

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da terceira lista de exercício

Questão 01) Lembre que uma matriz quadrada é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Mostre que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares inferiores de ordem 5 é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$.

Para demonstrar que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$, é necessário obedecer determinados requisitos. Tendo os atendido, então todos os axiomas de um espaço vetorial são obedecidos.

1. Se u e v pertencem a V_1 , então $u + v$ pertencem a M_5 ;
2. Se a for um escalar qualquer e u pertence a V_1 , então au pertence a M_5 .

Para a primeira condição:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 & 0 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & 0 \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} \end{bmatrix} =$$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} + v_{31} & u_{32} + v_{32} & u_{33} + v_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} + v_{41} & u_{42} + v_{42} & u_{43} + v_{43} & u_{44} + v_{44} & 0 \\ u_{51} + v_{51} & u_{52} + v_{52} & u_{53} + v_{53} & u_{54} + v_{54} & u_{55} + v_{55} \end{bmatrix}$$

Para a segunda condição:

$$au = \begin{bmatrix} au_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ au_{21} & au_{22} & 0 & 0 & 0 \\ au_{31} & au_{32} & au_{33} & 0 & 0 \\ au_{41} & au_{42} & au_{43} & au_{44} & 0 \\ au_{51} & au_{52} & au_{53} & au_{54} & au_{55} \end{bmatrix}$$

Para ambas as condições, a matriz resultando é uma matriz triangular inferior de dimensão 5×5 na qual é possível executar todas as operações realizáveis em uma matriz de dimensão 5×5 e que satisfazem os 10 axiomas definidores de um espaço vetorial.

Questão 02) Seja V um espaço vetorial real e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores de V linearmente independentes. Mostre que $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, v_4 - v_1$ são linearmente independentes

Temos que em V os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são LI. Para isso, há a condição de que nenhum deles pode ser nulo. Assim, $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$ com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Para mostrarmos que a segunda relação entre os vetores é também LI, faz-se $k_1v_1 + k_2(v_2 - v_1) + k_3(v_3 - v_1) + k_4(v_4 - v_1) = 0$. Ou ainda:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4)v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$

E sabendo que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então:

$$k_1 - k_2 - k_3 - k_4 \rightarrow k_1 - 0 - 0 - 0 = 0$$

O que implica em k_1 ser igual a zero também e atender a condição $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, fazendo com que essa combinação de vetores seja linearmente independentes (LI).

Questão 03) Se A é uma matriz arbitrária de tamanho $m \times n$, o espaço nulo de A é definido como sendo o subespaço vetorial de \mathbb{R}^n formado pelas soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. A dimensão do espaço nulo de A é chamada de nulidade de A .

1. Se A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a nulidade de A e uma base para o espaço nulo de A .

Primeiramente, reduz-se a matriz aumentada do sistema homogêneo $Ax = 0$ a forma escalonada:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -11/2 & 5/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right]$$

Sabemos que o posto da matriz é dado pela quantidade de linhas não nulas da matriz escalonada. Isto é, tem-se um $p(A) = 2$. A nulidade é dada pelo número de colunas da matriz A escalonada subtraído pelo posto da matriz. Ou seja, $nulidade(A) = 4 - p(A) = 2$.

Para encontrar uma base de A , resolve-se o sistema escalonado $Ax = 0$ obtendo x :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e isso implica no mesmo que reorganizar em:

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -2/11 \\ 5/11 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -7/11 \\ 1/11 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base para o espaço nulo de A é formada pelos vetores entre colchetes, ou seja, $\{(-2/11, 5/11, 1, 0), (-7/11, 1/11, 0, 1)\}$

2. Verifique que o vetor $v = (-10, 1, -1, 16)$ pertence ao espaço nulo de A e determine as coordenadas deste vetor na base que você encontrou no item anterior.

Para isso, devemos resolver o sistema $(-10, 1, -1, 16) = \alpha_1(-2/11, 5/11, 1, 0) + \alpha_2(-7/11, 1/11, 0, 1)$ obtendo os valores de α :

$$\begin{cases} -\frac{2}{11}\alpha_1 - \frac{7}{11}\alpha_2 = -10 \\ \frac{5}{11}\alpha_1 + \frac{1}{11}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 + 0\alpha_2 = -1 \\ 0\alpha_1 + 1\alpha_2 = 16 \end{cases}$$

O que claramente nos dá os valores de $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 16$. Assim, $[v]_S = (-1, 16)$.

Questão 04) Seja V um espaço vetorial real com produto interno e u, v, w vetores de V tais que:

$$\langle u, v \rangle = 2 \quad \langle v, w \rangle = -3 \quad \langle u, w \rangle = 5 \quad \|u\| = 6 \quad \|v\| = 2 \quad \|w\| = 7$$

Calcule:

a) $\langle 2v - w, u + 3w \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle 2v - w, u + 3w \rangle &= \langle 2v, u + 3w \rangle - \langle w, u + 3w \rangle \\ &= 2\langle v, u \rangle + 2\langle v, 3w \rangle - \langle w, u \rangle - \langle w, 3w \rangle \\ &= 2\langle v, u \rangle + 6\langle v, w \rangle - \langle w, u \rangle - 3\langle w, w \rangle \\ &= 2 \cdot 2 + 6 \cdot (-3) - 5 - 3 \cdot 7^2 = -166 \end{aligned}$$

b) $\langle u - v - 2w, 4u + v \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle u - v - 2w, 4u + v \rangle &= \langle u, 4u + v \rangle - \langle v, 4u + v \rangle - \langle 2w, 4u + v \rangle \\ &= \langle u, 4u \rangle + \langle u, v \rangle - \langle v, 4u \rangle - \langle v, v \rangle - \langle 2w, 4u \rangle - \langle 2w, v \rangle \\ &= 4\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle - 4\langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle - 8\langle w, u \rangle - 2\langle w, v \rangle \\ &= 4 \cdot 6^2 + 2 - 4 \cdot 2 - 2^2 - 8 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = 100 \end{aligned}$$

c) $d(u, v)$:

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| = \sqrt{(u - v)(u - v)} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle + \|v\|^2} \\ &= \sqrt{36 - 4 + 4} = 6 \end{aligned}$$

d) $\|u - 2v + 4w\|$:

$$\begin{aligned} \|u - 2v + 4w\| &= \sqrt{(u - 2v + 4w)(u - 2v + 4w)} \\ &= \sqrt{\|u\|^2 - 4\langle u, v \rangle + 8\langle u, w \rangle + 4\|v\|^2 - 16\langle v, w \rangle + 16\|w\|^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 4 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 4 \cdot 2^2 - 16 \cdot (-3) + 16 \cdot 7^2} = \sqrt{916} \end{aligned}$$

e) O cosseno do ângulo entre os vetores u e v :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \|v\|} \\ \cos \theta &= \frac{2}{6 \cdot 2} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

f) O cosseno do ângulo entre os vetores $u + v$ e $v - w$:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle u + v, v - w \rangle}{\|u + v\| \|v - w\|} \\ &= \frac{\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle - \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle}{\sqrt{(u + v)^2} \cdot \sqrt{(v - w)^2}} \\ &= \frac{2 + 4 - 5 + 3}{\sqrt{6^2 + 2 \cdot 2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 - 2(-3) + 7^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{44} \cdot \sqrt{59}} = \frac{4}{\sqrt{2596}} \end{aligned}$$

Questão 05) Considere o espaço vetorial $M_{2 \times 3} \mathbb{R}$ com o produto interno $\langle U, V \rangle = \text{tr}(U^T V)$. Aplique o processo de Gram-Schmidt para transformar a base

$$\begin{aligned}
 U_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\
 U_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & U_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & U_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

numa base ortogonal. **Sugestão:** Use o Python para se auxiliar nos cálculos matriciais necessários.