Lógica proposicional

(Breve resumen para el grado séptimo)

Carlos Andrés Pérez M.
I.E. Aureliano Flórez Cardona

2018

Disclaimer

¡Importante!

Este documento NO reemplaza los apuntes de clase; su propósito es servir de apoyo y consulta rápida en caso de duda y para reafianzar los conceptos y procedimientos más relevantes de la temática vista.

El estudio de la **lógica** es el estudio de los *métodos y principios usados al distinguir entre los argumentos correctos y los incorrectos*.

Llamaremos **proposición lógica** a todo enunciado que tiene la cualidad de ser verdadero (V) o falso (F), pero nunca los dos a la vez. Denotaremos a las proposiciones con letras minúsculas (p, q, r, s, t, ...).

Conceptos básicos

Son ejemplos de proposiciones lógicas:

p : *"Colombia queda ubicado en América del Sur"* (verdadera)

q : *"La Antártica es el continente más frío"* (verdadera)

r : "$3 + 6 = -45$" (falsa)

s : *"Júpiter es el planeta más pequeño del Sistema Solar"* (falsa)

t : *"Los osos son mamíferos y comen carne"* (verdadera)

Conceptos básicos

Las proposiciones lógicas se pueden clasificar como **simples** (atómicas) o **compuestas** (moleculares).

De los ejemplos de la transparencia anterior las primeras cuatro corresponden a proposiciones simples ya que se trata de afirmaciones puntuales expresadas en su forma más básica; la última, por el contrario, es compuesta ya que puede entenderse como la combinación de dos proposiciones más simples: *"los osos son mamíferos"* y *"los osos comen carne"*.

Conceptos básicos

Expresiones de tipo abierto o indeterminado NO son proposiciones. Por ejemplo:

- *"María y Camila"*
- *"Llueve"*
- "$x - 8 = 3$"
- *"Todos los triángulos"*

Nótese que en ninguna de ellas puede establecerse un valor de verdad.

Conceptos básicos

Los elementos que permiten combinar proposiciones simples para obtener proposiciones compuestas se conocen como **conectores lógicos**.

El valor de verdad de una poposición lógica compuesta depende del valor de verdad de cada una de las proposiciones simples involucradas y del conector que las une.

A continuación se describen los conectores más relevantes.

La conjunción (“*y*”)

Cuando se combinan dos proposiciones simples mediante una conjunción el valor de verdad de la proposición compuesta solo es verdadero cuando las dos proposiciones simples son verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Tabla 1: Tabla de verdad para la conjunción.

Ejemplo: *“Anserma queda en el departamento de Caldas y tiene más de diez mil habitantes”*.

La disyunción inclusiva (“*o*”)

También llamada *disyunción débil* o simplemente *disyunción*. La falsedad de una proposición lógica compuesta cuyo elemento de unión es la disyunción solo se da cuando las dos proposiciones lógicas que la conforman son falsas.

p	q	$p \lor q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 2: Tabla de verdad para la disyunción inclusiva.

Ejemplo: *“Falcao puede jugar de volante o de delantero”*.

La disyunción exclusiva (“ó”)

También llamada *disyunción fuerte*. Solamente se tiene una proposición válida si las dos proposiciones simples que la conforman poseen distinto valor de verdad.

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Tabla 3: Tabla de verdad para la disyunción exclusiva.

Ejemplo: *“Mateo está enfermo ó está sano”*.

El condicional (*"si... entonces"*)

Se le suele también llamar *implicación*. Solamente hay falsedad cuando el antecedente (primera proposición) es verdadero pero el consecuente (segunda proposición) es falso.

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Tabla 4: Tabla de verdad para el condicional.

Ejemplo: *"Si mi jefe me da el aumento entonces el otro mes iré de vacaciones a Cartagena"*.

El bicondicional (*“si y solo si”*)

También se le conoce como *doble implicación* o como *equivalencia*. La proposición es válida cuando las dos proposiciones simples que la conforman poseen el mismo valor de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tabla 5: Tabla de verdad para el bicondicional.

Ejemplo: *“El bombillo alumbra si y solo si se encuentra encendido”*.

La negación (*“no”*)

La negación cambia el valor de verdad de una proposición lógica; por ejemplo *“El Sol es una estrella”* es verdadera pero *“El Sol no es una estrella”* es falsa.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Tabla 6: Tabla de verdad para la negación.

Tabla resumen

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \veebar q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Tabla 7: Tabla resumen.

Consideraciones importantes

- Los conectores lógicos $\wedge$, $\vee$, $\veebar$ y $\leftrightarrow$ son conmutativos; esto es, a manera de ejemplo, que $p \wedge q$ es equivalente a $q \wedge p$. El condicional NO es conmutativo.
- No necesariamente los conectores deben aparecer de manera expresa sino que también pueden ser interpretados implícitamente; Ej.: *"Sofía es bonita pero antipática"* corresponde a una conjunción, pues es equivalente a *"Sofía es bonita y antipática"*. De manera similar ocurre con los demás conectores.
- Es posible en las conjunciones y disyunciones vincular más de dos proposiciones simples a la vez; Ej.: *"Roberto es juicioso, responsable, alegre y muy colaborador"* se puede expresar simbólicamente como $p \wedge q \wedge r \wedge s$.

Tablas de verdad

Las **tablas de verdad** (o tablas booleanas) nos permiten desarrollar una proposición lógica compuesta para determinar su valor de verdad para las diferentes combinaciones de V y F de las proposiciones simples que la conforman.

La cantidad (N) de posibles combinaciones de V y F que una proposición compuesta con n proposiciones simples puede tener se halla calculando $N = 2^n$.

Si se llega al final en una tabla de verdad que todas la posibles combinaciones entregan V entonces se tiene una *tautología*; si todas entregan F entonces hablamos de una *contradicción*; si hay tanto V como F decimos que tenemos una *contingencia*.

Ejemplo

Ejemplo

Enunciado. Desarrollar la tabla de verdad para

$$((p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)) \rightarrow (p \veebar q)$$

Solución. Dado que se tienen 3 proposiciones simples (p, q y r) entonces nuestra tabla de verdad tendrá $N = 2^3 = 8$ combinaciones de V y F.

(continua en la siguiente transparencia)

Ejemplo (continuación)

Ejemplo (continuación)

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge r$	$q \wedge \neg r$	$(p \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$	$p \veebar q$	Rta.
V	V	V	F	V	F	V	F	F
V	V	F	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	F	F	V

(tenemos una *contingencia*)

Cuantificadores

Los **cuantificadores** son elementos que confieren a las expresiones una idea de cantidad a manera de generalidad o particularidad.

Los cuantificadores permiten, entre otras cosas, convertir expresiones abiertas (como las que contienen variables y que por tanto no son proposiciones) en proposiciones.

Hay dos tipos de cuantificadores: *universales* y *existenciales*.

El símbolo del cuantificador universal es $\forall$ y se lee "para todo"; el del cuantificador existencial es $\exists$ y se lee "existe un".

Las expresiones "$x + 3 = 5$" y "$(x - 1)^2 > 0$" no son formalmente proposiciones por ser abiertas; sin embargo, si decimos

- "$\exists x : x + 3 = 5$" (lo cual se lee como *"Existe un x tal que —o para el cual—* $x + 3 = 5$") sí es una proposición y es verdadera ya que efectivamente existe el 2 que puede tomar el valor de x y hacer cumplir la igualdad dada.
- "$\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 > 0$" (el cual se lee *"Para todo x que pertenece a los reales,* $(x - 1)^2 > 0$") sí es una proposición y es falsa (dado que si $x = 1$ entonces obtendríamos $0 > 0$ lo cual es falso).