Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da terceira lista de exercício

Questão 01) Lembre que uma matriz quadrada é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Mostre que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares inferiores de ordem 5 é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$.

Para demonstrar que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$, é necessário obedecer determinador requisitos. Tendo os atendido, então todos os axiomas de um espaço vetorial são obedecidos.

1. M_5 deve necessariamente ser um espaço vetorial;
2. Se u e v pertencem a V_1, então $u + v$ pertencem a M_5;
3. Se a for um escalar qualqur e u pertence a V_1, então au pertence a M_5.

Para a primeira condição:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 & 0 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & 0 \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} \end{bmatrix} =$$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31}+v_{31} & u_{32}+v_{32} & u_{33}+v_{33} & 0 & 0 \\ u_{41}+v_{41} & u_{42}+v_{42} & u_{43}+v_{43} & u_{44}+v_{44} & 0 \\ u_{51}+v_{51} & u_{52}+v_{52} & u_{53}+v_{53} & u_{54}+v_{54} & u_{55}+v_{55} \end{bmatrix}$$

Para a segunda condição:

$$au = \begin{bmatrix} au_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ au_{21} & au_{22} & 0 & 0 & 0 \\ au_{31} & au_{32} & au_{33} & 0 & 0 \\ au_{41} & au_{42} & au_{43} & au_{44} & 0 \\ au_{51} & au_{52} & au_{53} & au_{54} & au_{55} \end{bmatrix}$$

Para ambas as condições, a matriz resultando é uma matriz triangular inferior de dimensão 5×5 na qual é possivel realizar todas as operações realizáveis em uma matriz de dimensão 5×5 e que satisfazem os 10 axiomas definidores de um espaço vetorial.

Questão 02) Seja V um espaço vetorial real e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores de V linearmente independentes. Mostre que v_1, $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$, $v_4 - v_1$ são linearmente independentes

Temos que em V os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são LI. Para isso, há a condição de que nenhum deles pode ser nulo. Assim, $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$ com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Assim sendo, $k_1v_1 + k_2(v_2 - v_1) + k_3(v_3 - v_1) + k_4(v_4 - v_1) = 0$. Ou ainda:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4)v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$

E sabendo que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então:

$$k_1 - k_2 - k_3 - k_4 \rightarrow k_1 - 0 - 0 - 0 = 0$$

O que implica em k_1 ser igual a zero também e atender a condição $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, fazendo com que essa combinação de vetores seja linearmente independentes (LI).