Universidade Federal da Bahia
Programa de Pós-Graduação em Ciência de Dados e Big Data
Carlos Magno Santos Ribeiro de Brito

Prof Dr. Paulo Canas Rodrigues

Respostas da terceira lista de exercício

Questão 01) Pretende-se, se possível, modelar através de uma reta de regressão linear simples a quantidade de vidro Y produzido num ponto de reciclagem (Kg), usando como variável independente x o número de dias sem despejar o mesmo. Para tal, registaram-se os seguintes dados.

x_i	2	3	4	5	10	15	20	25
Y_i	100	150	-	320	650	810	1040	1480

O valor de Y para $x = 4$ foi perdido, mas antes foram obtidos os seguintes resultados com base nos dados originais:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 84 \quad \sum_{i=1}^{8} Y_i = 4800 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 1404 \quad \sum_{i=1}^{8} Y_i^2 = 4548000 \quad \sum_{i=1}^{8} x_iY_i = 79700$$

a) Escreva a reta de regressão estimada através do método dos mínimos quadrados.

Precisaremos encontrar os valores de $\bar{x}$ $\overline{Y}$ $\widehat{\beta_1}$ e $\widehat{\beta_0}$ para assim formar a reta de regressão $Y = \widehat{\beta_1}x + \widehat{\beta_0}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{84}{8} = 10{,}5$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} Y_i = \frac{4800}{8} = 600$$

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_iY_i - n\bar{x}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{79700 - 8 \times 10{,}5 \times 600}{1404 - 8 \times 10{,}5^2} \approx 56{,}1303$$

$$\widehat{\beta_0} = \overline{Y} - \widehat{\beta_1}\bar{x} = 600 - 56{,}1303 \approx 10{,}6322$$

$$Y = 56{,}1303x + 10{,}6322$$

b) Acha que conseguiu um bom ajuste? Use o coeficiente de determinação.

Tem-se que o coeficiente de determinação é R^2 é dado como:

$$R^2 = \frac{\left(\widehat{\beta_1}^2\right)\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{8} Y_i^2 - n\bar{Y}^2} = \frac{56{,}1303^2 \times (1404 - 8 \times 10{,}5^2)}{4548000 - 8 \times 600^2} \approx 0{,}986$$

Dado o valor de R^2 obtido muito próximo de 1, pode-se afirmar que o ajuste foi bem sucedido.

c) Qual o valor da quantidade de vidro produzida no ponto de reciclagem que prevê ocorrer em 28 dias sem o despejar?

Não é possível extrapolar valores fora do intervalo usado para o ajuste. Assim sendo, para 28 dias, não se pode prever o valor de Y produzido.

d) Teste se o declive da reta de regressão obtida em (a) é zero, usando um nível de significância de 10%. Como interpreta a não rejeição dessa hipótese?

Temos as seguintes hipóteses:

- $H_0 : \beta_1 = 0$
- $H_a : \beta_1 \neq 0$

Cálculo da variância do erro:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\left\{\left(\sum_{i=1}^{8} Y_i^2 - nY^2\right) - \left(\widehat{\beta_1}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)\right\}$$
$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{6}\{(4548000 - 8 \times 600^2) - 56{,}1303^2 \times (1404 - 8 \times 10{,}5^2)\} \approx 3896{,}8797$$

Cálculo da estatística de teste T:

$$T = \frac{\widehat{\beta_1} - \beta_1}{\sqrt{\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sum_{i=1}^{8} x_i^2 - n\bar{x}^2}}} \sim t_{n-2}$$

$$T = \frac{56{,}1303 - 0}{\sqrt{\frac{3896{,}8797}{1404 - 8 \times 10{,}5^2}}} \sim t_6 \approx 20{,}5356$$

Para a região crítica com $gl = 6$ e 10% de significância, temos o valor de $t_0 = 1{,}943$ (tabelado ou no python). Assim sendo, a região de rejeição será:

$$RR =]-\infty; -1{,}943[U]1{,}943; +\infty[$$

Então, como o valor de T obtido é 20,5356, está dentro da região de rejeição, devemos rejeitar a hipótese nula H_0. Isso quer dizer que o valor de β_1 é considerável na inclinação e não pode ser desconsiderado.

e) Qual o erro de previsão quando o ponto de reciclagem não é despejado durante 10 dias?

Para o caso, basta achar o valor previsto pelo ajuste e subtrair pelo valor real medido:

- Estimado $\rightarrow Y_{10}^e = 56{,}1303x_{10} + 10{,}6322 = 56{,}1303 \times 10 + 10{,}6322 = 571{,}9352$

- Tabelado $\rightarrow Y_{10}^t = 650$

- Diferença $\rightarrow \|\Delta Y_{10}\| = 571{,}9352 - 650 = 78{,}0648$

Questão 02) Considere o conjunto de dados "Wage" do pacote "ISLR2" do software R. Considere a variável "health_ins" como variável resposta e as variáveis "age", "maritl", "race", "education", "jobclass", "health" e "logwage" como variáveis explicativas. Ajuste uma regressão logística, escreva o modelo final e interprete os coeficientes obtidos.

Rodando o seguinte script, temos:

```
install.packages("ISLR2")
library(ISLR2)

summary(glm(health_ins ~ age + maritl + race + education + jobclass
 + health + logwage, data = Wage, family = binomial))
```

```
    Call:
glm(formula = health_ins ~ age + maritl + race + education +
    jobclass + health + logwage, family = binomial, data = Wage)

Deviance Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.0259  -0.8050  -0.5755   0.9413   2.8857
```

```
Coefficients:
                              beta Std. Error z value Pr(>|z|)    
(Intercept)                 12.345276   0.768926  16.055  < 2e-16 ***
age                         -0.016221   0.004311  -3.763 0.000168 ***
maritl2. Married             0.277127   0.119370   2.322 0.020255 *  
maritl3. Widowed            -0.171424   0.575412  -0.298 0.765767    
maritl4. Divorced           -0.129080   0.204525  -0.631 0.527960    
maritl5. Separated           0.277519   0.320369   0.866 0.386354    
race2. Black                 0.059940   0.144589   0.415 0.678468    
race3. Asian                 0.316402   0.181673   1.742 0.081579 .  
race4. Other                 0.111366   0.366256   0.304 0.761078    
education2. HS Grad         -0.406558   0.150140  -2.708 0.006772 ** 
education3. Some College    -0.517576   0.165375  -3.130 0.001750 ** 
education4. College Grad    -0.463202   0.172532  -2.685 0.007259 ** 
education5. Advanced Deg    -0.308215   0.205246  -1.502 0.133179    
jobclass2. Information      -0.349047   0.091890  -3.799 0.000146 ***
health2. >=Very Good        -0.144779   0.096927  -1.494 0.135256    
logwage                     -2.618243   0.175277 -14.938  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 3693.5  on 2999  degrees of freedom
Residual deviance: 3182.7  on 2984  degrees of freedom
AIC: 3214.7

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

tem-se então a equação de regressão logística que é:

$$P(x) = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n}} \tag{1}$$

As chances da pessoa possuir um plano de saúde são aumentadas quando temos variáveis (β) positivas. O caso contrário também é válido, ou seja, as negativas diminuem a chance do indivíduo possuir plano de saúde.

Questão 03) Numa empresa existem três máquinas para produzir um certo tipo de peça. Foram retiradas amostras aleatórias de dimensão cinco de cada uma das máquinas e foi medido o diâmetro (em mm) de cada uma das peças, resultando nos resultados abaixo:

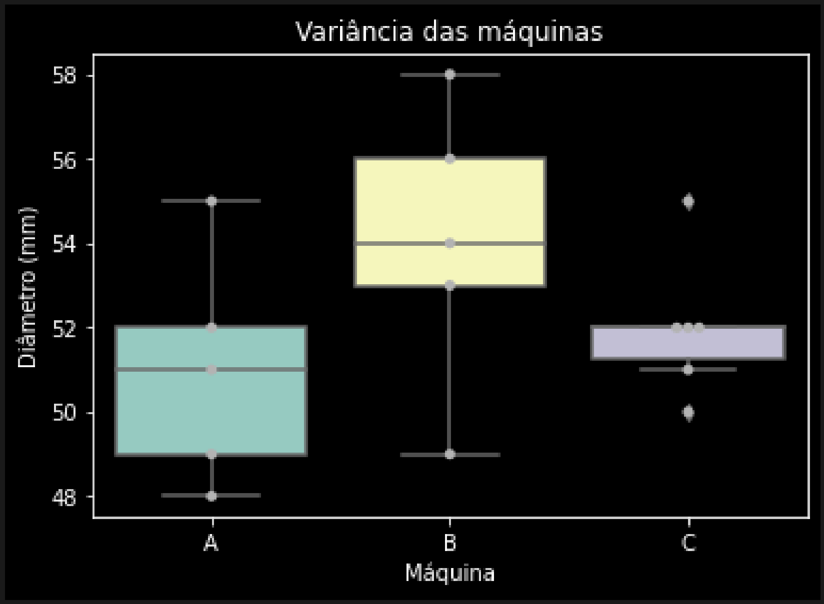
- Máquina 1: $49, 55, 51, 52, 48$;
- Máquina 2: $53, 54, 58, 49, 56$;
- Máquina 3: $55, 51, 52, 52, 52, 50$;

Verifique se existem diferenças entre os diâmetros das peças produzidas por cada uma das máquinas. No caso de haver diferenças, quais os pares de máquinas responsáveis por essas diferenças?

Para o caso em questão, tomemos como hipóteses:

- H_0 : Máquina 1, 2 e 3 têm média de diâmetro iguais;
- H_a : Pelo menos uma das máquinas possui a média de diâmetro diferente;

Temos o seguinte boxplot para esses dados:




```
import pandas as pd
import statsmodels.api as sm
from statsmodels.formula.api import ols
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns
plt.style.use('dark_background')

# dados
data = {"A": {0: 49, 1: 55, 2: 51, 3: 52, 4: 48},
        "B": {0: 53, 1: 54, 2: 58, 3: 49, 4: 56},
        "C": {0: 55, 1: 51, 2: 52, 3: 52, 4: 52, 5: 50}
        }
df = pd.DataFrame(data)

df_melt = pd.melt(df.reset_index(), id_vars=["index"],
```

```
value_vars=["A", "B", "C"])

df_melt.columns = ["index", "treatments", "value"]

ax = sns.boxplot(data=df)
ax = sns.swarmplot(data=df, color=".7")
ax.title.set_text("Variancia das maquinas")
ax.set_xlabel("Maquina")
ax.set_ylabel("Diametro (mm)")

plt.figure()

#Obter tabela com valores da anova
model = ols("value ~ treatments", data=df_melt).fit()
anova_table = sm.stats.anova_lm(model, typ=2)
anova_table
```

Obtém-se a seguinte tabela com os valores da análise de variância:

	sum_sq	df	F	PR(>F)
treatments	23.4375	2.0	1.692708	0.222156
residual	90.0	13.0	NaN	NaN

A partir da tabela com dados gerados, pode-se concluir então que o valor de p (ou $PR(> F)$) obtido a partir da análise ANOVA é, significantemente maior que 0.05. Não se rejeita a hipótese H_0 de que as médias dos três grupos de dados são iguais.