Números enteros ($\mathbb{Z}$) y racionales ($\mathbb{Q}$)

(Breve resumen para el grado séptimo)

Carlos Andrés Pérez M.

I.E. Aureliano Flórez Cardona

2018

Disclaimer

¡Importante!

Este documento NO reemplaza los apuntes de clase; su propósito es servir de apoyo y consulta rápida en caso de duda y para reafianzar los conceptos y procedimientos más relevantes de la temática vista.

Los números enteros ($\mathbb{Z}$)

Introducción

El conjunto de los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) es una generalización del conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) y se obtiene como resultado de la unión de tres conjuntos

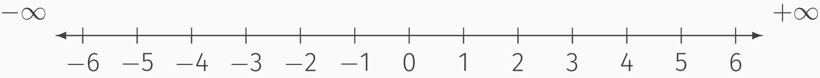
1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ (que a partir de ahora llamaremos **enteros positivos** o $\mathbb{Z}^+$),
2. el $\{0\}$, y
3. el conjunto formado por los números de la forma $-n$ donde n es un número natural, esto es, $\{-1, -2, -3, -4, \ldots\}$ (que a partir de ahora llamaremos **enteros negativos** o $\mathbb{Z}^-$).

Esto es

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Introducción

Los números enteros se puede representar gráficamente en la **recta numérica**, como sigue:



Convencionalmente los enteros positivos se ubican a la derecha del cero y los negativos a la izquierda.

Valor absoluto en los números enteros

El **valor absoluto** de un número entero a (simbolizado como $|a|$) corresponde a la distancia que lo separa del origen (cero). Operativamente se puede definir como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

De esta manera $|3| = 3$ (es decir, 3 está a 3 unidades de distancia del origen) y $|-5| = -(-5) = 5$ (es decir, -5 está a 5 unidades de distancia del origen).

El valor absoluto también nos permite calcular la distancia (d) entre dos números enteros cualesquiera m y n simplemente operando

$$d(m, n) = |m - n|$$

Orden en los números enteros

Con respecto al **orden** en los números enteros se tiene que $a > b$ (siendo a y b enteros) implica que a está más a la derecha que b en la recta numérica, y además que $a - b > 0$ (la resta del mayor menos el menor da como resultado una cantidad positiva).

A título de ejemplo se observa que

- $-2 > -6$ ya que como se aprecia en la recta, -2 está más a la derecha que -6,
- así como que $8 > 3$ ya que $8 - 3 = 5 > 0$.

Orden en los números enteros

Si a y b son números enteros cualesquiera ha de cumplirse para ellos una y solo una de las siguientes situaciones: 1) $a > b$, b) $a < b$ ó $a = b$. (*propiedad de la tricotomía*)

Adicionalmente se tiene que si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$ (*transitividad de la desigualdad*).

Téngase en cuenta que

- decir $a < b$ es equivalente a $b > a$ por lo que todo lo dicho anteriormente puede ser aplicado a una relación “ser menor que”, y que
- $a \geq b$ se entiende como que $a > b$ o $a = b$ (y de manera similar para $a \leq b$).

Adición de números enteros

Para sumar dos números enteros se debe tener en cuenta las siguientes reglas:

1. *Para sumar dos números enteros con signos iguales* se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo de los sumandos. Por ejemplo:
   - $4 + 7 = 11$
   - $-2 + (-6) = -(2 + 6) = -8$
2. *Para sumar dos números enteros de signos diferentes* se restan sus valores absolutos (el mayor menos el menor) y al resultado se le antepone el signo del sumando con mayor valor absoluto. Por ejemplo:
   - $-4 + 7 = +(7 - 4) = 3$
   - $5 + (-8) = -(8 - 5) = -3$

Adición de números enteros (propiedades)

- **Clausura**. La suma de enteros entrega como resultado un entero:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$$

- **Asociatividad**. Es posible en la suma de enteros asociar de diferentes maneras y el resultado no cambia:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \rightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$$

- **Conmutatividad**. Se puede cambiar el orden de la suma de dos enteros y el resultado no cambia:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a + b = b + a$$

Adición de números enteros (propiedades)

- **Existencia del elemento neutro aditivo**. El cero es el elemento neutro o idéntico para la suma de enteros:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \rightarrow a + 0 = 0 + a = a$$

- **Existencia del elemento inverso aditivo**. Todo número entero a tiene su inverso aditivo $(-a)$ que al operarse con a mediante la suma entrega como resultado el elemento neutro aditivo:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \rightarrow a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Sustracción de números enteros

Para restar dos números enteros se debe *sumar al minuendo con el opuesto del sustraendo* (esto es, $a - b = a + (-b)$). Luego, se aplica las reglas de adición de números enteros.

Ejemplos:

- $6 - 10 = 6 + (-10) = -(10 - 6) = -4$
- $7 - (-5) = 7 + 5 = 12$

Producto y cociente de números enteros

Para multiplicar o dividir números enteros se deberá tener en cuenta:

1. *Si dos números enteros tienen signos iguales* sus valores absolutos se multiplican (o dividen). Luego, al resultado se le antepone el signo positivo ($+$). Ejemplos:
   - $4 \times 5 = +(4 \times 5) = 20$
   - $(-3) \times (-6) = +(3 \times 6) = 18$
   - $(-24) \div (-4) = +(24 \div 4) = 6$
2. *Si dos números enteros tienen signos diferentes* se multiplican (o dividen) sus valores absolutos. Luego, al resultado se le antepone el signo negativo ($-$). Ejemplos:
   - $4 \times (-2) = -(4 \times 2) = -8$
   - $15 \div (-3) = -(15 \div 3) = -5$
   - $(-20) \div 4 = -(20 \div 4) = -5$

Producto de números enteros (propiedades)

- **Clausura**. El producto de enteros entrega como resultado un entero:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times b \in \mathbb{Z}$$

- **Asociatividad**. Es posible en el producto de enteros asociar de diferentes maneras y el resultado no cambia:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

- **Conmutatividad**. Se puede cambiar el orden de los factores del producto de dos enteros y el resultado no cambia:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times b = b \times a$$

Producto de números enteros (propiedades)

- **Existencia del elemento neutro multiplicativo**. El uno es el elemento neutro o idéntico para el producto de enteros:

$$\forall a \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times 1 = 1 \times a = a$$

- **Existencia del elemento inverso multiplicativo**. Todo número entero a (con $a \neq 0$) tiene su inverso multiplicativo (a^{-1}) que al operarse con a mediante el producto entrega como resultado el elemento neutro umltiplicativo:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \rightarrow a \times \left(a^{-1}\right) = \left(a^{-1}\right) \times a = 1$$

- **Distributividad del producto con respecto a la suma (y diferencia)**. Un entero que multiplique a una suma o diferencia puede repartirse para cada uno de los elementos de esta:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \rightarrow a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$$

Los números racionales ($\mathbb{Q}$)

Introducción

Al cociente de la división de dos números enteros a y b, donde b es diferente de cero, se le denomina **número racional** (o fraccionario). Todos los números racionales constituyen el conjunto de números racionales denotados por $\mathbb{Q}$.

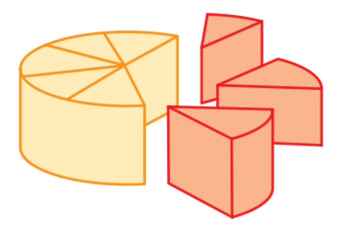
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

A a se le conoce como **numerador** y a b como **denominador** de la fracción.

Introducción

Consideremos el ejemplo

$$\frac{3}{8}$$



El numerador (3) representa *las partes del todo* (unidad de referencia) que se toman o que se observan; el denominador (8) indica *en cuántas partes se divide el todo* (unidad de referencia).

Introducción

Nótese que todo número entero puede escribirse como fracción; a título de ejemplo 5 puede escribirse como $\frac{5}{1}$.

De esta manera se afirma que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, lo que quiere decir que el cojunto de los números naturales es subconjunto de los enteros y, a su vez, este es subconjunto de los racionales.

Introducción

Los números racionales pueden clasificarse

- *por comparación de sus términos* como
  - Propias: Cuando el numerador es menor que el denominador. Ej.: $\frac{3}{4}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{5}, \ldots.$
  - Impropias: Cuando el numerador es mayor que el denominador. Ej.: $\frac{8}{7}, -\frac{10}{3}, \frac{9}{2}, \ldots.$

Introducción

- *por grupos de fracciones* como
  - **Homogéneas**: Dos o más fracciones se dicen que son homogéneas cuando todas poseen el mismo denominador. Ej.: $\frac{3}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{9}{7}$ son homogéneas entre sí.
  - **Heterogéneas**: Dos o más fracciones se dicen que son heterogéneas cuando al menos una de ellas no posee el mismo denominador que las demás. Ej.: $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}, \frac{9}{10}$ son heterogéneas entre sí.

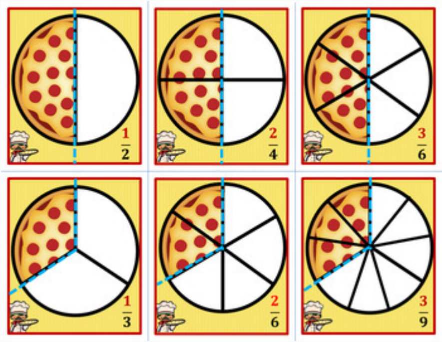
Introducción

- *por los divisores comunes entre sus términos* como
  - **Reductibles**: Son todas aquellas fracciones cuyo numerador y denominador poseen algún divisor común distinto de la unidad. Ej.: $\frac{6}{8}, \frac{12}{18}, \frac{3}{9}, \ldots.$
  - **Irreductibles**: Son aquellas fracciones cuyo numerador y denominador poseen como único divisor común a la unidad. Ej.: $\frac{9}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{8}, \ldots.$

NOTA: Toda fracción reductible puede expresarse en su forma irreductible mediante *simplificación*.

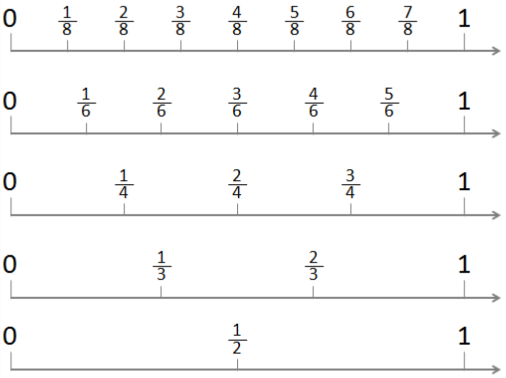
Representación gráfica de las fracciones

Las fracciones como parte de un todo (y fracciones equivalentes):



Representación gráfica de las fracciones

Las fracciones en la recta numérica (la unidad es el todo de referencia):



Fracciones equivalentes, simplificación y amplificación

Dos o más fracciones son **equivalentes** si expresan la misma cantidad.

Para determinar si dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes basta con verificar si $a \times d = b \times c$.

Por ejemplo, $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ pues se verifica que $4 \times 5 = 10 \times 2$ (esto es, $20 = 20$).

¡Importante!

Para una única fracción existen infinitas fracciones equivalentes obtenidas mediante simplificación o amplificación.

Fracciones equivalentes, simplificación y amplificación

Para **simplificar** una fracción basta con dividir simultáneamente numerador y denominador por sus divisores comunes. Ej.:

$$\frac{12}{18} = \frac{12 \div 2}{18 \div 2} = \frac{6}{9} = \frac{6 \div 3}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$$

la cual es su forma irreductible.

El proceso contrario a la simplificación es la **amplificación** y consiste en multiplicar simultáneamente numerador y denominador por un mismo factor. Ej.:

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 5}{8 \times 5} = \frac{15}{40}$$

Comparación entre fracciones

Podemos establecer una relación de orden entre dos fracciones cualesquiera, esto es, decir si una es mayor o menor que la otra.

La regla básica usada con los enteros de que una cantidad es mayor si en la recta se encuentra más a la derecha se cumple también en los racionales.

Para comparar el valor absoluto de dos fracciones se procede de la siguiente manera:

- Si los denominadores son iguales, la fracción mayor será la que posea el mayor numerador. Ej.:
$$\frac{6}{5} > \frac{2}{5}$$
- Si tienen el mismo numerador, la fracción mayor será la que posea el menor denominador. Ej.:
$$\frac{6}{5} > \frac{6}{7}$$

Comparación entre fracciones

- Si poseen denominadores y numeradores distintos es posible
    - Simplificar o amplificar una o ambas fracciones hasta obtener numeradores o denominadores iguales y comparar usando alguno los dos criterios anteriores. Ej.:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \text{ pues } \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$$

    o

    - expresar las fracciones en su forma decimal y comparar dichas cantidades. Ej.:

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4}, \text{ pues } 0.5 < 0.75$$

Suma y diferencia de fracciones

Al sumar o restar dos fracciones consideramos las siguientes posibilidades: que dichas fracciones sean homogéneas (igual denominador), o que sean heterogéneas (distinto denominador) entre sí.

Si son homogéneas simplemente basta sumar o restar los numeradores conservando el denominador:

$$\frac{a}{d} \pm \frac{b}{d} = \frac{a \pm b}{d}$$

Ej.:

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{6} = \frac{5-7}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

NOTA: Esta idea puede extenderse a tres o más fracciones y a suma y resta combinadas.

Suma y diferencia de fracciones

Si las fracciones involucradas son heterogéneas puede aplicarse cualquiera de los siguientes procedimientos:

- Simplificar o amplificar una o más de as fracciones hasta obtener solamente fracciones homogéneas; luego aplicar el método anterior.
- Aplicar la fórmula:
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \times d \pm b \times c}{b \times d}$$
- Hallar el mínimo común múltiplo (MCM) de los denominadores (el cual será ahora el denominador de la fracción resultante) y operar mediante suma o resta (según el caso) el producto entre el cada numerador y el cocientes que resulte entre el MCM y el denominador de la fracción en cuestión.

Ejemplos de las tres situaciones anteriores en el mismo orden descrito:

- $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{1}{3} - \frac{3}{5} = \frac{1 \times 5 - 3 \times 3}{3 \times 5} = \frac{5 - 9}{15} = -\frac{4}{15}$
- $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{2 \times (12/3) + 5 \times (12/6) - 1 \times (12/4)}{12} = \frac{8 + 10 - 3}{12} = \frac{15}{12}$
  $= \frac{5}{4}$

Producto y cociente de fracciones

Para realizar el producto de dos (o más) fracciones se sigue la siguiente relación:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Para el caso de cociente de fracciones puede o convertirse el cociente en un producto invirtiendo el divisor:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

o realizarse de manera directa el producto cruzado de términos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Producto y cociente de fracciones

A título de ejemplo:

- $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{3 \times 2}{5 \times 7} = \dfrac{6}{35}$
- $\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{5}{2}\right) = -\dfrac{10}{24} = -\dfrac{5}{12}$
- $\dfrac{5}{6} \div \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{18} = \dfrac{5}{9}$
- $\dfrac{8}{3} \div \left(-\dfrac{4}{9}\right) = -\dfrac{72}{12} = -6$

Nótese que el producto y cociente de racionales también sigue las normas de signos descritas para enteros (ley de signos).

Propiedades de la suma y el producto de fracciones

Con respecto a las propiedades para la suma y producto de fracciones se advierte que son las mismas que las descritas en el apartado correspondiente para enteros. Solamente se ha de considerar que en el caso de la *clausura*, la suma y el producto de racionales entrega como resultado un racional.

Adicionalmente, el elemento inverso multiplicativo de un racional dado $\dfrac{a}{b}$ es $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$, donde $a, b \neq 0$.

Fracciones mixtas (o números mixtos)

Toda fracción impropia $\dfrac{m}{n}$ puede expresarse en la forma $a\dfrac{r}{n}$ la cual se conoce como **fracción mixta** donde a (parte entera) es el cociente entero del resultado de dividir m entre n y r es el residuo de dicha división.

Es así que por ejemplo $\dfrac{25}{9} = 2\dfrac{7}{9}$ (ya que $25 \div 9 = 2$ y sobran 7).

Para convertir una fracción mixta a impropia basta con hacer $a\dfrac{r}{n} = \dfrac{a \times n + r}{n}$. Ej.:

$$3\frac{1}{5} = \frac{3 \times 5 + 1}{5} = \frac{16}{5}$$

Expresión decimal de un racional

Para expresar un racional en su forma decimal basta con desarrollar el cociente entre el numeador y el denominador. Ejemplos:

- $\dfrac{3}{8} = 3 \div 8 = 0.375$
- $\dfrac{11}{6} = 11 \div 6 = 1.8333\cdots = 1.8\overline{3}$

Expresión racional de un decimal

NOTA: *Solamente los decimales finitos y los infinitos periódicos admiten una expresión racional.*

Si el decimal es finito, basta multiplicar el número por la potencia de 10 que permita eliminar toda la parte decimal y esta misma potencia ser puesta como denominador de la fracción deseada (sin olvidar luego simplificar si es necesario). Ej:

$$2.352 = \frac{2.352 \times 1000}{1000} = \frac{2352}{1000} = \frac{294}{125}$$

Expresión racional de un decimal

Si el decimal es infinito periódico entonces se aisla el primer perido y se realiza la resta entre expresiones que contengan dicho periodo justo antes y después del separador decimal para luego despejar.

A manera de ejemplo consideremos expresar a $1.612121212\ldots$ como racional. Llamaremos a este número x y apreciamos realtado a continuación su primer periodo: $x = 1.6{12}121212\ldots$

Convenientemente desarrollaríamos la siguiente resta de ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcr} & 1000x & = & 1612.121212\ldots \\ - & 10x & = & 16.121212\ldots \\ \hline & 990x & = & 1596.00000\ldots \end{array}$$

donde tendríamos que $x = \dfrac{1596}{990} = \dfrac{266}{165}$.

Suma y resta con números decimales (finitos)

1. Buscamos que las cantidades a operar tengan la misma cantidad de cifras en la parte decimal completando con ceros.
2. Al sumar o restar, escribimos un número bajo el otro cuidando que la coma decimal esté alineada para luego operar como si se tratara de números enteros.
3. En el resultado, volvemos a escribir la coma decimal en la misma línea vertical que los demás.

Ejemplo: Sumar 5.16 con 8.1524:

$$\begin{array}{rr} & 5.1600 \\ + & 8.1524 \\ \hline & 13.3124 \end{array}$$

Producto entre números decimales (finitos)

1. Multiplicamos los números como si se trataran de números enteros, es decir, sin considerar la coma decimal.
2. Para ubicar la coma, se considerará que el resultado tenga tantos decimales como cifras decimales tienen entre los dos factores.

Ejemplo: Multiplicar 2.6 por 3.14.

Multiplicamos 26 por 314 lo que nos da 8164 (usando el tradicional producto de enteros). Entonces, dado que entre 2.6 por 3.14 hay 3 cifras decimales en total se tendrá el resultado final será 8.164.

Cociente entre números decimales (finitos)

1. Se iguala la cantidad de cifras en la parte decimal del dividendo y del divisor.
2. Se suprimen las comas decimales y se procede a dividir con los números enteros obtenidos.
3. Después de obtener el resto de la división, se continúa agregando un cero a su derecha, a la vez que se coloca la coma decimal a continuación del cociente.
4. Seguimos con la operación colocando ceros a la derecha de los restos obtenidos hasta obtener cero o hasta que se considere conveniente.

Cociente entre números decimales (finitos)

Ejemplo: Dividir 4.125 entre 0.3.

Básicamente lo que hacemos es considerar $4.125 \div 0.300$ equivalente a dividir $4125 \div 300$. La división se realiza mediante el algoritmo estándar para obtener al final 13.75.