Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da quarta lista de exercício

Questão 01) Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ com o produto interno dado por $\langle U, V\rangle = tr(U^TV)$. Determine se as seguintes funções são transformações lineares ou não. Justifique!

a) $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ com $T(U) = \|U\|$:

Devemos considerar a soma e a multiplicação por uma constante e $\|U\| = \sqrt{tr(U^TU)}$. Assim sendo, tendo a matriz U:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad U^T = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{bmatrix}$$

Assim:

$$U^TU = \begin{bmatrix} u_{11}u_{11} & u_{21}u_{21} & u_{11}u_{12} & u_{21}u_{22} \\ u_{12}u_{11} & u_{22}u_{21} & u_{12}u_{12} & u_{22}u_{22} \end{bmatrix}$$

$$tr(U^TU) = u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2$$
$$T(U) = \|U\| = \sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2}$$

1) Para a multiplicação por uma contante α:

$$T(\alpha U) = \sqrt{\alpha^2(u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2)}$$
$$T(\alpha U) = \alpha\sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2}$$
$$T(\alpha U) = \alpha T(U)$$

1) Para a soma com uma matriz V:

$$T(U+V) = \sqrt{(u_{11}+v_{11})^2 + (u_{21}+v_{21})^2 + (u_{12}+v_{12})^2 + (u_{22}+v_{22})^2}$$
$$T(U)+T(V) = \sqrt{u_{11}^2 + u_{21}^2 + u_{12}^2 + u_{22}^2} + \sqrt{v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{12}^2 + v_{22}^2}$$
$$T(U+V) \neq T(U)+T(V)$$

Sendo assim, não é uma transformação linear, já que $T(U+v) = 0$ e $T(U)+T(V) = 2T(U)$, sendo $V = -U$.

b) Se B é uma matriz fixa de tamanho 2×3, $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_{2\times3}(\mathbb{R})$ com $T(U) = UB$:

Temos as três matrizes:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

Assim sendo, temos:

$$T(U) = \begin{bmatrix} u_{11}b_{11} + u_{12}b_{21} & u_{11}b_{12} + u_{12}b_{22} & u_{11}b_{13} + u_{12}b_{23} \\ u_{21}b_{11} + u_{22}b_{21} & u_{21}b_{12} + u_{22}b_{22} & u_{21}b_{13} + u_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

1) Para a multiplicação por uma contante α:

$$T(\alpha U) = \begin{bmatrix} \alpha(u_{11}b_{11} + u_{12}b_{21}) & \alpha(u_{11}b_{12} + u_{12}b_{22}) & \alpha(u_{11}b_{13} + u_{12}b_{23}) \\ \alpha(u_{21}b_{11} + u_{22}b_{21}) & \alpha(u_{21}b_{12} + u_{22}b_{22}) & \alpha(u_{21}b_{13} + u_{22}b_{23}) \end{bmatrix}$$
$$T(\alpha U) = \alpha \begin{bmatrix} u_{11}b_{11} + u_{12}b_{21} & u_{11}b_{12} + u_{12}b_{22} & u_{11}b_{13} + u_{12}b_{23} \\ u_{21}b_{11} + u_{22}b_{21} & u_{21}b_{12} + u_{22}b_{22} & u_{21}b_{13} + u_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$
$$T(\alpha U) = \alpha T(U)$$

2) Para a adição de uma matriz V:

$$T(U+V)=\begin{bmatrix}(u_{11}+v_{11})b_{11}+(u_{12}+v_{12})b_{21} & \cdots & (u_{11}+v_{11})b_{13}+(u_{12}+v_{12})b_{23}\\(u_{21}+v_{21})b_{11}+(u_{22}+v_{22})b_{21} & \cdots & (u_{21}+v_{21})b_{13}+(u_{22}+v_{22})b_{23}\end{bmatrix}$$
$$T(U+V)=\begin{bmatrix}(u_{11}b_{11}+u_{12}b_{21})+(v_{11}b_{11}+v_{12}b_{21}) & \cdots & (u_{11}b_{13}+u_{12}b_{23})+(v_{11}b_{13}+v_{12}b_{23})\\(u_{21}b_{11}+u_{22}b_{21})+(v_{21}b_{11}+v_{22}b_{21}) & \cdots & (u_{21}b_{13}+u_{22}b_{23})+(v_{21}b_{13}+v_{22}b_{23})\end{bmatrix}$$
$$T(U+V)=T(U)+T(V)$$

Sendo assim, é uma transformação linear, já que ambas as condições são satisfeitas.

Questão 02) Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(1,0)=(1,-1)$ e $T(0,1)=(1,1)$. Determine:

a) $T(2,3)$:

$$T(2,3)=T(2,0)+T(0,3)$$
$$T(2,3)=2T(1,0)+3T(0,1)$$
$$T(2,3)=2(1,-1)+3(1,1)$$
$$T(2,3)=(5,1)$$

b) O vetor $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y)=(4,-2)$:

$$T(x,y)=(4,-2)$$
$$T(x,y)=3(1,-1)+(1,1)$$
$$T(x,y)=3T(1,0)+T(0,1)$$
$$T(x,y)=T(3,1)$$
$$(x,y)=(3,1)$$

c) O núcleo e a imagem de T:

Sabemos que $(x{,}y)$ é igual a:

$$(x{,}y) = vT(0{,}1) + uT(1{,}0)$$
$$(x{,}y) = v(1{,}1) + u(1{,}-1)$$

com $x = u + v$ e $y = v - u$.

$$u + v = v - u$$
$$u = -u$$
$$2u = 0$$
$$u = 0$$

Assim sendo, $(0{,}0) = v(1{,}1)$, $v = 0$ e o núcleo desse vetor $(0{,}0)$ será dado como:

$$T(x{,}y) = yT(0{,}1) + xT(1{,}0)$$
$$T(x{,}y) = y(1{,}1) + x(1{,}-1)$$
$$T(x{,}y) = (y{,}y) + (x{,}-x)$$
$$T(x{,}y) = (y + x{,}y - x)$$

Questão 03) Se A é uma matriz arbitrária de tamanho $m \times n$, o espaço nulo de A é definido como sendo o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. A dimensão do espaço nulo de A é chamada de nulidade de A.

1. Se A é a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
Determine a nulidade de A e uma base para o espaço nulo de A.

Primeiramente, reduz-se a matriz aumentada do sistema homogêneo $Ax = 0$ a forma escalonada reduzida por linhas:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_1 \to R_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \frac{1}{3}R_2 \to R_2$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 \end{array}\right] R_2 - R_1 \to R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -11/6 & 5/6 & 2/6 & 0 \end{array}\right]$$
$$-\frac{6}{11}R_2 \to R_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 0 \end{array}\right] R_1 - \frac{3}{2}R_2 \to R_1$$
$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2/11 & 7/11 & 0 \\ 0 & 1 & -5/11 & -1/11 & 0 \end{array}\right] \tag{1}$$

Sabemos que o posto da matriz é dado pela quantidade de linhas não nulas da matriz escalonada. Isto é, tem-se um $p(A) = 2$. A nulidade é dada pelo número de colunas da matriz A escalonada subtraído pelo posto da matriz. Ou seja, $nulidade(A) = 4 - p(A) = 2$.

Para encontrar uma base de A, resolve-se o sistema escalonado $Ax = 0$ obtendo x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e isso implica no mesmo que reorganizar em:

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2/11 \\ 5/11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -7/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base para o espaço nulo de A é formada pelos vetores entre colchetes, ou seja, $\{(-{}^2/_{11}, {}^5/_{11}, 1, 0), (-{}^7/_{11}, {}^1/_{11}, 0, 1)\}$

2. Verifique que o vetor $v = (-10, 1, -1, 16)$ pertence ao espaço nulo de A e determine as coordenadas deste vetor na base que você encontrou no item anterior.

   Para isso, devemos resolver o sistema $(-10, 1, -1, 16) = \alpha_1(-{}^2/_{11}, {}^5/_{11}, 1, 0) + \alpha_2(-{}^7/_{11}, {}^1/_{11}, 0, 1)$ obtendo os valores de α:

$$\begin{cases} -\frac{2}{11}\alpha_1 - \frac{7}{11}\alpha_2 = -10 \\ \frac{5}{11}\alpha_1 + \frac{1}{11}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 = -1 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 16 \end{cases}$$

   O que claramente nos dá os valores de $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 16$. Assim, $[v]_S = (-1, 16)$.

Questão 04) Seja V um espaço vetorial real com produto interno e u, v, w vetores de V tais que:

$$\langle u,v\rangle = 2 \quad \langle v,w\rangle = -3 \quad \langle u,w\rangle = 5 \quad \|u\| = 6 \quad \|v\| = 2 \quad \|w\| = 7$$

Calcule:

a) $\langle 2v - w, u + 3w\rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 2v - w, u + 3w\rangle &= \langle 2v, u + 3w\rangle - \langle w, u + 3w\rangle \\ &2\langle v,u\rangle + 2\langle v,3w\rangle - \langle w,u\rangle - \langle w,3w\rangle \\ &2\langle v,u\rangle + 6\langle v,w\rangle - \langle w,u\rangle - 3\langle w,w\rangle \\ &2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) - 5 - 3 \cdot 7^2 = -166 \end{aligned}$$

b) $\langle u - v - 2w, 4u + v\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle u - v - 2w, 4u + v\rangle = \langle u{,}4u + v\rangle - \langle v{,}4u + v\rangle - \langle 2w{,}4u + v\rangle\\ \langle u{,}4u\rangle + \langle u{,}v\rangle - \langle v{,}4u\rangle - \langle v{,}v\rangle - \langle 2w{,}4u\rangle - \langle 2w{,}v\rangle\\ 4\langle u{,}u\rangle + \langle u{,}v\rangle - 4\langle v{,}u\rangle - \langle v{,}v\rangle - 8\langle w{,}u\rangle - 2\langle w{,}v\rangle\\ 4 \cdot 6^2 + 2 - 4 \cdot 2 - 2^2 - 8 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 100\end{aligned}$$

c) $d(u{,}v)$:

$$\begin{aligned}d(u{,}v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v)(u - v)}\\ \sqrt{\|u\|^2 - \langle u{,}v\rangle - \langle v{,}u\rangle + \|v\|^2}\\ \sqrt{36 - 4 + 4} = 6\end{aligned}$$

d) $\|u - 2v + 4w\|$:

$$\begin{aligned}\|u - 2v + 4w\| = \sqrt{(u - 2v + 4w)(u - 2v + 4w)}\\ \sqrt{\|u\|^2 - 4\langle u{,}v\rangle + 8\langle u{,}w\rangle + 4\|v\|^2 - 16\langle v{,}w\rangle + 16\|w\|^2}\\ \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 2^2 - 16 \cdot (-3) + 16 \cdot 7^2} = \sqrt{916}\end{aligned}$$

e) O cosseno do ângulo entre os vetores u e v:

$$\cos\theta = \frac{\langle u{,}v\rangle}{\|u\|\|v\|}$$
$$\cos\theta = \frac{2}{6 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

f) O cosseno do ângulo entre os vetores $u + v$ e $v - w$:

$$\begin{aligned}\cos\theta = \frac{\langle u + v{,}v - w\rangle}{\|u + v\|\|v - w\|}\\ \frac{\langle u, v\rangle + \langle v{,}v\rangle - \langle u{,}w\rangle - \langle v{,}w\rangle}{\sqrt{(u + v)^2} \cdot \sqrt{(v - w)^2}}\\ \frac{2 + 4 - 5 + 3}{\sqrt{6^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 - 2(-3) + 7^2}}\\ \frac{4}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{59}} = \frac{4}{\sqrt{2596}}\end{aligned}$$

Questão 05) Considere o espaço vetorial $M_{2\times 3}\mathbb{R}$ com o produto interno $\langle U, V\rangle = tr(U^T V)$. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$U_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad U_5 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad U_6 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

numa base ortogonal. **Sugestão:** Use o Python para se auxiliar nos cálculos matriciais necessários.

O processo de Gram-Schmidt consiste no somatório a seguir para cada vetor da base:

$$v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

O codigo python para a transformação de base ortogonal é:

```
import numpy as np
from fractions import Fraction

# Definindo impressao em formato fracionado
np.set_printoptions(formatter={"all": lambda o: str(Fraction(o)
.limit_denominator())})


# Calcula o traco
def trace(u, v):
    return np.trace(u.T @ v)


def proj(u, v):
    return trace(u, v) / trace(v, v)


# dic com valores de U
f = {
```

```python
    "U1": np.array([[1, 0, 2], [0, 1, 1]]),
    "U2": np.array([[1, 2, 1], [1, 1, 1]]),
    "U3": np.array([[1, 2, 0], [0, 3, 1]]),
    "U4": np.array([[1, 0, 1], [-1, 1, 1]]),
    "U5": np.array([[0, 4, 1], [-1, 1, 0]]),
    "U6": np.array([[1, -3, 2], [0, 0, 0]])
}
# Calculos de V
V1 = f["U1"]
print(f"V1:\n{V1}")

V2 = f["U2"] - proj(f["U2"], V1) * V1
print(f"V2:\n{V2}")

V3 = f["U3"] - proj(f["U3"], V1) * V1 - proj(f["U3"], V2) * V2
print(f"V3:\n{V3}")

V4 = f["U4"] - proj(f["U4"], V1) * V1 - proj(f["U4"], V2) * V2
- proj(f["U4"], V3) * V3
print(f"V4:\n{V4}")

V5 = f["U5"] - proj(f["U5"], V1) * V1 - proj(f["U5"], V2) * V2
- proj(f["U5"], V3) * V3 - proj(f["U5"], V4) * V4
print(f"V5:\n{V5}")

V6 = f["U6"] - proj(f["U6"], V1) * V1 - proj(f["U6"], V2) * V2
- proj(f["U6"], V3) * V3 - proj(f["U6"], V4) * V4 - proj(f["U6"],
V5) * V5
print(f"V6:\n{V6}")

# V1:
# [[1 0 2]
#  [0 1 1]]
# V2:
# [[2/7 2 -3/7]
#  [1 2/7 2/7]]
# V3:
# [[0 0 -1]
#  [-1 2 0]]
# V4:
# [[6/19 4/19 -8/57]
#  [-32/57 -20/57 6/19]]
# V5:
# [[-6/5 6/5 6/5]
#  [-6/5 0 -6/5]]
```

```
# V6:
# [[1/2  0  0]
#  [0  0  -1/2]]
```