Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da terceira lista de exercício

Questão 01) Lembre que uma matriz quadrada é dita triangular inferior quando todos os elementos acima da diagonal principal da matriz são nulos. Mostre que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ das matrizes triangulares inferiores de ordem 5 é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$.

Para demonstrar que o conjunto $V_1 \subset M_5(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $M_5(\mathbb{R})$, é necessário obedecer determinador requisitos. Tendo os atendido, então todos os axiomas de um espaço vetorial são obedecidos.

1. M_5 deve necessariamente ser um espaço vetorial;
2. Se u e v pertencem a V_1, então $u + v$ pertencem a M_5;
3. Se a for um escalar qualqur e u pertence a V_1, então au pertence a M_5.

Para a primeira condição:

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & 0 \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} & u_{54} & u_{55} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{21} & v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & 0 & 0 \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & 0 \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} \end{bmatrix} =$$

$$u + v = \begin{bmatrix} u_{11} + v_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_{21} + v_{21} & u_{22} + v_{22} & 0 & 0 & 0 \\ u_{31} + v_{31} & u_{32} + v_{32} & u_{33} + v_{33} & 0 & 0 \\ u_{41} + v_{41} & u_{42} + v_{42} & u_{43} + v_{43} & u_{44} + v_{44} & 0 \\ u_{51} + v_{51} & u_{52} + v_{52} & u_{53} + v_{53} & u_{54} + v_{54} & u_{55} + v_{55} \end{bmatrix}$$

Para a segunda condição:

$$au = \begin{bmatrix} au_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ au_{21} & au_{22} & 0 & 0 & 0 \\ au_{31} & au_{32} & au_{33} & 0 & 0 \\ au_{41} & au_{42} & au_{43} & au_{44} & 0 \\ au_{51} & au_{52} & au_{53} & au_{54} & au_{55} \end{bmatrix}$$

Para ambas as condições, a matriz resultando é uma matriz triangular inferior de dimensão 5×5 na qual é possivel realizar todas as operações realizáveis em uma matriz de dimensão 5×5 e que satisfazem os 10 axiomas definidores de um espaço vetorial.

Questão 02) Seja V um espaço vetorial real e v_1, v_2, v_3, v_4 vetores de V linearmente independentes. Mostre que v_1, $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$, $v_4 - v_1$ são linearmente independentes

Temos que em V os vetores v_1, v_2, v_3, v_4 são LI. Para isso, há a condição de que nenhum deles pode ser nulo. Assim, $k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$ com $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$.

Assim sendo, $k_1v_1 + k_2(v_2 - v_1) + k_3(v_3 - v_1) + k_4(v_4 - v_1) = 0$. Ou ainda:

$$(k_1 - k_2 - k_3 - k_4)v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 + k_4v_4 = 0$$

E sabendo que $k_2 = k_3 = k_4 = 0$, então:

$$k_1 - k_2 - k_3 - k_4 \rightarrow k_1 - 0 - 0 - 0 = 0$$

O que implica em k_1 ser igual a zero também e atender a condição $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, fazendo com que essa combinação de vetores seja linearmente independentes (LI).

Questão 03) Se A é uma matriz arbitrária de tamanho $m \times n$, o espaço nulo de A é definido como sendo o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ formado pelas soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$. A dimensão do espaço nulo de A é chamada de nulidade de A.

1. Se A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determine a nulidade de A e uma base para o espaço nulo de A.

Primeiramente, reduz-se a matriz aumentada do sistema homogêneo $Ax = 0$ a forma escalonada:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -{}^{11}/_{2} & {}^{5}/_{2} & {}^{1}/_{2} & 0 \end{array}\right]$$

Sabemos que o posto da matriz é dado pela quantidade de linhas não nulas da matriz escalonada. Isto é, tem-se um $p(A) = 2$. A nulidade é dada pelo número de colunas da matriz A escalonada subtraído pelo posto da matriz. Ou seja, $nulidade(A) = 4 - p(A) = 2$.

Para encontrar uma base de A, resolve-se o sistema escalonado $Ax = 0$ obtendo x:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4 \\ x_2 = \frac{5}{11}x_3 + \frac{1}{11}x_4 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

e isso implica no mesmo que reorganizar em:

$$x_3 \cdot \begin{bmatrix} -{}^{2}/_{11} \\ {}^{5}/_{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -{}^{7}/_{11} \\ {}^{1}/_{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A base para o espaço nulo de A é formada pelos vetores entre colchetes, ou seja, $\{(-{}^{2}/_{11}, {}^{5}/_{11}, 1, 0), (-{}^{7}/_{11}, {}^{1}/_{11}, 0, 1)\}$

2. Verifique que o vetor $v = (-10, 1, -1, 16)$ pertence ao espaçoo nulo de A e determine as coordenadas deste vetor na base que você encontrou no item anterior.