Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da segunda lista de exercício

Questão 01) Determine as condições que as constantes b_1, b_2, b_3 devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = b_1 \\ 4x - 5y + 8z = b_2 \\ -3x + 3y - 3z = b_3 \end{cases}$$

Duas perguntas têm que ser feitas para essa verificação:

(a) É um sistema possível de ser resolvido?

(b) É um sistema possível determinada/única ou indeterminadas soluções?

Para responder essas questões, primeiramente devemos encontrar a **matriz escalonada**, por meio de operações elementares na matriz dos coeficientes.

Usando eliminação de gauss, tem-se:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} R_2 - 4R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} R_3 - (-3)R_1 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - (-1)R_2 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir disso, obtemos o seu posto, isto é, o número de linhas não-nulas quando a matriz é escalonada $p(M) = 2$. Ainda, para a matriz aumentada teremos que **qualquer número real para os valores de b_1, b_2 e b_3 satizfazem a condição de que seu posto seja também** $p(M|B) = 3$. Assim sendo, o sistema é um sistema possível, já que temos uma solução única, ou seja $p(M|B) = p(M)$. Além disso, é também determinado, com $p(M) = n$, sendo n o número de variáveis. Na condição de que o sistema apresentasse $p(M) = p(M|B) < n$ ele seria consistente e indeterminado, ou seja, haveria infinitas soluções. No caso de $p(M|B) > p(M)$ o sistema seria inconsistente e não seria possível de ser resolvido.

Questão 02) Usando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

No processo de eliminação gaussiana, encontra-se a matriz escalonada a partir da matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right] R_2 - R_1 \to R_2 \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right] R_3 - R_1 \to R_3$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right] R_4 - 3R_1 \to R_4 \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right] R_4 - R_2 \to R_4 \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$-R_4 - R_3 \to R_4 \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] R_1 - R_3 \to R_1 \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Essa matriz escalonada resulta em um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2 * x_2 - 3 * x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2 * x_6 = 1 \\ x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

Pela matriz aumentada escalonada é possível notar que seu posto é igual a $p(M|B) = 3$. Sabe-se também que o posto da matriz dos coeficientes é igual a $p(M) = 3$. Com base nisso e tendo como número de variáveis $n = 6$, podemos afirmar que o sistema é possível, mas indeterminado. Ou seja, apresenta infinitas soluções.

$$\begin{cases} x_1 = -2 * x_2 + 3 * x_4 + x_6 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - 2 * x_6 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 2 - x_6 \\ x_6 = x_6 \end{cases} \tag{1}$$