Probabilidade

Teoremas

Prof.: Wagner Pinheiro
wagner2235@gmail.com

Sumário

Teorema do Produto das Probabilidades

Visto que a probabilidade condicional de A na hipótese B (ou dado B) é

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

A fórmula anterior é frequentemente usada na forma

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \tag{2}$$

Esse resultado é conhecido pelo nome de teorema do produto das probabilidades (ou teorema das probabilidades compostas).

Para generalizar esse resultado para três eventos A, B, C, então, aplique (2) uma vez mais; segue-se então que,

$$P(A \cap B \cap C) = P[A|(B \cap C)] \cdot P(B|C) \cdot P(C)$$

As generalizações para quatro ou mais eventos saem diretamente.

Independência Estocástica (ou Probabilística)

No caso em que $P(A|B)$ entende-se que A é estocasticamente (probabilisticamente) independente de B. A expressão $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(H)$ mostra que a condição $P(A|B) = P(A)$ pode ser escrita na forma

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Suponhamos agora três eventos A, B e C, tais que

a) $$\begin{aligned} \mathrm{P}(A \cap B) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \\ \mathrm{P}(A \cap C) &= \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(C) \\ \mathrm{P}(B \cap C) &= \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C) \end{aligned}$$

b) $$\mathrm{P}(A \cap B \cap C) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) \cdot \mathrm{P}(C)$$

Se os eventos A, B e C satisfazem a (a) e (b), eles são *mutuamente independentes*.

Teorema da Probabilidade Total

Será enunciado agora um teorema útil que relaciona a probabilidade de um evento com probabilidade condicionais, o qual é chamado Teorema da Probabilidade Total.

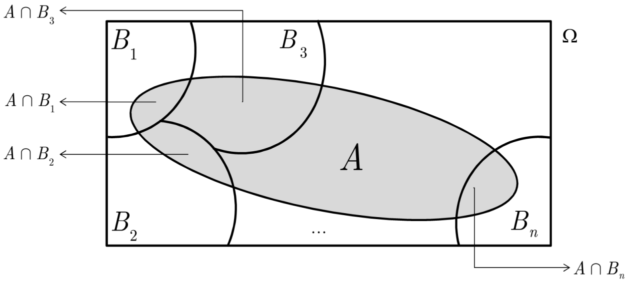
Os eventos $B_1, B_2, ...$ e B_n constituem uma partição de um espaço amostral Ω, se e somente se, as seguintes condições são verificadas.

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$
- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
- $P(B_i) > 0$

Teorema da Probabilidade Total

Sejam $B_1, B_2, \ldots$ e B_n eventos *mutuamente exclusivos e exaustivos*. Então, para um evento arbitrário A,

$$P(A) = P(A|B_1)\cdot P(B_1) + \ldots + P(A|B_n)\cdot P(B_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)\cdot P(B_i)$$



Teorema da Probabilidade Total

Para entendimento, note que é possível escrever A como a união de eventos mutuamente exclusivo, isto é,

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

logo

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B_1) + \mathrm{P}(A \cap B_2) + \cdots + \mathrm{P}(A \cap B_n)$$

Mediante aplicação da definição de probabilidade condicional onde teremos:

$$\mathrm{P}(A|B_i) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B_i)}{\mathrm{P}(B_i)} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{P}(A \cap B_i) = \mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B_1) \cdot \mathrm{P}(B_1) + \quad \cdots \quad + \mathrm{P}(A|B_n) \cdot \mathrm{P}(B_n)$$

$$= \sum^{n} \mathrm{P}(A|B_i) \cdot \mathrm{P}(B_i)$$

Exemplo

Uma urna contém 3 bolas brancas e 2 bolas amarelas. Uma segunda urna contém 4 bolas brancas e 2 amarelas. Escolhe-se, ao acaso, uma urna e dela retira-se, também ao acaso, uma bola. Qual a probabilidade de que seja branca?

Teorema de Bayes

Com base nas definições $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B)$ e $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(B|A) \cdot \mathrm{P}(A)$ é possível estabelecer as seguintes relações, igualando-se ambas as expressões:

Sejam A e B dois eventos arbitrário com $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$, então

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B) \cdot \mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}$$

Teorema de Bayes

A idéia a partir de agora é particionar Ω em conjuntos mutuamente exclusivos tais como $B_1, B_2, ...$ e B_n, cuja união, por definição, forma o espaço amostral $B_1, B_2, \ldots, B_n = \Omega$. Combinando este resultado com o teorema da probabilidade total, temos como consequência,

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

para qualquer j onde os B_i representam um conjunto de eventos mutuamente exclusivos e exaustivos.

O resultado dado pela Equação acima é chamado Teorema de Bayes, e sua utilidade consiste em permitir-nos calcular a probabilidade a posteriori $P(B_j|A)$ em termos das informações a priori $P(A)$ e $P(B)$.

Exemplo

A urna A contém 3 fichas vermelhas e 2 azuis, e a urna B contém 2 fichas vermelhas e 8 azius. Joga-se uma moeda "honesta". Se a moeda der cara, extrai-se uma ficha da urna A; se der coroa, extrei-se da urna B. Uma ficha vermelha é extraída. Qual a probabilidade de ter saído cara no lançamento?