

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da quarta lista de exercício

Questão 01) Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$. Determine se as seguintes funções são transformações lineares ou não. Justifique!

a) $T : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ com $T(U) = \|U\|$:

Devemos considerar a soma e a multiplicação por uma constante e $\|U\| = \sqrt{\text{tr}(U^T U)}$. Assim sendo, tendo a matriz U :

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad U^T = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Assim:

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_{11}u_{11} & u_{21}u_{21} & u_{11}u_{12} & u_{21}u_{22} \\ u_{12}u_{11} & u_{22}u_{21} & u_{12}u_{12} & u_{22}u_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(U^T U) &= u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2 \\ T(U) = \|U\| &= \sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2} \end{aligned}$$

1) Para a multiplicação por uma contante α :

$$\begin{aligned} T(\alpha U) &= \sqrt{\alpha^2(u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2)} \\ T(\alpha U) &= \alpha \sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2} \\ T(\alpha U) &= \alpha T(U) \end{aligned}$$

1) Para a soma com uma matriz V :

$$\begin{aligned}T(U + V) &= \sqrt{(u_{11} + v_{11})^2 + (u_{21} + v_{21})^2 + (u_{12} + v_{12})^2 + (u_{22} + v_{22})^2} \\T(U) + T(V) &= \sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2} + \sqrt{v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{12}^2 + v_{22}^2} \\T(U + V) &\neq T(U) + T(V)\end{aligned}$$

Sendo assim, **não é uma transformação linear**, já que $T(U + v) = 0$ e $T(U) + T(V) = 2T(U)$, sendo $V = -U$.

Questão 02) Seja V um espaço vetorial real e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores de V linearmente independentes. Mostre que $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1$ são linearmente independentes

Temos que em V os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são LI. Para isso, há a condição de que nenhum deles pode ser nulo. Assim, $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$ além de que $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Para mostrarmos que essa relação entre os vetores é também LI, faz-se $k_1v_1 + k_2(v_2 - v_1) + k_3(v_3 - v_1) + k_4(v_4 - v_1) = 0$. Ou ainda, simplificando:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4)v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$

E sabendo que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4) \rightarrow (k_1 - 0 - 0 - 0) = 0$$

O que implica em k_1 ser igual a zero também e atender a condição $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, fazendo com que essa combinação de vetores seja linearmente independentes (LI).

Questão 03) Se A é uma matriz arbitrária de tamanho $m \times n$, o espaço nulo de A é definido como sendo o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n formado pelas soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. A dimensão do espaço nulo de A é chamada de nulidade de A .

1. Se A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a nulidade de A e uma base para o espaço nulo de A .

Primeiramente, reduz-se a matriz aumentada do sistema homogêneo $Ax = 0$ a forma escalonada reduzida por linhas:

$$\begin{aligned} A &= \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2} \\ &\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -11/6 & 5/6 & 2/6 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{6}{11}R_2 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{R_1 - \frac{3}{2}R_2 \rightarrow R_1} \\ &A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/11 & 7/11 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

Sabemos que o posto da matriz é dado pela quantidade de linhas não nulas da matriz escalonada. Isto é, tem-se um $p(A) = 2$. A nulidade é dada pelo número de colunas da matriz A escalonada subtraído pelo posto da matriz. Ou seja, $\text{nulidade}(A) = 4 - p(A) = 2$.

Para encontrar uma base de A , resolve-se o sistema escalonado $Ax = 0$ obtendo x :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e isso implica no mesmo que reorganizar em:

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2/11 \\ 5/11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -7/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base para o espaço nulo de A é formada pelos vetores entre colchetes, ou seja, $\{(-2/11, 5/11, 1, 0), (-7/11, 1/11, 0, 1)\}$

2. Verifique que o vetor $v = (-10, 1, -1, 16)$ pertence ao espaço nulo de A e determine as coordenadas deste vetor na base que você encontrou no item anterior.

Para isso, devemos resolver o sistema $(-10, 1, -1, 16) = \alpha_1(-2/11, 5/11, 1, 0) + \alpha_2(-7/11, 1/11, 0, 1)$ obtendo os valores de α :

$$\begin{cases} -\frac{2}{11}\alpha_1 - \frac{7}{11}\alpha_2 = -10 \\ \frac{5}{11}\alpha_1 + \frac{1}{11}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 = -1 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 16 \end{cases}$$

O que claramente nos dá os valores de $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 16$. Assim, $[v]_S = (-1, 16)$.

Questão 04) Seja V um espaço vetorial real com produto interno e u, v, w vetores de V tais que:

$$\langle u, v \rangle = 2 \quad \langle v, w \rangle = -3 \quad \langle u, w \rangle = 5 \quad \|u\| = 6 \quad \|v\| = 2 \quad \|w\| = 7$$

Calcule:

a) $\langle 2v - w, u + 3w \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle 2v - w, u + 3w \rangle &= \langle 2v, u + 3w \rangle - \langle w, u + 3w \rangle \\ &= 2\langle v, u \rangle + 2\langle v, 3w \rangle - \langle w, u \rangle - \langle w, 3w \rangle \\ &= 2\langle v, u \rangle + 6\langle v, w \rangle - \langle w, u \rangle - 3\langle w, w \rangle \\ &= 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) - 5 - 3 \cdot 7^2 = -166\end{aligned}$$

b) $\langle u - v - 2w, 4u + v \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle u - v - 2w, 4u + v \rangle &= \langle u, 4u + v \rangle - \langle v, 4u + v \rangle - \langle 2w, 4u + v \rangle \\ &= \langle u, 4u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, 4u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle 2w, 4u \rangle - \langle 2w, v \rangle \\ &= 4\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle - 4\langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle - 8\langle w, u \rangle - 2\langle w, v \rangle \\ &= 4 \cdot 6^2 + 2 - 4 \cdot 2 - 2^2 - 8 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 100\end{aligned}$$

c) $d(u, v)$:

$$\begin{aligned}d(u, v) &= \|u - v\| = \sqrt{(u - v)(u - v)} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \|v\|^2} \\ &= \sqrt{36 - 4 + 4} = 6\end{aligned}$$

d) $\|u - 2v + 4w\|$:

$$\begin{aligned}\|u - 2v + 4w\| &= \sqrt{(u - 2v + 4w)(u - 2v + 4w)} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 - 4\langle u, v \rangle + 8\langle u, w \rangle + 4\|v\|^2 - 16\langle v, w \rangle + 16\|w\|^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 2^2 - 16 \cdot (-3) + 16 \cdot 7^2} = \sqrt{916}\end{aligned}$$

e) O cosseno do ângulo entre os vetores u e v :

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \\ \cos \theta &= \frac{2}{6 \cdot 2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

f) O cosseno do ângulo entre os vetores $u + v$ e $v - w$:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\langle u + v, v - w \rangle}{\|u + v\| \|v - w\|} \\&= \frac{\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle - \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle}{\sqrt{(u + v)^2} \cdot \sqrt{(v - w)^2}} \\&= \frac{2 + 4 - 5 + 3}{\sqrt{6^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 - 2(-3) + 7^2}} \\&= \frac{4}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{59}} = \frac{4}{\sqrt{2596}}\end{aligned}$$

Questão 05) Considere o espaço vetorial $M_{2 \times 3} \mathbb{R}$ com o produto interno $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base

$$\begin{aligned}U_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\U_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & U_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

numa base ortogonal. **Sugestão:** Use o Python para se auxiliar nos cálculos matriciais necessários.

O processo de Gram-Schmidt consiste no somatório a seguir para cada vetor da base:

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

O código python para a transformação de base ortogonal é:

```
import numpy as np
from fractions import Fraction

# Definindo impressao em formato fracionado
np.set_printoptions(formatter={"all": lambda o: str(Fraction(o)
.limit_denominator())})
```

```

# Calcula o traco
def trace(u, v):
    return np.trace(u.T @ v)

def proj(u, v):
    return trace(u, v) / trace(v, v)

# dic com valores de U
f = {
    "U1": np.array([[1, 0, 2], [0, 1, 1]]),
    "U2": np.array([[1, 2, 1], [1, 1, 1]]),
    "U3": np.array([[1, 2, 0], [0, 3, 1]]),
    "U4": np.array([[1, 0, 1], [-1, 1, 1]]),
    "U5": np.array([[0, 4, 1], [-1, 1, 0]]),
    "U6": np.array([[1, -3, 2], [0, 0, 0]])
}

# Calculos de V
V1 = f["U1"]
print(f"V1:\n{V1}")

V2 = f["U2"] - proj(f["U2"], V1) * V1
print(f"V2:\n{V2}")

V3 = f["U3"] - proj(f["U3"], V1) * V1 - proj(f["U3"], V2) * V2
print(f"V3:\n{V3}")

V4 = f["U4"] - proj(f["U4"], V1) * V1 - proj(f["U4"], V2) * V2
- proj(f["U4"], V3) * V3
print(f"V4:\n{V4}")

V5 = f["U5"] - proj(f["U5"], V1) * V1 - proj(f["U5"], V2) * V2
- proj(f["U5"], V3) * V3 - proj(f["U5"], V4) * V4
print(f"V5:\n{V5}")

V6 = f["U6"] - proj(f["U6"], V1) * V1 - proj(f["U6"], V2) * V2
- proj(f["U6"], V3) * V3 - proj(f["U6"], V4) * V4 - proj(f["U6"],
V5) * V5
print(f"V6:\n{V6}")

# V1:
# [[1 0 2]
#  [0 1 1]]

```

```
# V2:
# [[2/7 2 -3/7]
#  [1 2/7 2/7]]
# V3:
# [[0 0 -1]
#  [-1 2 0]]
# V4:
# [[6/19 4/19 -8/57]
#  [-32/57 -20/57 6/19]]
# V5:
# [[-6/5 6/5 6/5]
#  [-6/5 0 -6/5]]
# V6:
# [[1/2 0 0]
#  [0 0 -1/2]]
```