Teoría de conjuntos

(Breve resumen para el grado séptimo)

Carlos Andrés Pérez M.

I.E. Aureliano Flórez Cardona

2018

Disclaimer

¡Importante!

Este documento NO reemplaza los apuntes de clase; su propósito es servir de apoyo y consulta rápida en caso de duda y para reafianzar los conceptos y procedimientos más relevantes de la temática vista.

Conceptos fundamentales

Intuitivamente decimos que un **conjunto** es una *lista, colección o clase de objetos bien definidos* que bien pueden ser cualesquiera (personas, cosas, animales, números,...). A dichos objetos se les conoce como **elementos** del conjunto.

A los conjuntos se les suele representar con letras mayúsculas (A, B, C,...) y a sus elementos encerrados entre llaves y separados por comas; a dichos elementos se le escribe de manera más flexible dependiendo de su propia naturaleza.

Son ejemplos de conjuntos:

- $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- $B = \{+, -, \times, \div\}$
- $C = \{a, e, y, o, u\}$
- $D = \{\text{Pinta}, \text{Niña}, \text{Santa María}\}$
- $E = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$

A la notación anterior se le conoce como *forma tabular* o más comunmente como **definición por extensión** de un conjunto.

Conceptos fundamentales

Alternativamente se pueden definir conjuntos enunciando la(s) característica(s) de sus elementos; a esta se le conoce como la *forma constructiva* o **definición por comprensión** de un conjunto.

Así, los ejemplos de la transparencia anterior quedarían como:

- $A = \{x|x \text{ es un número dígito}\}$ (NOTA: Se lee "*A* es el conjunto formado por todos los *x* tales que *x* es un número dígito"; de manera análoga con los siguientes)
- $B = \{x|x \text{ es un una operación aritmética básica}\}$
- $C = \{x|x \text{ es una vocal}\}$
- $D = \{x|x \text{ es una de las tres embarcaciones de Cristóbal Colón}\}$
- $E = \{x|x \text{ es un múltiplo positivo de 3 menor que 20}\}$

Los conjuntos pueden ser finitos o infinitos. Un conjunto es **finito** si consta de un cierto número de elementos distintos (Ej.: el conjunto formado por los meses del año) y es **infinito** si el proceso de contar los elementos nunca acaba (Ej.: el conjunto de los números pares).

A la cantidad de elementos de un conjunto se le conoce como el cardinal ($\mathcal{C}$) del conjunto. Ej.: Si $V = \{a, e, i, o, u\}$ entonces $\mathcal{C}(V) = 5$ (que se lee: “El cardinal del conjunto V es 5”).

Conceptos fundamentales

Esisten dos casos muy especiales del conjunto finito:

- El **conjunto vacío** o nulo (simbolizado como $\emptyset$ o simplemente $\{\}$) es aquel que no posee elemento alguno; dicho de otra manera, su cardinal siempre es cero. Ej.: el conjunto compuesto por todos los humanos nacidos en el planeta Venus.
- El **conjunto unitario** que consiste en aquel que solo posee un elemento y por tanto su cardinal siempre es uno. Ej: el conjunto formado por los elementos de la tabla periódica que solo poseen un protón en su núcleo.

Para expresar la idea de que un elemento está o no dentro de un conjunto usamos la **relación de pertenencia** ($\in$).

A saber, si tenemos el conjunto P formado por todos los números primos menores que 20 (esto es $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$) entonces podemos afirmar a manera de ejemplo que

- $7 \in P$, que se lee "7 pertenece al conjunto P"
- $4 \notin P$, que se lee "4 no pertenece al conjunto P"

Relaciones entre conjuntos

Es posible que dos conjuntos A y B contengan exactamente los mismos elementos, en cuyo caso decimos que son **iguales** ($A = B$).

Si los dos conjuntos no tienen ningún elemento en común decimos que son conjuntos **disyuntos**.

Si comparten algunos de sus elementos entre sí se les llama conjuntos **intersecantes**.

Y, si todos los elementos de uno de los conjuntos (digamos B) pertenecen a su vez al otro conjunto (digamos A) entonces se dice que uno es **subconjunto** del otro (en este caso B sería subconjunto de A).

Relaciones entre conjuntos

Si B es subconjunto de A también se dice que "está contenido" en A.

Se distinguen dos tipos de **relaciones de contenencia**: *propia* ($\subset$) e *impropia* ($\subseteq$).

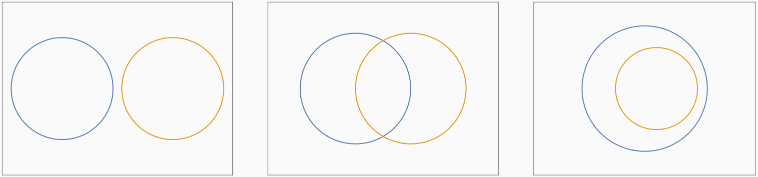
La contenencia propia implica que el conjunto contenido es menor (y por ende distinto) que el conjunto que lo contiene. Ej: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (el conjunto de los naturales es *subconjunto propio* de los enteros).

La contenencia impropia considera la posibilidad de que el subconjunto sea incluso igual al conjunto que lo contiene. Ej.: El conjunto de estudiantes de 7D que perdieron matemáticas es *subconjunto impropio* del conjunto de todos los estudiantes de 7D (ya que potencialmente todos pueden perder a la vez).

Es posible también negar una relación de contenencia según el caso. A saber, si $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $N = \{2, 4, 6\}$ y $O = \{1, 2, 3, 4\}$ entonces

- $N \subset M$ (N está contenido en M)
- $O \not\subset M$ (O no está contenido en M)

Son una representación gráfica sencilla y práctica de los conjuntos y sus relaciones a través de círculos o superficies cerradas similares que, dependiendo del caso, pueden cortarse entre sí o no.



(a) Disyuntos. **(b)** Intersecantes. **(c)** Subconjunto.

Figura 1: Relaciones entre conjuntos representadas mediante diagramas de Venn.

Operaciones entre conjuntos

Para operar conjuntos entre sí se cuenta con una serie de operaciones propias siendo las más básicas:

- La unión
- La intersección
- La diferencia
- La diferencia simétrica
- El complemento

A continuación se describen con mayor detalle.

Unión

La **unión** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B o a ambos. Se denota como $A \cup B$ y se cumple que $A \cup B = B \cup A$.

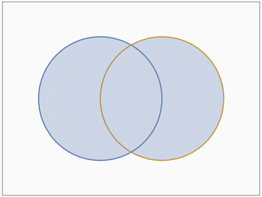


Figura 2: $A \cup B$ (A en azul y B en naranja).

Más concisamente

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección

La **intersección** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen simultaneamente a A y a B. Se denota como $A \cap B$ y se cumple que $A \cap B = B \cap A$.

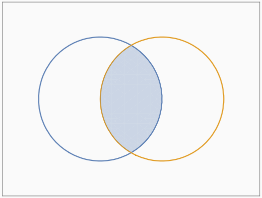


Figura 3: $A \cap B$ (A en azul y B en naranja).

Más concisamente

$$A \cap B = \{x | x \in A \land x \in B\}$$

Diferencia

La **diferencia** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A pero no a B. Se denota como $A - B$. Téngase en cuenta que esta operación no es conmutativa ($A - B \neq B - A$).

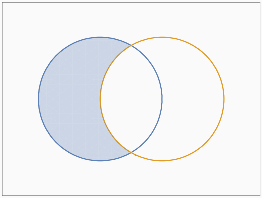


Figura 4: $A - B$ (A en azul y B en naranja).

Más concisamente

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Diferencia simétrica

La **diferencia simétrica** de los conjuntos A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B pero no a ambos. Se denota como $A \triangle B$ y se cumple que $A \triangle B = B \triangle A$).

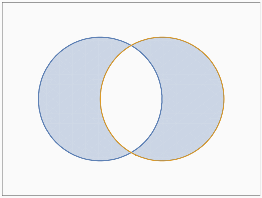


Figura 5: $A \triangle B$ (A en azul y B en naranja).

Esta operación es equivalente a

$$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$$

El **complemento** de un conjunto A está formado por todos los elementos que no pertenecen a A. Se representa como A' y es equivalente a $U - A$ donde U es el *conjunto universal* o *referencial*.

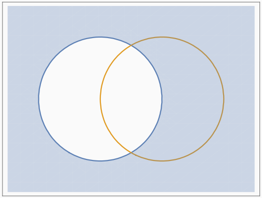


Figura 6: A' (A en azul y B en naranja).

Más concretamente $A' = \{x | x \notin A\}$.

Ejemplos

Ejemplo

Sea el conjunto universal $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y dentro de este $A = \{0, 3, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 5, 7\}$ y $C = \{4, 5, 6, 7\}$ entonces

- $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$
- $A \cap C = \{4, 7\}$
- $A \cap B \cap C = \{7\}$
- $A - B = \{0, 3, 4, 8\}$
- $B - A = \{1, 2, 5\}$
- $B \triangle C = \{1, 2, 4, 6\}$
- $B' = \{0, 3, 6, 8, 9\}$
- $(A \cup B)' = \{6, 9\}$