Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da terceira lista de exercício

Questão 01) Lembre que uma matriz quadrada é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Mostre que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares inferiores de ordem 5 é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$.

Para demonstrar que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$, é necessário obedecer determinados requisitos. Tendo os atendido, então todos os axiomas de um espaço vetorial são obedecidos.

1. Se u e v pertencem a V_1, então $u + v$ pertencem a M_5;
2. Se a for um escalar qualqur e u pertence a V_1, então au pertence a M_5.

Para a primeira condição:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 & 0 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & 0 \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} \end{bmatrix} =$$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31}+v_{31} & u_{32}+v_{32} & u_{33}+v_{33} & 0 & 0 \\ u_{41}+v_{41} & u_{42}+v_{42} & u_{43}+v_{43} & u_{44}+v_{44} & 0 \\ u_{51}+v_{51} & u_{52}+v_{52} & u_{53}+v_{53} & u_{54}+v_{54} & u_{55}+v_{55} \end{bmatrix}$$

Para a segunda condição:

$$au = \begin{bmatrix} au_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ au_{21} & au_{22} & 0 & 0 & 0 \\ au_{31} & au_{32} & au_{33} & 0 & 0 \\ au_{41} & au_{42} & au_{43} & au_{44} & 0 \\ au_{51} & au_{52} & au_{53} & au_{54} & au_{55} \end{bmatrix}$$

Para ambas as condições, a matriz resultando é uma matriz triangular inferior de dimensão 5×5 na qual é possivel executar todas as operações realizáveis em uma matriz de dimensão 5×5 e que satisfazem os 10 axiomas definidores de um espaço vetorial.

Questão 02) Seja V um espaço vetorial real e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores de V linearmente independentes. Mostre que v_1, $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$, $v_4 - v_1$ são linearmente independentes

Temos que em V os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são LI. Para isso, há a condição de que nenhum deles pode ser nulo. Assim, $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$ além de que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Para mostrarmos que essa relação entre os vetores é também LI, faz-se $k_1v_1 + k_2(v_2 - v_1) + k_3(v_3 - v_1) + k_4(v_4 - v_1) = 0$. Ou ainda, simplificando:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4)v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$

E sabendo que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \to (k_1 - 0 - 0 - 0) = 0$$

O que implica em k_1 ser igual a zero também e atender a condição $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, fazendo com que essa combinação de vetores seja linearmente independentes (LI).

Questão 03) Se A é uma matriz arbitrária de tamanho $m \times n$, o espaço nulo de A é definido como sendo o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. A dimensão do espaço nulo de A é chamada de nulidade de A.

1. Se A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a nulidade de A e uma base para o espaço nulo de A.

Primeiramente, reduz-se a matriz aumentada do sistema homogêneo $Ax = 0$ a forma escalonada:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{11}\!/_2 & {}^{5}\!/_2 & {}^{1}\!/_2 & 0 \end{array}\right]$$

Sabemos que o posto da matriz é dado pela quantidade de linhas não nulas da matriz escalonada. Isto é, tem-se um $p(A) = 2$. A nulidade é dada pelo número de colunas da matriz A escalonada subtraído pelo posto da matriz. Ou seja, $nulidade(A) = 4 - p(A) = 2$.

Para encontrar uma base de A, resolve-se o sistema escalonado $Ax = 0$ obtendo x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e isso implica no mesmo que reorganizar em:

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -{}^{2}\!/_{11} \\ {}^{5}\!/_{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -{}^{7}\!/_{11} \\ {}^{1}\!/_{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base para o espaço nulo de A é formada pelos vetores entre colchetes, ou seja, $\{(-{}^{2}/_{11}, {}^{5}/_{11}, 1, 0), (-{}^{7}/_{11}, {}^{1}/_{11}, 0, 1)\}$

2. Verifique que o vetor $v = (-10, 1, -1, 16)$ pertence ao espaço nulo de A e determine as coordenadas deste vetor na base que você encontrou no item anterior.

   Para isso, devemos resolver o sistema $(-10, 1, -1, 16) = \alpha_1(-{}^{2}/_{11}, {}^{5}/_{11}, 1, 0) + \alpha_2(-{}^{7}/_{11}, {}^{1}/_{11}, 0, 1)$ obtendo os valores de α:

$$\begin{cases} -\frac{2}{11}\alpha_1 - \frac{7}{11}\alpha_2 = -10 \\ \frac{5}{11}\alpha_1 + \frac{1}{11}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 = -1 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 16 \end{cases}$$

   O que claramente nos dá os valores de $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 16$. Assim, $[v]_S = (-1, 16)$.

Questão 04) Seja V um espaço vetorial real com produto interno e u, v, w vetores de V tais que:

$$\langle u, v\rangle = 2 \quad \langle v, w\rangle = -3 \quad \langle u, w\rangle = 5 \quad \|u\| = 6 \quad \|v\| = 2 \quad \|w\| = 7$$

Calcule:

a) $\langle 2v - w, u + 3w\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 2v - w, u + 3w\rangle &= \langle 2v, u + 3w\rangle - \langle w, u + 3w\rangle \\ &2\langle v, u\rangle + 2\langle v, 3w\rangle - \langle w, u\rangle - \langle w, 3w\rangle \\ &2\langle v, u\rangle + 6\langle v, w\rangle - \langle w, u\rangle - 3\langle w, w\rangle \\ &2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) - 5 - 3 \cdot 7^2 = -166 \end{aligned}$$

b) $\langle u - v - 2w, 4u + v\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle u - v - 2w, 4u + v\rangle &= \langle u, 4u + v\rangle - \langle v, 4u + v\rangle - \langle 2w, 4u + v\rangle \\ &\langle u, 4u\rangle + \langle u, v\rangle - \langle v, 4u\rangle - \langle v, v\rangle - \langle 2w, 4u\rangle - \langle 2w, v\rangle \\ &4\langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle - 4\langle v, u\rangle - \langle v, v\rangle - 8\langle w, u\rangle - 2\langle w, v\rangle \\ &4 \cdot 6^2 + 2 - 4 \cdot 2 - 2^2 - 8 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 100 \end{aligned}$$

c) $d(u,v)$:

$$
\begin{aligned}
d(u,v) = \|u-v\| &= \sqrt{(u-v)(u-v)} \\
&\sqrt{\|u\|^2 - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \|v\|^2} \\
&\sqrt{36-4+4} = 6
\end{aligned}
$$

d) $\|u-2v+4w\|$:

$$
\begin{aligned}
\|u-2v+4w\| &= \sqrt{(u-2v+4w)(u-2v+4w)} \\
&\sqrt{\|u\|^2 - 4\langle u,v\rangle + 8\langle u,w\rangle + 4\|v\|^2 - 16\langle v,w\rangle + 16\|w\|^2} \\
&\sqrt{6^2 - 4\cdot 2 + 8\cdot 5 + 4\cdot 2^2 - 16\cdot(-3) + 16\cdot 7^2} = \sqrt{916}
\end{aligned}
$$

e) O cosseno do ângulo entre os vetores u e v:

$$
\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|}
$$

$$
\cos\theta = \frac{2}{6\cdot 2} = \frac{1}{6}
$$

f) O cosseno do ângulo entre os vetores $u+v$ e $v-w$:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\langle u+v, v-w\rangle}{\|u+v\|\|v-w\|} \\
&\frac{\langle u,v\rangle + \langle v,v\rangle - \langle u,w\rangle - \langle v,w\rangle}{\sqrt{(u+v)^2}\cdot\sqrt{(v-w)^2}} \\
&\frac{2+4-5+3}{\sqrt{6^2+2\cdot 2+2^2}\cdot\sqrt{2^2-2(-3)+7^2}} \\
&\frac{4}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{59}} = \frac{4}{\sqrt{2596}}
\end{aligned}
$$

Questão 05) Considere o espaço vetorial $M_{2\times 3}\mathbb{R}$ com o produto interno $\langle U,V\rangle = tr(U^T V)$. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_6 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

numa base ortogonal. **Sugestão:** Use o Python para se auxiliar nos cálculos matriciais necessários.

O processo de Gram-Schmidt consiste no somatório a seguir para cada vetor da base:

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

O codigo python para a transformação de base ortogonal é:

```python
import numpy as np
from fractions import Fraction

# Definindo impressao em formato fracionado
np.set_printoptions(formatter={"all": lambda o: str(Fraction(o)
.limit_denominator())})


# Calcula o traco
def trace(u, v):
    return np.trace(u.T @ v)


def proj(u, v):
    return trace(u, v) / trace(v, v)


# dic com valores de U
f = {
    "U1": np.array([[1, 0, 2], [0, 1, 1]]),
    "U2": np.array([[1, 2, 1], [1, 1, 1]]),
    "U3": np.array([[1, 2, 0], [0, 3, 1]]),
    "U4": np.array([[1, 0, 1], [-1, 1, 1]]),
    "U5": np.array([[0, 4, 1], [-1, 1, 0]]),
```

```
    "U6": np.array([[1, -3, 2], [0, 0, 0]])
}
# Calculos de V
V1 = f["U1"]
print(f"V1:\n{V1}")

V2 = f["U2"] - proj(f["U2"], V1) * V1
print(f"V2:\n{V2}")

V3 = f["U3"] - proj(f["U3"], V1) * V1 - proj(f["U3"], V2) * V2
print(f"V3:\n{V3}")

V4 = f["U4"] - proj(f["U4"], V1) * V1 - proj(f["U4"], V2) * V2
- proj(f["U4"], V3) * V3
print(f"V4:\n{V4}")

V5 = f["U5"] - proj(f["U5"], V1) * V1 - proj(f["U5"], V2) * V2
- proj(f["U5"], V3) * V3 - proj(f["U5"], V4) * V4
print(f"V5:\n{V5}")

V6 = f["U6"] - proj(f["U6"], V1) * V1 - proj(f["U6"], V2) * V2
- proj(f["U6"], V3) * V3 - proj(f["U6"], V4) * V4 - proj(f["U6"],
V5) * V5
print(f"V6:\n{V6}")

# V1:
# [[1 0 2]
#  [0 1 1]]
# V2:
# [[2/7 2 -3/7]
#  [1 2/7 2/7]]
# V3:
# [[0 0 -1]
#  [-1 2 0]]
# V4:
# [[6/19 4/19 -8/57]
#  [-32/57 -20/57 6/19]]
# V5:
# [[-6/5 6/5 6/5]
#  [-6/5 0 -6/5]]
# V6:
# [[1/2 0 0]
#  [0 0 -1/2]]
```