

Transformadas de la imagen

Digital Image Processing, Gonzalez, Woods, Addison Wesley, ch 3

Transformada de Fourier en el caso continuo

$\mathfrak{F}\{f(x)\}$ Transformada de Fourier de una función continua $f(x)$

$$\mathfrak{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx$$
$$j = \sqrt{-1}.$$

La transformada inversa recupera la función a partir de $F(u)$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi ux] du.$$

La transformada de Fourier de una función real es compleja

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

En forma exponencial: $F(u) = |F(u)|e^{j\phi(u)}$

Donde, el espectro de Fourier es $|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$

El ángulo de fase es $\phi(u) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u)}{R(u)}\right]$.

El espectro de potencia es $P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$

La variable u es la variable frecuencia debido a la relación de Euler

$$\exp[-j2\pi ux] = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux.$$

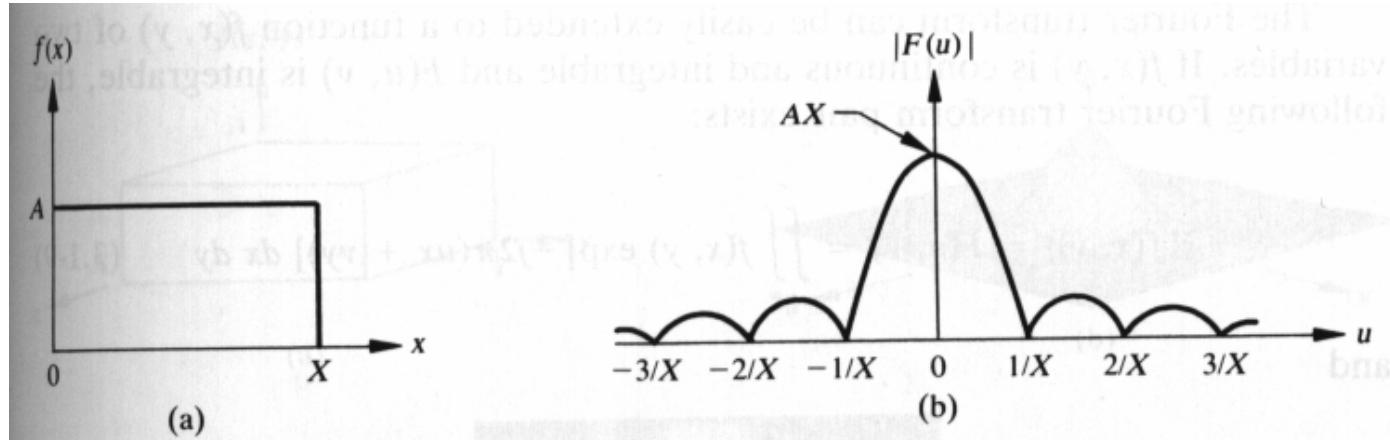


Figure 3.1 A simple function and its Fourier spectrum.

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx \\
 &= \int_0^X A \exp[-j2\pi ux] dx \\
 &= \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi ux}]_0^X = \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] \\
 &= \frac{A}{j2\pi u} [e^{j\pi uX} - e^{-j\pi uX}] e^{-j\pi uX} \\
 &= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi uX) e^{-j\pi uX}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |F(u)| &= \left| \frac{A}{\pi u} \right| |\sin(\pi uX)| |e^{-j\pi uX}| \\
 &= AX \left| \frac{\sin(\pi uX)}{(\pi uX)} \right|.
 \end{aligned}$$

$f(x, y)$ Continua e integrable $F(u, v)$ Integrable

Esta definido el par de transformadas directa e inversa

$$\mathfrak{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

Espectro y fase

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\ &= A \int_0^X \exp[-j2\pi ux] dx \int_0^Y \exp[-j2\pi vy] dy \\ &= A \left[\frac{e^{-j2\pi uX}}{-j2\pi u} \right]_0^X \left[\frac{e^{-j2\pi vX}}{-j2\pi v} \right]_0^Y \\ &= \frac{A}{-j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] \frac{1}{-j2\pi v} [e^{-j2\pi vX} - 1] \\ &= AXY \left[\frac{\sin(\pi uX)}{(\pi uX)} e^{-j\pi uX} \right] \left[\frac{\sin(\pi vX)}{(\pi vX)} e^{-j\pi vX} \right]. \end{aligned}$$

$$|F(u, v)| = AXY \left| \frac{\sin(\pi uX)}{(\pi uX)} \right| \left| \frac{\sin(\pi vX)}{(\pi vX)} \right|.$$

Transformadas de la imagen

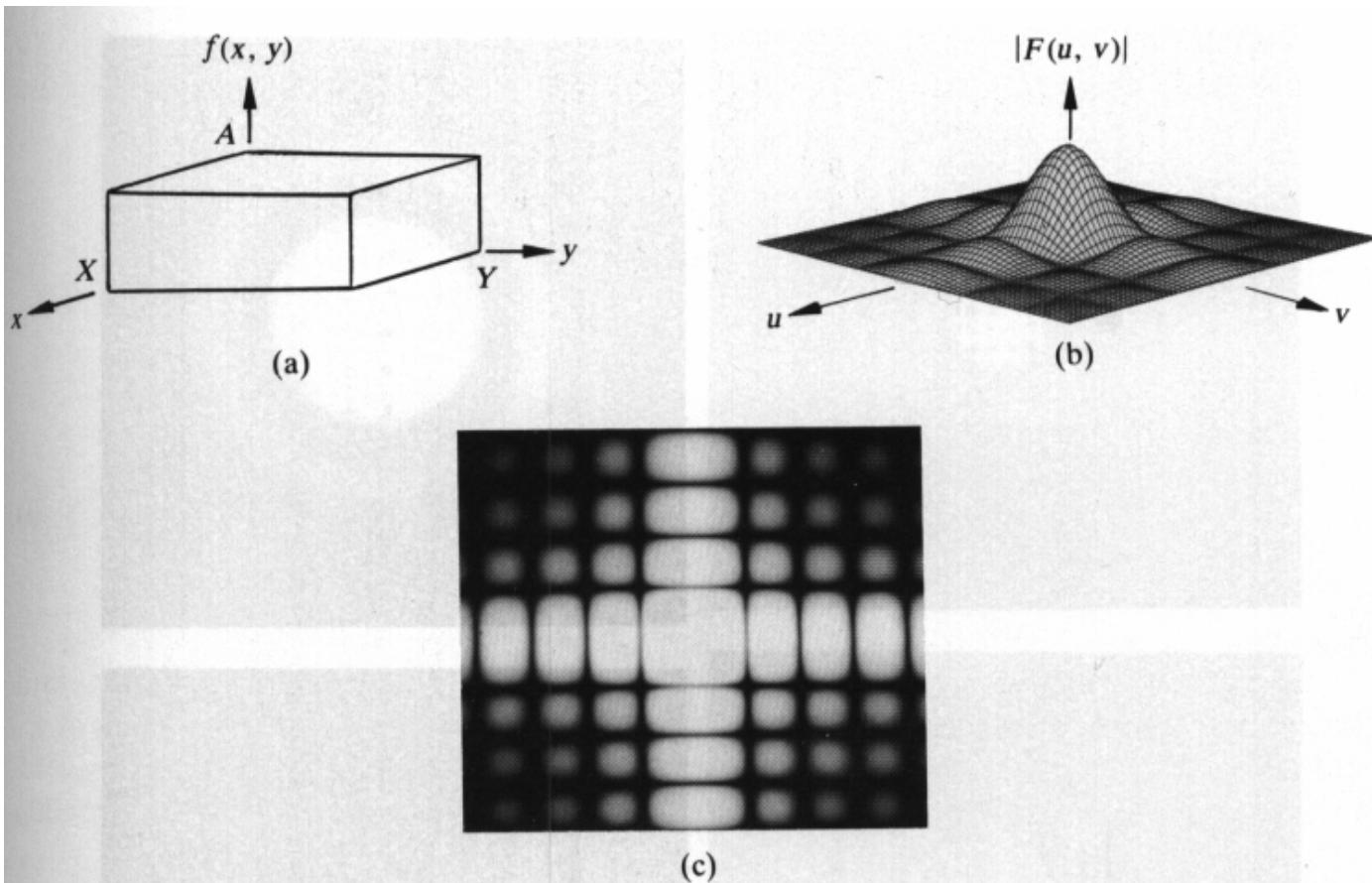


Figure 3.2 (a) A 2-D function; (b) its Fourier spectrum; and (c) the spectrum displayed as an intensity function.

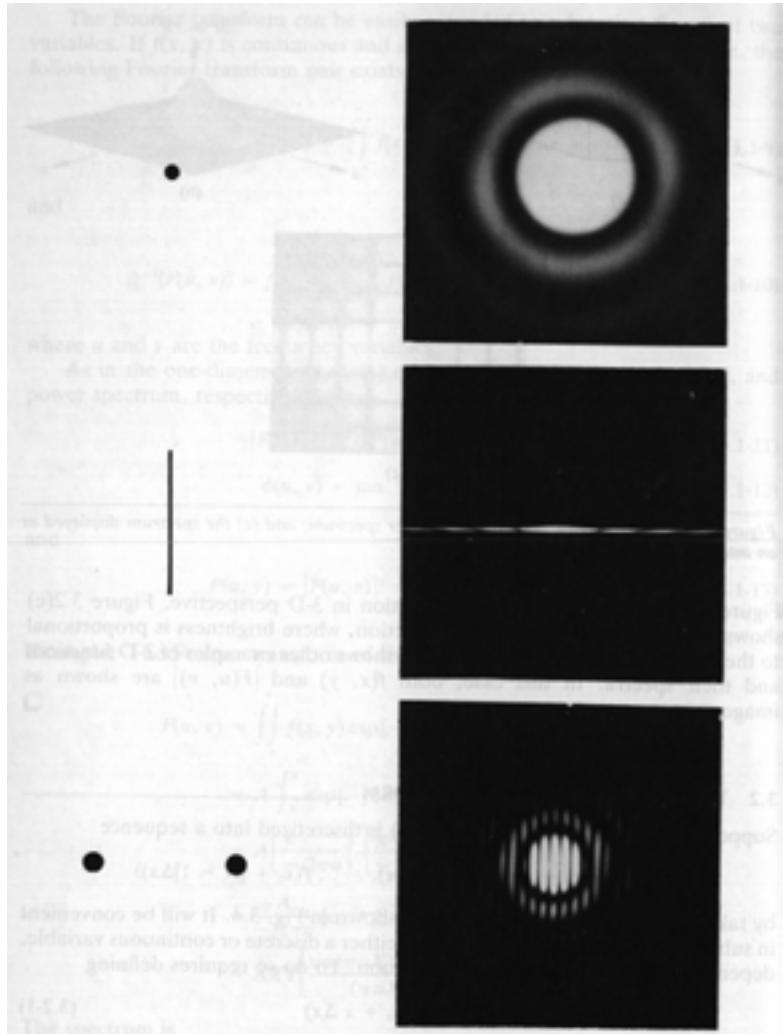


Figure 3.3 Some 2-D functions and their Fourier spectra.

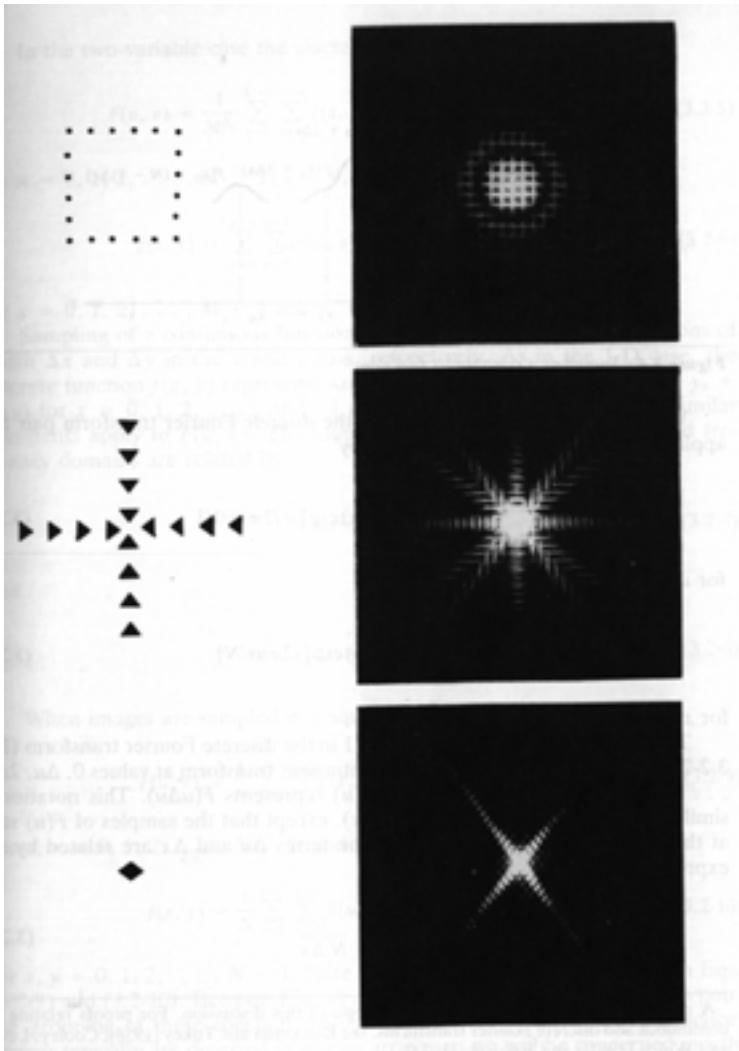


Figure 3.3 (Continued)

Transformada discreta de Fourier

Discretización de la función continua, tomando N muestras

$$\{f(x_0), f(x_0 + \Delta x), f(x_0 + 2\Delta x), \dots, f(x_0 + [N - 1]\Delta x)\}$$

Adoptando la notación $f(x) = f(x_0 + x \Delta x)$

$\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(N - 1)\}$ Denota una muestra uniformemente espaciada de una función continua

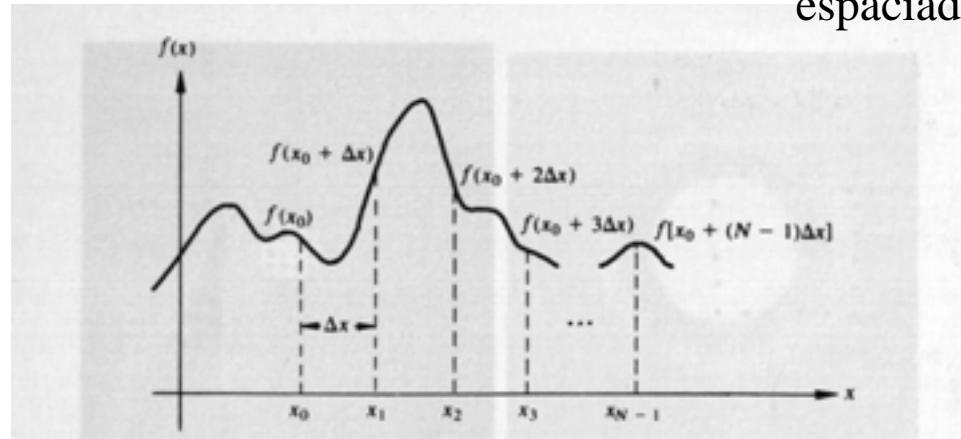


Figure 3.4 Sampling a continuous function.

El par de transformadas discretas de Fourier se define como:

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N] \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N] \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Teniendo en cuenta que $F(u)$ representa $F(u\Delta u)$

Las frecuencias de muestreo en los planos espacial y transformado se relacionan como:

$$\Delta u = \frac{1}{N \Delta x}$$

Caso de dos variables

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)] \quad u = 0, 1, 2, \dots, M-1, \\ v = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)] \quad x = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ y = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta x}$$

$$\Delta v = \frac{1}{N \Delta y}$$

La transformada en el caso discreto siempre existe

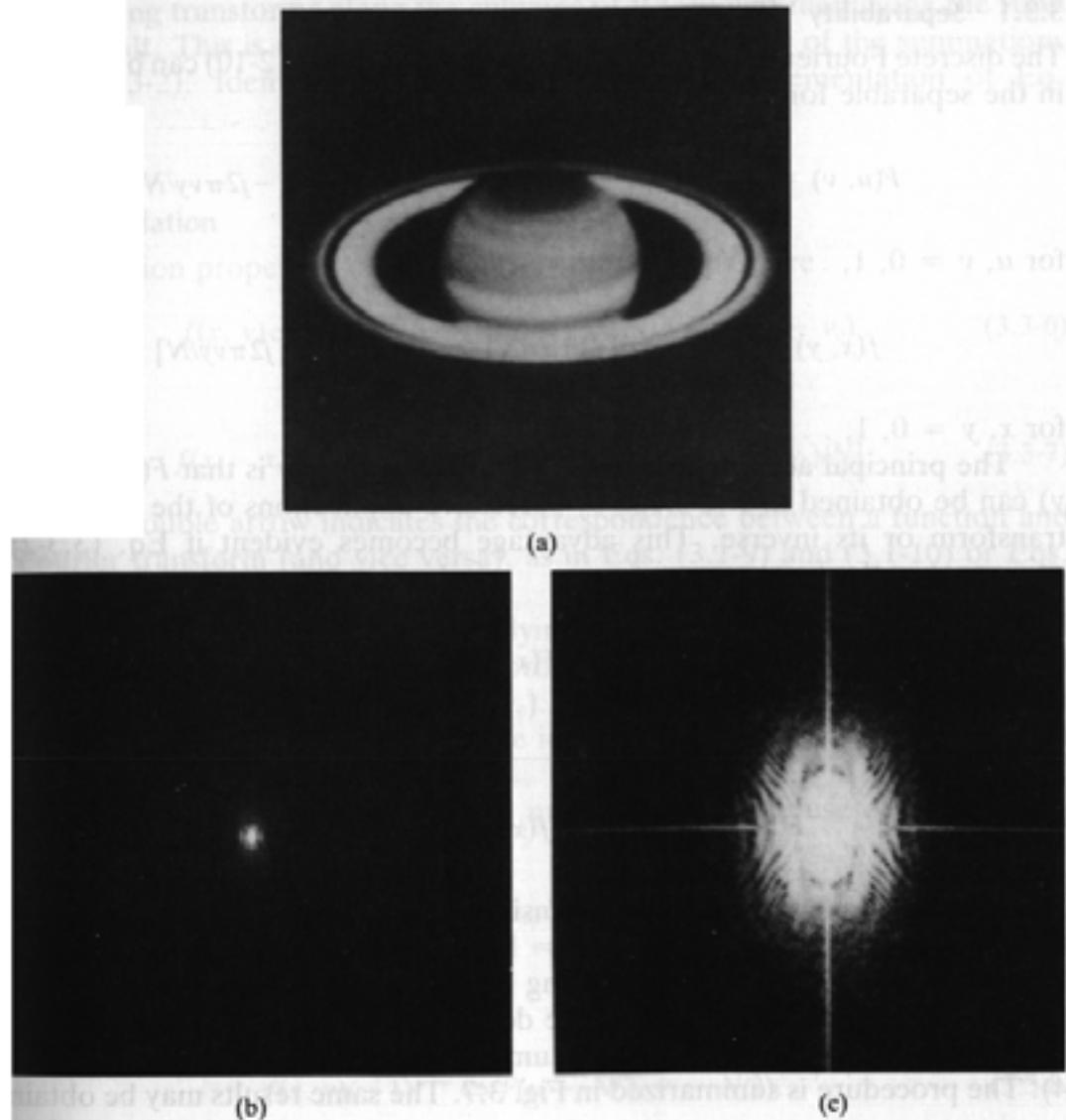


Figure 3.6 (a) A picture of the planet Saturn; (b) display of $|F(u, v)|$; (c) display of $\log[1 + |F(u, v)|]$ scaled to 8 bits (i.e., 0 to 255 gray levels).

El problema de la visualización del espectro:
Es necesario escalar el rango de valores para poder visualizarlo como una imagen en niveles de gris.

$$D(u, v) = c \log[1 + |F(u, v)|]$$

Separabilidad: se puede calcular la transformada multidimensional como iteraciones de la transformada unidimensional en cada dimensión

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \exp[-j2\pi ux/N] \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi vy/N] \quad u, v = 0, 1, \dots, N - 1,$$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} F(x, v) \exp[-j2\pi ux/N]$$

$$F(x, v) = N \left[\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi vy/N] \right].$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \exp[j2\pi ux/N] \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi vy/N] \quad x, y = 0, 1, \dots, N - 1.$$

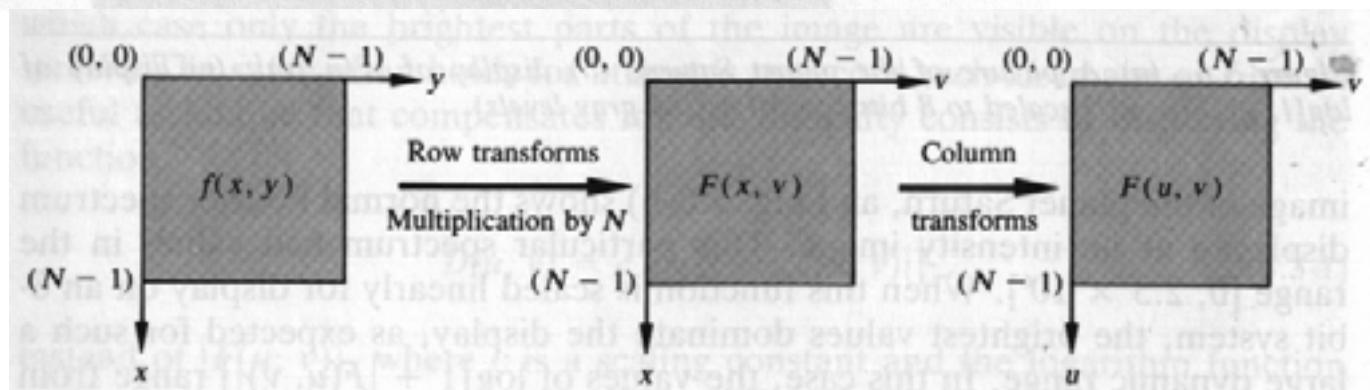


Figure 3.7 Computation of the 2-D Fourier transform as a series of 1-D transforms.

Traslación: la traslación en un dominio se corresponde con la multiplicación por un término exponencial.

$$f(x, y) \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) \exp[-j2\pi(ux_0 + vy_0)/N]$$

El espectro de potencia es
invariante a traslación en el
plano espacial.

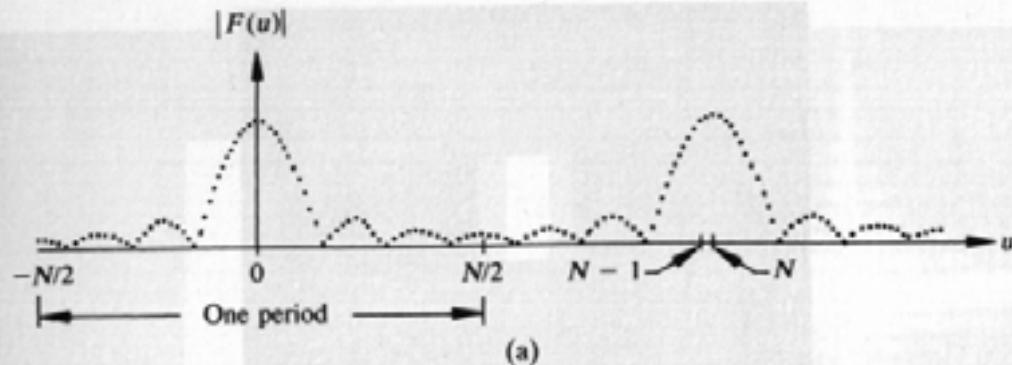
Para cambiar el origen de coordenadas
al centro del cuadrado de las
frecuencias, para visualización

$$\begin{aligned} \exp[j2\pi(u_0x + v_0y)/N] &= e^{j\pi(x+y)} \\ &= (-1)^{x+y} \quad u_0 = v_0 = N/2, \end{aligned}$$

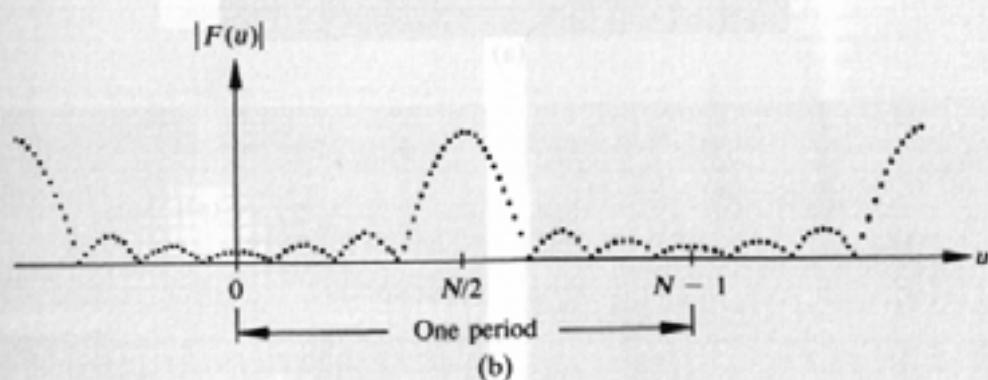
$$f(x, y)(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F(u - N/2, v - N/2).$$

La transformada discreta es periódica de periodo N

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N).$$



(a)



(b)

También posee simetría conjugada

$$F(u, v) = F^*(-u, -v)$$

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)|$$

Figure 3.8 Illustration of the periodicity properties of the Fourier transform: (a) Fourier spectrum showing back-to-back half periods in the interval $[0, N - 1]$; (b) Shifted spectrum showing a full period in the same interval.

Usualmente se desplaza el origen al centro del cuadrado $N \times N$ para visualizar mejor el espectro de la función

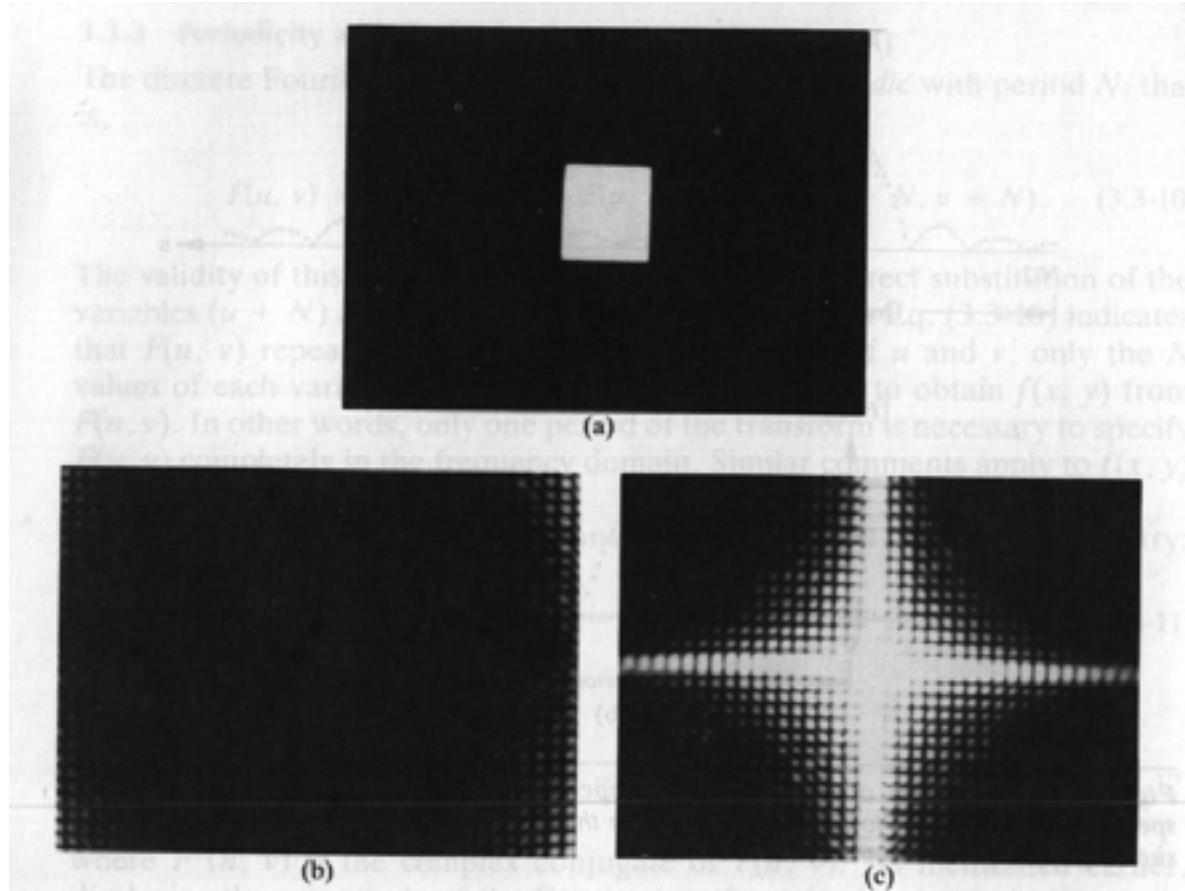


Figure 3.9 (a) A simple image; (b) Fourier spectrum without shifting; (c) Fourier spectrum shifted to the center of the frequency square.

Rotación: la rotación en el plano espacial se corresponde con la rotación en el plano transformado

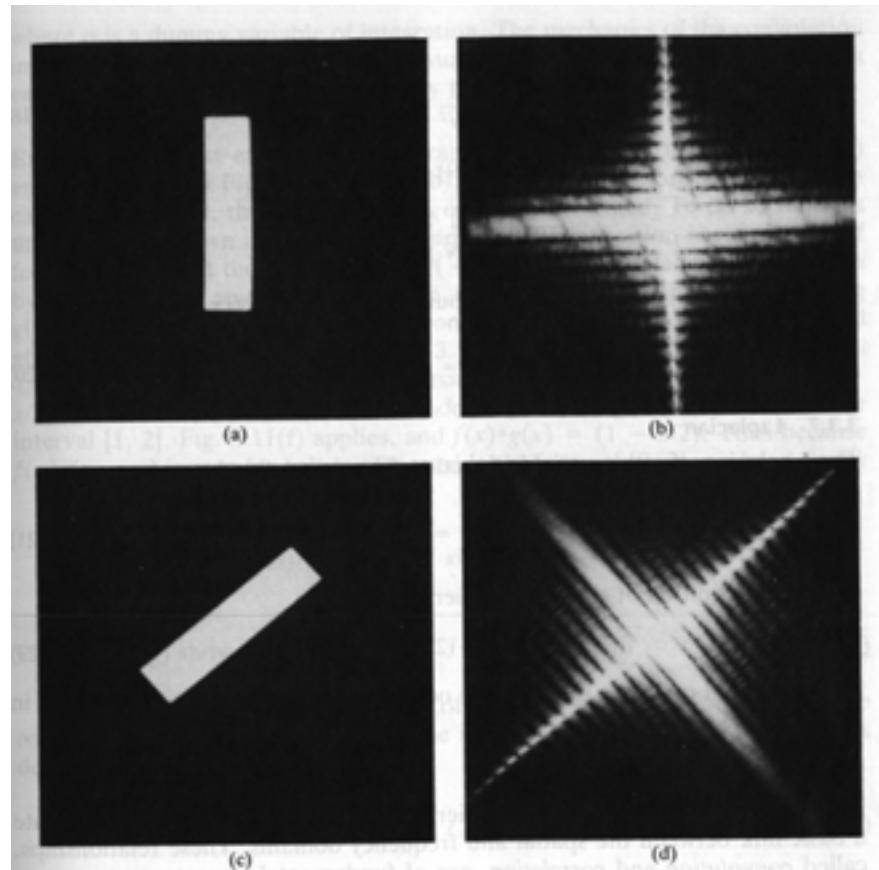


Figure 3.10 Rotational properties of the Fourier transform: (a) a simple image; (b) spectrum; (c) rotated image; (d) resulting spectrum.

Coordenadas polares

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta & y &= r \sin \theta \\u &= \omega \cos \phi & v &= \omega \sin \phi\end{aligned}$$

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(\omega, \phi + \theta_0).$$

La transformada es distributiva respecto de la suma pero no del producto

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} + \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\}$$

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\}.$$

El escalado de la función y de su dominio se transforman correspondientemente:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v)$$

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F(u/a, v/b).$$

El valor medio corresponde con la transformada en el origen

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y).$$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{1}{N} F(0, 0).$$

Transformada del Laplaciano de la función

$$\nabla^2 f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

$$\mathfrak{F}\{\nabla^2 f(x, y)\} \Leftrightarrow -(2\pi)^2 (u^2 + v^2) F(u, v).$$

Convolución de dos funciones continuas 1D

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x - \alpha) d\alpha$$

La convolución con la función impulso corresponde a extraer el valor de la función en la posición del impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0^-}^{x_0^+} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

Teorema de la convolución: la convolución y el producto son duales bajo la transformada de Fourier

$$f(x)*g(x) \Leftrightarrow F(u)G(u)$$

$$f(x)g(x) \Leftrightarrow F(u)*G(u).$$

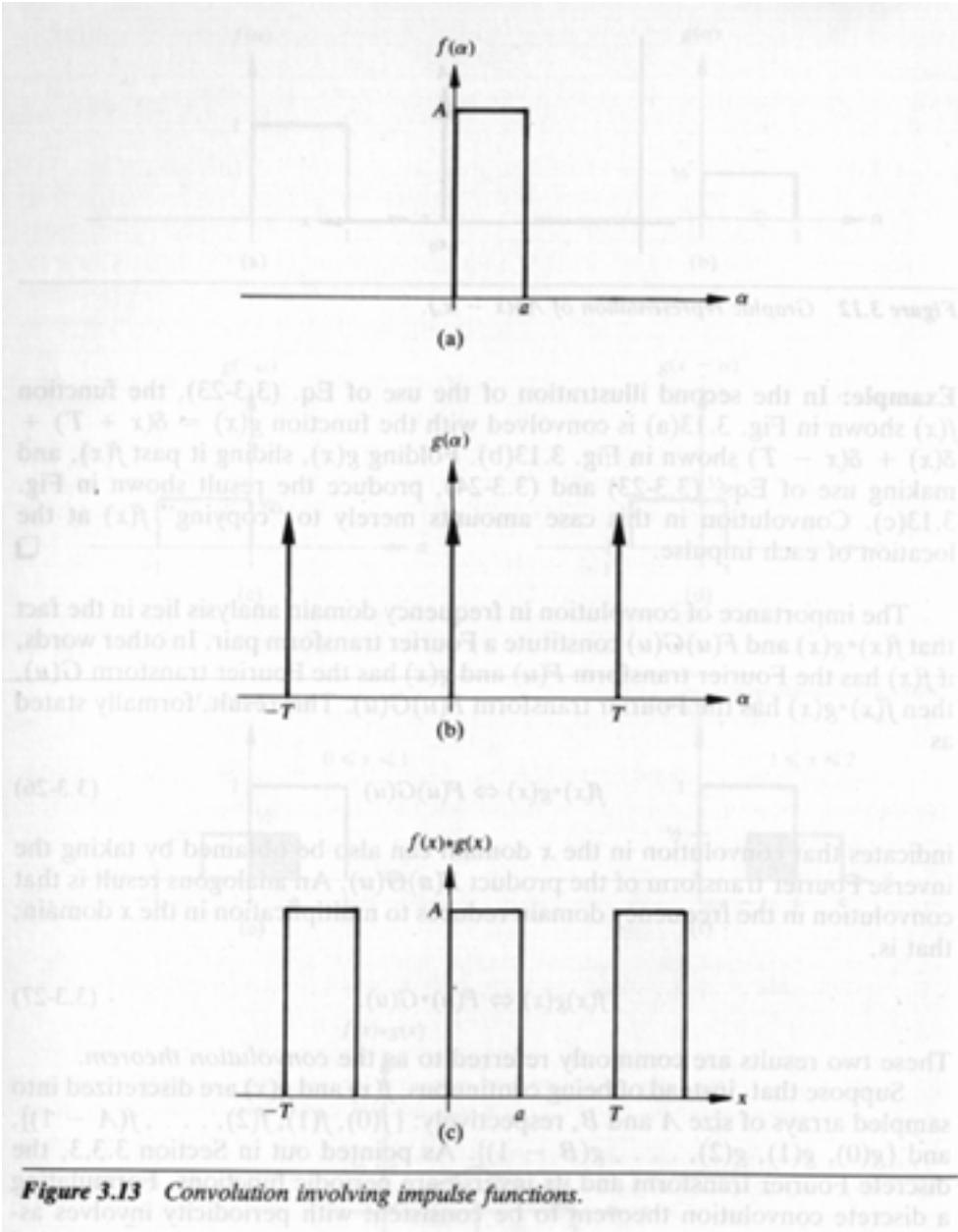


Figure 3.13 Convolution involving impulse functions.

Ejemplo de convolución con un tren de impulsos. La función se repite en cada posición del impulso.

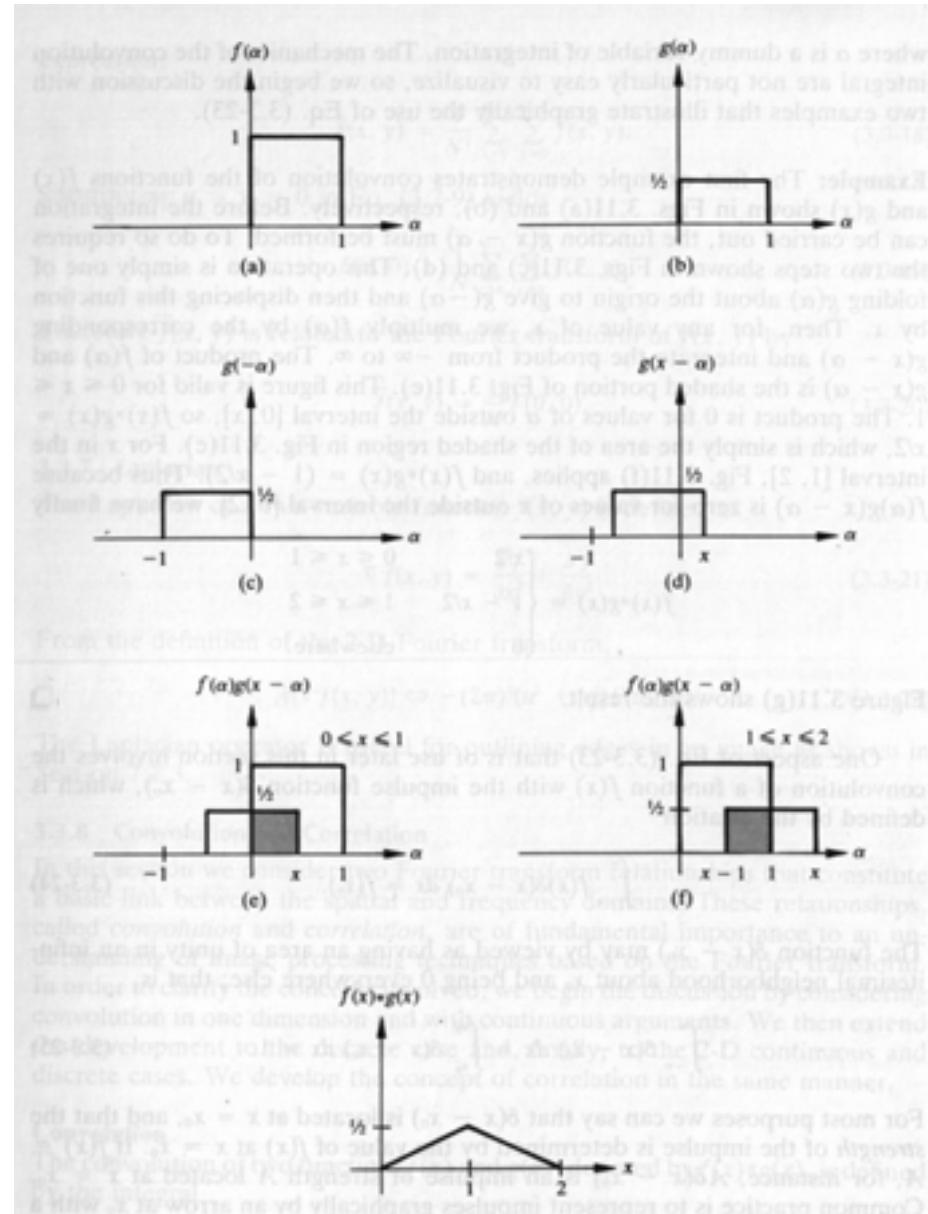


Figure 3.11 Graphic illustration of convolution. The shaded areas indicate regions where the product is not zero.

Ejemplo de convolución de dos funciones continuas detallando los pasos computacionales

$$(b) \quad f(x)*g(x) = \begin{cases} x/2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 - x/2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

La convolución en el caso discreto exige tener en cuenta la periodicidad de las funciones discretas. Si las funciones son de periodo M , la convolución será también discreta y del mismo periodo. El problema es determinar M .

$$\{f(0), f(1), f(2), \dots, f(A - 1)\},$$

$$\{g(0), g(1), g(2), \dots, g(B - 1)\}.$$

$M \geq A + B - 1$ Garantiza que no se produce solapamiento

$M = A + B - 1$, Los periodos serán adyacentes

$M > A + B - 1$, Los periodos están separados

Secuencias extendidas para garantizar el tamaño del periodo

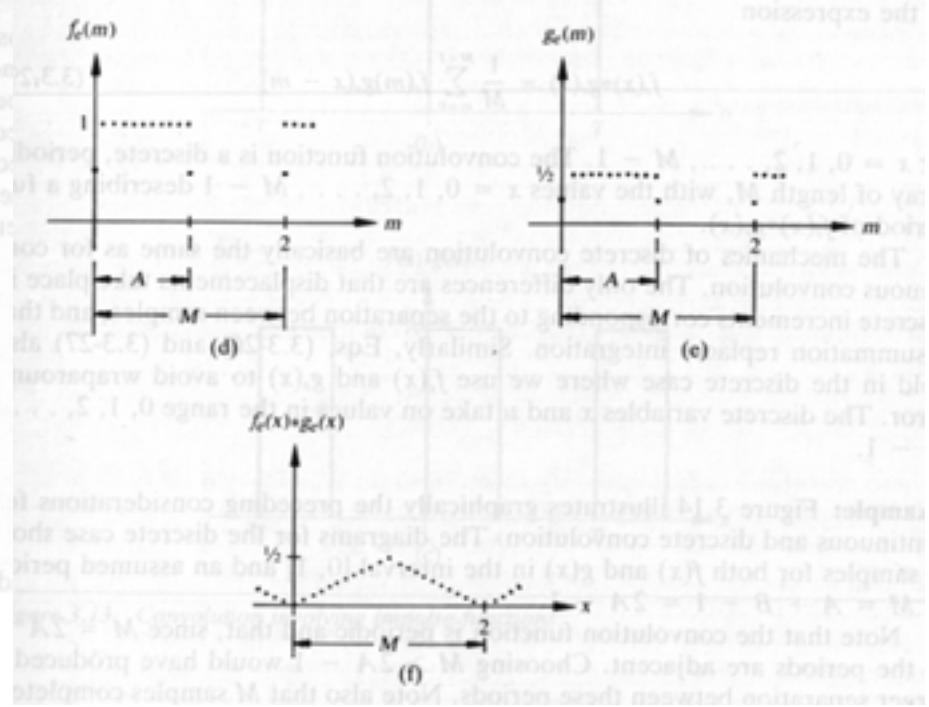
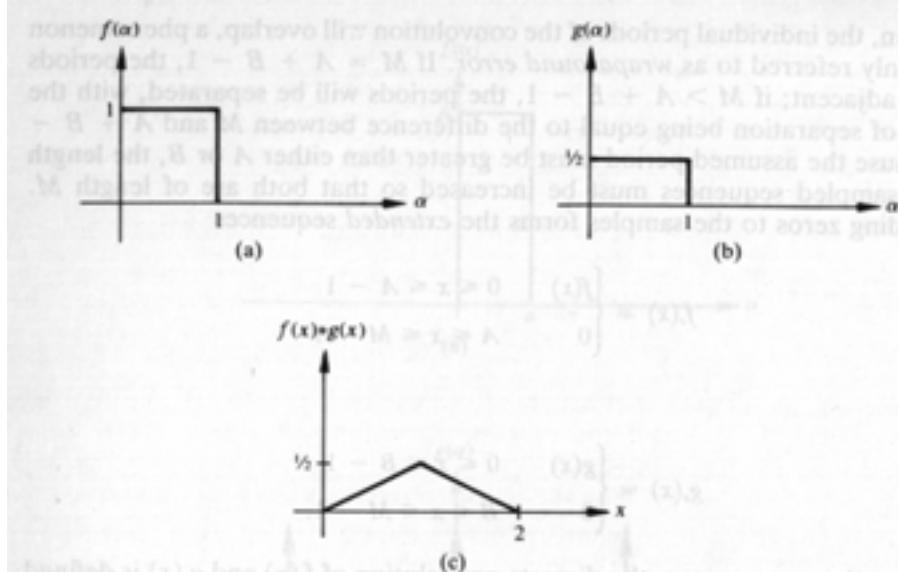
$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq A - 1 \\ 0 & A \leq x \leq M - 1 \end{cases} \quad g_e(x) = \begin{cases} g(x) & 0 \leq x \leq B - 1 \\ 0 & B \leq x \leq M - 1. \end{cases}$$

Expresión para la convolución discreta

$$f_e(x)*g_e(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_e(m)g_e(x - m) \quad x = 0, 1, 2, \dots, M - 1.$$

Esta expresión garantiza la consistencia con la definición de la convolución en el caso continuo.

El teorema de la convolución también es valido en el caso discreto.



Comparación entre la convolución en el caso continuo y en el caso discreto. La convolución discreta es una función periódica de periodo M .

Caso bidimensional continuo y discreto

$$f(x, y) * g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta)g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta.$$

$$f(x, y) * g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)G(u, v)$$

$$f(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v)*G(u, v).$$

$$M \geq A + C - 1$$

$$N \geq B + D - 1.$$

$$f_e(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & 0 \leq x \leq A - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq B - 1 \\ 0 & A \leq x \leq M - 1 \quad \text{or} \quad B \leq y \leq N - 1 \end{cases}$$

$$g_e(x, y) = \begin{cases} g(x, y) & 0 \leq x \leq C - 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq y \leq D - 1 \\ 0 & C \leq x \leq M - 1 \quad \text{or} \quad D \leq y \leq N - 1. \end{cases}$$

$$f_e(x, y) * g_e(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e(m, n)g_e(x - m, y - n)$$

Ilustración de los procesos computacionales de la convolución continua en dos dimensiones.

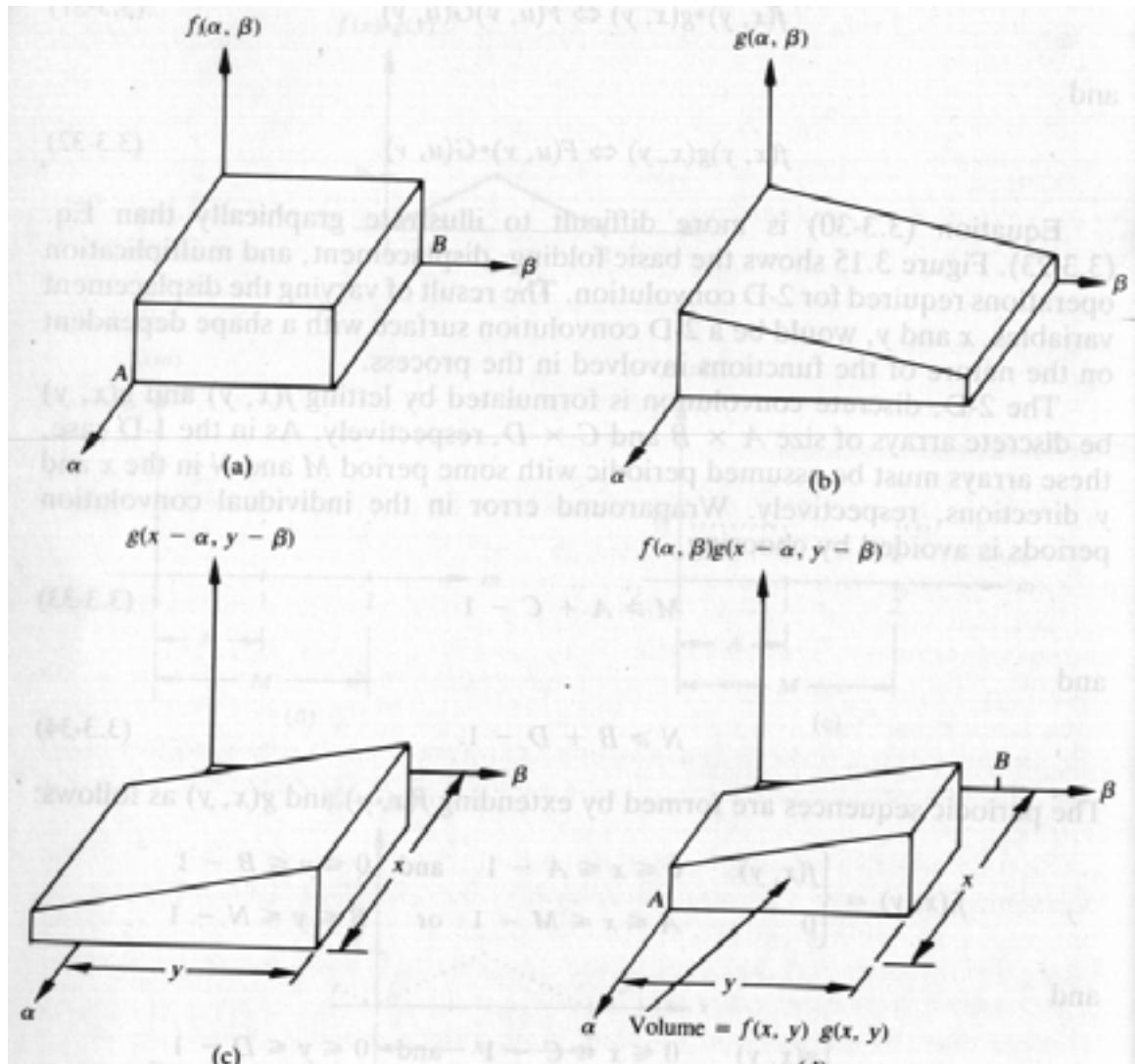


Figure 3.15 Illustration of the folding, displacement, and multiplication steps needed to perform two-dimensional convolution.

Correlación: es una medida de la similitud

$$f(x) \circ g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha)g(x + \alpha) d\alpha$$

* is the complex conjugate.

$$f_e(x) \circ g_e(x) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} f_e^*(m)g_e(x + m)$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M - 1.$$

$$f(x, y) \circ g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f^*(\alpha, \beta)g(x + \alpha, y + \beta) d\alpha d\beta.$$

$$x = 0, 1, 2, \dots, M - 1$$
$$y = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

$$f_e(x, y) \circ g_e(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f_e^*(m, n)g_e(x + m, y + n)$$

Teorema de la correlación:
dualidad del producto y la
correlación

$$f(x, y) \circ g(x, y) \Leftrightarrow F^*(u, v)G(u, v)$$

$$f^*(x, y)g(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \circ G(u, v).$$

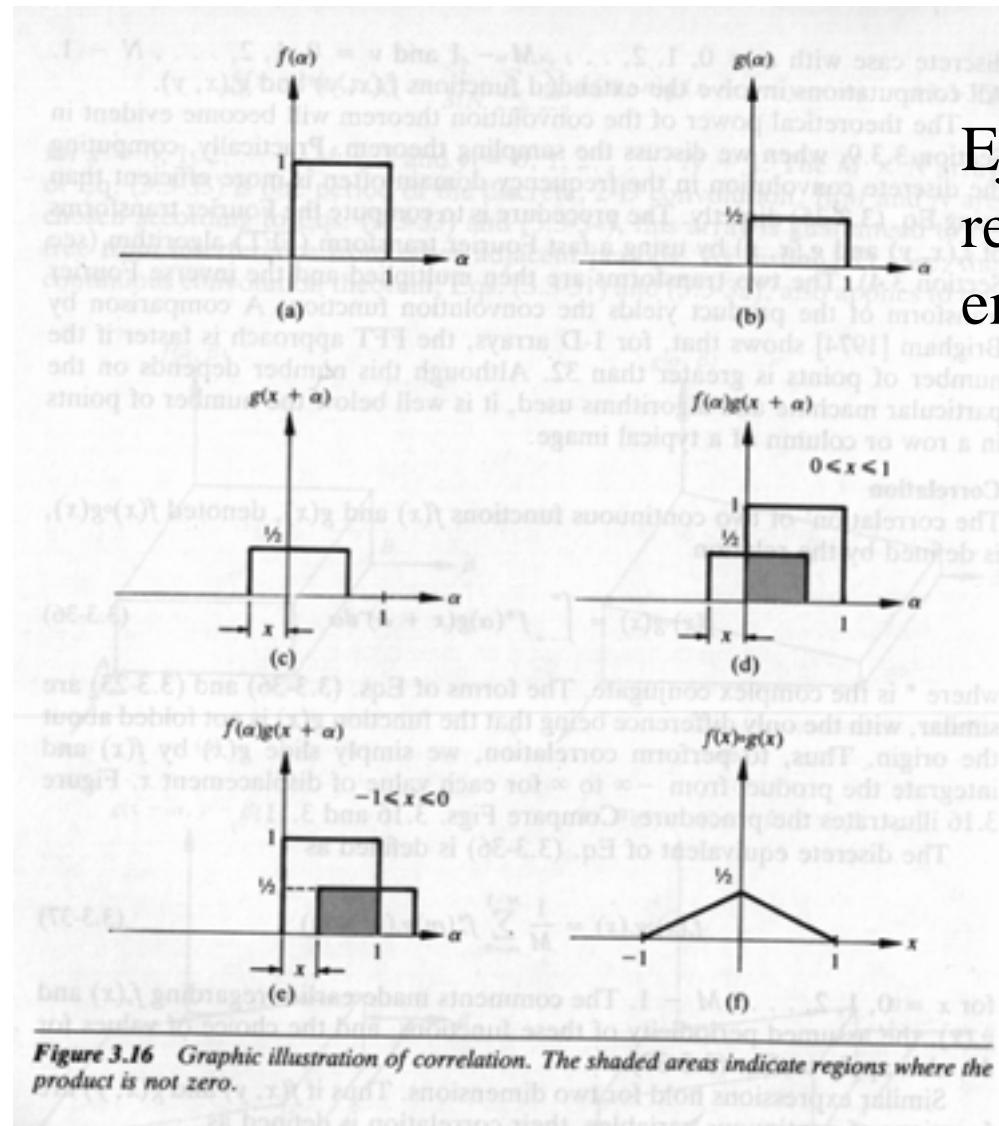


Figure 3.16 Graphic illustration of correlation. The shaded areas indicate regions where the product is not zero.

Ejemplo detallado de la realización de la correlación en el caso continuo.

La correlación es una transformación de localización: nos indica donde se encuentra la función más parecida al patrón.

Muestreo

¿Cuantas muestras se deben tomar para que no se pierda información en el proceso de muestreo o discretización?

Se trata de establecer las condiciones en las que una función continua puede ser recuperada completamente a partir de un conjunto finito de valores muestrados.

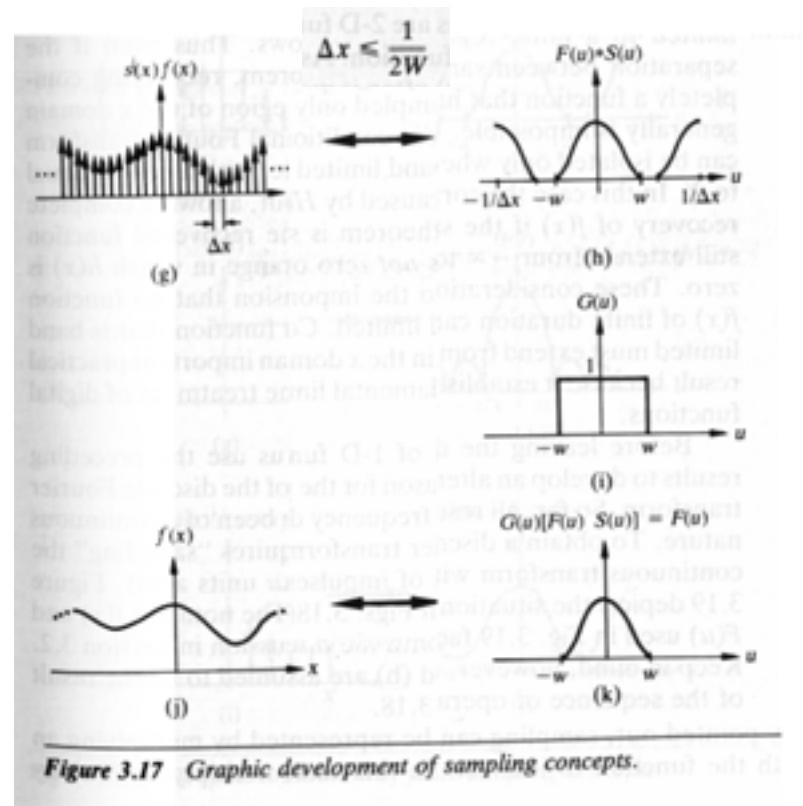
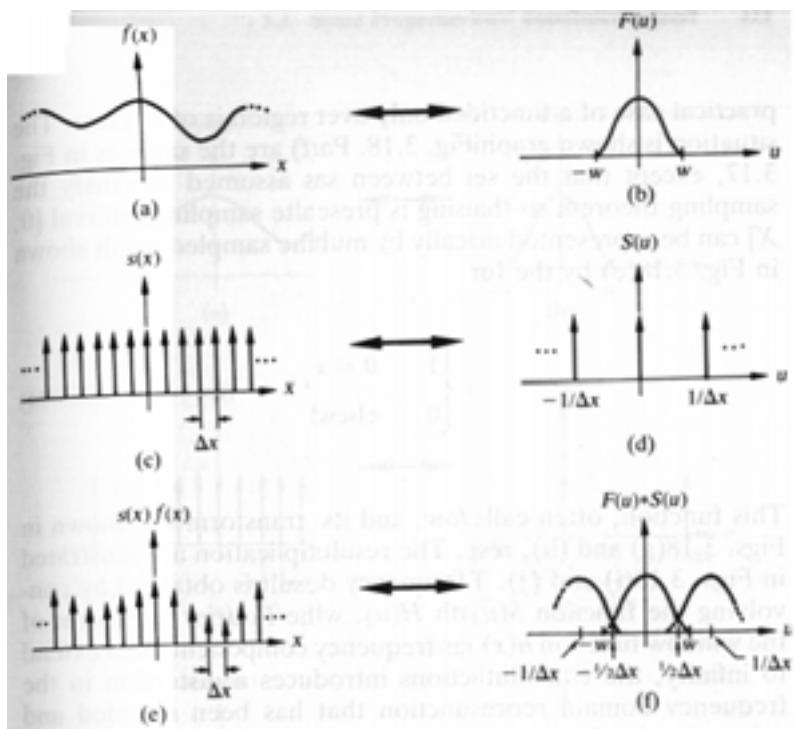


Figure 3.17 Graphic development of sampling concepts.

Efecto del muestreo en el dominio frecuencial: frecuencias de muestreo excesivamente bajas producen interferencias frecuenciales y pérdida de información.

Si la frecuencia de muestreo está por encima de la frecuencia de Nyquist, se puede recuperar la función original a partir del muestreo, aplicando una ventana a la transformada que seleccione el periodo en el origen.

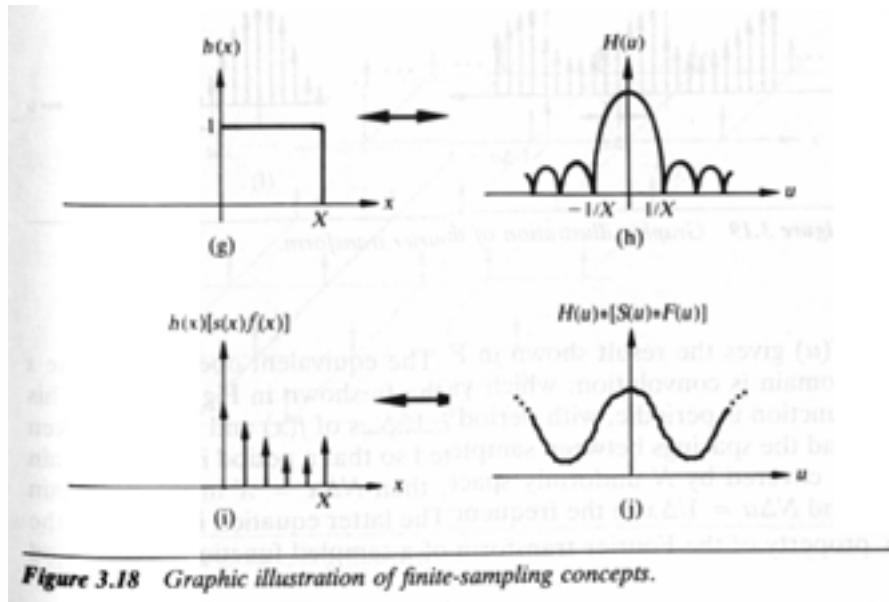
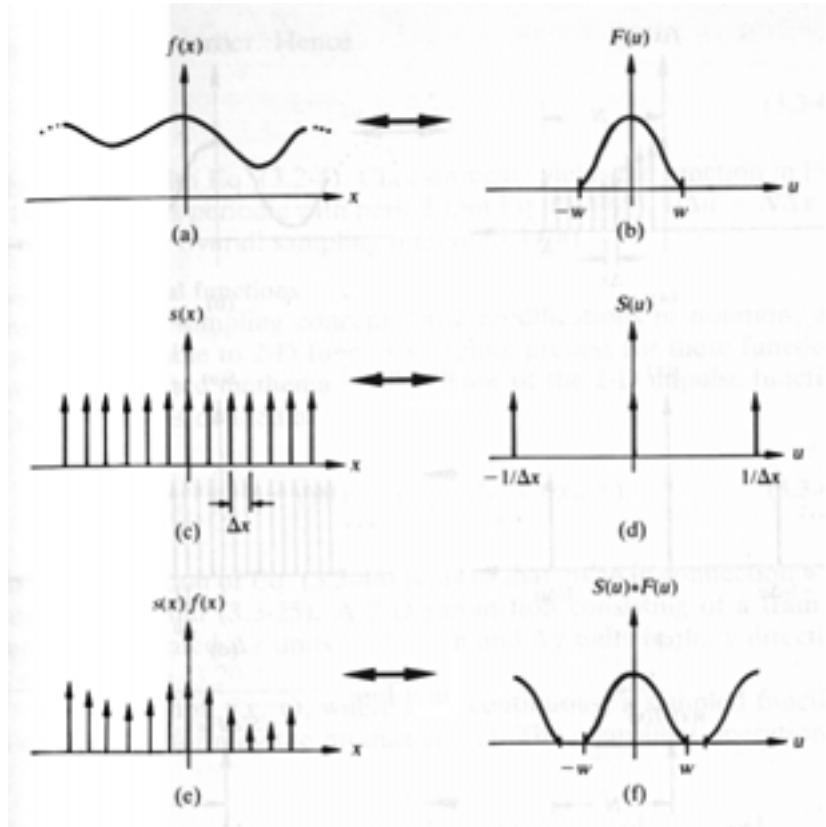


Figure 3.18 Graphic illustration of finite-sampling concepts.

Al realizar un muestreo en un intervalo finito estamos multiplicando una ventana a la función muestreada, o convolucionando la transformada de la función discretizada con la de la ventana, esta última no es finita, por tanto la función así muestreada no es de banda limitada y no será recuperable.

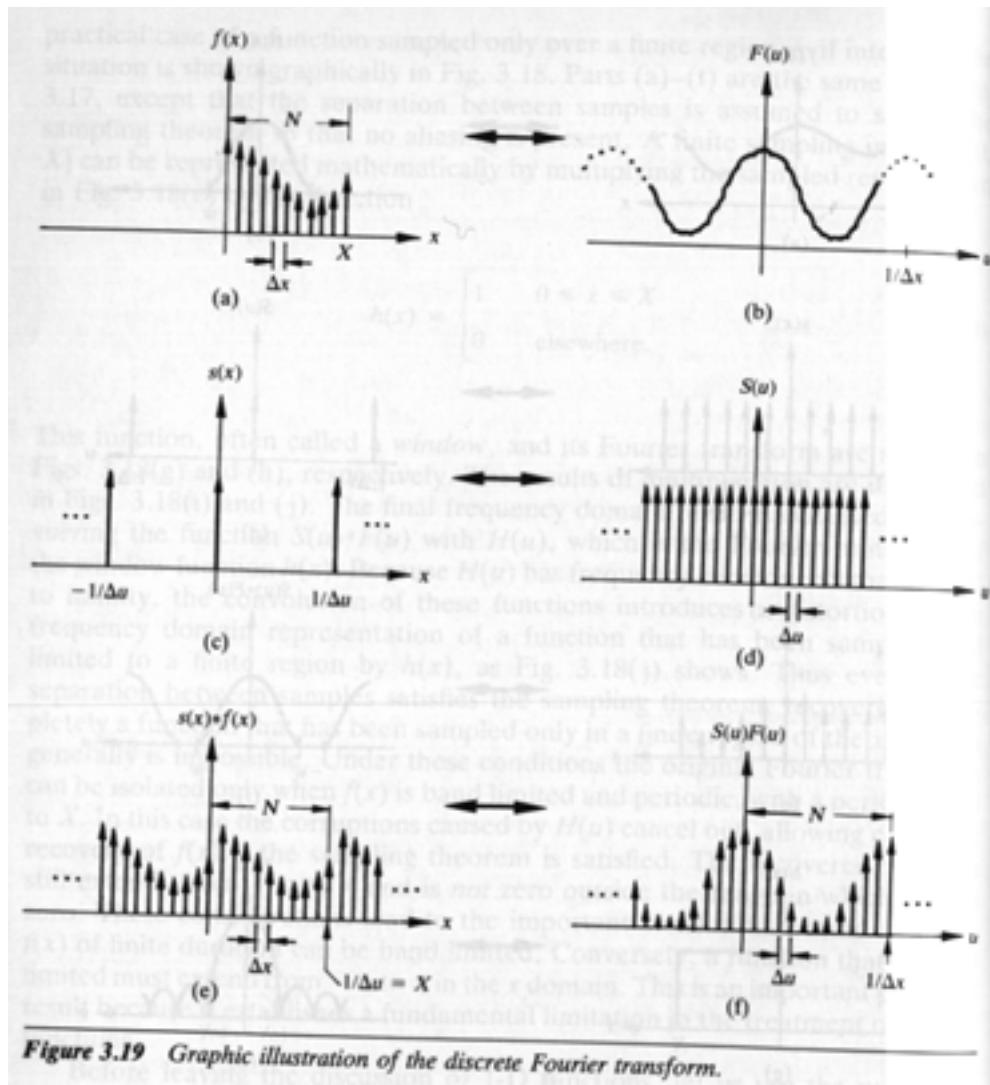


Figure 3.19 Graphic illustration of the discrete Fourier transform.

Transformada discreta de Fourier: Al discretizar el plano transformado estamos convolucionando la discretización espacial con un tren de impulsos que convierten la función en periódica.

Muestreo 2D

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0).$$

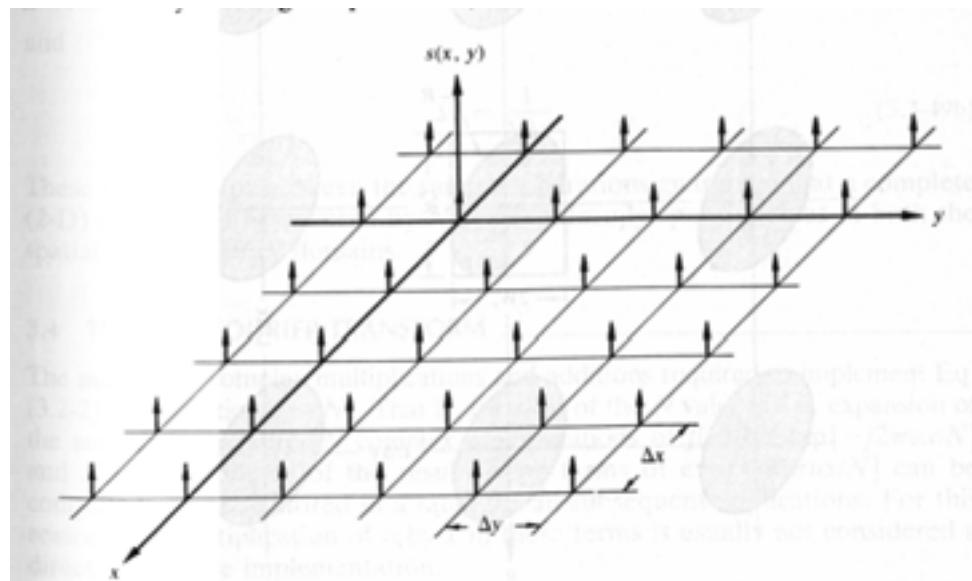
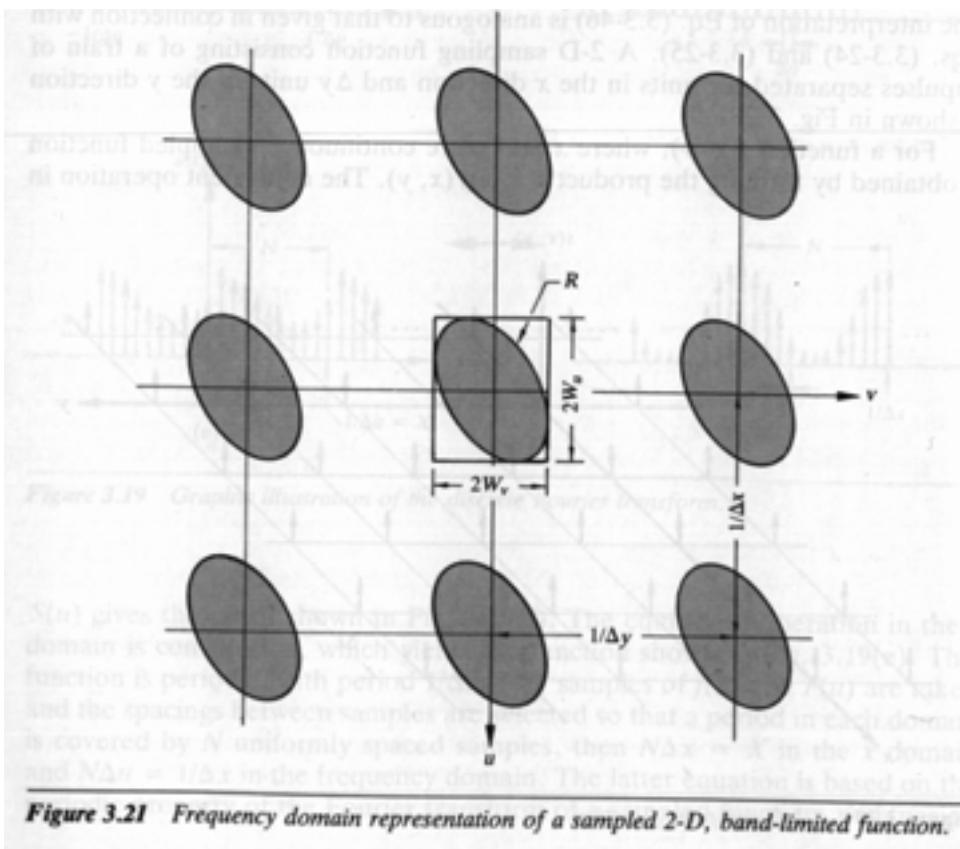


Figure 3.20 A 2-D sampling function.

Condiciones de muestreo para la recuperación de la imagen original.



$$\Delta x \leq \frac{1}{2W_u}$$

$$\Delta y \leq \frac{1}{2W_v}.$$

$$\Delta u = \frac{1}{N\Delta x}$$

$$\Delta v = \frac{1}{N\Delta y}.$$

Transformadas separables

Transformada directa

$$T(u) = \sum_{\substack{x=0 \\ y=0}}^{N-1} f(x)g(x, u)$$

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)g(x, y, u, v)$$

Transformada inversa

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} T(u)h(x, u)$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} T(u, v)h(x, y, u, v)$$

Kernel directo de la transformada

$$g(x, u)$$

$$g(x, y, u, v)$$

$$h(x, y, u, v)$$

Kernel inverso de la transformada

$$h(x, u)$$

$$h(x, y, u, v)$$

Kernel separable

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_2(y, v).$$

Kernel simétrico

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v).$$

Caso de la transformada de Fourier bidimensional

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

$$g(x, y, u, v) = g_1(x, u)g_1(y, v)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-j2\pi ux/N] \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-j2\pi vy/N].$$

La transformada separable y simétrica puede calcularse aplicando dos transformadas unidimensionales

$$T(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)g_2(y, v) \quad x, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

$$T(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} T(x, v)g_1(x, u) \quad u, v = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

En forma matricial

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}$$

\mathbf{F} es la matriz imagen, \mathbf{A} es la matriz kernel de transformación

$$a_{ij} = g_1(i, j),$$

Para obtener la transformación inversa se calcula:

$$\mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, La inversa es exacta

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{T}\mathbf{B}$$

Sino se obtiene una aproximación

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{F}\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Transformada de Walsh

$$N = 2^n,$$

$$g(x, u) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

$$W(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}$$

$$h(x, u) = \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}.$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} W(u) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)}.$$

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}.$$

$b_k(z)$ K-esimo bit en la representación binaria de z

Table 3.3 Values of the 1-D Walsh Transformation Kernel for $N = 8$

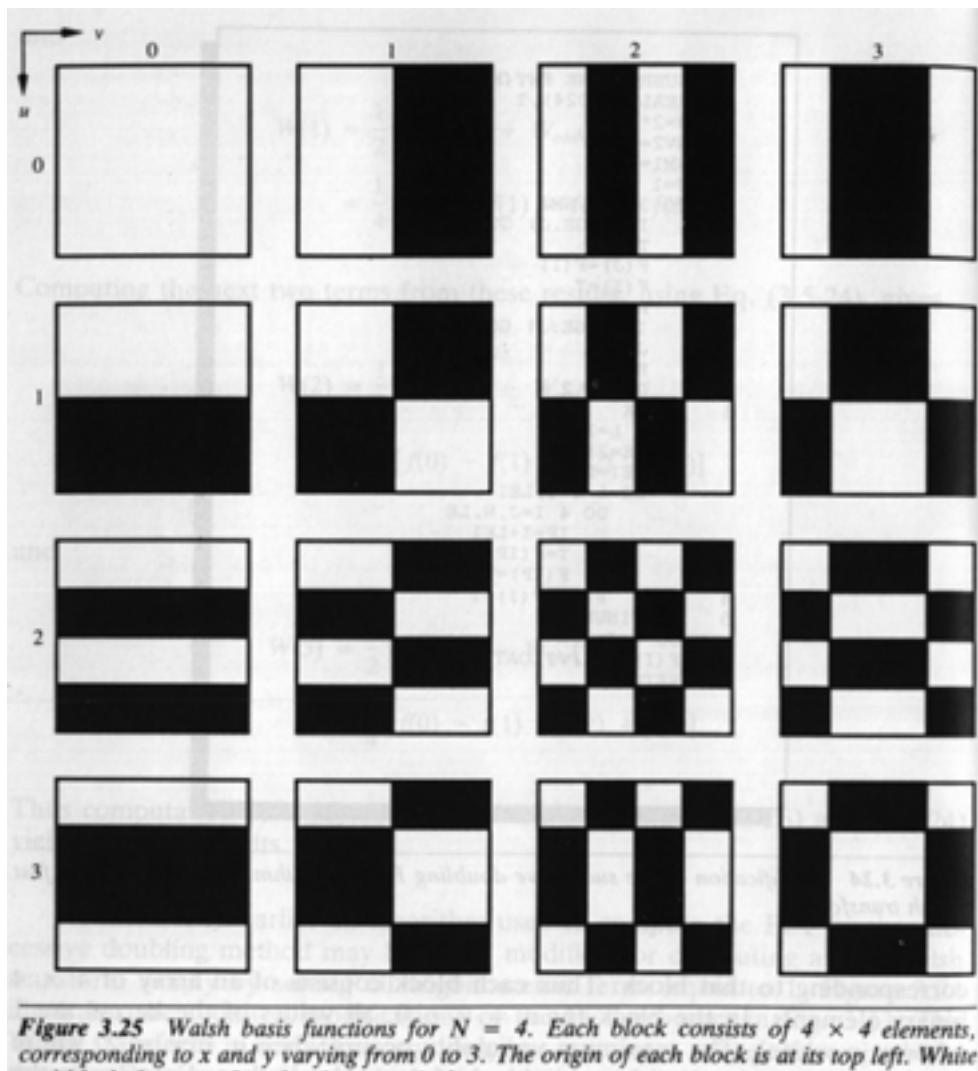
$u \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	-	-	-	-
2	+	+	-	-	+	+	-	-
3	+	+	-	-	-	-	+	+
4	+	-	+	-	+	-	+	-
5	+	-	+	-	-	+	-	+
6	+	-	-	+	+	-	-	+
7	+	-	-	+	-	+	+	-

$$W(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} W(u, v) \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{[b_i(x)b_{n-1-i}(u) + b_i(y)b_{n-1-i}(v)]}$$

Separabilidad y simetría

$$\begin{aligned} g(x, y, u, v) &= g_1(x, u)g_1(y, v) \\ &= h_1(x, u)h_1(y, v) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(x)b_{n-1-i}(u)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \prod_{i=0}^{n-1} (-1)^{b_i(y)b_{n-1-i}(v)} \right]. \end{aligned}$$



Base de funciones de la transformada de Walsh cuando la imagen es de tamaño 4×4 . Los coeficientes de la transformada se obtienen multiplicando la imagen por cada una de las funciones de la base.

Figure 3.25 Walsh basis functions for $N = 4$. Each block consists of 4×4 elements, corresponding to x and y varying from 0 to 3. The origin of each block is at its top left. White and black denote $+1$ and -1 , respectively.

Transformada de Hadamard

$$g(x, u) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)}$$

$$H(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)}$$

$$g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

$$H(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

$$h(x, u) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)}$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} H(u) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)}$$

$$h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} [b_i(x)b_i(u) + b_i(y)b_i(v)]}$$

$$\begin{aligned} g(x, y, u, v) &= g_1(x, u)g_1(y, v) \\ &= h_1(x, u)h_1(y, v) \\ &= \left[\frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(x)b_i(u)} \right] \left[\frac{1}{\sqrt{N}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n-1} b_i(y)b_i(v)} \right]. \end{aligned}$$

Separabilidad y simetría

Table 3.4 Values of the 1-D Hadamard Transformation Kernel for $N = 8$

$u \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	-	+	-	+	-	+	-
2	+	+	-	-	+	+	-	-
3	+	-	-	+	+	-	-	+
4	+	+	+	+	-	-	-	-
5	+	-	+	-	-	+	-	+
6	+	+	-	-	-	-	+	+
7	+	-	-	+	-	+	+	-

Table 3.5 Values of the 1-D Ordered Hadamard Kernel for $N = 8$

$u \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	+	+	+	+	+	+	+	+
1	+	+	+	+	-	-	-	-
2	+	+	-	-	-	-	+	+
3	+	+	-	-	+	+	-	-
4	+	-	-	+	+	-	-	+
5	+	-	-	+	-	+	+	-
6	+	-	+	-	-	+	-	+
7	+	-	+	-	+	-	+	-

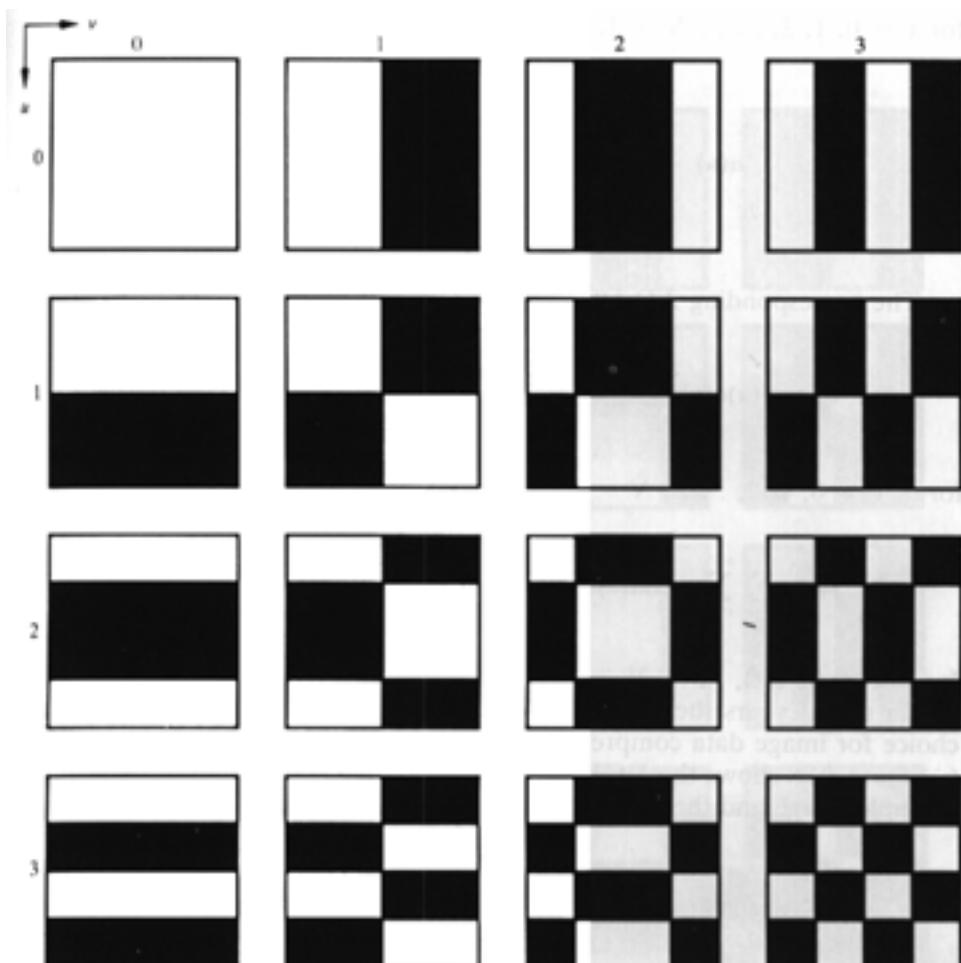
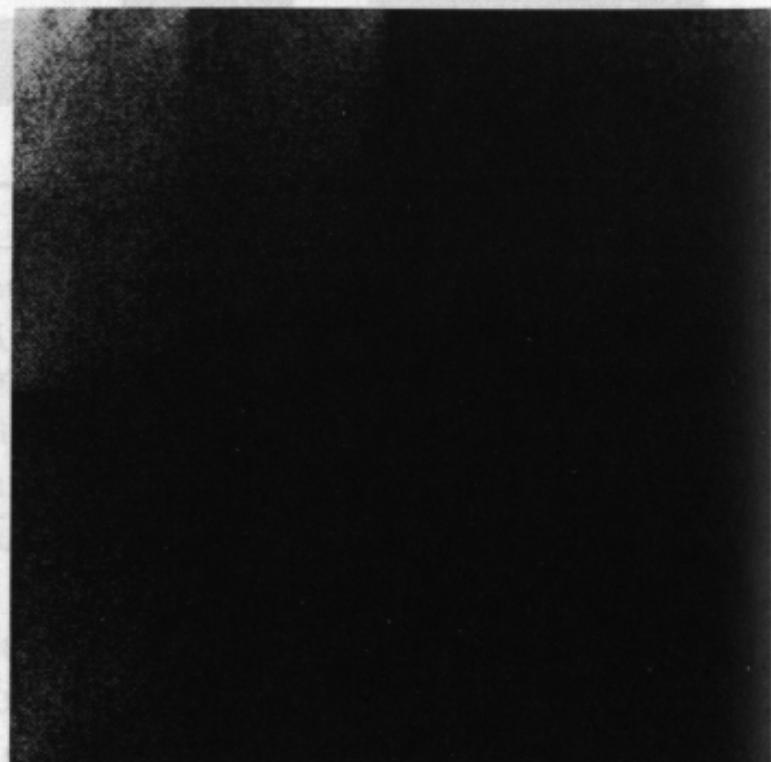


Figure 3.26 Ordered Hadamard basis functions for $N = 4$. Each block consists of 4×4 elements, corresponding to x and y varying from 0 to 3. The origin of each block is at its top left. White and black denote $+1$ and -1 , respectively.



(a)



(b)

Figure 3.27 A simple image and the log magnitude of its Hadamard transform.

Discrete Cosine Transform (DCT)

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \quad u = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \quad x = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{for } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{for } u = 1, 2, \dots, N-1, \end{cases}$$

$$C(u, v) = \alpha(u)\alpha(v) \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \quad u, v = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v) C(u, v) \cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right] \quad x, y = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

La base de funciones son funciones coseno y el resultado de la transformación es siempre real, lo que simplifica los cálculos.

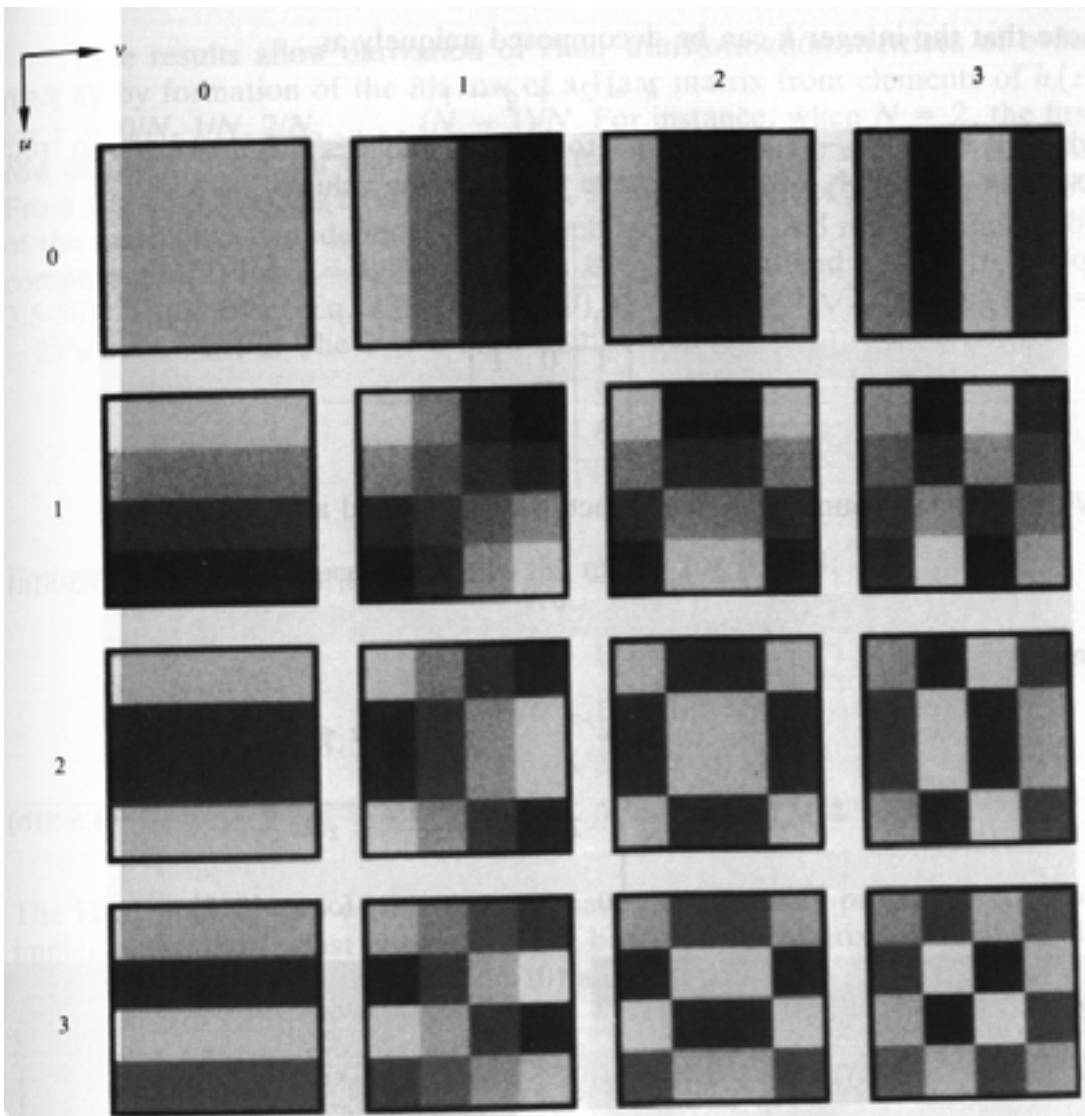
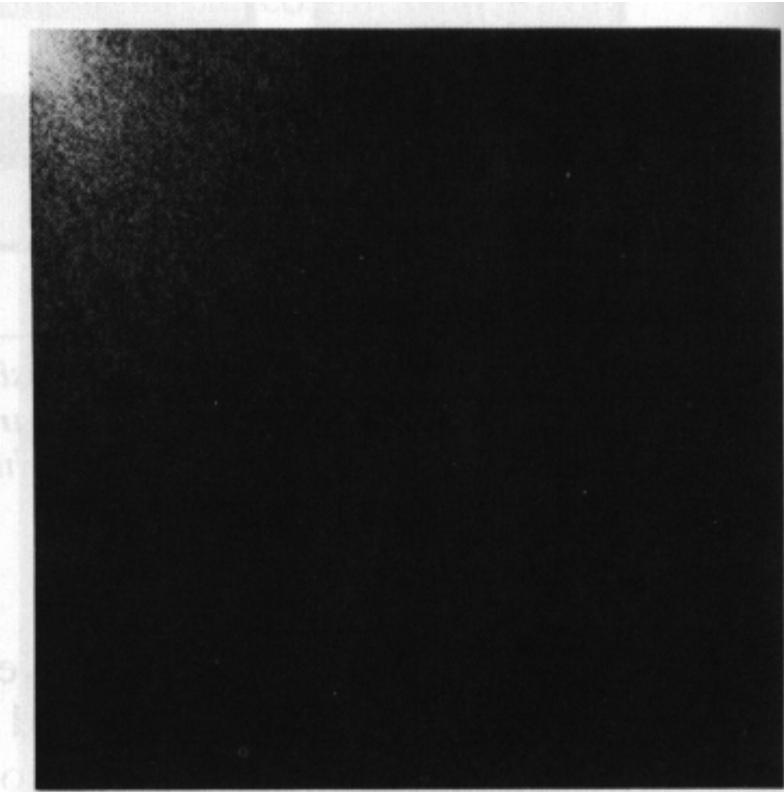


Figure 3.28 Discrete cosine transform basis functions for $N = 4$. Each block consists of 4×4 elements, corresponding to x and y varying from 0 to 3. The origin of each block is at its top left. The highest value is shown in white. Other values are shown in grays, with darker meaning smaller.



(a)



(b)

Figure 3.29 A simple image and the log magnitude of its discrete cosine transform.

Transformada en componentes principales: Hotelling, Karhunen-Loeve

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Población de vectores aleatorios de media y matriz de covarianza

$$\mathbf{m}_x = E\{\mathbf{x}\}$$

$$\mathbf{C}_x = E\{(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)^T\}$$

Dadas M muestras de la población de vectores aleatorios, se puede calcular

$$\mathbf{m}_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{x}_k \quad \mathbf{C}_x = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T - \mathbf{m}_x \mathbf{m}_x^T.$$

Puesto que la matriz de covarianza es real y simétrica, se puede diagonalizar y encontrar el conjunto de autovectores ortogonales de la matriz. Sean \mathbf{e}_i estos autovectores ordenados por autovalor λ_i , dispuestos por columnas en una matriz A.

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x).$$

$$\mathbf{m}_y = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{C}_y = \mathbf{A} \mathbf{C}_x \mathbf{A}^T.$$

$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Error de reconstrucción de los datos originales si consideramos solo los K autovectores de mayor autovalor

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_K^T \mathbf{y} + \mathbf{m}_x.$$

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^n \lambda_j - \sum_{j=1}^K \lambda_j = \sum_{j=K+1}^n \lambda_j$$

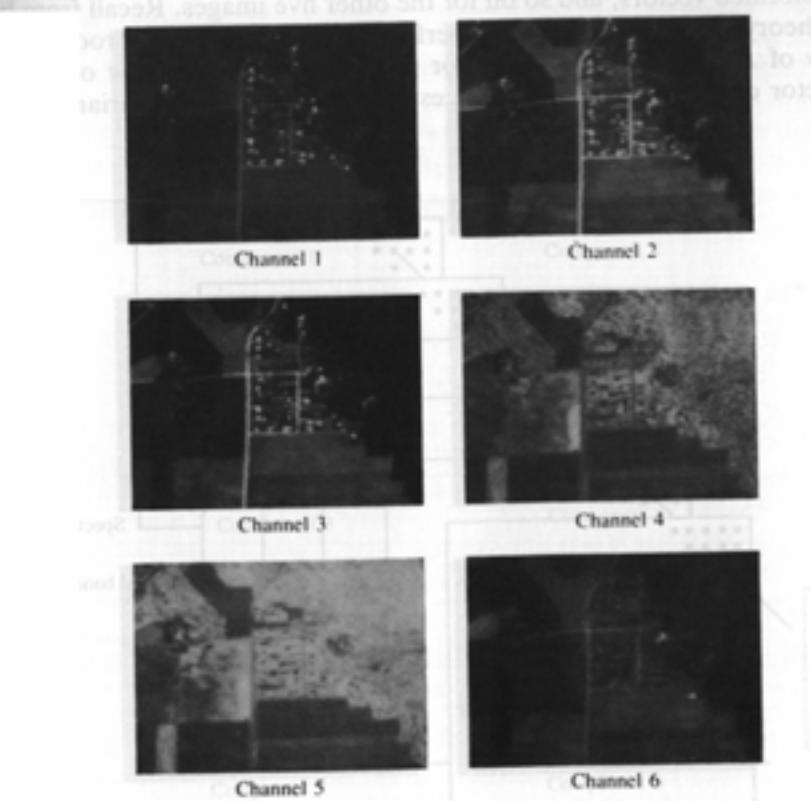


Figure 3.31 Six spectral images from an airborne scanner. (Courtesy of the Laboratory for Applications of Remote Sensing, Purdue University.)

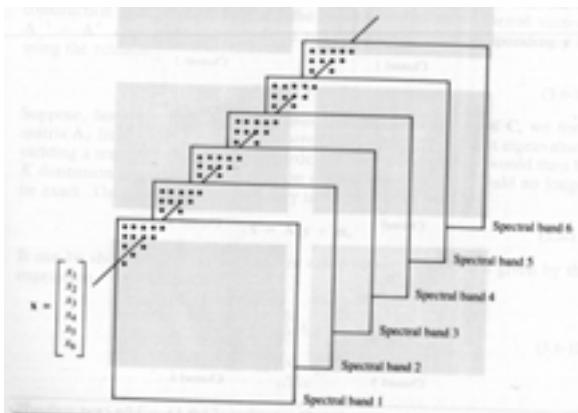


Figure 3.32 Formation of a vector from corresponding pixels in six images.

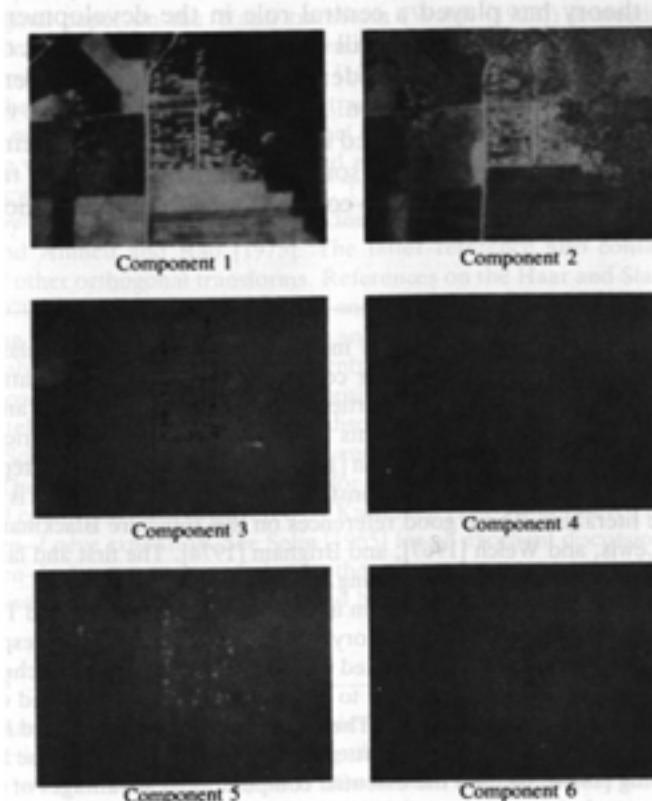


Figure 3.33 Six principal-component images computed from the data in Fig. 3.31. (Courtesy of the Laboratory for Applications of Remote Sensing, Purdue University.)

Table 3.6 Channel Numbers and Wavelengths

Channel	Wavelength Band (μm)
1	0.40–0.44
2	0.62–0.66
3	0.66–0.72
4	0.80–1.00
5	1.00–1.40
6	2.00–2.60

Table 3.7 Eigenvalues of the Covariance Matrix of the Images Shown in Fig. 3.31

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
3210	931.4	118.5	83.88	64.00	13.40

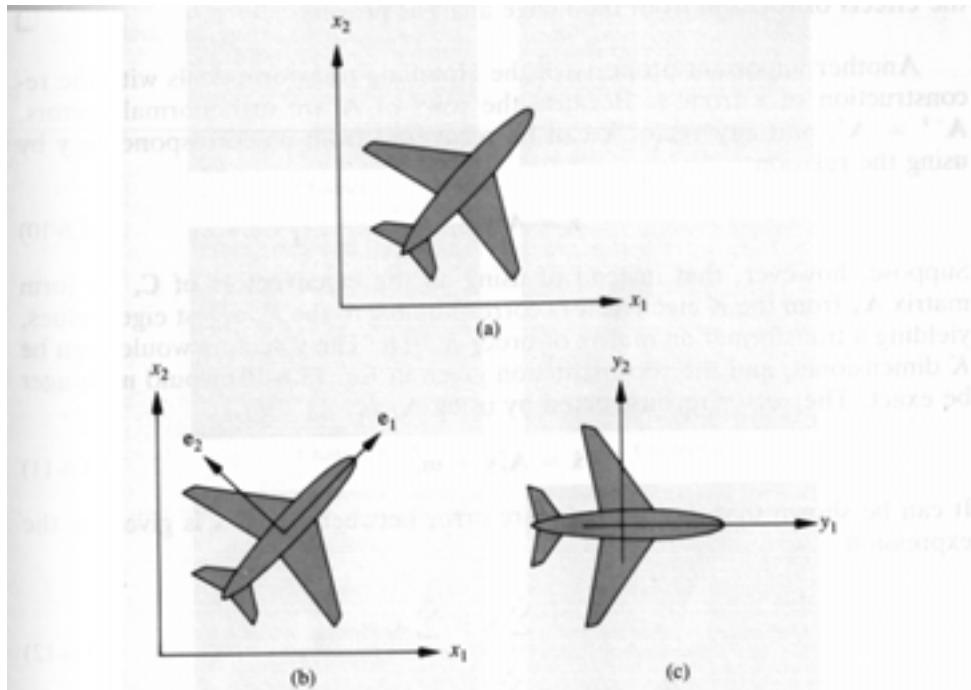


Figure 3.30 (a) A binary object; (b) its principal axes (eigenvectors); (c) object rotated by using Eq. (3.6-6).