

Prof Dra. Majela Penton Machado

Respostas da segunda lista de exercício

Questão 01) Determine as condições que as constantes b_1 , b_2 , b_3 devem satisfazer para garantir a consistência do sistema linear.

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = b_1 \\ 4x - 5y + 8z = b_2 \\ -3x + 3y - 3z = b_3 \end{cases}$$

Duas perguntas têm que ser feitas para essa verificação:

- (a) É um sistema possível de ser resolvido?
- (b) É um sistema possível determinada/única ou indeterminadas soluções?

Para responder essas questões, primeiramente devemos encontrar a **matriz escalonada**, por meio de operações elementares na matriz dos coeficientes.

Usando eliminação de gauss, tem-se:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 8 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ -3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - (-3)R_1 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & -3 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - (-1)R_2 \rightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir disso, obtemos o seu posto, isto é, o número de linhas não-nulas quando a matriz está escalonada $p(M) = 2$. Ainda, para a matriz aumentada teremos que a única condição de consistência é caso o seu posto seja também 2. Nessa situação, o sistema será possível e com infinitas soluções, já que o número de variáveis é igual a 3 e $p(M) = p(M|B) < n$. Caso tenhamos $p(M|B) = 3$ o sistema será inconsistente. Para a consistência, temos:

$$(M|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & -4b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right]$$

Onde devemos atender na terceira linha $-b_1 + b_2 + b_3 = 0$ para que o sistema seja possível e indeterminado.

Questão 02) Usando o método de Gauss-Jordan resolva o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 = 9 \end{cases}$$

No processo de eliminação gaussiana, encontra-se a matriz escalonada a partir da matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 - R_1 \rightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 - R_1 \rightarrow R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 - 3R_1 \rightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{R_4 - R_2 \rightarrow R_4} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$-R_4 - R_3 \rightarrow R_4 \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad R_1 - R_3 \rightarrow R_1 \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Essa matriz escalonada resulta em um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 = 0 \\ x_3 + 2x_6 = 1 \\ x_5 + x_6 = 2 \end{cases}$$

Pela matriz aumentada escalonada é possível notar que seu posto é igual a $p(M|B) = 3$. Sabe-se também que o posto da matriz dos coeficientes é igual a $p(M) = 3$. Com base nisso e tendo como número de variáveis $n = 6$, podemos afirmar que o sistema é possível, mas indeterminado. Ou seja, apresenta infinitas soluções.

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 3x_4 + x_6 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 1 - 2x_6 \\ x_4 = x_4 \\ x_5 = 2 - x_6 \\ x_6 = x_6 \end{cases} \quad (1)$$

Para a resolução desse sistema de equações lineares com python, é retornada uma exceção, pois a matriz dos coeficientes não é quadrada e temos o seguinte código:

```
import numpy as np

# Seta precisao de 3 decimais
np.set_printoptions(precision=3, suppress=True)

#Matriz dos coeficientes
A = np.array([
```

```

[1, 2, 0, -3, 1, 0],
[1, 2, 1, -3, 1, 2],
[1, 2, 0, -3, 2, 1],
[3, 6, 1, -9, 4, 3]
])

#Vetor com valores atribuídos
B = np.array([2,3,4,9])

#Resolucao do sistema
x = np.linalg.solve(A, B)

print(x)

# raise LinAlgError('Last 2 dimensions of the array must be square')
# numpy.linalg.LinAlgError: Last 2 dimensions of the array must be
# square

```

Questão 03) A Regra de Cramer é um método para determinar a solução de um sistema linear $Ax = b$ de n equações e n incógnitas quando a matriz dos coeficientes A é invertível.

Regra de Cramer: Se $Ax = b$ é um sistema de n equações lineares em n incógnitas tal que $\det(A) \neq 0$, então a única solução do sistema é dada por:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

onde A_j é a matriz obtida substituindo as entradas da j – ésima coluna de A pelas entradas da matriz b .

a) Mostre a Regra de Cramer no caso em que A é uma matriz quadrada de ordem 2.

Tem-se então:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = b_1 \\ a_3x_1 + a_4x_2 = b_2 \end{cases}$$

Onde podemos obter a matriz dos coeficientes:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

o determinante de A é igual a:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -a_2 \cdot a_3 + a_1 \cdot a_4$$

Os determinantes de A_1 e A_2 são iguais a:

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix} = -a_3 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2$$

Obtem-se então a solução do sistema:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-a_4 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4} \\ x_2 &= \frac{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}{a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4} \end{aligned} \tag{2}$$

b) Use a Regra de Cramer para resolver x' e y' em termos de x e y

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' \\ y = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes:

