Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dr. Paulo Canas Rodrigues

Respostas da segunda lista de exercício

Questão 01) Por engano misturaram-se quatro pilhas novas com três pilhas usadas. Escolhendo ao acaso, e sem reposição, duas dessas pilhas, determine a probabilidade uma ser nova e outra usada.

Quando não há reposição (eventos dependentes), a probabilidade da primeira tentativa ser nova é dada como $P(N) = \frac{4}{7}$ e a probabilidade da segunda ser usada é $P(U|N) = \frac{3}{6}$, pois o espaço amostral total diminuiu. A probabilidade de uma ser nova e outra usada pode ser definida como $P(N \cap U) = P(N) \times P(U|N) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$.

Igualmente, considerando também o caso inverso, onde a primeira tentativa seria uma pilha usada e a segunda uma nova, temos $P(U \cap N) = \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7}$.

Logo, para o caso geral, soma-se ambos $P(G) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$

Questão 02) Sabe-se que 5% das pessoas que começam uma dieta têm disturbio alimentar. Ao selecionar, ao acaso, 50 pessoas em dieta, determine:

a) A probabilidade de que pelo menos uma pessoa sofra de distúrbio alimentar;

Para resolver este problema, podemos tomar a distribuição binomial[1] como modelo a ser utilizado. A probabilidade de disturbio alimentar é dada como $p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$ e $n = 50$. Definindo X como o número de pessoas com distúrbio alimentar, $X \sim b(n = 50; p = \frac{1}{20})$.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$P(X \geqslant 1) = \binom{50}{x} \left(\frac{1}{20}\right)^x \left(1 - \frac{1}{20}\right)^{50-x}, \quad x = 1, 2, 3, \ldots, 50$$

Isso é o mesmo que $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$. Para o valor de $P(X = 0)$, temos:

[1] Alternativamente, esse valor porderia ser encontrado pela distribuição de poisson, para comparações $(np < 7)$

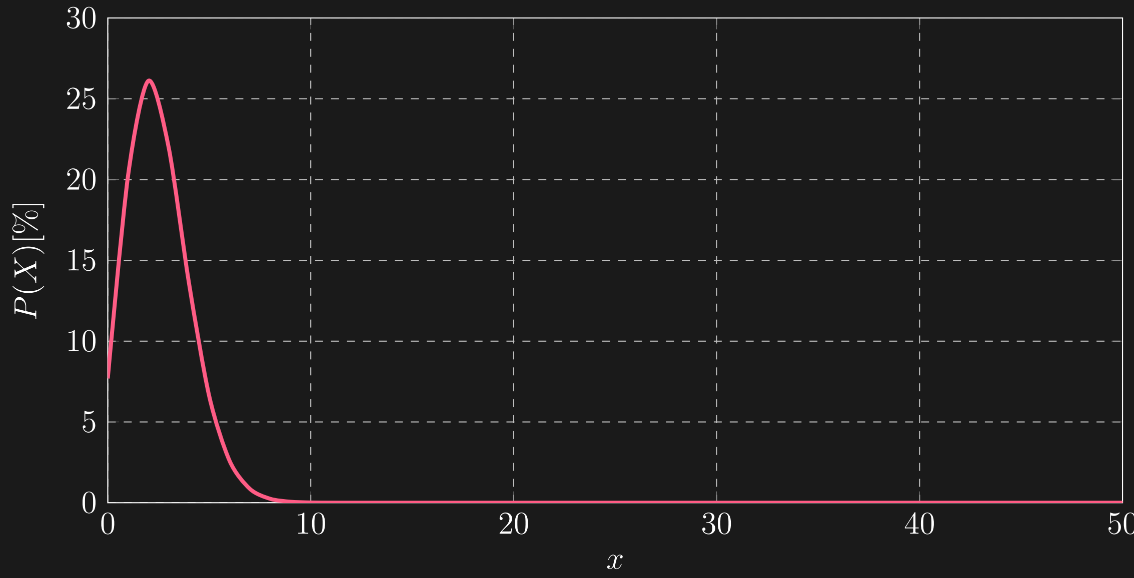
$$P(X=0) = \binom{50}{0}\left(\frac{1}{20}\right)^0\left(1-\frac{1}{20}\right)^{50} \approx 0{,}0769$$
$$P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}0769 \approx 0{,}9231$$

Ou seja, 92,31%.

Obtém-se com Python os valores para a distribuição binomial com o seguinte código e plota-se o gráfico dessa distribuição:

```
from scipy.stats import binom

n = 50
p = 0.05
x = range(0, n + 1)

a = binom.pmf(x, n, p)
for i, o in enumerate(a):
    print("{} {:.4f}".format(i,o*100))
```

Gráfico da f.p. $p(x)$ para $n = 50$ e $p = 1/20$



b) O número médio e o desvio padrão das pessoas com distúrbio alimentar.

A média e o desvio padrão são calculados como:

$$E(X) = np = 50 \times \frac{1}{20} = 2{,}5$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{npq} = \sqrt{50 \times \frac{1}{20} \times \left(1 - \frac{1}{20}\right)} \approx 1{,}54$$

Questão 03) Para a população masculina de um determinado país, com idades entre 18 e 74 anos, a pressão sistólica tem distribuição aproximadamente normal com média 129 mmHg e desvio padrão 19.8 mmHg. Considere que os níveis da pressão são normais quando menores que 130 mmHg.

a) Qual a probabilidade de um homem dessa população possuir pressão sistólica normal?

Para isso, esse homem deve ter níveis de pressão abaixo de 130 mmHg. Usando a distribuição normal como modelo, tem-se:

$$X \sim N(\mu = 129; \sigma^2 = 19{,}8^2)$$

Onde X é a pressão sistólica. Para ela sendo $P(X < 130)$, tem-se:

$$P(X < 130) = P\left(\frac{X - 129}{19{,}8} < \frac{130 - 129}{19{,}8}\right) = P\left(Z < \frac{1}{19{,}8}\right) \approx 0{,}5201$$

O resultado foi obtido com python, com o seguinte código:

```python
from scipy.stats import norm


x = norm(129,19.8).cdf(130) # Sem padronizar
z = norm(0,1).cdf(1/19.8) # Padronizada em Z

print(x," ", z)

# 0.5201400375890497
```

b) Qual a probabilidade de um homem dessa população possuir hipertensão moderada (pressão sistólica entre 160 e 179 mmHg)?

Para este caso, tem-se:

$$P(160 \leqslant X \leqslant 179) = P\left(\frac{160-129}{19{,}8} \leqslant \frac{X-129}{19{,}8} \leqslant \frac{179-129}{19{,}8}\right)$$

$$P\left(\frac{31}{19{,}8} \leqslant Z \leqslant \frac{50}{19{,}8}\right) = P\left(0 \leqslant Z \leqslant \frac{50}{19{,}8}\right) - P\left(0 \leqslant Z \leqslant \frac{31}{19{,}8}\right) \approx 0{,}0529$$

O resultado foi obtido com python, com o seguinte código:

```
from scipy.stats import norm

# A partir de menos infinito
z1 = norm(0, 1).cdf(50 / 19.8)
z2 = norm(0, 1).cdf(31 / 19.8)

print(z1 - z2)

# 0.052933760959968105
```

c) Selecionando ao acaso 1000 homens dessa população, quantos seriam diagnosticados com hipertensão moderada (pressão sistólica entre 160 e 179 mmHg)?

Tendo já obtido os valores de pressão sistólica para um conjunto ao qual pertece esses 1000 homens, basta apenas realizar a multiplicação:

$$n = 1000 \times P(160 \leqslant X \leqslant 179) \approx 53$$

d) Qual a probabilidade de um homem dessa população possuir pressão sistólica igual a 180 mmHg?

Como o modelo de distribuição é contínuo $\int_a^b f(x)\,dx$, onde as probabilidades são dadas como áreas sob a curva gaussiana, um ponto infinitesimal dx específico terá uma área aproximadamente igual a 0. Ou seja, $P(X = 180) = 0$.

e) Qual a pressão sistólica que deixa acima 80% dos indivíduos?

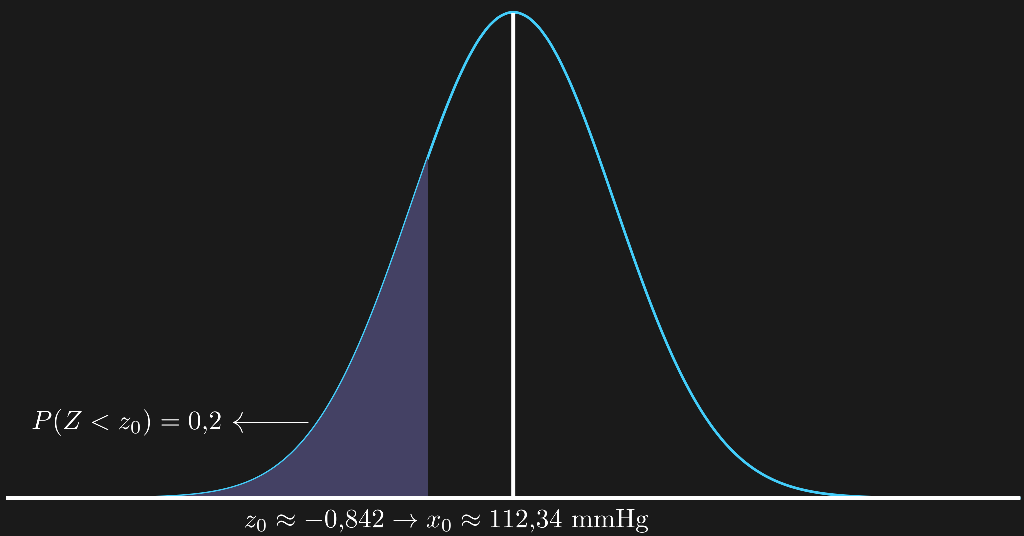
Para $P(Z < z_0) = 0{,}2$, onde 0,2 corresponde a área acumulada na curva normal. Então, precisamos encontrar o valor de z_0, para em seguida achar o de x_0. Fazendo a transformação inversa da curva normal, tem-se:

$$z_0 = \frac{x_0 - \mu}{\sigma} \rightarrow x_0 = z_0\sigma + \mu$$

O resultado pode ser obtido com o python e é igual a 112,34 mmHg.

```
from scipy.stats import norm
mu = 129
sigma = 19.8
z0 = norm.ppf(0.2)

print(z0*sigma+mu)

# 112.33589957525629
```

Curva normal parametrizada



Questão 04) Um grupo de pesquisadores pretende estudar o tempo médio que um certo medicamento demora a fazer efeito. Com base numa amostra de 20 pacientes obteve-se um tempo médio de 60 minutos e uma variância de 100 minutos.

a) Qual a estimativa pontual do tempo médio que o medicamento demora a fazer efeito?

A estimativa pontual já está dispoinível no enunciado. Ela equivale a $\overline{X} = 60$ minutos.

b) Obtenha um intervalo com 98% de confiança para o tempo médio que o medicamento demora a fazer efeito.

Por se tratar de uma amostra pequea $n < 30$, será utilizada a distribuição de t-student como modelo proposto. A quantidade de graus de liberdade é dada por $n - 1 = 19$. O nível de confiança é definido como $1-\alpha = 0{,}98$.

Utilizando python, obtém-se então os valores de t_0 e t_1 onde que são os limites inferior e superior do intervalo de confiança e onde se espera encontrar o valor estimado do tempo médio com uma confiança de 98%.

```
from scipy.stats import t

#Para uma distribuicao bicaudal simetrica

alpha = 0.02
n=20
df=n-1

a0 = alpha/2
a1 = 1 - t0

a = t(df).ppf((a0, a1))

print(a)

# [-2.53948319  2.53948319]
```

A partir desses valores de $t \approx 2{,}539$, $\overline{X} = 60$ min, $S = \sqrt{100}$ min, calculamos o intervalo de confiança como:

$$Ic(\mu; 1-\alpha) = \left[\overline{X} + t_0 \frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + t_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$$
$$Ic(\mu; 0{,}98) = \left[60 - 2{,}539 \frac{10}{\sqrt{20}}; 60 + 2{,}539 \frac{10}{\sqrt{20}}\right]$$
$$Ic(\mu; 0{,}98) = [54{,}322; 65{,}678]$$

Onde a parcela em azul representa o erro amostral associado.

c) Com base no intervalo de confiança obtido em (b), qual o erro amostral da estimativa pontual?

Conforme definido na questão anterior, o erro amostral pode ser calculado como:

$$Err = t_0 \frac{S}{\sqrt{n}} = 5{,}6784 \ min$$

d) Estes pesquisadores decidiram recolher uma segunda amostra com 40 pacientes, resultando num tempo médio de 50 minutos e desvio padrão de 90 minutos. Qual deverá ser o tamanho da amostra para que o erro cometido ao estimarmos o tempo médio que o medicamento demora a fazer efeito, não seja superior a 10 minutos, com probabilidade 0.95?

A partir da expressão do erro amostral, podemos deduzir uma equação para obter o tamanho da amostra. Além disso, é necessário calcular o z_0, dado a probabilidade de 0,95 e erro máx de $Err = 10$ min.

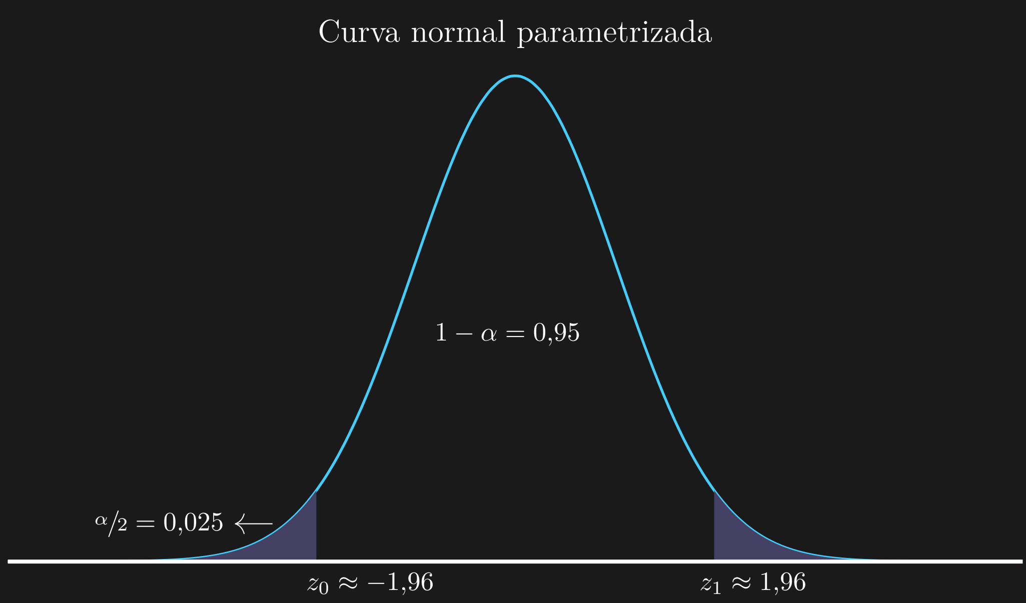
$$Err = t_0 \frac{S}{\sqrt{n}} \rightarrow n \geqslant \left(\frac{z_0}{Err} \right)^2 S^2 \tag{1}$$

Para o cálculo z_0, com auxílio do python:

```python
from scipy.stats import norm

alpha = 0.05

a0 = alpha/2
a1 = 1 - z0

a = norm.ppf((a0,a1))

print(a)

# [-1.95996398  1.95996398]
```

Substituindo os valores na Equação 1, obtemos:

$$n \geqslant \left(\frac{1{,}96}{10} \right)^2 90^2 \rightarrow n \geqslant 312 \text{ pacientes}$$



Questão 05) Um grupo de pesquisadores pretende estudar o tempo médio que um certo medicamento demora a fazer efeito. Com base numa amostra de 20 pacientes obteve-se um tempo médio de 60 minutos e uma variância de 100 minutos.

a) Qual o tamanho da amostra necessário para que o erro cometido na estimação seja no máximo 5 minutos, com probabilidade 0,98.

O procedimento é semelhante ao da questão anterior letra d, porém com alguns valores diferentes.

Da mesma forma, se calcula o valor de z_0 com auxílio do python.

```
from scipy.stats import norm

alpha = 0.02

a0 = alpha/2
a1 = 1 - z0

a = norm.ppf((a0,a1))

print(a)

# [-2.32634787  2.32634787]
```

Com auxílio da Equação 1, podemos encontrar o valor de n:

$$n \geqslant \left(\frac{2{,}326}{5}\right)^2 \cdot 100 \rightarrow n \geqslant 22 \text{ pacientes}$$

b) Foi recolhida uma segunda amostra de 30 pacientes (grupo B) e obteve-se um tempo médio de 50 minutos e uma variância de 90 minutos. Verifique se o tempo médio do grupo A é inferior ao do grupo B. Considere um nível de confiança de 95%.

Deve-se testar as seguintes hipóteses:

1. $H_0 \rightarrow \mu_a - \mu_b \geqslant 0$: O tempo médio do grupo A é superior ou igual ao do grupo B.
2. $H_a \rightarrow \mu_a - \mu_b < 0$: O tempo médio do grupo A é inferior ao do grupo B.

Trata-se de um teste unilateral à esquerda em que podemos utilizar a distribuição de t-student com o total de graus de liberdade definido como $n_l = n_a + n_b - 2$ e um nível de significância $\alpha = 5\%$.

$$T = \frac{(\overline{X_a} - \overline{X_b}) - (\mu_a - \mu_b)}{\sqrt{\frac{(n_a-1)S_a^2+(n_b-1)S_b^2}{n_a+n_b-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_a} + \frac{1}{n_b}}} \sim t_{n_a+n_b-2} \tag{2}$$

Utilizando do python, calcula-se a região de rejeição do teste:

```python
from scipy.stats import t

na = 20
nb = 30
alpha = 0.05
df = na + nb - 2

a = t(df).ppf(alpha)

print(a)

# -1.6772241953450402
```

Por se tratar de uma distribuição unilateral, temos que a região de rejeição é dada como $RR = (-\infty; -1{,}677)$.

Para o cálculo da estatística de testes, utilizamos a Equação 2 com auxílio do python:

```python
from math import sqrt

xa = 60
xb = 50
na = 20
nb = 30
vara = 100
varb = 90
sa = sqrt(vara)
sb = sqrt(varb)

den = na + nb - 2
dev = sqrt(((na - 1) * vara + (nb - 1) * varb) / den)
sroot = sqrt((1 / na) + (1 / nb))
t = (xa - xb) / (dev * sroot)
print(t)

# 3.573740145180839
```

Por fim, tem-se as condições das regras de decisão:

1. Sendo $t \in RR$, H_0 é rejeitada.
2. Sendo $t \notin RR$, H_0 **não** é rejeitada.

Logo, como $t \approx 3{,}57$ e não está na região de rejeição, $RR = (-\infty; -1{,}677)$, **não** devemos rejeitar H_0. Por outro lado, devemos rejeitar a hipótese alternativa H_a.