

Prof Dra. Majela Penton Machado

### Respostas da primeira lista de exercício

Questão 01) Em cada caso, encontra a matriz  $A = [a_{ij}]$  de tamanho  $4 \times 4$  cujas entradas satisfazem:

a)  $a_{ij} = i + j$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

b)  $a_{ij} = i^{j-i}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/9 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/64 & 1/16 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Questão 02) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Efetue as seguintes operações ou justifique porque elas não podem ser realizadas:

a)  $AB - BA$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -24 & -20 \\ 58 & 24 \end{bmatrix} \quad (3)$$

b)  $2C - D$

$$2C = 2 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 18 & -14 \\ 14 & -6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, **não** é possível efetuar essa operação, já que uma matrix é de dimensão  $2 \times 3$  ( $2C = M_{i,j}$ ) e outra,  $3 \times 3$  ( $D_{i,j}$ ). A subtração só é possível com  $i$  e  $j$  iguais em ambas as matrizes.

c)  $(2D^T - 3E^T)^T$

$$2D^T = 2 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ -12 & 0 & 12 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -12 & 2 & -12 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3E^T = 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 27 & -27 \\ -3 & 0 & -12 \\ -18 & 0 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 18 & -3 & -18 \\ 27 & 0 & 0 \\ -27 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2D^T - 3E^T)^T = \begin{bmatrix} -30 & -19 & 27 \\ 5 & 2 & 20 \\ 6 & 0 & 15 \end{bmatrix} \quad (4)$$

d)  $D^2 - DE$

$$D^2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & 28 \\ 0 & -24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$DE = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -54 & -38 \\ 19 & 9 & -17 \\ -72 & -54 & -48 \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$D^2 - DE = \begin{bmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & 45 \\ 72 & 30 & -12 \end{bmatrix} \quad (5)$$

d)  $(DC)^T$

$$DC = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

**Não** é possível efetuar essa operação, já que uma matrix é de dimensão  $3 \times 3$  ( $D_{i,j}$ ) e outra,  $2 \times 3$  ( $C_{i,j}$ ) e essa multiplicação não é válida porque em  $D$ ,  $j = 3$  e em  $C$ ,  $i = 2$ . Para ser compatível esses valores devem ser iguais.

Questão 03) Mostre que se  $A$  e  $B$  são matrizes que comutam com a matriz  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

Temos a matriz  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  e a matriz  $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ . Assim sendo:

$$AM = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix}$$

A partir disso, podemos encontrar:

$$\begin{cases} -a_{12} = a_{21} \\ a_{11} = a_{22} \\ -a_{22} = -a_{11} \\ a_{21} = -a_{12} \end{cases}$$

Pode-se simplificar para a condição de que  $a_{11} = a_{22} = r$ ,  $a_{12} = s$  e  $a_{21} = -s$ . Similarmente, para a matriz  $B$ , temos  $b_{11} = b_{22} = x$ ,  $b_{12} = y$  e  $b_{21} = -y$ :

$$A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

multiplicando-as, encontramos:

$$AB = \begin{bmatrix} rx - sy & ry + sx \\ -sx - ry & -sy + rx \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} rx - sy & sx + ry \\ -ry - sx & -sy + rx \end{bmatrix} \quad (6)$$

A partir da Equação 6 é possível chegar a conclusão de que  $AB = BA = M$ .

Questão 04) Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$  e uma matriz  $B$  de tamanho  $4 \times 4$  tal

que  $\det(B) = -3$ . Determine:

a-1)  $\det(A)$ . Usando eliminação de Gauss-jordan para encontrar matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_4 - 5R_1 \rightarrow R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} R_3 - \frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} R_4 - 2R_2 \rightarrow R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} R_4 - \frac{4}{3}R_3 \rightarrow R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, obtida a matriz triangular, temos que o determinante de A será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times \frac{-3}{2} \times \frac{-8}{3} = 8 \quad (7)$$

a-2)  $\det(A^2)$ .

Como sabemos que  $\det(A) = 8$ , temos que  $\det(A^2) = \det(A) \times \det(A) = 64$ .

a-3)  $\det(B^3)$ .

Como sabemos que  $\det(B) = -3$ , temos que  $\det(B^2) = \det(B) \times \det(B) \times \det(B) = -27$ .

a-4)  $\det(3B^{-1})$ .

Como sabemos que  $\det(B) = -3$ , temos que  $\det(3B^{-1}) = 3^4 \times \frac{1}{\det(B)} = -27$ .

a-5)  $\det(\frac{1}{4}A^T)$ .

Como sabemos que  $\det(A) = \det(A^T) = 8$ , temos que  $\det(\frac{1}{4}A^T) = \frac{1}{32}^4 \times \det(A) = \frac{1}{32}$ .

a-6)  $\det(A^T B^{-1})$ .

Como sabemos que  $\det(A) = 8$  e  $\det(B) = -3$ , temos que  $\det(A^T B^{-1}) = 8 \times -\frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$ .

b-1)  $A^{-1}$ . Usando eliminação de Gauss-jordan para encontrar matriz identidade.

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] R_4 - 5R_1 \rightarrow R_4 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\frac{R_2}{2} \rightarrow R_2 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] R_3 - R_2 \rightarrow R_3$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1 & -0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$R_4 - 4R_2 \rightarrow R_4 \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1 & -0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] - \frac{R_3}{1,5} \rightarrow R_3$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0,3333 & -0,6667 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] R_4 - (-2)R_3 \rightarrow R_4$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0,3333 & -0,6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,6667 & -2,3333 & -1,3333 & -1,3333 & 1 \end{array} \right] - \frac{R_4}{2,6667} \rightarrow R_4$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 & 0,3333 & 0,3333 & -0,6667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] R_3 - 0,6667R_4 \rightarrow R_3$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] R_1 - 2R_4 \rightarrow R_1$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -0,75 & -1 & -1 & 0,75 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] R_2 - 0,5R_3 \rightarrow R_2$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -0,75 & -1 & -1 & 0,75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,375 & 0,5 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] R_1 - R_2 \rightarrow R_1$$

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -0,375 & -1,5 & -1,5 & 0,875 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0,375 & 0,5 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} -0,375 & -1,5 & -1,5 & 0,875 \\ -0,375 & 0,5 & 0,5 & -0,125 \\ -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{array} \right] \quad (8)$$

b-2)  $(\frac{1}{2}A^T)^{-1}$ . Isso é o mesmo que  $2(A^{-1})^T$ , logo:

$$(A^{-1})^T = 2 \times \left[ \begin{array}{cccc} -0,375 & -0,375 & -0,25 & 0,875 \\ -1,5 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ -1,5 & 0,5 & -1 & 0,5 \\ 0,875 & -0,125 & 0,25 & -0,375 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cccc} -0,75 & -0,75 & -0,5 & 1,75 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1,75 & -0,25 & 0,5 & -0,75 \end{array} \right] \quad (9)$$

Questão 05) Exercícios com python.

a) Responda a questão 2 e a questão 4(b) usando Python. Especifique os comandos utilizados em cada uma e as respostas (ou os erros) obtidas<sup>1</sup>.

4-b)

---

<sup>1</sup>Utilizou-se as *libraries* Pandas e Numpy para cálculo de todas as operações

---

```

import numpy as np

# Cria as matrizes
A = np.array([[1, 1, 0, 2], [1, 3, 1, 2], [1, 2, -1, 1], [5, 9, 0, 6]])

# Calcula  $A^{-1}$ 
M = np.linalg.inv(A)
# Seta precisao de 3 decimais
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True)

# Imprime valor
print(M)

#  $\begin{bmatrix} -0.375 & -1.5 & -1.5 & 0.875 \\ -0.375 & 0.5 & 0.5 & -0.125 \\ -0.25 & -0. & -1. & 0.25 \\ 0.875 & 0.5 & 0.5 & -0.375 \end{bmatrix}$ 

# Calcula  $(1/2A^T)^{-1}$ 
M2 = np.linalg.inv(0.5 * A.transpose())

print(M2)

#  $\begin{bmatrix} -0.75 & -0.75 & -0.5 & 1.75 \\ -3. & 1. & -0. & 1. \\ -3. & 1. & -2. & 1. \\ 1.75 & -0.25 & 0.5 & -0.75 \end{bmatrix}$ 

```

---

2-a)  $AB - BA$

---

```

import pandas as pd

# Cria as matrizes
A = pd.DataFrame([[2, 0], [6, 7]])
B = pd.DataFrame([[0, 4], [2, -8]])

# Calcula  $AB - BA$ 
M = A.dot(B) - B.dot(A)

# Imprime valor
print(M)

#  $\begin{matrix} & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -20 \end{matrix}$ 

```



```
# 1 58 24
```

---

2-b)  $2C - D$ . Efetua-se a subtração apenas das linhas que são possíveis retornando NaN (not a number) nas que não são possíveis.

---

```
import pandas as pd

C = pd.DataFrame([[-6, 9, -7], [7, -3, -2]])
D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])

# Calcula 2C-D (calculo pode ser feito diretamente)
M = 2*C-D

# Imprime valor
print(M)

#      0      1      2
# 0  -6.0  14.0 -14.0
# 1  13.0  -7.0  -8.0
# 2   NaN   NaN   NaN
```

---

2-c)  $(2D^T - 3E^T)^T$ .

---

```
import pandas as pd

# Cria as matrizes
D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])

# Calcula (2D^T-3E^T)
M = 2*D.T-3*E.T
# Calcula a transposta de M
MT = M.T
# Imprime valor
print(MT)

#      0      1      2
# 0 -30 -19  27
# 1   5   2  20
# 2   6   0  15
```

---

2-d)  $D^2 - DE$ .

---

```
import pandas as pd
```

```

# Cria as matrizes
D = pd.DataFrame([[ -6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])

# Calcula  $D^2 - DE$ 
M = D.dot(D) - D.dot(E)
# Imprime valor
print(M)

#      0      1      2
# 0   80   34  -22
# 1  -10   -4   45
# 2   72   30  -12

```

---

2-d)  $(DC)^T$ . Erro quando calcula a multiplicação entre D e C

---

```

import pandas as pd

# Cria as matrizes
A = pd.DataFrame([[2, 0], [6, 7]])
B = pd.DataFrame([[0, 4], [2, -8]])
C = pd.DataFrame([[ -6, 9, -7], [7, -3, -2]])
D = pd.DataFrame([[ -6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])

# Calcula DC
M = D.dot(C)
# Calcula  $M^T$ 
MT = M.T
# Imprime valor
print(MT)

# Error in M = D.dot(C)
# raise ValueError("matrices are not aligned")
# ValueError: matrices are not aligned

```

---

b) Realize o seguinte experimento para tentar ter uma ideia de quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. Em Python, digite as seguintes linhas de comando:

---

```

import numpy as np
c=0

for i in range(10000):
    A=np.random.randint(-5,5,size=(3,3))
    B=np.random.randint(-5,5,size=(3,3))

```

```
C=A@B==B@A
if C.all():
    c=c+1
print(c)
```

---

Na primeira linha é o *import* da *library*, na segunda atribuição de valor a uma variável inteira, na terceira o início do loop até 10000, na quarta e quinta duas matrizes randômicas de tamanho  $3 \times 3$  para as variáveis A e B, na sexta a comparação de igualdade entre os produtos  $A@B$  e  $B@A$  (verificando a comutação), na sétima a condição de que se ambos forem iguais a variável C é incrementada em 1, na oitava linha o valor de c é impresso.

A variável c poderá ter valores entre 0 e 10000, pois o loop é executado 10000 vezes, dependendo apenas se o produto  $A@B$  é igual a  $B@A$  ou não. As matrizes A e B são geradas randômicamente e podem ter valores entre -5 e 5 e a comutação pode não ocorrer em todos os casos.

c) Realize o seguinte experimento para tentar ter uma ideia de quão comum é encontrar matrizes invertíveis. Em Python, digite as seguintes linhas de comando:

---

```
import numpy as np
c=0
for i in range(10000):
    A=np.random.randint(-5,5,size=(4,4))
    if np.linalg.det(A) != 0:
        c+=1

print(c)
```

---

Na primeira linha é o *import* da *library*, na segunda atribuição de valor a uma variável inteira, na terceira o início do loop até 10000, na quarta e quinta uma matriz randômica de tamanho  $4 \times 4$  para a variável A, na sexta a condição de que se o determinante for diferente de 0 a variável c é incrementada em 1, na sétima linha o valor de c é impresso.

A variável c poderá ter valores entre 0 e 10000, pois o loop é executado 10000 vezes, dependendo apenas se o determinante for diferente de 0 ou não. As matrizes A são geradas randômicamente e podem ter valores entre -5 e 5.