Universidade Federal da Bahia Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da primeira lista de exercício

Questão 01) Em cada caso, encontra a matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 4×4 cujas entradas satisfazem:

a)
$$a_{ij} = i + j$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{1}$$

b)
$$a_{ij} = i^{j-i}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1/2 & 1 & 2 & 4\\ 1/9 & 1/3 & 1 & 3\\ 1/64 & 1/16 & 1/4 & 1 \end{bmatrix}$$
 (2)

Questão 02) Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Efetue as seguintes operações ou justifique porque elas não podem ser realizadas:

a)
$$AB - BA$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 14 & -32 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 24 & 28 \\ -44 & -56 \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$AB - BA = \begin{bmatrix} -24 & -20\\ 58 & 24 \end{bmatrix} \tag{3}$$

b) 2C - D

$$2C = 2 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 18 & -14 \\ 14 & -6 & -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, <u>não</u> é possível efetuar essa operação, já que uma matrix é de dimensão 2×3 ($2C = M_{i,j}$) e outra, 3×3 ($D_{i,j}$). A subtração só é possível com i e j iguais em ambas as matrizes.

c)
$$(2D^T - 3E^T)^T$$

$$2D^{T} = 2 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 8 \\ -12 & 0 & 12 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} -12 & 2 & -12 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3E^{T} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 27 & -27 \\ -3 & 0 & -12 \\ -18 & 0 & -3 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 18 & -3 & -18 \\ 27 & 0 & 0 \\ -27 & -12 & -3 \end{bmatrix}$$

d)
$$D^2 - DE$$

$$D^{2} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix}^{2} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & -20 & 16 \\ -29 & 5 & 28 \\ 0 & -24 & 36 \end{bmatrix}$$

$$DE = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 9 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -54 & -38 \\ 19 & 9 & -17 \\ -72 & -54 & -48 \end{bmatrix}$$

Assim sendo:

$$D^{2} - DE = \begin{bmatrix} 80 & 34 & -22 \\ -10 & -4 & 45 \\ 72 & 30 & -12 \end{bmatrix}$$
 (5)

d) $(DC)^T$

$$DC = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -6 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & 9 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

<u>Não</u> é possível efetuar essa operação, já que uma matrix é de dimensão 3×3 $(D_{i,j})$ e outra, 2×3 $(C_{i,j})$ e essa multiplicação não é válida porque em D, j = 3 e em C, i = 2. Para ser compatível esses valores devem ser iguais.

Questão 03) Mostre que se A e B são matrizes que comutam com a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Temos a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e a matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Assim sendo:

$$AM = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} & a_{11} \\ -a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$$

$$MA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ -a_{11} & -a_{12} \end{bmatrix}$$

A partir disso, podemos encontrar:

$$\begin{cases}
-a_{12} = a_{21} \\
a_{11} = a_{22} \\
-a_{22} = -a_{11} \\
a_{21} = -a_{12}
\end{cases}$$

Pode-se simplificar para a condição de que $a_{11}=a_{22}=r,\ a_{12}=s$ e $a_{21}=-s$. Similarmente, para a matriz B, temos $b_{11}=b_{22}=x,\ b_{12}=y$ e $b_{21}=-y$:

$$A = \begin{bmatrix} r & s \\ -s & r \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

multiplicando-as, encontramos:

$$AB = \begin{bmatrix} rx - sy & ry + sx \\ -sx - ry & -sy + rx \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} rx - sy & sx + ry \\ -ry - sx & -sy + rx \end{bmatrix}$$
(6)

A partir da Equação 6 é possivel chegar a conclusão de que AB = BA = M.

Questão 04) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}1&1&0&2\\1&3&1&2\\1&2&-1&1\\5&9&0&6\end{bmatrix}$ e uma matriz B de tamanho 4×4 tal que det(B)=-3. Determine:

a-1) det(A). Usando eliminação de Gauss-jordan para encontrar matriz triangular superior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} R_2 - R_1 \to R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix} R_3 - R_1 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$R_4 - 5R_1 \to R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} R_3 - \frac{1}{2}R_2 \to R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} R_4 - 2R_2 \to R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} R_4 - \frac{4}{3}R_3 \to R_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 \end{bmatrix}$$

Assim sendo, obtida a matriz triangular, temos que o determinante de A será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 9 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times \frac{-3}{2} \times \frac{-8}{3} = 8$$
 (7)

a-2) $det(A^2)$.

Como sabemos que det(A) = 8, temos que $det(A^2) = det(A) \times det(A) = 64$.

a-3) $det(B^3)$.

Como sabemos que det(B) = -3, temos que $det(B^2) = det(B) \times det(B) \times det(B) = -27$. a-4) $det(3B^{-1})$.

Como sabemos que det(B) = -3, temos que $det(3B^{-1}) = 3^4 \times \frac{1}{det(B)} = -27$.

a-5) $det(\frac{1}{4}A^{T})$.

Como sabemos que $det(A) = det(A^T) = 8$, temos que $det(\frac{1}{4}A^T) = \frac{1}{32}^4 \times det(A) = \frac{1}{32}$. a-6) $det(A^TB^{-1})$.

Como sabemos que det(A) = 8 e det(B) = -3, temos que $det(A^TB^{-1}) = 8 \times -\frac{1}{3} = -\frac{8}{3}$.

b-1) A^{-1} . Usando eliminação de Gauss-jordan para encontrar matriz identidade.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_2 - R_1 \rightarrow R_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{3}-R_{1} \rightarrow R_{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_{4}-5R_{1} \rightarrow R_{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,5 & -1 & -0,5 & -0,5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_4 - 4R_2 \to R4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0, 5 & 0 & -0, 5 & 0, 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1, 5 & -1 & -0, 5 & -0, 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -4 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{R_3}{1, 5} \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3333 & 0,3333 & -0,6667 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} R_4 - (-2)R_3 \to R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0, 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 \\ 0 & 0 & 0 & -2,6667 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0, 5 & 0, 5 & 0 & 0 \\ 0,3333 & 0,3333 & -0,6667 & 0 \\ -2,3333 & -1,3333 & -1,3333 & 1 \end{bmatrix} - \frac{R_4}{2,6667} \rightarrow R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0, 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,6667 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0, 5 & 0, 5 & 0 & 0 \\ 0, 3333 & 0, 3333 & -0,6667 & 0 \\ 0, 875 & 0, 5 & 0, 5 & -0, 375 \end{bmatrix} R_3 - 0,6667 R_4 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0, 5 & 0 & -0, 5 & 0, 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0, 25 & 0 & -1 & 0, 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0, 875 & 0, 5 & 0, 5 & -0, 375 \end{bmatrix} R_1 - 2R_4 \to R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -0.75 & -1 & -1 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.25 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.875 & 0.5 & 0.5 & -0.375 \end{bmatrix} R_2 - 0.5R_3 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -0.75 & -1 & -1 & 0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -0.375 & 0.5 & 0.5 & -0.125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.25 & 0 & -1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.875 & 0.5 & 0.5 & -0.375 \end{bmatrix} R_1 - R_2 \to R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -0,375 & -1,5 & -1,5 & 0,875 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -0,375 & 0,5 & 0,5 & -0,125 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,375 & -1,5 & -1,5 & 0,875 \\ -0,375 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & -0,125 \\ -0,25 & 0 & -1 & 0,25 \\ 0,875 & 0,5 & 0,5 & -0,375 \end{bmatrix}$$
(8)

Questão 05) Exercícios com python.

a) Responda a questão 2 e a questão 4(b) usando Python. Especifique os comandos utilizados em cada uma e as respostas (ou os erros) obtidas¹.

4-b)

```
import numpy as np

# Cria as matrizes
A = np.array([[1, 1, 0, 2], [1, 3, 1, 2], [1, 2, -1, 1], [5, 9, 0, 6]])

# Calcula A^-1
M = np.linalg.inv(A)
# Seta precisao de 3 decimais
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True)
```

¹Utilizou-se as *libraries* Pandas e Numpy para cálculo de todas as operações

```
# Imprime valor
print(M)
                   -1.5
# [[-0.375 -1.5
                           0.875]
  [-0.375
            0.5
                    0.5
                          -0.125]
   [-0.25
           -0.
                   -1.
                           0.25 ]
   [ 0.875
           0.5
                    0.5
                           -0.375]]
# Calcula (1/2A^T)-1
M2 = np.linalg.inv(0.5 * A.transpose())
print(M2)
# [[-0.75 -0.75 -0.5
                        1.75]
   [-3.
           1.
                 -0.
                        1. J
                 -2.
   [-3.
           1.
                        1.
                       -0.75]]
  [ 1.75 -0.25
                 0.5
  2-a) AB - BA
import pandas as pd
# Cria as matrizes
A = pd.DataFrame([[2, 0], [6, 7]])
B = pd.DataFrame([[0, 4], [2, -8]])
# Calcula AB-BA
M=A.dot(B) - B.dot(A)
# Imprime valor
print(M)
      0
          1
# 0 -24 -20
# 1 58
```

2-b) 2C - D. Efetua-se a subtração apenas das linhas que são possíveis retornando NaN (not a number) nas que não são possíveis.

```
import pandas as pd

C = pd.DataFrame([[-6, 9, -7], [7, -3, -2]])

D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])

# Calcula 2C-D (calculo pode ser feito diretamente)
```

```
M = 2 * C - D
# Imprime valor
print(M)
        0
               1
                     2
            14.0 -14.0
# 0
     -6.0
# 1
     13.0
            -7.0
                 -8.0
# 2
      NaN
             NaN
                   NaN
  2-c) (2D^T - 3E^T)^T.
import pandas as pd
# Cria as matrizes
D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])
# Calcula (2D^T-3E^T)
M = 2*D.T-3*E.T
# Calcula a transposta de M
MT = M.T
# Imprime valor
print(MT)
      0
           1
               2
# 0 -30 -19
              27
# 1
      5
           2
              20
# 2
      6
           0
              15
  2-d) D^2 - DE.
import pandas as pd
# Cria as matrizes
D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])
# Calcula D^2-DE
M = D.dot(D)-D.dot(E)
# Imprime valor
print(M)
      0
               2
# 0
     80
         34 -22
```

```
# 1 -10 -4 45
# 2 72 30 -12
```

2-d) $(DC)^T$. Erro quando calcula a multiplicação entre D e C

```
import pandas as pd
# Cria as matrizes
A = pd.DataFrame([[2, 0], [6, 7]])
B = pd.DataFrame([[0, 4], [2, -8]])
C = pd.DataFrame([[-6, 9, -7], [7, -3, -2]])
D = pd.DataFrame([[-6, 4, 0], [1, 1, 4], [-6, 0, 6]])
E = pd.DataFrame([[6, 9, -9], [-1, 0, -4], [-6, 0, -1]])
# Calcula DC
M = D.dot(C)
# Calcula M^T
MT = M.T
# Imprime valor
print(MT)
\# Error in M = D.dot(C)
# raise ValueError("matrices are not aligned")
# ValueError: matrices are not aligned
```

b) Realize o seguinte experimento para tentar ter uma ideia de quão comum é encontrar matrizes cujo produto comuta. Em Python, digite as seguintes linhas de comando:

```
import numpy as np
c=0

for i in range(10000):
    A=np.random.randint(-5,5,size=(3,3))
    B=np.random.randint(-5,5,size=(3,3))
    C=A@B==B@A
    if C.all():
        c=c+1
print(c)
```

Na primeira linha é o *import* da *library*, na segunda atribuição de valor a uma variável inteira, na terceira o ínicio do loop até 10000, na quarta e quinta duas matrizes randômicas de tamanho 3×3 para as variáveis A e B, na sexta a comparação de igualdade entre os produtos $A@B \ e \ B@A$ (verificando a comutação), na sétima a condição de que se ambos forem iguais a variável C é incrementada em 1, na oitava linha o valor de c é impresso.

A variável c poderá ter valores entre 0 e 10000, pois o loop é executado 10000 vezes, dependendo apenas se o produto A@B é igual a B@A ou não. As matrizes A e B são geradas randômicamente e podem ter valores entre -5 e 5 e a comutação pode não ocorrer em todos os casos.

c) Realize o seguinte experimento para tentar ter uma ideia de quão comum é encontrar matrizes invertíveis. Em Python, digite as seguintes linhas de comando:

```
import numpy as np
c=0
for i in range(10000):
    A=np.random.randint(-5,5,size=(4,4))
    if np.linalg.det(A) != 0:
        c+=1

print(c)
```

Na primeira linha é o *import* da *library*, na segunda atribuição de valor a uma variável inteira, na terceira o ínicio do loop até 10000, na quarta e quinta uma matriz randômica de tamanho 4×4 para a variável A, na sexta a condição de que se o determinante for diferente de 0 a variável c é incrementada em 1, na sétima linha o valor de c é impresso.

A variável c poderá ter valores entre 0 e 10000, pois o loop é executado 10000 vezes, dependendo apenas se o determinante for diferente de 0 ou não. As matrizes A são geradas randômicamente e podem ter valores entre -5 e 5.