**INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL**
ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES
ACADEMIA DE INGENIERÍA DE SOFTWARE

Profesora: M. en C. Ma. Elena Cruz Meza,
e-mail: mcruzm@ipn.mx,

# ANÁLISIS DE IMÁGENES

## Análisis de Imágenes

# Unidad III

Análisis en el dominio de la frecuencia

# Unidad III



# Introduccion…

4.2 Morfología matemática de laticces

## Introducción

- ✓ La información en laticces es una función de un retículo de puntos o valores enteros no negativos y recibe el nombre de *imagen en niveles de gris*
- ✓ Las imágenes como es habitual en niveles de gris, vienen dadas como una función $f(x,y)$ de dismensión $MxN$, la intensidad observada en el pixel $x$, normalmente $0 \leq f(x) \leq 255$
- ✓ El ee como $b(i,j)$, que es realmente una subimagen de dimensión $mxn$, en ambos casos son imágenes discretas

5

4.2 Morfología matemática de laticces

## Introducción …

- ✓ Si $Z$ representa al conjunto de enteros reales, se supone que $(x,y)$ son enteros de $ZxZ$, y que $f$ y $b$ son funciones que asignan un valor de escala de grises (un número real del conjunto de números reales, $R$) a cada par de coordenadas $(x,y)$. Si los niveles De gris tambien son enteros, $Z$ reemplaza a $R$

6

4.2.1 Los laticces

## Laticces

- ✓ A partir de esto podemos plantear diversas transformaciones morfológicas que podemos aplicar en el espacio en Laticces:
  - ✓ Extensiones de la dilatación, erosión, apertura y clausura en niveles de gris.
  - ✓ Extracción de componentes para la interpretación y descripción de objetos, etc.

7

4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce

## Imagen en niveles de grises

- Las imágenes digitales en escala de grises se pueden representar como conjuntos cuyos componentes están en $Z^3$, donde dos componentes de cada elemento del conjunto hacen referencia a las coordenadas de un pixel, y el tercero corresponde a su valor de intensidad discreta
- Los conjuntos de espacio en dimensiones mayores pueden contener otros atributos de imagen, tales como color y componentes variables con el tiempo.

## 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticces

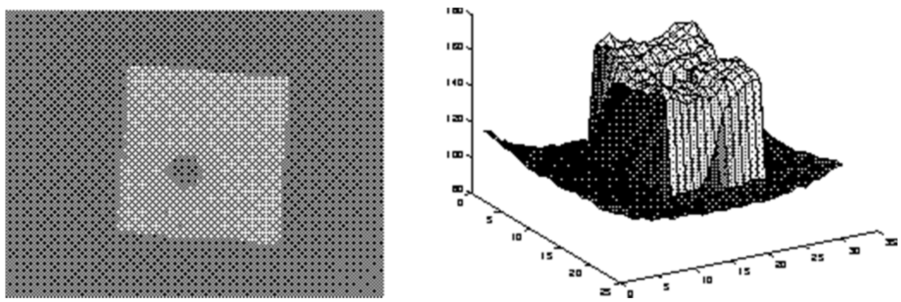


Imagen en niveles de gris y susuperficie correspondiente en el espacio de imagen

9

## 4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce

**Aplicando operaciones morfológicas a las imágenes en niveles de gris**

- ✓ El ee además de poder adquirir diferentes tamaños y formas bidimensionales como en el tridimensional, es decir, se caracteriza por un volumen que representa una figura
  - ✓ *El cono, los discos, las esferas, los cubos y los cilindros son algunos elementos estructurales tridimensionales utilizados comúnmente.*
- ✓ Cuando el ee es bidimensional se comparan los niveles de gris de la imagen original que quedan comprendidos en el entorno delimitado por la forma y tamaño del ee

10

**4.2.2 La imagen en niveles de gris como un laticce**

**Aplicando operaciones morfológicas a las imágenes en niveles de gris**

✓ Cuando el ee es tridimensional se compara píxel a píxel la relación entre los niveles de gris correspondientes en la imagen original y los niveles de gris correspondientes al ee tridimensional. En este caso las operaciones se determinan basándose en ambos conjuntos de niveles de gris y no solamente en las intensidades de la imagen original como en el caso de la utilización de objetos estructurantes bidimensionales. El ee es desplazado por toda la imagen obteniendo de esta manera una nueva imagen en niveles de gris.

11

**4.2.3 Traslación y reflexión**

## Traslación y Reflexión

- Sean A y B conjuntos con $Z^2$, con componentes a=(a1,a2) y b=(b1, b2), respectivamente. La **traslación** de A por x=(x1,x2) representada por $(A)_x$ se define como:

$$(A)_x = \{c \mid c = a + x, \text{ para } a \in A\}$$

- La **reflexión** representada por $B$^ se define como:

$$(B\text{^}) = \{x \mid x = -b, \text{ para } b \in B\}$$

## 4.2.4 Dilatación y erosión

# La Dilatación

- ✓ El proceso para la dilatación en niveles de gris se da aplicando el ee a cada pixel de la imagen para definir una vecindad eligiendo el **máximo** de la suma de los correspondientes pixeles

$$D_G(A,B)=\max_{[j,k]\in B}\{a\,[m-j,\ n-k]+b[j,k]\}$$

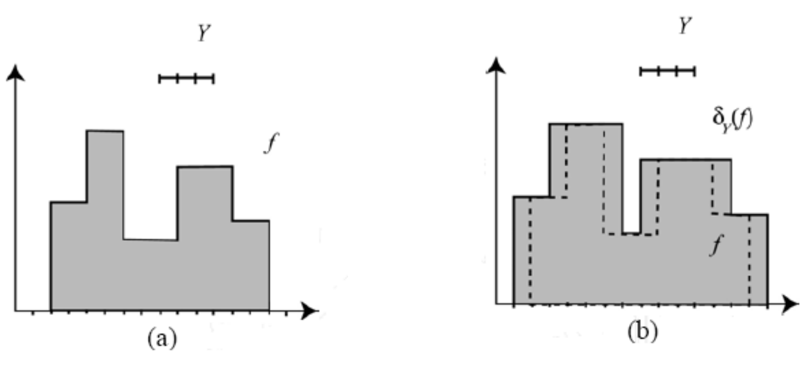
- ✓ Usualmente se simplifica como

$$D_G(A,B)=\max_{[j,k]\in B}\{a\,[m-j,\ n-k]+b[j,k]\}=\max\ (A)$$

13

## 4.2.4 Dilatación y erosión

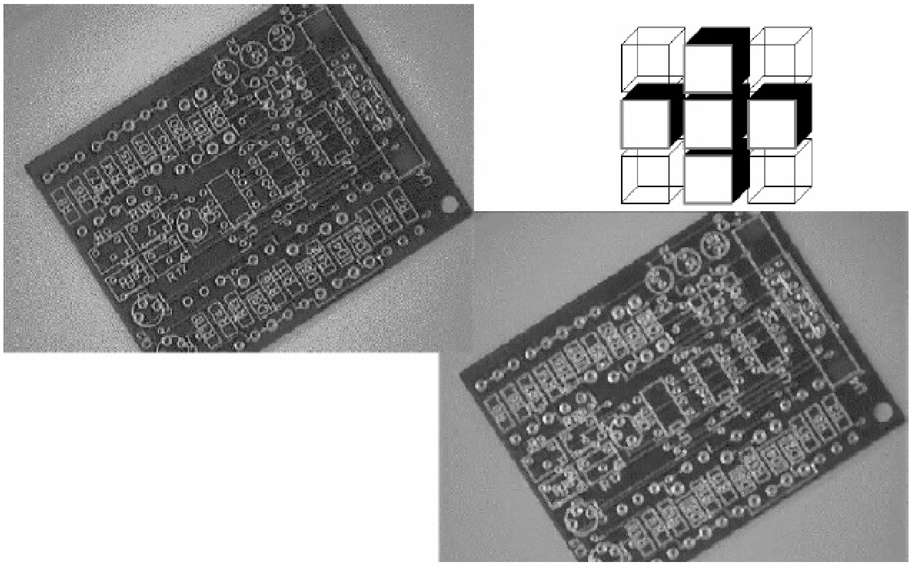
Dilatación …




(a) La Dilatación de una señal bidimensional definida por la función $f$ con un ee $Y$ de tamaño 3x3. (b) El resultado en cada punto de $f$ es el máximo de todos los valores presentes bajo la definición del ee.

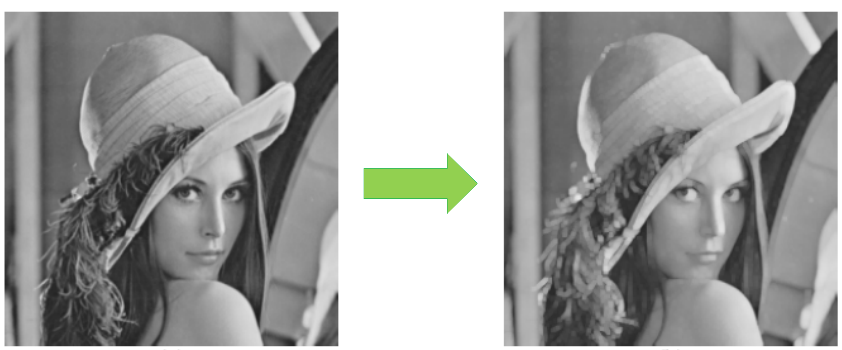
## 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Dilatación …



## 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Dilatación:



(a) (b)

El resultado de la dilatación en señal unidimensional de escala de grises (a) es generalmente, es una señal de mayor valor, es decir una imagen más clara (b) puesto que la dilatación maximiza el valor de la señal.

## 4.2.4 Dilatación y erosión

Ej. Eliminando ruido pimienta mediante la Dilatación

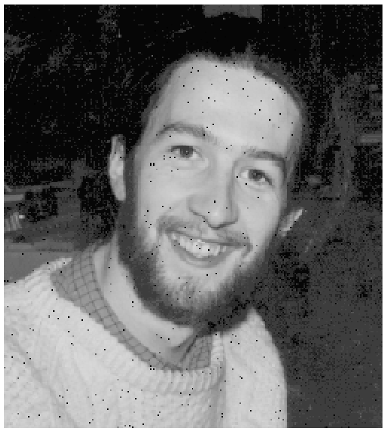


Imagen ruidosa

Imagen dilatada

## 4.2.4 Dilatación y erosión

# La Erosión

- ✓ El proceso para la erosión en niveles de gris se da aplicando el ee a cada pixel de la imagen para definir una vecindad eligiendo el **mínimo** de la suma de los correspondientes pixeles

$$E_G(A.B)=\min_{[j,k]\in B}\{a\,[m-j,\ n-k]+b[j,k]\}$$

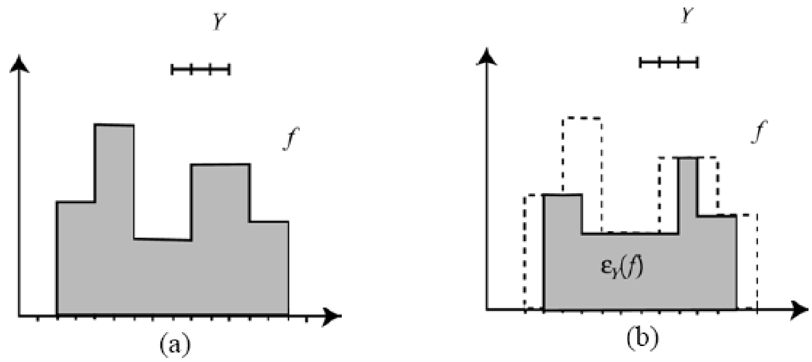
- ✓ Usualmente se simplifica como

$$E_G(A.B)=\min_{[j,k]\in B}\{a\,[m-j,\ n-k]+b[j,k]\}=\min\,(A)$$

18

## 4.2.4 Dilatación y erosión

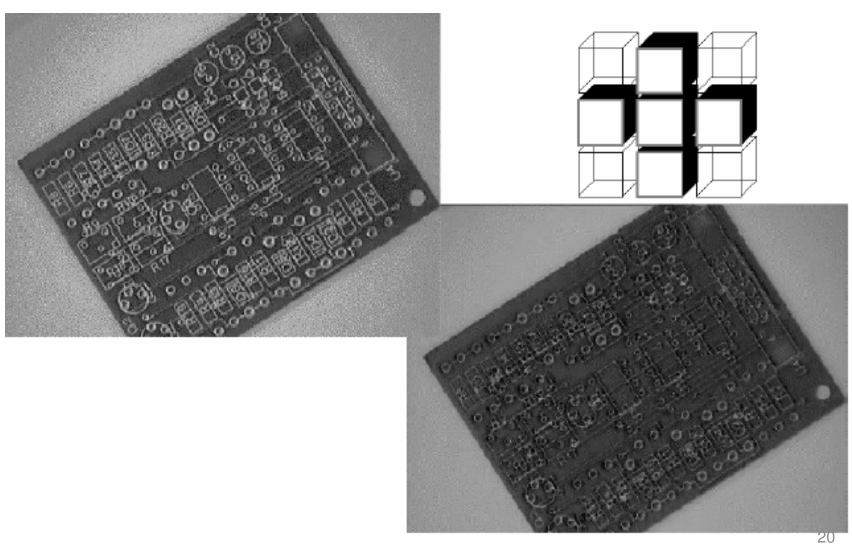
Erosión …




(a) La erosión de una señal unidimensional de función $f$ con un ee de tamaño 3x3. Se puede observar el efecto de la intersección de traslaciones definidas por el ee $Y$. (b) El resultado es el mínimo valor de todos los píxeles bajo la definición del ee.

## 4.2.4 Dilatación y erosión

Efecto de la Erosión …



20

## 4.2.4 Dilatación y erosión

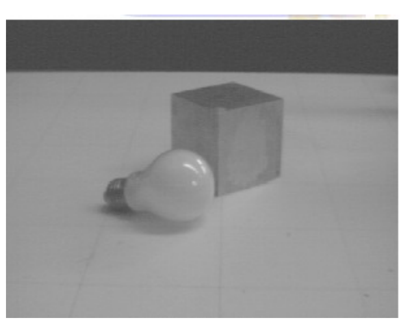
Efecto de la Erosión…

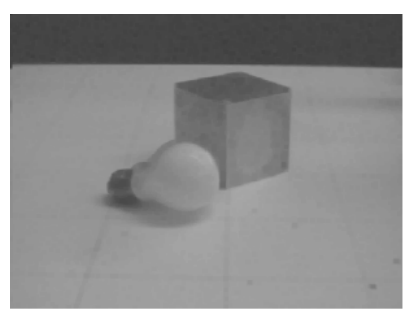
(a) (b)

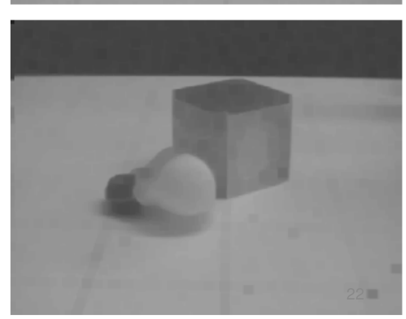
El resultado de la erosión en señales bidimensionales de escala de grises (imágenes) es una señal de menor valor, es decir una imagen más obscura, puesto que la erosión pretende minimizar el valor de la señal que, en el caso de los grises tiene una definición [0,255].

## 4.2.4 Dilatación y erosión

Ej. Suavizado, eliminación de brillo mediante la erosión







### 4.2.4 Dilatación y erosión

✓ Ejercicio visual: Identificar los efectos de la Erosión y Dilatación

### 4.2.5 Apertura y cierre

## La Apertura Morfológica

- La apertura de una señal $f$ por un elemento estructurante $Y$ se denota por $\gamma Y(f)$, y se define como la erosión de $f$ por $Y$, seguida de la dilatación por el mismo elemento estructurante:

$$\gamma Y(f)= \delta_Y(\varepsilon_Y(f))$$

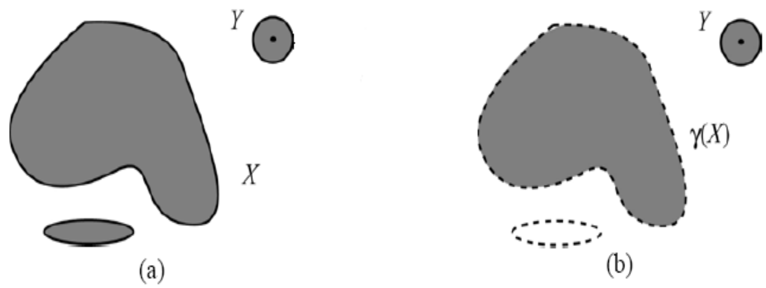
Usualmente se maneja como:

$$fob=(f \Theta b) \oplus b$$

4.2.5 Apertura y cierre

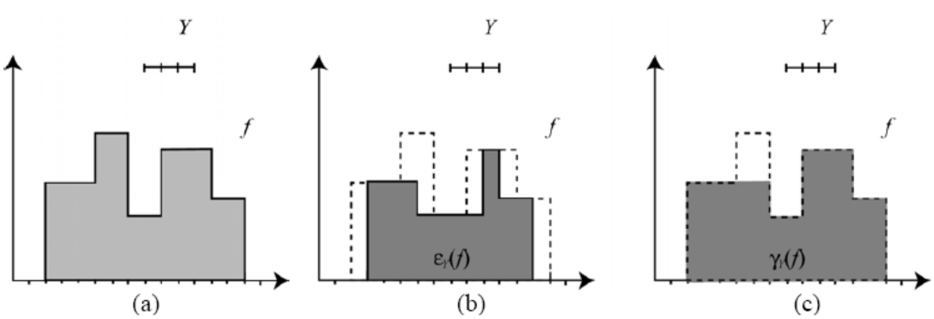
# La Apertura Morfológica

- La apertura de un conjunto $X$ por un ee $Y$ elimina objetos menores en tamaño al ee, la apertura redondea las convexidades importantes




4.2.5 Apertura y cierre

## Apertura Morfológica …




La apertura de una señal unidimensional por un elemento de estructura de tamaño 3. (a) Señal original *f*. (b) Erosión de la señal *f* por el ee *Yk*, (c) Dilatación de la erosión *E(f)* por el ee *Y.*

### 4.2.5 Apertura y cierre

Apertura Morfológica…

- El tamaño y la forma de los elementos de estructura empleados en la apertura deben se acordes con la estructura de la imagen que se desea eliminar
- En ocasiones tamaños elevados de EE eliminan formas indeseables en una imagen afectaran el resto de la estructura
- Tamaños reducidos serán óptimos cuando las imágenes contengan pequeños detalles.

### 4.2.5 Apertura y cierre

Efecto de la Apertura Morfológica…

- En el siguiente ej. se observa como la apertura con un ee de 3x3 filtra la imagen eliminando las formas u objetos claros

Imagen original

Imagen filtrada

## 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante la Apertura…

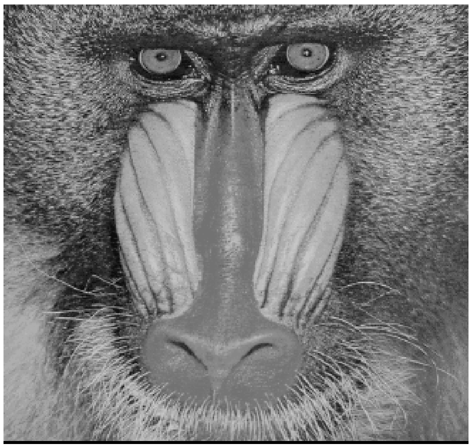


Imagen original

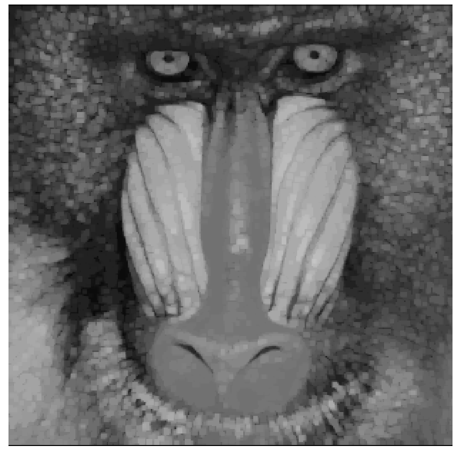


Imagen filtrada

29

## 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante la Apertura… eliminando ruido sal!

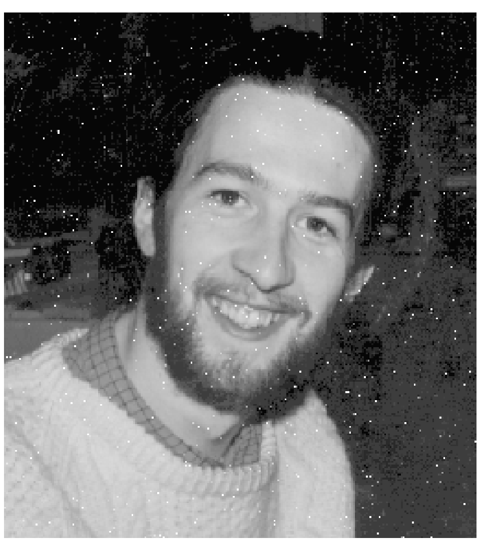


Imagen original

Imagen filtrada

30

4.2.5 Apertura y cierre

## La Clausura Morfológica

- También conocido por cierre morfológico, de una imagen *f* por un elemento de estructura *Y,* se denota por $\varphi Y(f)$, y se define como la dilatación de $f$ por $Y$, seguida de la erosión por el mismo EE.

$$\varphi Y(f)= \varepsilon_Y(\delta_Y(f))$$

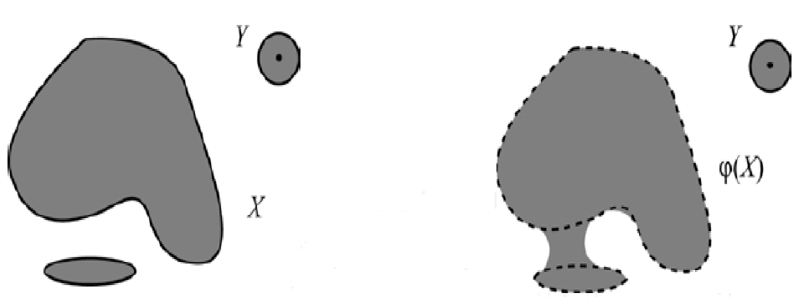
Usualmente se maneja como:

$$f\bullet b=(f\oplus b)\ \Theta b$$

4.2.5 Apertura y cierre

La Clausura Morfológica…

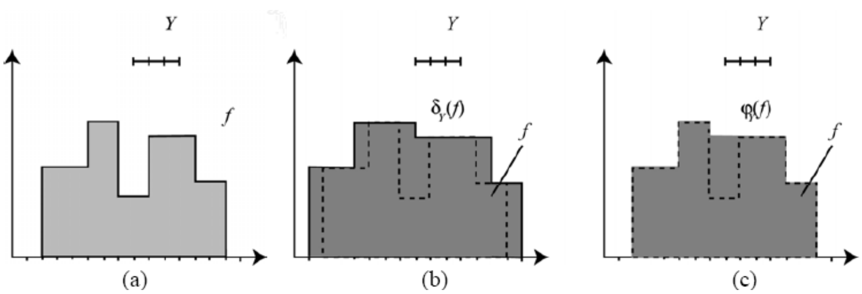
- La apertura de un conjunto $X$ por un ee $Y$ redondea redondea las concavidades importantes



**4.2.5 Apertura y cierre**

## Clausura Morfológica …

- En la clausura de la señal unidimensional se observa como la dilatación en estructuras que le erosión no puede separar




(a) señal unidimensional original. (b) Dilatación de la señal f por un ee Y. (c) Erosión de la dilatación por un ee Y

**4.2.5 Apertura y cierre**

## Clausura Morfológica …

- En una imagen de niveles de gris la clausura morfológica ayuda a eliminar estructuras oscuras menores en tamaño al elemento de estructura.
- La dilatación maximiza los valores de forma que se atenúan los objetos oscuros.
- La erosión minimiza la señal y sólo los elementos no eliminados quedan presentes en la imagen final.

**4.2.5 Apertura y cierre**

## Clausura Morfológica …

- En el siguiente ej. se observa como la clausura con un ee de 3x3 eliminando objetos o formas obscuras

Imagen original

Imagen filtrada

**4.2.5 Apertura y cierre**

## Clausura Morfológica …

Imagen original

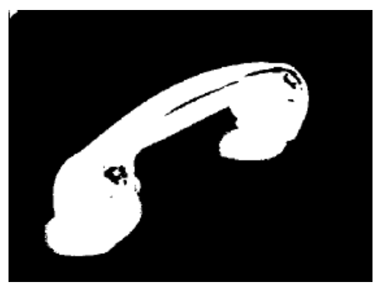


Imagen después de ser filtrada

36

## 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante la Clausura…

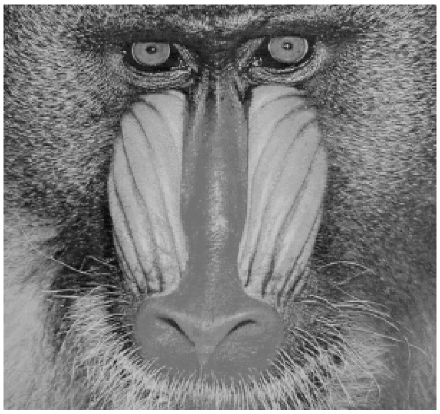


Imagen original

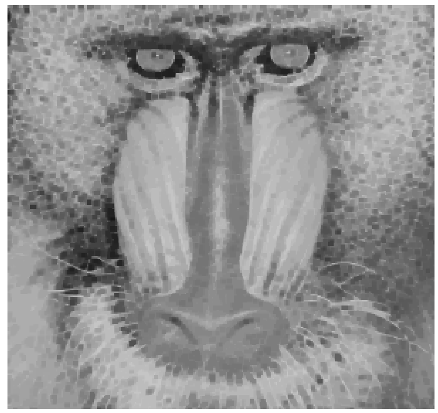


Imagen filtrada

37

## 4.2.5 Apertura y cierre

Filtro morfológico mediante el Cierre… eliminando ruido pimienta!

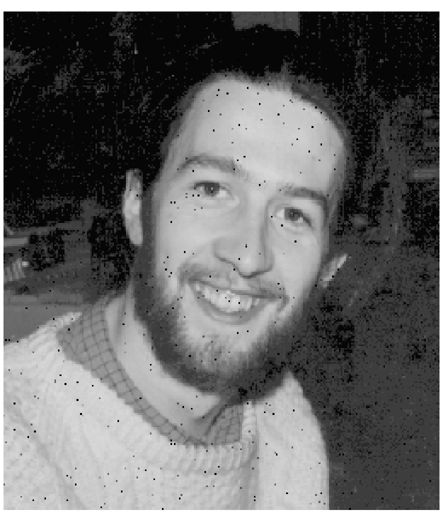


Imagen original

Imagen filtrada

38

4.2.6 Filtros morfológicos

## Operaciones combinadas

- La operación de erosión junto a la dilatación, son la base de cualquier transformación morfológica.
- Cualquier operador, transformación o algoritmo incluirá una erosión, una dilatación, o ambas primitivas en su implementación.
- Sin necesidad de formar nuevos operadores es posible encontrar nuevas aplicaciones interesantes en las trasformaciones básicas.

4.2.6 Filtros morfológicos

## Algunos filtros morfológicos en niveles de grises:

- Alisamiento morfológico
- Top Hat
- Bot hat
- Gradiente morfológico
  - Por dilatación
  - Por erosión
  - Simétrico

4.2.6 Filtros morfológicos

## Alisamiento morfológico

- Una forma de llevar a cabo el alisamiento de una imagen es realizar una apertura seguida de una clausura.
- El resultado de estas dos operaciones es suprimir o atenuar elementos extraños muy brillantes u oscuros.

$$\tau(f) = (f \circ b) \bullet f$$

4.2.6 Filtros morfológicos

## Top Hat

- La transformación de "Top-Hat" o sombrero de copa, que se denota *th*, se define como la diferencia entre la función *f* y su apertura con un elemento de estructura *b*
- También conocido por Top Hat por apertura o Top Hat Blanco, por destacar los objetos claros que han sido eliminados en la apertura
- Consiste en descubrir aquellas estructuras de la imagen que han sido eliminadas en el filtrado de apertura o cierre

$$TH(f) = f - (f \circ b) \quad \text{o bien,} \quad \rho(f) = f - \gamma(f)$$

- Usualmente se maneja como:

$$TH(f) = (f \oplus b) - (f \ominus b)$$

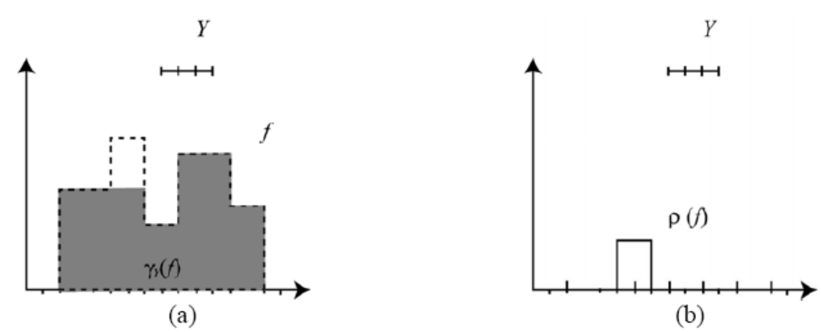
## 4.2.6 Filtros morfológicos

Top Hat …

- Es útil para detectar los picos claros, es decir, las zonas más claras de las imágenes, resalta detalles en la presencia de sombras
- Con la elección de un ee de forma y tamaño y orientación adecuados, es posible filtrar la imagen y eliminar determinados elementos en al imagen original:
  - *una operación de diferencia entre el mapa original y el filtrado aumenta considerablemente el contraste de las zonas eliminadas.*

## 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo de Top Hat por apertura en una señal unidimensional…




Se observa como se descubre aquella parte de la señal no eliminada en la apertura

**4.2.6 Filtros morfológicos**

Ejemplo …

Imagen original

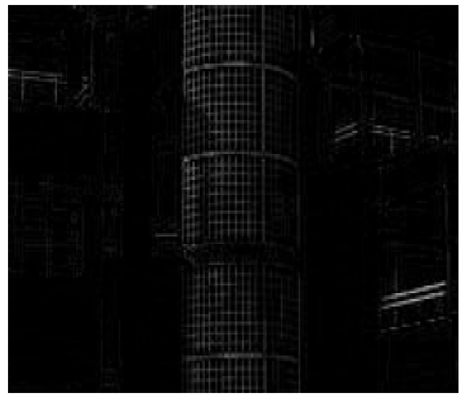


Imagen filtrada

**4.2.6 Filtros morfológicos**

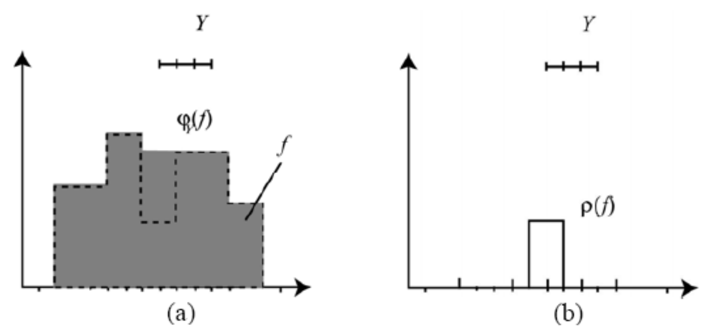
# Bot Hat

- La transformación "Bot-Hat", que se denota *bh*, se define como la diferencia de la clausura de la función f con un elemento de estructura *b* y la función *f* .
- También conocido como Top Hat por cierre o Top Hat Negro, ya que visualiza los objetos oscuros de la imagen original eliminados en el cierre.
- Esta transformación es útil para detectar los valles, es decir, las zonas más oscuras de las imágenes.

$$bh = f \bullet b - f \qquad \rho(f) = \varphi(f) - f$$

### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo de Bot Hat por apertura en una señal unidimensional…




En este caso los nuevo valores debidos al cierre son descubiertos e identificados.

### 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo…

Imagen original

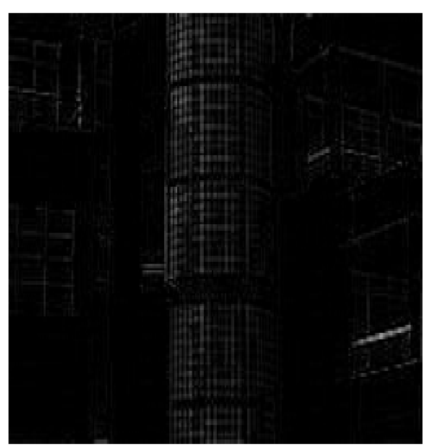


Imagen filtrada

4.2.6 Filtros morfológicos

## Gradiente Morfológico

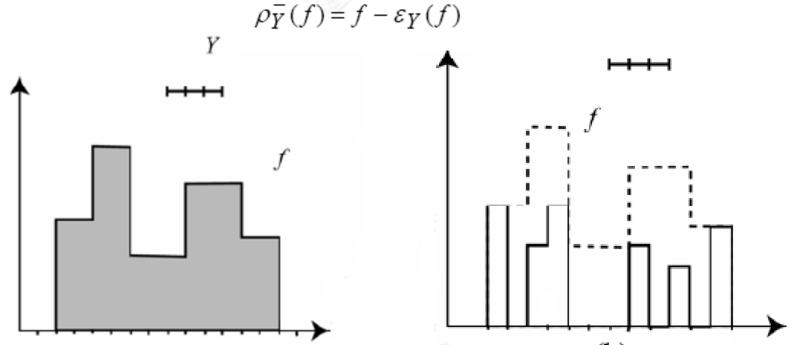
- El primer residuo de operaciones que se puede definir en morfología matemática es el gradiente morfológico, siendo la primera aproximación de la segmentación morfológica. El residuo gradiente conocido en la morfología como gradiente de Beucher es:
  - la diferencia entre una dilatación y una erosión, una dilatación y la imagen original o una erosión y la imagen original.

4.2.6 Filtros morfológicos

## a) Gradiente por erosión

- El primero de los gradientes a definir se conoce como gradiente por erosión y es la diferencia entre el conjunto o imagen original y la erosión por un elemento estructurante *Y*.

$$\rho_{\bar{Y}}(f) = f - \varepsilon_Y(f)$$




(a) (b)

## 4.2.6 Filtros morfológicos

Ejemplo del Gradiente por erosión …

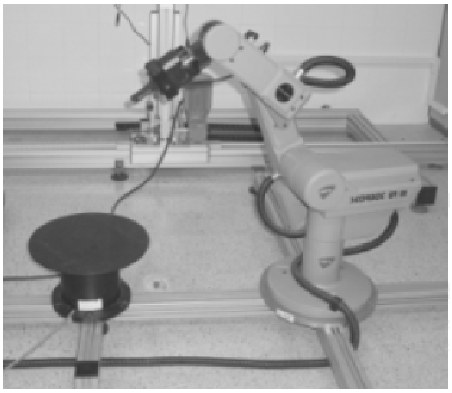


Imagen original

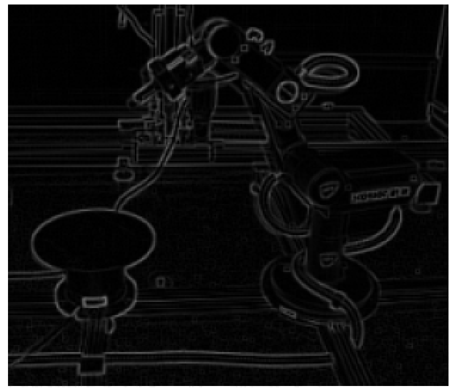


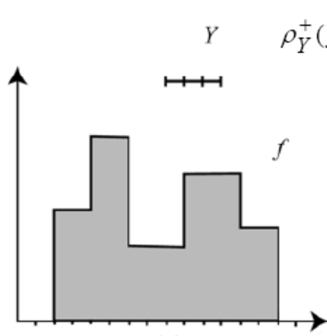
Imagen filtrada

## 4.2.6 Filtros morfológicos

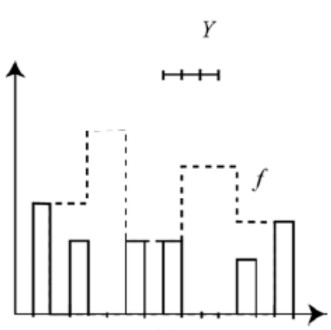
# b) Gradiente por Dilatación

- El gradiente por dilatación se define como la diferencia entre una dilatación por elemento estructurante Y y la identidad (imagen original)

$$\rho_Y^{+}(f) = \delta_Y(f) - f$$




(a)




(c)

## 4.2.6 Filtros morfológicos

### Ejemplo del Gradiente por Dilatación

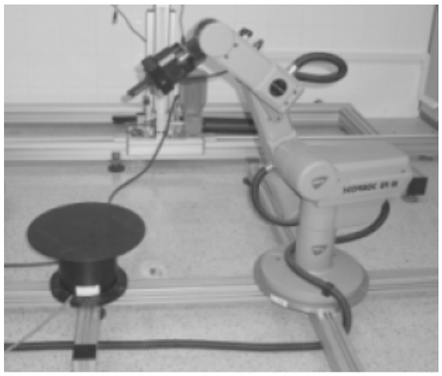


Imagen original

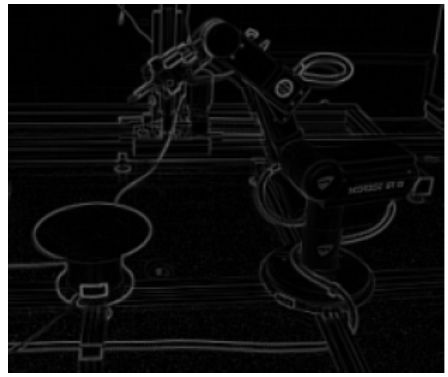


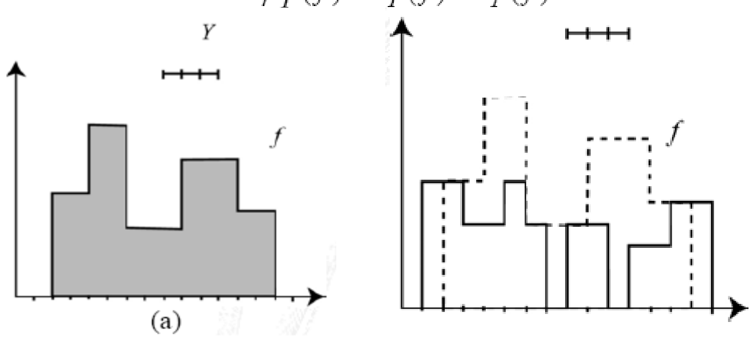
Imagen filtrada

## 4.2.6 Filtros morfológicos

### c) Gradiente Simétrico

- El gradiente simétrico se define como una diferencia entre la dilatación y la erosión de una imagen por un elemento estructurante *Y*.

$$\rho_Y(f) = \delta_Y(f) - \varepsilon_Y(f)$$



**4.2.6 Filtros morfológicos**

## Ejemplo del Gradiente Simétrico

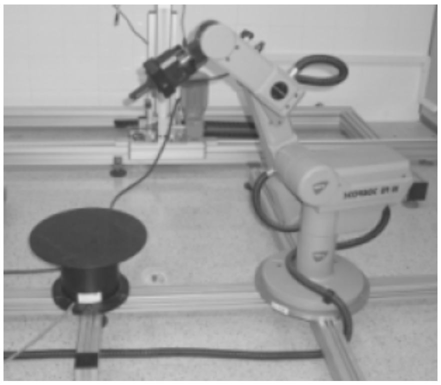


Imagen original

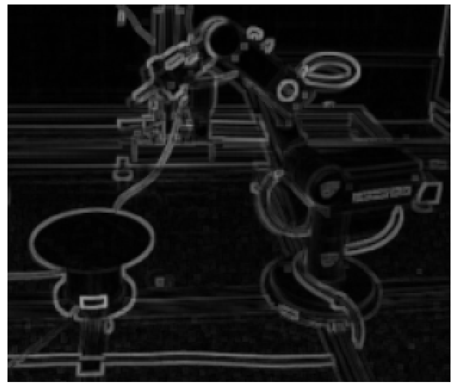


Imagen filtrada

**4.2.7 Transformada Watershed**

## Segmentación por Cuencas ("Watersheds")

- *La Transformada Watershed es una herramienta morfológica que permite segmentar imágenes.*
- *Esta transformada se adapta a los diferentes tipos de imágenes siendo capaz de distinguir objetos sumamente complejos que no pueden ser procesados correctamente mediante algoritmos convencionales.*
- *El éxito de la Transformada Watershed depende fundamentalmente de la existencia de marcadores unívocos para cada uno de los objetos de interés y de un gradiente que permita la adecuada aplicación de los algoritmos de inundación.*

### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") …

- La imagen **gradiente** y la **transformación sombrero de copa** son a menudo usadas en la transformación "Watershed", debido a que el criterio fundamental para la segmentación en muchas aplicaciones es la homogeneidad de los niveles de gris de los objetos presentes en la imagen.
- Cuando la segmentación es basada en la forma de los objetos, el uso de la función distancia es muy útil.

### 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") …

El **Gradiente Morfológico** de una imagen se define como:

$$G(f) = (f \oplus B)-(f \ominus B))$$

Cuando $f$ es continuamente diferenciable, este gradiente es igual al módulo del gradiente de :

$$g(f) = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

El modo más simple de aproximar este módulo, es asignándole a cada punto *x* la diferencia entre los pixeles más altos ("highest") y los más bajos ("lowest") dentro de una vecindad dada. Esto se logra mediante la diferencia entre la función de dilatación y la función de erosión.

## 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") …

- **Sombrero de Copa Blanco o White Top Hat** se define como la diferencia entre la función $f$ y su apertura morfológica:

$$\mathrm{WTH}(f) = f - \gamma(f)$$

- **Sombrero de Copa Negro o Black Top Hat** usa una clausura para detectar los rasgos negros y estrechos:

$$\mathrm{BTH}(f) = \varphi(f) - f$$

Se han de escoger diferentes tamaños y formas de ee para ser usados tanto en la apertura como en la clausura.

## 4.2.7 Transformada Watershed

Segmentación por Cuencas ("Watersheds") …

La **Función Distancia:** Sea Y un conjunto de $Z^2$. Para todo punto *y* de *Y*, se define la distancia de *d(y)* de *Y* al conjunto complementario $Y^c$ como:

$$\forall y \in Y, \quad d(y) = dist(y, Y^c)$$

donde $d(y, Y^c)$ es la distancia de $y$ al punto más cercano de $Y^c$

Puede demostrarse muy fácilmente que una sección de $i$ en el nivel $d$ está dada por:

$$X_i(d) = \{y : d(y) \geq i\} = Y \Theta B_i$$

donde $Bi$ es un disco de radio $i$.

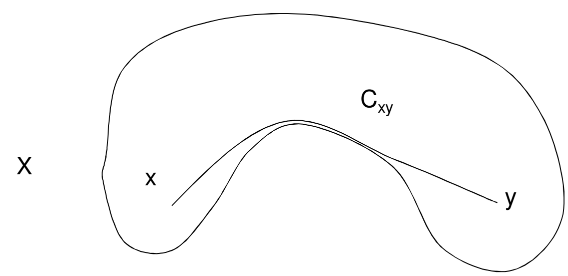
Esta función distancia es muy útil para segmentar objetos binarios.

**4.2.7 Transformada Watershed**

## Geodesia- Distancia geodésica

Hablaremos del SKIZ geodésico (**"Skeleton by Zones of Influence" - Esqueleto por zonas de influencia"**) y de la reconstrucción de un conjunto a partir de un marcador.

Sea $X \subset Z^2$ un conjunto, y $x$ y $y$ dos puntos de $X$




**4.2.7 Transformada Watershed**

Geodesia- Distancia geodésica …

Sea Y cualquier conjunto incluido en X

Nosotros podemos calcular el conjunto de todos los puntos de X que están a una distancia geodésica finita de Y mediante la expresión:

$$R_x(Y) = \{x \in X : \exists y \in Y, d_x(x, y)\, finita\}$$

Donde $R_X(Y)$ es llamado el conjunto reconstruido $f$ por el conjunto marcador $Y$, que está creado por todos los componentes conectados de $X$ que son marcados por $Y$.

.

**Links para practicar:**

http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/morops.htm