Perímetros y áreas de figuras planas

(Breve resumen para el grado séptimo)

Carlos Andrés Pérez M.

I.E. Aureliano Flórez Cardona

2018

Disclaimer

¡Importante!

Este documento NO reemplaza los apuntes de clase; su propósito es servir de apoyo y consulta rápida en caso de duda y para reafianzar los conceptos y procedimientos más relevantes de la temática vista.

Medidas de longitud

Introducción

La **longitud** es una magnitud fundamental asociada usualmente a la *distancia entre dos puntos*.

Aunque es una medida de una dimensión, podemos también hablar de longitudes de curvas o incluso trayectorias más complejas (por ejemplo la longitud de un río).

Expresamos la longitud en *medidas de longitud* que se aplican dependiendo de la escala del objeto medido (metros, centímetros, kilómetros, etc.)

Algunas medidas de longitud (y sus equivalencias)

Entre las unidades de longitud más usadas tenemos:

- 1 m $\equiv$ 100 cm
- 1 m $\equiv$ 1000 mm
- 1 cm $\equiv$ 10 mm
- 1 km $\equiv$ 1000 m
- 1 dam $\equiv$ 10 m
- 1 hm $\equiv$ 100 m
- 1 dm $\equiv$ 10 cm
- 1 mi $\equiv$ 1609.344 m
- 1 nmi $\equiv$ 1852 m
- 1 ft $\equiv$ 30.48 cm
- 1 yd $\equiv$ 91.44 cm
- 1 in $\equiv$ 2.54 cm
- 1 ft $\equiv$ 12 in
- 1 yd $\equiv$ 3 ft

Convertir entre unidades de longitud

Para convertir entre distintas unidades de longitud basta con conocer su equivalencia y a partir de ella construir el factor de conversión apropiado.

Example

Convertir 43.5 centímetros (cm) a pies (ft).

Solución: De la tabla de equivalencias dada tenemos que $1 \text{ ft} \equiv 30.48 \text{ cm}$, por lo que

$$43.5 \text{ cm} = 43.5 \text{ cm} \left(\frac{1 \text{ ft}}{30.48 \text{ cm}} \right) = 1.4271654 \text{ ft}$$

Esto es, 43.5 cm equivale aproximadamente a 1.43 pies.

Convertir entre unidades de longitud

En ocasiones es necesario pasar por varias unidades hasta llegar a la unidad deseada:

Example

Convertir 3.2 metros (m) a yardas (yd).

Solución: Primero usaremos un factor de conversión para pasar de metros a centímetros y luego otro para pasar de cm a yardas.

$$3.2 \text{ m} = 3.2 \text{ m} \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right)\left(\frac{1 \text{ yd}}{91.44 \text{ cm}}\right) = 3.4995626 \text{ yd}$$

Esto es, 43.5 cm equivale aproximadamente a 3.5 yardas.

Medidas de superficie

Introducción

Las *medidas de superficie* son las que se usan para expresar el tamaño o extensión de una región bidimensional acotada (encerrada).

Estas medidas son de dos dimensiones y en la práctica se usan unidades de longitud al cuadrado: metros cuadrados, centímetros cuadrados, kilómetros cuadrados, etc.

Existen, sin embargo, algunas medidas de superficie especiales usadas en algunos contextos muy específicos: 1 área $\equiv$ 100 m^2, 1 acre $\equiv$ 4046.8564 m^2, 1 hectárea $\equiv$ 10000 m^2

Convertir entre unidades de longitud

Para convertir entre distintas unidades de superficie basta con usar las mismas equivalencias dadas para medidas de longitud, pero usando el factor de conversión al cuadrado.

Example

Convertir 5.8 pies cuadrados (ft^2) a centímetros cuadrados (cm^2).

Solución: Sabemos que $1\ \mathrm{ft} \equiv 30.48\ \mathrm{cm}$; de acuerdo a esto tendríamos que

$$5.8\ \mathrm{ft}^2 = 5.8\ \mathrm{ft}^2 \left(\frac{30.48\ \mathrm{cm}}{1\ \mathrm{ft}}\right)^2 = 5388.3763\ \mathrm{cm}^2$$

Esto es, $5.8\ \mathrm{ft}^2$ equivale aproximadamente a $5390\ \mathrm{cm}^2$.

Convertir entre unidades de longitud

NOTA: Es posible también recurrir a factores de conversión intermedios antes de llegar a la unidad de superficie deseada (así como se hizo en la conversión de unidades de longitud).

Perímetros y áreas

Perímetro y **área** son dos conceptos muy importantes de la geometría y de la matemática misma.

Cuando tenemos una superficie plana el perímetro es la *medida de la distancia alrededor de dicha figura*, mientras que el área nos da una idea de *qué tanta superficie cubre dicha figura*.

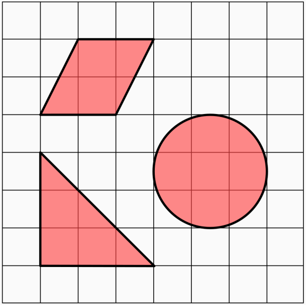

Figura 1: Tres figuras ocupando una porción del plano

Perímetro

El perímetro (P) de una figura de dos dimensiones es la *distancia alrededor de la figura*. Es posible imaginar una cuerda siguiendo el contorno de la figura. La longitud de la cuerda será el perímetro.

Si la figura en cuestión es un polígono de lados conocidos, su perímetro es la suma de las medidas de los lados:

$$P = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots + l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i$$

Si la figura es más compleja se recurre a métodos matemáticos más avanzados.

Perímetro

Para las figuras más simples existen algunas fórmulas sencillas que permiten calcular su perímetro sin mayores traumatismos (ver más adelante en este mismo documento).

Para ciertos cálculos resulta muy útil hablar del **semiperímetro**, el cual se define como *la mitad del perímetro de una figura*.

¡Importante!

Tanto como perímetro como semiperímetro se expresan en unidades de longitud.

Área

El área (A) permite asignar una medida a la *extensión de una superficie acotada*, la cual se expresa matemáticamente como unidades de superficie (unidades de longitud al cuadrado).

En este documento solo hablaremos de figuras planas sencillas, para las cuales se han desarrollado algunas fórmulas prácticas (ver más adelante).

Para figuras geométricas más complejas se emplean métodos más elaborados.

Algunas de las figuras más básicas

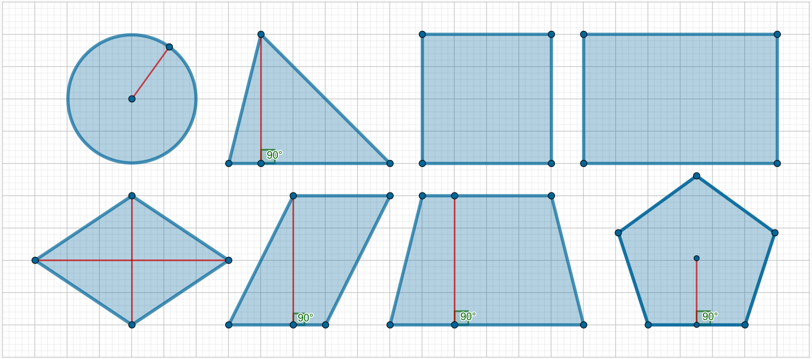

Figura 2: Círculo, triángulo, cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio y pentágono regular.

Perímetro y área de un círculo

El perímetro de un círculo es la medida de su circunferencia; por tanto

$$P = 2\pi r$$

donde r es el **radio** del círculo en cuestión y $\pi \approx 3.1416$ (una constante universal).

Para el caso del área del círculo se tiene que

$$A = \pi r^2$$

Alternativamente, las dos fórmulas anteriores pueden escribirse como $P = \pi D$ y $A = \frac{1}{4}\pi D^2$; siendo D el **diámetro** del círculo ($D = 2r$).

Perímetro y área de un triángulo

Por ser un polígono, el perímetro del triángulo se obtiene sumando las medidas de sus tres lados: $P = l_1 + l_2 + l_3$.

El área de un triángulo se suele calcular como

$$A = \frac{1}{2}bh$$

siendo b la *base* (medida de cualquiera de los lados del triángulo) y h la *altura* del triángulo medida desde la base escogida.

Perímetro y área de un triángulo

Si se conocen las medidas de los tres lados del triángulo se puede usar la *fórmula de Herón*, según la cual

$$A = \sqrt{s\left(s-l_1\right)\left(s-l_2\right)\left(s-l_3\right)}$$

siendo s el semiperímetro del triángulo: $s = \frac{1}{2}\left(l_1 + l_2 + l_3\right)$.

Si el triángulo es *equilátero*, su perímetro y su área se calculan de manera inmediata usando las relaciónes

$$P = 3l; \qquad A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

Perímetro y área de cuadrados y rectángulos

Para el caso de un cuadrado, perímetro y área se calculan a partir de la medida de sus lados (l) de manera inmediata usando las relaciones

$$P = 4l; \qquad A = l^2$$

Para un rectángulo de base b y altura h se tiene que

$$P = 2b + 2h = 2(b + h); \qquad A = bh$$

Perímetro y área de un rombo

El perímetro de un rombo es $P = 4l$ (con l como la medida de sus lados); sin embargo, si lo que se conoce es la medida de sus diagonales mayor y menor (D y d) entonces

$$P = 2\sqrt{D^2 + d^2}$$

Para el área se tiene que

$$A = \frac{1}{2}Dd$$

Perímetro y área de un paralelogramo

El perímetro de un paralelogramo se calcula mediante

$$P = 2a + 2b = 2(a + b)$$

con a y b como las medidas de los dos lados no paralelos entre sí.

Para su área se tiene que equivale a

$$A = bh$$

donde b es la base (medida de uno de sus lados) y h es la altura del paralelogramo (distancia entre la base escogida y su lado opuesto paralelo).

Perímetro y área de un trapecio

El perímetro del trapecio se calcula sumando las medidas de sus cuatro lados: $P = l_1 + l_2 + l_3 + l_4$.

Sin embargo, para el área se tiene que

$$A = \frac{1}{2}(B + b)h$$

siendo B y b las bases mayor y menor del trapecio (los dos lados paralelos) y h la altura del mismo (distancia que separa las dos bases).

Para el caso de un polígono regular, se tiene que el perímetro se calcula como $P = nl$ donde n es el número de lados del polígono, y l la longitud de dichos lados.

Para el área usamos la relación

$$A = \frac{1}{2}Pa = \frac{1}{2}nla$$

donde a equivale a la medida de la **apotema** del polígono (distancia del centro a un lado cualquiera del polígono regular).

Perímetro y área de figuras y regiones compuestas

Para hallar perímetros y áreas de regiones compuestas basta con *reducirlas a figuras/regiones más simples* y determinar la medida deseada mediante sumas y restas.

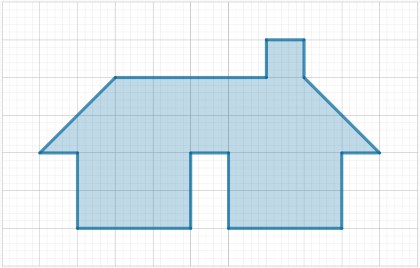

Figura 3: Ejemplo de un polígono que puede descomponerse en cuadrados, rectángulos y trapecio para efectos de cálculo de área.