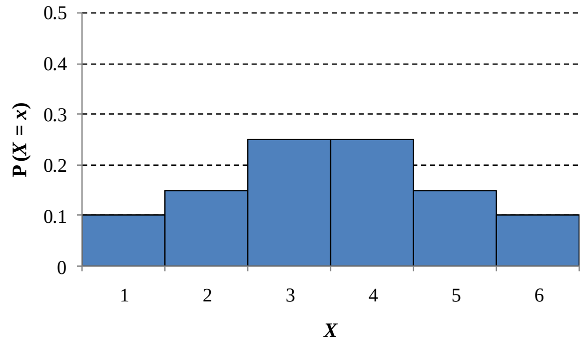
Medidas de Dispersão

Variância

$$V(X) = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu\right)^2 P(x_i)$$ v.a. discretas

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - \mu\right)^2 f(x)dx$$ v.a. contínuas

Propriedades da Esperança e Variância



X	$P(X=x)$
1	0,10
2	0,15
3	0,25
4	0,25
5	0,15
6	0,10

$$E(X)=\sum_{i=1}^{N} x_i P(X=x_i)=1*0,10+2*0,15+\cdots+6*0,10=\boxed{3,5}$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$E(X^2)=1^2*0,10+2^2*0,15+\cdots+6^2*0,10=14,3$$

$$Var(X)=14,3-3,5^2=\boxed{2,05}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$E(X) = 3{,}5$ $\quad$ $Var(X) = 2{,}05$

$\boxed{\bullet\ Y = X + c}$

Ex: $Y = X + 3$

Y	4	5	6	7	8	9
X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

+ 3

=

$$E(Y) = 4*0{,}10 + 5*0{,}15 + \cdots + 9*0{,}10 = \boxed{6{,}5}$$

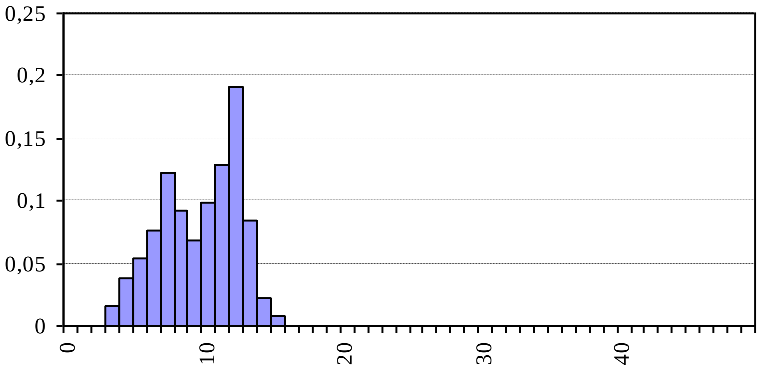
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 44{,}3 - 42{,}25 = \boxed{2{,}05}$$

Propriedades da Esperança e Variância

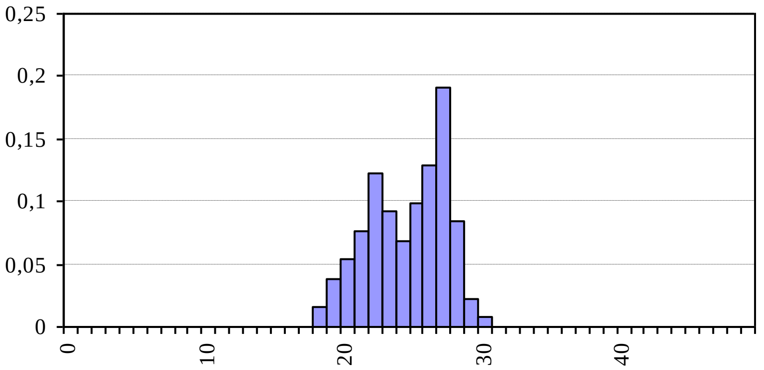
$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$

$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$



X



$$Y = X + 15$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$E(X) = 3{,}5$ $\qquad$ $Var(X) = 2{,}05$

- $Y = gX$

* 3

* 9 = 3^2

Ex: $Y = 3X$

Y	3	6	9	12	15	18
X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

$$E(Y) = 3*0{,}10 + 6*0{,}15 + \cdots + 18*0{,}10 = \boxed{10{,}5}$$

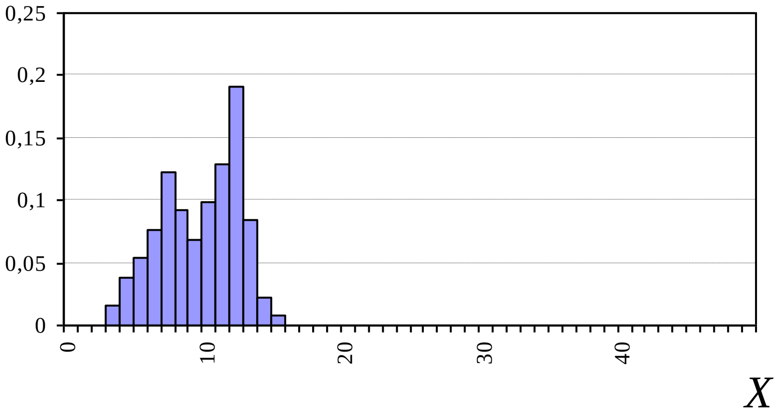
$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 128{,}7 - 110{,}25 = \boxed{18{,}45}$$

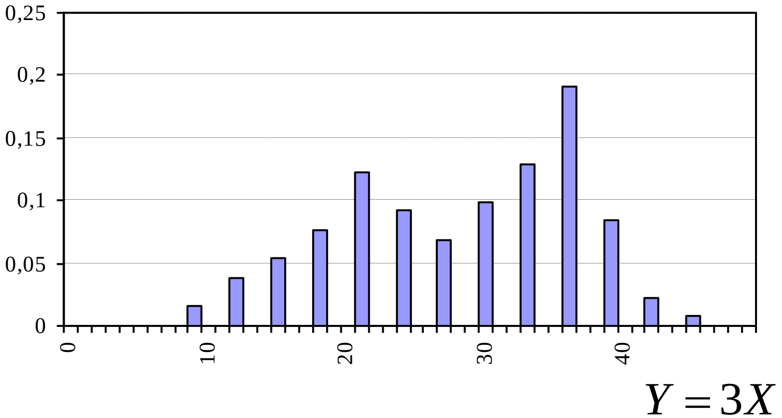
Propriedades da Esperança e Variância

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$

$$Var(Y) = Var(gX) = g^2 Var(X)$$





Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W= w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X) = 3,5$ $\quad Var(X) = 2,05$ $\quad E(W) = 2,68$ $\quad Var(W) = 1,318$

$$\boxed{\bullet\, Y = X + W}$$

$Y = \{2, ..., 12\}$

W \ X	1	2	3	4	5	6
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7
2	$\boxed{3}$	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Distribuição Conjunta de X e W

W \ X	1	2	3	4	5	6	$P(W = w_i)$
1							0,10
2	$\boxed{}$						0,45
3							0,22
4							0,15
5							0,06
6							0,02
$P(X = x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y = 3) = P(X = 1; W = 2) + P(X = 2; W = 1)$$

$$P(X = 1; W = 2) = ?$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W = w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X) = 3,5$ $\qquad Var(X) = 2,05$ $\qquad E(W) = 2,68$ $\qquad Var(W) = 1,318$

$$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$$

$Y = \{2, ..., 12\}$

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6
1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7
2	$\boxed{3}$	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Distribuição Conjunta de X e W

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(W = w_i)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	$\boxed{0,045}$	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X = x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$$P(Y = 3) = P(X = 1; W = 2) + P(X = 2; W = 1)$$

$P(X = 1; W = 2) = P(X = 1)P(W = 2)$ considerando que X e W sejam independentes

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3{,}5$ $\quad Var(X)=2{,}05$ $\quad E(W)=2{,}68$ $\quad Var(W)=1{,}318$

$W \backslash X$	1	2	3	4	5	6	$P(W=w_j)$
1	0,010	0,015	0,025	0,025	0,015	0,010	0,10
2	0,045	0,0675	0,1125	0,1125	0,0675	0,045	0,45
3	0,022	0,033	0,055	0,055	0,033	0,022	0,22
4	0,015	0,0225	0,0375	0,0375	0,0225	0,015	0,15
5	0,006	0,009	0,015	0,015	0,009	0,006	0,06
6	0,002	0,003	0,005	0,005	0,003	0,002	0,02
$P(X=x_i)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10	1

$\boxed{\bullet\; Y = X - W}$

$$E(Y)=\sum_i y_i P(Y=y_i)$$

$$E(X-W)=\sum_i\sum_j (x_i - w_j)P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i\sum_j x_i P(X=x_i;W=w_j) - \sum_i\sum_j w_j P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i x_i \sum_j P(X=x_i;W=w_j) - \sum_j w_j \sum_i P(X=x_i;W=w_j)$$

$$=\sum_i x_i P(X=x_i) - \sum_j w_j P(W=w_j)$$

$$=E(X)-E(W)=3{,}5-2{,}68=0{,}82$$

$$\boxed{E(X\pm W)=E(X)\pm E(W)}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W = w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X) = 3{,}5$ $\quad Var(X) = 2{,}05$ $\quad E(W) = 2{,}68$ $\quad Var(W) = 1{,}318$

$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$

$$Var(Y) = E\left(Y^2\right) - E\left(Y\right)^2$$

$$\begin{aligned} Var(X+W) &= E\left((X+W)^2\right) - \left(E(X+W)\right)^2 \\ &= E\left(X^2 + 2XW + W^2\right) - \left(E(X) + E(W)\right)^2 \\ &= E(X^2) + 2E(XW) + E(W^2) - E(X)^2 - 2E(X)E(W) - E(W)^2 \\ &= \underbrace{E(X^2) - E(X)^2}_{Var(X)} + \underbrace{E(W^2) - E(W)^2}_{Var(W)} + 2\left(\underbrace{E(XW) - E(X)E(W)}_{COV(X,W)}\right) \end{aligned}$$

covariância entre X e W

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3{,}5$ $\quad Var(X)=2{,}05$ $\quad E(W)=2{,}68$ $\quad Var(W)=1{,}318$

$\boxed{\bullet\ Y = X + W}$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2$$

$$\begin{aligned}
Var(X+W) &= E\left((X+W)^2\right)-\left(E(X+W)\right)^2 \\
&= E\left(X^2+2XW+W^2\right)-\left(E(X)+E(W)\right)^2 \\
&= E(X^2)+2E(XW)+E(W^2)-E(X)^2-2E(X)E(W)-E(W)^2 \\
&= E(X^2)-E(X)^2+E(W^2)-E(W)^2+2\left(E(XW)-E(X)E(W)\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{Var(X+W)=Var(X)+Var(W)+2COV(X,W)}$$

Propriedades da Esperança e Variância

X	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0,10	0,15	0,25	0,25	0,15	0,10

W	1	2	3	4	5	6
$P(W=w)$	0,10	0,45	0,22	0,15	0,06	0,02

$E(X)=3,5$ $\quad Var(X)=2,05$ $\quad E(W)=2,68$ $\quad Var(W)=1,318$

- $Y = X - W$

$$Var(Y)=E\left(Y^2\right)-E\left(Y\right)^2$$

$$Var(X-W)=E\left((X-W)^2\right)-\left(E(X-W)\right)^2$$

$$=E\left(X^2-2XW+W^2\right)-\left(E(X)-E(W)\right)^2$$

$$=E(X^2)-2E(XW)+E(W^2)-E(X)^2+2E(X)E(W)-E(W)^2$$

$$=E(X^2)-E(X)^2+E(W^2)-E(W)^2-2\left(E(XW)-E(X)E(W)\right)$$

$$\boxed{Var(X\pm W)=Var(X)+Var(W)\pm 2COV(X,W)}$$

se X e W são independentes: $E(XW)=E(X)E(W)$ $\therefore$ $\boxed{Var(X\pm W)=Var(X)+Var(W)}$

$$Var(X+W)=2,05+1,318=3,368$$

Propriedades da Esperança e Variância

Resumo:

$$Y = X \pm o$$

$$E(Y) = E(X \pm o) = E(X) \pm o$$
$$Var(Y) = Var(X \pm o) = Var(X)$$

$$Y = gX$$

$$E(Y) = E(gX) = gE(X)$$
$$Var(Y) = Var(gX) = g^2 Var(X)$$

$$Y = X \pm W$$

$$E(Y) = E(X \pm W) = E(X) \pm E(W)$$
$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \pm 2COV(X,W)$$
$$Var(Y) = Var(X \pm W) = Var(X) + Var(W) \quad \text{(independentes)}$$