Ciudad de México a 21 de abril de 2020.

Demostración

Como $\boldsymbol{\sigma(x) = \frac{1}{1+exp(-x)}}$, debemos probar que la siguiente igualdad se cumple $\boldsymbol{\frac{d}{dx}\sigma(x) = \sigma(x)(1-\sigma(x))}$.

- $\frac{d}{dx}\sigma(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{1+exp(-x)} = \frac{d}{dx}(1+exp(-x))^{-1}$ (Por leyes de los exponentes).
- $\frac{d}{dx}(1+exp(x))^{-1} = -[1+exp(-x)]^{-2} \cdot [-exp(-x)]$.
- $-[1+exp(-x)]^{-2} \cdot [-exp(-x)] = \frac{exp(-x)}{1+exp(-x)}$.
- $\frac{exp(-x)}{1+exp(-x)} = \frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[\frac{exp(-x)}{1+exp(-x)}\right]$.
- Realizando descomposición por fracciones parciales, obtenemos $\frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[\frac{exp(-x)}{1+exp(-x)}\right] = \frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[\frac{1+exp(-x)}{1+exp(-x)} - \frac{1}{1+exp(-x)}\right]$.
- $\frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[\frac{1+exp(-x)}{1+exp(-x)} - \frac{1}{1+exp(-x)}\right] = \frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[1 - \frac{1}{1+exp(-x)}\right]$
- Como $\sigma(x) = \frac{1}{1+exp(-x)}$, podemos reescribir la ecuación anterior como: $\frac{1}{1+exp(-x)} \cdot \left[1 - \frac{1}{1+exp(-x)}\right] = \sigma(x) \cdot [1-\sigma(x)]$

Carlos Alejandro Sales Islas