La derivada

Breve resumen para estudiantes ITI

Mg. Carlos Andrés Pérez M.

Indice de contenidos

Advertencia

Este documento **NO ES DEFINITIVO** y se encuentra en permanente construcción. A medida que se vaya avanzando en la temática se irá complementando debidamente.

1 Generalidades

1.1 Idea intuitiva

La **derivada** de una función de una variable real mide la sensibilidad al cambio del valor de la función (valor de salida) con respecto a un cambio en su argumento (valor de entrada). Las derivadas son una herramienta fundamental del cálculo.

Por ejemplo, la derivada de la posición de un objeto en movimiento con respecto al tiempo es la velocidad del objeto: mide qué tan rápido cambia la posición del objeto cuando el tiempo avanza.

1.2 Interpretación geométrica

La derivada de una función de una sola variable en un valor de entrada elegido, cuando existe, es la **pendiente de la línea tangente a la gráfica de la función en ese punto**. La línea tangente es la mejor aproximación lineal de la función cerca de ese valor de entrada. Por esta razón, la derivada a menudo se describe como la "*tasa de cambio instantánea*", la relación entre el cambio instantáneo en la variable dependiente y el de la variable independiente.

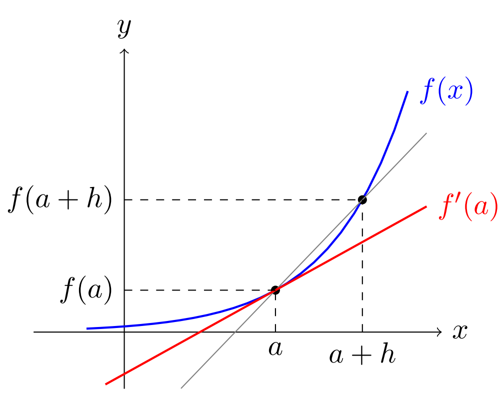

Figura 1: Derivada como tangente a la curva.

1.3 Definición matemática

Una función de variable real $f(x)$ es **diferenciable en un punto** a **de su dominio**, si su dominio contiene un intervalo abierto I que contiene a, y el límite

$$L = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe.

Ahora, si esto ocurre para todos los puntos de I entonces puede afirmarse que la función de variable real $f(x)$ es **diferenciable en el intervalo** I y su derivada en dicho intervalo equivale a

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

Nota: Si f es diferenciable en a, entonces f también debe ser continua en a.

1.3.1 Ejemplos

Ejemplo 1 (enunciado)

Derivar la función $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ usando la definición de derivada como límite y evaluar para $x = 3$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\left(2(x+h)^2 - 3(x+h) + 5\right) - (2x^2 - 3x + 5)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2 + 2xh + h^2) - 3(x+h) + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 - 3x - 3h + 5 - 2x^2 + 3x - 5}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 - 3h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(4x + 2h - 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (4x + 2h - 3) \\
&= 4x + 2(0) - 3 \\
&= 4x - 3
\end{aligned}$$

Ahora, para $x = 3$ se tiene que

$$f'(3) = 4(3) - 3 = 12 - 3 = 9$$

Ejemplo 2 (enunciado)

Para la función $f(x) = \sqrt{2x+1}$ hallar su derivada a partir de la definición dada en (1) y evaluar para $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2(x+h)+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x+2h+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{2x+2h+1} - \sqrt{2x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(2x+2h+1) - (2x+1)}{h\left(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2x+2h+1-2x-1}{h\left(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}\right)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\sqrt{2x+2h+1} + \sqrt{2x+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2x+2(0)+1} + \sqrt{2x+1}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x+1}} \\
&= \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}
\end{aligned}
$$

Ahora, para $x = 4$ se tiene que

$$
f'(4) = \frac{1}{\sqrt{2(4)+1}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}
$$

Ejemplo 3 (enunciado)

Derivar la función $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ usando la definición de derivada como límite y evaluar para $x = -6$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)}{x+h+3} - \frac{2x}{x+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2(x+h)(x+3)-2x(x+h+3)}{(x+h+3)(x+3)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)(x+3) - 2x(x+h+3)}{h(x+h+3)(x+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\left(x^2+3x+xh+3h\right) - 2x(x+h+3)}{h(x+h+3)(x+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2+6x+2xh+6h-2x^2-2xh-6x}{h(x+h+3)(x+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h}{h(x+h+3)(x+3)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6}{(x+h+3)(x+3)} \\
&= \frac{6}{(x+0+3)(x+3)} \\
&= \frac{6}{(x+3)(x+3)} \\
&= \frac{6}{(x+3)^2}
\end{aligned}$$

Ahora, para $x = -6$ se tiene que

$$f'(-6) = \frac{6}{(-6+3)^2} = \frac{6}{(-3)^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

2 Reglas de derivación

2.1 Derivadas de funciones elementales

Tras aplicar la ecuación (1) a algunos tipos de funciones es posible establecer, entre otras, las reglas que se resumen en la tabla 1.

La última línea de la tabla 1 hace referencia a una importante regla de derivación conocida como **regla de la cadena** la cual establece cómo deben derivarse las *funciones compuestas*: derivada externa multiplicada por la derivada interna.

Tabla 1: Resumen de reglas de derivación.

Función	**Derivada**
k, con $k \in \mathbb{R}$	0
x	1
$kf(x)$	$kf'(x)$
$mx+b$, con $m, b \in \mathbb{R}$	m
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$\frac{f(x)}{g(x)}$, con $g(x) \neq 0$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
x^n, con $n \in \mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, con $n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$	$\frac{1}{n}x^{1/n-1}$
e^x, con $e \approx 2.718281828459$	e^x
k^x, con $k > 0$	$k^x \ln k$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, con $x > 0$
$\log_b x$, con $b > 0, b \neq 1$	$\frac{1}{x \ln b}$, con $x > 0$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$
$f(g(x))$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$

2.2 Ejemplos

Ejemplo 1 (enunciado)

Para la función $f(x) = 3x^4 - 8x^2 + \frac{1}{2}x + 5$ determinar su derivada.

Usando las reglas de la tabla 1 tendríamos:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\left(4x^3\right) - 8(2x) + \frac{1}{2}(1) + 0 \\
&= 12x^3 - 16x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 2 (enunciado)

Si la posición como función del tiempo de un cuerpo que se mueve con **movimiento armónico simple** está dada por $x(t) = A\cos(\omega t)$ siendo A la amplitud del movimiento y ω la velocidad angular del mismo, hallar tanto la velocidad como la aceleración en función del tiempo para dicho cuerpo.

Dado que la velocidad es la derivada de la posición (es decir, $v(t) = x'(t)$), entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
v(t) &= A(-\sin(\omega t))(\omega t)' \\
&= A(-\sin(\omega t))\,\omega \\
&= -A\omega\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Téngase en cuenta que tanto A como ω son constantes en este problema. La variable independiente es el tiempo t y por ello es que con respecto a este es que se tiene que derivar. Ahora, la regla clave en este ejercicio es la de la cadena.

Ahora, considerando que la aceleración es la derivada de la velocidad ($a(t) = v'(t)$) se tendría:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= -A\omega(\cos(\omega t))(\omega t)' \\
&= -A\omega(\cos(\omega t))\,\omega \\
&= -A\omega^2\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3 (enunciado)

Hallar la derivada de la función

$$f(x) = \frac{4e^{3x}}{2x+5}.$$

Exprese el resultado de la manera más simplificada posible.

En este ejercicio lo principal a tener en cuenta es que se aplica la regla de la derivada de un cociente. Adicionalmente, para simplificar la expresión la clave es la factorización de términos.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(4e^{3x}\right)'(2x+5) - \left(4e^{3x}\right)(2x+5)'}{(2x+5)^2} \\
&= \frac{4\left(e^{3x}\right)(3)(2x+5) - \left(4e^{3x}\right)(2)}{(2x+5)^2} \\
&= \frac{4e^{3x}\left(3(2x+5) - 2\right)}{(2x+5)^2} \\
&= \frac{4e^{3x}(6x+15-2)}{(2x+5)^2} \\
&= \frac{4e^{3x}(6x+13)}{(2x+5)^2}
\end{aligned}
$$

3 Aplicaciones de la derivada

3.1 Análisis de curvas

3.2 Razón de cambio

3.3 Optimización

3.4 Solución numérica de ecuaciones: método de Newton-Rhapson