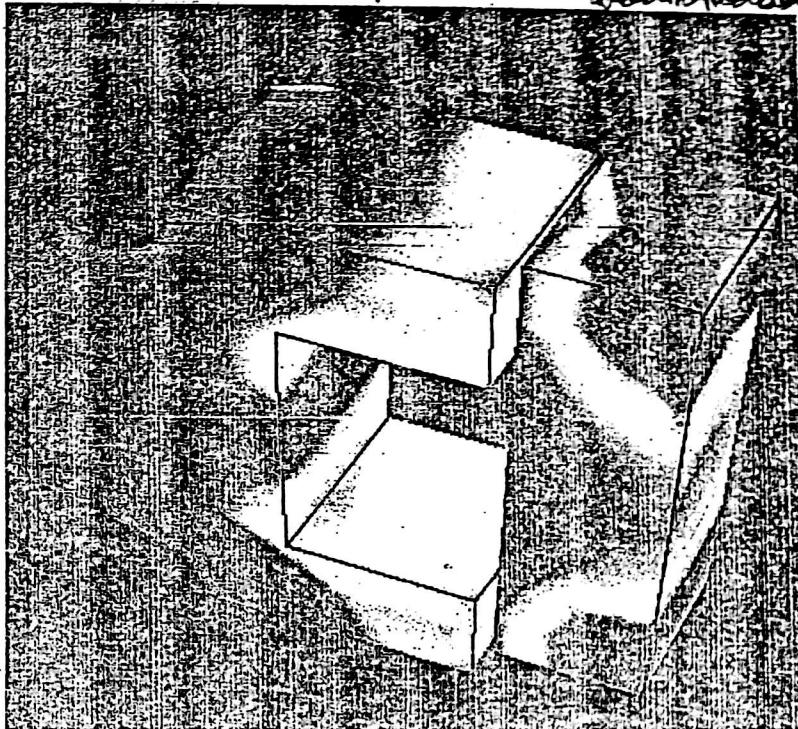


ELETROMAGNETISMO PARA ENGENHARIA: ESTÁTICA E QUASE-ESTÁTICA



EDITORIA
DA UFSC

Alysson Rodrigues

2^a edição revista



Editora UFSC

Capítulo 1

NOÇÕES MATEMÁTICAS PRELIMINARES

1.1 INTRODUÇÃO

Veremos, neste capítulo, algumas noções de cálculo que serão amplamente utilizadas nos capítulos vindouros. Assumiremos, no entanto, que operações como derivação, integração e diferenciação são conhecidas, bem como as noções elementares do cálculo vetorial.

O conteúdo deste capítulo será revisado de forma sucinta e, para tanto, selecionaremos apenas os itens de interesse direto neste trabalho. Os leitores desejosos de aprofundar os conceitos matemáticos aqui contidos poderão consultar livros dirigidos especialmente aos pontos em questão, evidenciando que aqui privilegiaremos a interpretação geométrica das noções a serem revisadas.

Veremos, com particular interesse, as noções de divergente, gradiente, rotacional e circulação, bem como os teoremas da divergência e de Stokes. Estes operadores e teoremas são de fundamental importância para a compreensão do Eletromagnetismo visto a partir das equações de Maxwell, conforme desejamos apresentá-lo neste trabalho.

1.2 O CARÁTER VETORIAL

Muitas grandezas físicas possuem um caráter vetorial, intrínseco às suas naturezas respectivas. Assim, por exemplo, a velocidade, a aceleração e a força são grandezas às quais sempre associamos as noções de direção e sentido; já outras, como a massa e o tempo, intuitivamente são dissociadas destas noções. Estas últimas são chamadas grandezas escalares.

Outro conceito importante é o de campo de vetores, ou campo vetorial. Uma força aplicada a um ponto de um corpo é um vetor pontual. No entanto, a velocidade de um gás dentro de um tubo não é um vetor definido em apenas um ponto, mas sim, em toda uma região. Neste segundo caso, estamos em presença de um campo de vetores. Este conceito será particularmente útil neste trabalho, pois a maior parte das grandezas eletromagnéticas (como campo elétrico ou magnético, por exemplo), são campos vetoriais.

1.3 DERIVAÇÃO VETORIAL

1.3.1 Notações básicas

Utilizaremos algumas convenções que serão empregadas para todo o texto que segue. São elas:

- Grandezas escalares: letra em itálico; por exemplo, t (tempo) e I (corrente);
- Grandezas vetoriais: letra em negrito; por exemplo, \mathbf{H} (campo magnético) e \mathbf{n} (vetor normal a uma superfície);
- Produto escalar: através de “.”; por exemplo, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$;
- Produto vetorial: através de “ \times ”; por exemplo $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$;

1.3.2 Operador Nabla ∇

Relembremos inicialmente que uma função escalar f , dependendo de mais de uma variável, por exemplo x , y e z , coordenadas do sistema cartesiano de eixos, é notada sob a forma

$$f(x, y, z)$$

cujas derivadas parciais, se existentes, são notadas

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$$

O operador nabla ∇ é um vetor que em coordenadas cartesianas possui os seguintes componentes:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

que será freqüentemente também escrito sob a forma

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$$

onde \mathbf{i} , \mathbf{j} e \mathbf{k} são os vetores unitários ortogonais do sistema de coordenadas retangulares ou cartesianas.

Nabla é um operador matemático ao qual, isolado, não podemos associar nenhum sentido geométrico. É na sua interação com outras grandezas que ele passará a apresentar algum sentido geométrico.

1.3.3 Gradiente, Divergente e Rotacional através de ∇

Definamos uma função escalar $U(x, y, z)$ possuindo derivadas de primeira ordem dependendo de um ponto M de coordenadas x , y e z

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

e um vetor \mathbf{A} de componentes A_x , A_y e A_z , que dependam também de x , y e z ; ∇ , sendo um vetor, poderá interagir com um vetor ou com um escalar, sob a forma mostrada no esquema abaixo:

$$\nabla \begin{cases} \mathbf{A} & \text{- produto escalar: } \nabla \cdot \mathbf{A} \text{ ou } \operatorname{div} \mathbf{A} \text{ (escalar)} \\ (\text{Vetor}) & \text{- produto vetorial: } \nabla \times \mathbf{A} \text{ ou } \operatorname{rot} \mathbf{A} \text{ (vetor)} \\ U & \text{- produto: } \nabla U \text{ ou } \operatorname{grad} U \text{ (vetor).} \\ (\text{Escalar}) & \end{cases}$$

Podemos calcular estas três expressões

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (1.2)$$

$$\operatorname{grad} U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.3)$$

1.4 GRADIENTE

Seja uma função $U(x, y, z)$ possuindo derivadas parciais $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ e

$\frac{\partial U}{\partial z}$ que depende de um ponto M de coordenadas x , y e z , notado sob a

$$\text{forma } M(x, y, z). \quad \left[\frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{\mathbf{k}} + \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} \right]$$

Podemos calcular a variação dU de U quando passamos do ponto $M(x, y, z)$ a outro infinitamente próximo $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ através da expressão do diferencial total

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \quad (1.4)$$

Definamos o vetor $d\mathbf{M} = M' - M$ que possuirá os componentes

$$d\mathbf{M} = (dx, dy, dz)$$

dU pode ser escrito sob a forma

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k})$$

ou seja:

$$dU = (\operatorname{grad} U) \cdot d\mathbf{M} \quad (1.5)$$

Quanto ao significado geométrico do gradiente, suponhamos que exista uma superfície de pontos como $M(x, y, z)$ tal que para todos estes pontos temos $U = \text{constante}$, conforme a Fig. 1.1. Portanto, para todo deslocamento de M a M' nesta superfície, teremos o acréscimo $dU = 0$.

Pela expressão (1.5) acima

$$\operatorname{grad} U \cdot d\mathbf{M} = 0$$

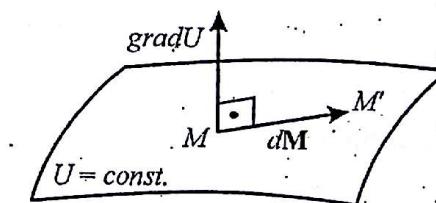


Figura 1.1 – Deslocamento de pontos no plano de U constante

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{\mathbf{i}} \right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} \right) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) \\ &= \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{\mathbf{i}} \right) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} \right) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{\mathbf{k}} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} \right) \cdot (dx \hat{\mathbf{i}} + dy \hat{\mathbf{j}} + dz \hat{\mathbf{k}}) \end{aligned}$$

Pela noção de produto escalar, nota-se que os vetores $\text{grad}U$ e dM são ortogonais, mas resta encontrar o sentido de $\text{grad}U$. Suponhamos então que o deslocamento de M a M' seja na direção dos U crescentes, conforme a Fig. 1.2, onde $U_2 > U_1$.

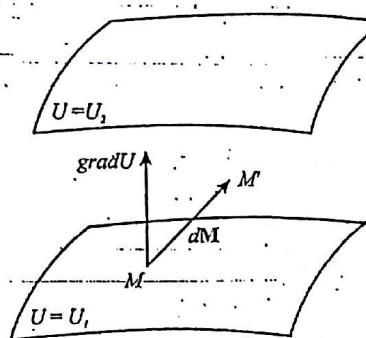


Figura 1.2 – Deslocamento na direção dos U crescentes

Neste caso, teremos $dU > 0$, ou seja, $\text{grad}U \cdot dM > 0$.

Notamos então que os vetores $\text{grad}U$ e dM formam um ângulo agudo. Poderemos então concluir que $\text{grad}U$ é um vetor perpendicular a uma superfície onde U é constante e que ele aponta para a direção dos U crescentes. Notamos também que $\text{grad}U$ aponta para a direção da máxima variação de U , pois $dU = \text{grad}U \cdot dM$ é máximo quando dM tiver a mesma direção de $\text{grad}U$, conduzindo ao produto escalar máximo (dU máximo).

1.4.1 Exemplo de gradiente

Seja a função r , distância de um ponto $M(x,y,z)$ à origem $O(0,0,0)$. Determinaremos o gradiente desta função.

As superfícies de $r = \text{constante}$ são esferas de raio r e centro em O , cuja equação é

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Calculemos então os componentes de $\text{grad}r$:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

Obtemos então:

$$\rightarrow \text{grad}r = \frac{1}{r}(xi + yj + zk)$$

cujo módulo é:

$$|\text{grad}r| = \sqrt{\frac{1}{r^2}(x^2 + y^2 + z^2)} = 1$$

Quanto à direção de $\text{grad}r$, definimos o vetor $\mathbf{OM} = M - O$, conforme a Fig. 1.3 $\mathbf{OM} = xi + yj + zk$.

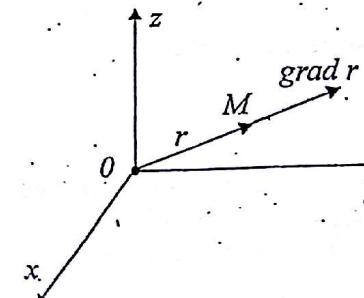


Figura 1.3 – Direção de $\text{grad}r$

Notando que $\text{grad}r = \mathbf{OM}/r$ (sendo r a distância escalar de M a O), concluímos que $\text{grad}r$ e \mathbf{OM} são vetores colineares e de mesmo sentido. Portanto, $\text{grad}r$ aponta realmente para as superfícies de r crescentes, ou seja, as esferas de raio superior a r , como enunciado formalmente acima.

18/03

1.5 DIVERGENTE

1.5.1 Definição de fluxo

Consideremos que na região de superfície ds próxima de um ponto M exista um campo vetorial \mathbf{A} , conforme visto na Fig. 1.4.

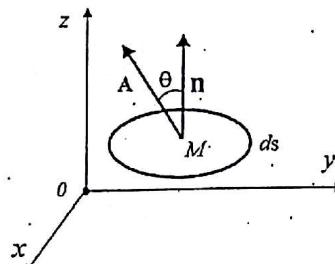


Figura 1.4 - Campo vetorial \mathbf{A} na região próxima ao ponto M

Na figura destacamos um vetor \mathbf{n} no ponto M tal que seja um vetor unitário e normal à superfície ds . Definimos então o vetor ds tal que

$$ds = ds \mathbf{n}$$

que será, portanto, perpendicular à superfície que ele define. Chamaremos “fluxo do vetor \mathbf{A} através de ds ” o produto escalar entre \mathbf{A} e ds ; sendo θ o ângulo que estes vetores formam entre si, temos

$$d\Phi = \mathbf{A} \cdot ds = A ds \cos \theta \quad (1.6)$$

Nota: se \mathbf{A} é paralelo a ds o $\cos \theta = 1$

O fluxo será máximo quando o ângulo entre \mathbf{A} e ds for nulo, ou seja, quando o campo vetorial \mathbf{A} é perpendicular à superfície ds . Inversamente, o fluxo será nulo quando \mathbf{A} for paralelo à superfície ds . Sendo ds um vetor, ele possuirá três componentes que se projetam nos planos do sistema $Oxyz$, conforme a Fig. 1.5.

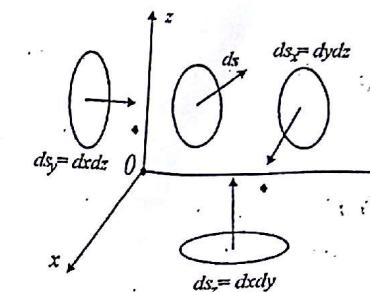


Figura 1.5 - Projeção do vetor ds nos planos do sistema $Oxyz$

Seus componentes são $ds_x = dy dz \mathbf{i}$, $ds_y = dz dx \mathbf{j}$, $ds_z = dx dy \mathbf{k}$ e sendo $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$, temos

$$d\Phi = A_x dy dz + A_y dz dx + A_z dx dy \quad (1.1)$$

Observamos que o fluxo de \mathbf{A} só pode ser definido quando o sentido de ds for definido. Sendo ds uma superfície aberta, \mathbf{n} pode ter duas orientações. No caso de uma superfície fechada, o vetor \mathbf{n} sempre aponta para fora do volume englobado pela superfície.

1.5.2 Teorema da divergência

Examinemos o caso da superfície de um paralelepípedo infinitamente pequeno cujos lados são dx , dy e dz , paralelos aos eixos do sistema cartesiano $Oxyz$, como mostrado na Fig. 1.6. A área da face inferior $PQRS$ vale $ds = dx dy$ e o vetor normal à mesma vale $\mathbf{ds} = (0, 0, -dx dy)$.

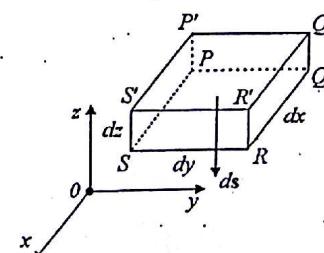


Figura 1.6 - Volume de dimensões dx , dy e dz

Observando a Eq. (1.7), o fluxo da \mathbf{A} através desta face vale

$$-A_z dx dy \quad (1.8)$$

Na face superior $P'Q'R'S'$ a expressão análoga é aplicada. Porém, a normal a esta face é positiva e o componente A_z do vetor \mathbf{A} aumentou de dA_z ; temos

$$A_z + dA_z = A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz$$

O fluxo correspondente é então

$$\left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial z} dz \right) dx dy \quad (1.9)$$

A soma dos fluxos relativos a estas duas faces é

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} dz dx dy = \frac{\partial A_z}{\partial z} dv \quad (1.10)$$

onde dv é o volume do paralelepípedo. Fazendo um raciocínio análogo para os outros dois pares de faces temos

$$d\Phi = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dv \quad (1.11)$$

Notemos também que

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

A expressão do fluxo é portanto $d\Phi = \operatorname{div} \mathbf{A} dv$. Como, por definição $d\Phi = \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$, a integração sobre toda a superfície (correspondente a todas as faces) é

$$\Phi = \iint_{S(V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv \quad (1.12)$$

A igualdade das duas integrais acima significa que o fluxo do vetor \mathbf{A} através de uma superfície fechada $S(V)$ é igual à integral do divergente de \mathbf{A} no volume V envolto pela superfície $S(V)$.

1.5.3 Fluxo conservativo

Consideremos um tubo de fluxo tal que o campo de vetores \mathbf{A} definido no volume do mesmo é tangente às superfícies ou paredes laterais do tubo, como mostrado na Fig. 1.7.

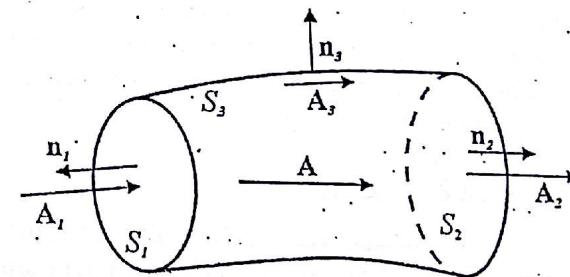


Figura 1.7 – Tubo de fluxo onde fluxo é conservativo

S_1 e S_2 são superfícies arbitrárias que seccionam o tubo de fluxo. Chamemos A_1 , A_2 , e A_3 os vetores \mathbf{A} nas três superfícies S_1 , S_2 e S_3 , respectivamente, sendo que a última representa a superfície da parede lateral do tubo. Para facilitar a apresentação suponhamos que os vetores A_1 e n_1 estão na mesma direção, bem como A_2 e n_2 (ver Fig. 1.7). Podemos então calcular os diferentes fluxos

$$d\Phi_1 = \mathbf{A}_1 \cdot d\mathbf{s}_1 = -A_1 ds_1$$

$$d\Phi_2 = \mathbf{A}_2 \cdot d\mathbf{s}_2 = A_2 ds_2$$

$$d\Phi_3 = \mathbf{A}_3 \cdot d\mathbf{s}_3 = 0$$

E o fluxo total será

$$\Phi = - \int_{S_1} A_1 \cdot ds_1 + \int_{S_2} A_2 \cdot ds_2$$

Sendo S_1 e S_2 superfícies arbitrárias, iremos aproxima-las. S_1 tenderá a S_2 ao passo que, simultaneamente, A_1 tenderá a A_2 . Notamos assim que o fluxo total da expressão acima será nulo. Isto significa que o fluxo que entra no volume Φ_1 (negativo) é idêntico em módulo ao fluxo Φ_2 (positivo) que sai do mesmo. Utilizando o teorema da divergência, obtemos

$$\Phi = \iint_{S(V)} A \cdot ds = \int_V \operatorname{div} A \, dv = 0$$

Como o volume não é nulo, em consequência, $\operatorname{div} A = 0$. Estas operações nos conduzem à noção de fluxo conservativo, ou seja, o fluxo que entra num certo volume é idêntico ao fluxo que sai do mesmo. Neste caso, o divergente do campo vetorial é sempre nulo.

1.5.4 Exemplo de divergente

Consideremos um campo vetorial A de direção radial no ponto M da Fig. 1.8, assumindo que o módulo de A é constante para uma casca esférica centrada em M .

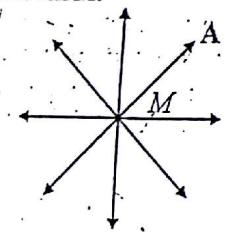


Figura 1.8 – Campo vetorial radial

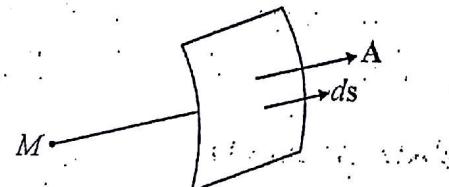


Figura 1.9 – A e ds são colineares

Calculemos o fluxo do vetor A através de uma casca esférica de raio R ; neste caso ds e A são colineares e de mesmo sentido, conforme a Fig. 1.9. Temos assim

$$\Phi = \iint_{S(V)} A \cdot ds = \iint_{S(V)} A \, ds = A \iint_{S(V)} ds = 4\pi R^2 A$$

Pelo teorema da divergência, se o fluxo de A é diferente de zero, obrigatoriamente $\operatorname{div} A \neq 0$. Avaliemos agora um outro campo vetorial A , com apenas componentes tangenciais, conforme mostrado na Fig. 1.10.

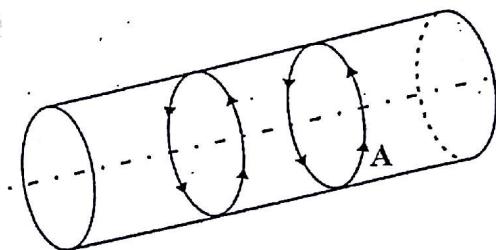


Figura 1.10 – Campo vetorial A tangencial

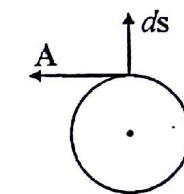


Fig. 1.11 – Vista frontal

Examinando a vista frontal do campo vetorial (ver Fig. 1.11), notamos que os vetores A e ds são perpendiculares. Em consequência, o fluxo será também nulo e, pelo teorema da divergência, temos $\operatorname{div} A = 0$.

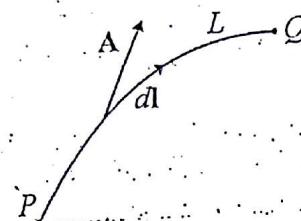
Observando esses dois campos vetoriais acima, notamos que no primeiro caso o campo é literalmente “divergente” em relação ao ponto M , pois só possui componentes radiais. Portanto, seu divergente não é nulo. No segundo, o campo vetorial nos traz unicamente uma ideia de rotação ou turbilhonamento e, portanto, não havendo divergência, seu divergente é nulo. Num exemplo mais próximo dos conteúdos a serem apresentados, sabemos que uma carga elétrica cria em torno de si um campo puramente radial. Isto significa que o divergente desse campo não é nulo.

1.6 ROTACIONAL

1.6.1 Circulação de um vetor

A circulação de um campo vetorial A ao longo de uma linha L do ponto P ao ponto Q , conforme Fig. 1.12 é dada pela integral de linha

$$C_P^Q = \int_P^Q A \cdot dl \quad (1.13)$$

Figura 1.12 - Circulação de \mathbf{A} ao longo de L

Nesta integral, dl é uma parcela elementar da linha orientada L . Pela própria noção de produto escalar, se \mathbf{A} e dl são paralelos, conforme a Fig. 1.13a, a circulação é máxima. Se \mathbf{A} e dl são perpendiculares, conforme a Fig. 1.13b, a circulação é nula.

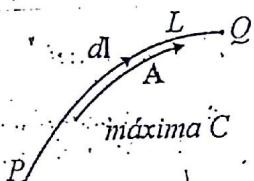
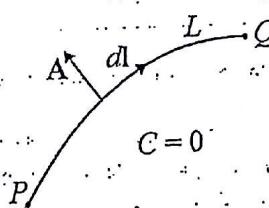
Figura 1.13a - Circ. máxima: \mathbf{A} paralelo a dl 

Figura 1.13b - Circ. nula

Pode-se entender que, no primeiro caso, \mathbf{A} “utiliza” ou “circula” pelo caminho L da mesma forma que, figurativamente, um automóvel “circula” por uma estrada. No segundo caso, o vetor não “circula” pelo caminho, ou, com o mesmo exemplo, o automóvel apenas “cruzá” a estrada.

No caso em que $\mathbf{A} = \text{grad } U$, temos

$$C_P^Q = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot dl = \int_P^Q \text{grad } U \cdot dl$$

Assumindo que dl seja $d\mathbf{M}$, em equivalência com a Eq. (1.5), temos $\text{grad } U \cdot d\mathbf{M} = dU$ e a circulação passa a ser

$$C_P^Q = \int_P^Q \text{grad } U \cdot dl = \int_P^Q dU = U_Q - U_P$$

Portanto, no caso onde $\mathbf{A} = \text{grad } U$, a circulação só depende dos pontos final Q e inicial P de L . Desta forma, se a integração é feita num caminho fechado, quando Q e P coincidem, a circulação correspondente é nula. Resta verificar se todo vetor pode ser igualado a um gradiente. Suponhamos que este possua os componentes $\partial U / \partial x$, $\partial U / \partial y$ e $\partial U / \partial z$. Podemos notar que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}$$

o que pode ser escrito como

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0$$

Isto sempre é válido para qualquer gradiente. Assim admitamos que $\mathbf{A} = \text{grad } U$ e, portanto, $A_x = \frac{\partial U}{\partial x}$, $A_y = \frac{\partial U}{\partial y}$ e $A_z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Como visto acima, temos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

Analogamente, para os índices x e y , bem como z e x , obtemos

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

Podemos notar que os três binômios acima são os componentes do $\text{rot } \mathbf{A}$, conforme a Eq. (1.2). Portanto, concluímos que se $\mathbf{A} = \text{grad } U$, obrigatoriamente $\text{rot } \mathbf{A} = 0$.

1.6.2 O teorema de Stokes

Suponhamos a existência de uma linha fechada que delimita uma superfície. Dividindo esta última em pequenas parcelas S , examinemos um

retângulo infinitamente pequeno de lados dx e dy paralelos aos eixos Ox e Oy , respectivamente, conforme mostrado na Fig. 1.14.

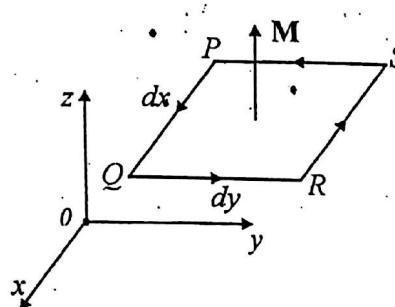


Figura 1.14 – Pequeno retângulo paralelo ao plano Oxy

Calculemos a circulação C_1 de um vetor \mathbf{A} ao longo de $L(S)$ que envolve S . Entre P e Q

$$C_1 = \int_P^Q \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q (A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}) \cdot dx \mathbf{i} = A_x dx$$

assumindo que a distância entre P e Q é dx . Para o trecho entre R e S , o vetor \mathbf{A} terá os componentes $\mathbf{A}(A_x + dA_x, A_y + dA_y, A_z + dA_z)$, onde, por exemplo

$$A_x + dA_x = A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$$

desta maneira, a circulação C_2 no caminho entre R e S , (onde $d\mathbf{l} = -dx \mathbf{i}$) é obtida como

$$C_2 = - \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \right) dx$$

A soma de C_1 e C_2 é

$$C_{1,2} = - \frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy$$

Analogamente, a soma das circulações do caminho S e P com a do caminho Q e R é

$$C_{3,4} = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy$$

A circulação sobre os quatro trechos ($C_{1,2}$ e $C_{3,4}$) será denominada C_z e totaliza

$$C_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

Notamos que o binômio da expressão acima é igual ao componente de $\text{rot } \mathbf{A}$ na direção Oz . Estendendo este cálculo para as circulações nos caminhos que são feitas em retângulos elementares paralelos a Oyz (C_x) e Ozx (C_y) chegamos a

$$C_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz \quad \text{e} \quad C_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx$$

A circulação total numa curva composta por estes três caminhos elementares é

$$C = C_x + C_y + C_z = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot ds \quad (1.14)$$

Porém a expressão acima foi obtida através do cálculo da circulação de \mathbf{A} e chegamos à igualdade

$$\boxed{L(S)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int \text{rot } \mathbf{A} \cdot ds \quad (1.15)$$

Levando-se em conta que qualquer superfície pode ser decomposta em superfícies elementares como esta utilizada acima, a igualdade obtida é válida para a globalidade geométrica do problema. Concluímos, pelo exposto, que o fluxo do rotacional de \mathbf{A} através de uma superfície aberta S é igual à circulação do vetor \mathbf{A} ao longo do caminho $L(S)$ que delimita S .

1.6.3 Exemplo de rotacional

Consideremos um campo vetorial \mathbf{A} conforme indicado na Fig. 1.15. Suponhamos que para uma distância R constante do ponto M , o módulo de \mathbf{A} seja constante, observando também que este campo de vetores só possui componentes tangenciais. Definindo uma superfície S como sendo o círculo de raio R , podemos calcular a circulação de \mathbf{A} ao longo de $L(S)$.

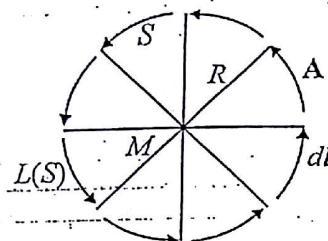


Figura 1.15 – Campo vetorial \mathbf{A} com componentes tangenciais

Como dl e \mathbf{A} são vetores colineares de mesmo sentido, temos

$$C = \oint_{L(S)} \mathbf{A} \cdot dl = \oint_{L(S)} A dl = A \oint_{L(S)} dl = 2\pi R A$$

Sendo a circulação de \mathbf{A} diferente de zero, pelo teorema de Stokes podemos concluir que, neste exemplo, o $\text{rot } \mathbf{A}$ é também diferente de zero. Cabe também notar que sendo $\text{rot } \mathbf{A}$ oriundo do produto vetorial $\nabla \times \mathbf{A}$, é necessário que \mathbf{A} e $\text{rot } \mathbf{A}$ sejam vetores perpendiculares. Com a forma adotada para o campo vetorial \mathbf{A} , o posicionamento destes vetores é o mostrado na Fig. 1.16.

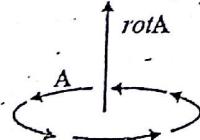


Figura 1.16 – Vetores \mathbf{A} e $\text{rot } \mathbf{A}$

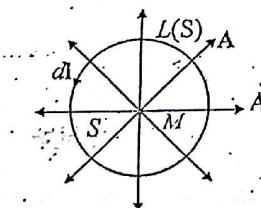


Figura 1.17 – Campo de vetores radial

Por outro lado, examinemos o exemplo do campo vetorial da Fig. 1.17 e, utilizando a mesma superfície S , observamos que

$$C = \oint_{L(S)} \mathbf{A} \cdot dl = 0$$

o resultado é zero

pois dl e \mathbf{A} são perpendiculares. Como S não é zero e esta integral é nula concluímos, pelo teorema de Stokes, que $\text{rot } \mathbf{A} = 0$.

Efetivamente, neste segundo campo vetorial, a idéia de "rotação" não existe e, portanto, o seu rotacional é zero. Por outro lado, a noção de divergência é presente, e em consonância com o que foi visto nos parágrafos acima, o divergente deste campo vetorial é diferente de zero. Novamente adiantando os conteúdos dos próximos capítulos, indicamos que o campo magnético criado por um fio infinito no espaço é puramente tangencial. Desta forma, o rotacional desse campo é diferente de zero, ao passo que seu divergente é nulo.

Resta responder a uma questão: conhecendo o rotacional (ou o divergente) de um campo vetorial estaria o mesmo totalmente definido? Para responder a esta questão, examinemos o campo vetorial \mathbf{P} da Fig. 1.18. Os vetores \mathbf{P} possuem um componente tangencial A e um componente radial B . Calculemos a circulação de \mathbf{P} ao longo da linha $L(S)$, em semelhança ao que foi feito para o campo \mathbf{A} acima (Fig. 1.15). Temos então:

Para definir um campo vetorial é necessário conhecer seu rotacional e seu divergente.

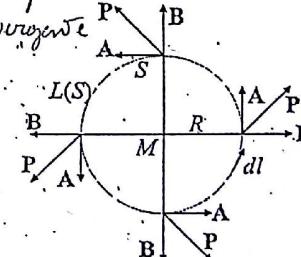


Figura 1.18 – Campo vetorial \mathbf{P} com componentes radiais e tangenciais

$$C = \oint_{L(S)} \mathbf{P} \cdot dl = \oint_{L(S)} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot dl = \oint_{L(S)} \mathbf{A} \cdot dl = \oint_{L(S)} A dl = 2\pi R A$$

pois o produto escalar entre \mathbf{B} e dl é nulo. Pelo teorema de Stokes, temos

$$\oint_{L(s)} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{P} \cdot ds = 2\pi R A = \oint_{L(s)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot ds$$

e percebemos que o $\text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{P}$. Desta forma, percebemos que dois campos vetoriais diferentes possuem o mesmo rotacional e concluímos que somente o rotacional não é suficiente para definir um campo de vetores. De fato, para tal é necessário conhecer seu divergente e rotacional. Nos exemplos acima, a Fig. 1.15 representa um campo cuja divergência é nulo, pois o mesmo não possui componentes radiais. Por outro lado, na Fig. 1.18 temos um campo vetorial que, além de ter um rotacional diferente de zero, possui uma divergência não nula, visto a existência de componentes radiais de campo.

1.7 OPERADORES DE SEGUNDA ORDEM

Podemos combinar duplamente dois operadores de primeira ordem, atuando sobre a função escalar U e sobre um campo vetorial \mathbf{A} . As combinações possíveis são:

$$\text{div grad } U \quad (1.16)$$

$$\text{rot grad } U \quad (1.17)$$

$$\text{grad div } \mathbf{A} \quad (1.18)$$

$$\text{div rot } \mathbf{A} \quad (1.19)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} \quad (1.20)$$

Notemos, por exemplo, que $\text{rot div } \mathbf{A}$, por definição, não pode existir, pois o rotacional é sempre aplicado a um vetor e o $\text{div } \mathbf{A}$ é, também por definição, um escalar. Calculemos, a título de exemplo, o $\text{div grad } U$. Temos, inicialmente

$$\text{grad } U = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k}$$

e

$$\text{div grad } U = \bar{\nabla} \cdot \text{grad } U = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot \text{grad } U$$

o que dá

$$\text{div grad } U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Definamos aqui o operador “laplaciano”, Δ como

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.21)$$

e podemos escrever

$$\text{div grad } U = \Delta U \quad (1.22)$$

O cálculo de $\text{rot grad } U$ e $\text{div rot } \mathbf{A}$ conduzem a resultados nulos, independente dos valores de U e \mathbf{A} . Finalmente as Eqs. (1.18) e (1.20) são, geralmente, utilizadas em conjunto, produzindo o seguinte resultado (que será utilizado nos próximos capítulos):

$$\bar{\Delta} \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A} \quad (1.23)$$

chamado “laplaciano vetorial” de \mathbf{A} , dado por

$$\bar{\Delta} \mathbf{A} = \Delta A_x \mathbf{i} + \Delta A_y \mathbf{j} + \Delta A_z \mathbf{k} \quad (1.24)$$

onde, por exemplo, o componente na direção Ox é:

$$\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$$

Os operadores “laplaciano” (tanto escalar como vetorial), definindo equações diferenciais parciais de segunda ordem, constituem um domínio particularmente importante da matemática e da física. Escritos sob forma física adequada, descrevem fenômenos de distribuição de campos, tanto eletromagnéticos (campos elétricos, magnéticos ou eletromagnéticos) como mecânicos (transmissão de calor, escoamento de fluidos, análise de tensões, etc..), onde a energia potencial do sistema é minimizada. Estas equações são, na maior parte de problemas reais, de difícil solução analítica e métodos numéricos (método de Elementos Finitos, Diferenças Finitas, etc...) foram estabelecidos (e continuam sendo aprimorados) para que se obtenham soluções com alto nível de precisão.

1.8 OPERADORES APLICADOS A DUAS FUNÇÕES

Vamos aqui combinar duas funções a um único operador. Novamente assinalamos que tais operações serão seguidamente utilizadas nos capítulos vindouros. Sejam U e V duas funções escalares e \mathbf{A} e \mathbf{B} dois vetores, todos dependentes de x , y e z . Pode-se mostrar que:

$$\text{grad}(UV) = U \text{ grad } V + V \text{ grad } U \quad (1.25)$$

$$\text{div}(U \mathbf{A}) = U \text{ div } \mathbf{A} + \mathbf{grad} U \cdot \mathbf{A} \quad (1.26)$$

$$\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.27)$$

$$\text{rot}(U \mathbf{A}) = U \text{ rot } \mathbf{A} + \mathbf{grad} U \times \mathbf{A} \quad (1.28)$$

1.9 REVISÃO SUCINTA DE GRANDEZAS COMPLEXAS

Em EM, a utilização de números complexos é bastante freqüente, sobretudo quando trabalhamos com grandezas em regime permanente senoidal. Nesta sucinta apresentação supomos que as noções elementares sobre números complexos seja conhecida. Inicialmente lembremos que uma grandeza complexa c é dada por sua parte real a e sua parte imaginária b , tal que $c = a + jb$, sendo $j = \sqrt{-1}$. O número c pode ser representado num plano real-imaginário onde a seria a abscissa (eixo real) e b a ordenada (eixo imaginário).

A fórmula de Euler para notação em complexo consiste na seguinte igualdade:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

onde ω é a pulsação $\omega = 2\pi f$ (em rad/s) e f (em Hz) é a freqüência. Esta relação pode ser justificada de várias formas e uma delas reside em observar o desenvolvimento das funções sob a forma de série de Taylor. Temos

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Assim, o desenvolvimento de $e^{j\omega t}$ é:

$$e^{j\omega t} = 1 + \frac{j\omega t}{1!} + \frac{(j\omega t)^2}{2!} + \frac{(j\omega t)^3}{3!} + \frac{(j\omega t)^4}{4!} + \frac{(j\omega t)^5}{5!} + \frac{(j\omega t)^6}{6!} + \frac{(j\omega t)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{j\omega t} = 1 + j \frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^2}{2!} - j \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} + j \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} - j \frac{(\omega t)^7}{7!} + \dots$$

$$e^{j\omega t} = 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \frac{(\omega t)^4}{4!} - \frac{(\omega t)^6}{6!} + \dots + j \left[\frac{\omega t}{1!} - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \frac{(\omega t)^5}{5!} - \frac{(\omega t)^7}{7!} \right] + \dots$$

que é então

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

Suponhamos que uma função harmônica $V(t)$ seja dada por

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

onde V_0 é a sua amplitude e ϕ a sua fase. Utilizando a notação de Euler vamos escrever que

$$V(t) = \text{Re}\{V e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{V_0 e^{j\phi} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{V_0 e^{j(\phi+\omega t)}\}$$

e

$$V(t) = \text{Re}\{V_0 \cos(\omega t + \phi) + j V_0 \sin(\omega t + \phi)\} = V_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Portanto, temos que V é um número complexo tal que $V = V_0 e^{j\phi}$. Nas operações envolvendo números complexos em geral omitimos o $\text{Re}\{ \}$ e escrevemos, por simplicidade, que $V(t)$ corresponde a V . Este V é chamado “fasor” e é graficamente colocado no plano complexo como um vetor que possui amplitude V_0 e com um ângulo ϕ com o eixo real (abscissas). Como exemplo, imaginemos a função

$$V(t) = 100 \cos(120\pi t + 60^\circ)$$

para a qual teríamos

$$V(t) = \operatorname{Re}\{100e^{j\pi/3}e^{j120t}\} = \operatorname{Re}\{Ve^{j120t}\}$$

e o fasor V seria então

$$V = 100e^{j\pi/3} = 100 \cos(\pi/3) + j100 \sin(\pi/3) = 50 + j86.6$$

Uma das propriedades interessantes e muito utilizada no tratamento de grandezas harmônicas é relativa à derivação temporal: $\partial V(t)/\partial t$ recai em $j\omega V$. Assumindo, por exemplo que $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t) = -\omega V_0 \sin(\omega t + \phi) = \operatorname{Re}\{j\omega V_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)]\} = \operatorname{Re}\{j\omega V_0 e^{j\phi} e^{j\omega t}\}$$

Assim, substituímos diretamente $\frac{\partial}{\partial t}$ por $j\omega$.

1.10 COORDENADAS CILÍNDRICAS E ESFÉRICAS

Temos abaixo os principais operadores aplicados à função escalar U e ao vetor \mathbf{A} em coordenadas cilíndricas, conforme a Fig. 1.19.

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}; \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (1.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.30)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}; \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \quad (1.31)$$

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.32)$$

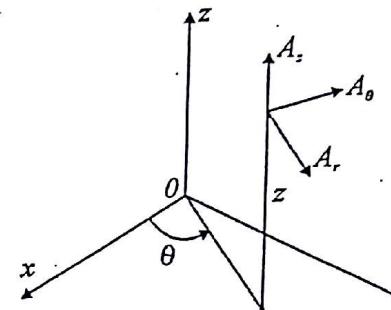


Figura 1.19 – Coordenadas cilíndricas

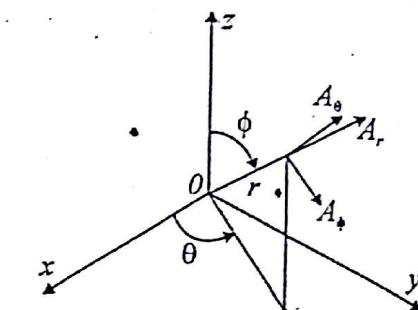


Figura 1.20 – Coordenadas esféricas

E abaixo são apresentados os operadores aplicados à função escalar U e ao vetor \mathbf{A} em coordenadas esféricas, referente à Fig. 1.20. Observa-se que em diversas obras há, em relação ao nosso texto, uma inversão entre os ângulos θ e ϕ .

$$\operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial r}; \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi}; \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) \quad (1.33)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial(\operatorname{sen} \theta A_\phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (1.34)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r \operatorname{sen} \theta} \left(\frac{\partial(\operatorname{sen} \theta A_\phi)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right); \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right); \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \right] \quad (1.35)$$

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\operatorname{sen} \theta \frac{\partial U}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \quad (1.36)$$

Estes sistemas de coordenadas, dependendo do problema a ser abordado, são seguidamente utilizados em Eletromagnetismo.

Capítulo 2

O ELETROMAGNETISMO A PARTIR DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

2.1 INTRODUÇÃO

A teoria do Eletromagnetismo (EM) clássico foi estabelecida com grandes dificuldades se comparada, por exemplo, com a Mecânica, para a qual Isaac Newton (1642-1727) formulou as leis principais. Havia duas razões para retardar o desenvolvimento do Eletromagnetismo: por um lado as grandezas são “abstratas”, invisíveis a olho nu, o que dificultava a observação das mesmas. Por outro lado, ao contrário da Mecânica, as aplicações práticas só apareceram de forma preponderante a partir do final do século XIX. Nesse momento, motores elétricos e redes urbanas foram desenvolvidos e implementados, o que selou uma nova forma de vida – pelo menos no aspecto tecnológico – para a humanidade.

Ao evocarmos que o Eletromagnetismo é baseado nas quatro equações de Maxwell estamos, involuntariamente, cometendo uma injustiça. A genialidade do físico escocês James Clerk Maxwell (1831-1879) é incontestável, porém, cabe salientar que “suas” quatro leis são baseadas em trabalhos prévios desenvolvidos principalmente por Carl Gauss (1777-1855), André Marie Ampère (1775-1836), Michel Faraday (1791-1867) e

Emil Lenz (1804-1865), entre outros. No entanto, no momento em que Maxwell iniciou seus trabalhos neste campo (1855) a teoria eletromagnética ainda não possuía total coerência. Através da introdução da noção de "corrente de deslocamento" (1862), Maxwell possibilitou, sob forma completa, o estabelecimento de um grupo de equações que sintetiza o comportamento físico das grandezas eletromagnéticas. Cabe notar que Maxwell não apresentou essas equações sob a forma que hoje são conhecidas. Oliver Heaviside (1850-1925) foi o precursor da Análise Vetorial e, interessado nos trabalhos de Maxwell, apresentou suas equações sob a consagrada forma que veremos a seguir.

As "equações de Maxwell" formam um conjunto de quatro leis que, em adição com as equações constitutivas (onde as características dos materiais estão presentes) regem fenômenos tão diversos como as ondas eletromagnéticas e o campo criado por um ímã permanente. Em outras palavras, a abrangência das equações de Maxwell é muito grande, e é interessante ressaltar que, em se conhecendo somente quatro equações e algumas relações complementares, temos em mãos uma ferramenta poderosa que possibilita a solução de inúmeros problemas. Cabe também salientar que os fenômenos físicos descritos pelas equações de Maxwell são, intrinsecamente, bastante simples, ou seja, as leis são de fácil compreensão. No entanto, as situações físicas envolvendo geometrias complexas e características de materiais podem gerar problemas de difícil solução.

Porém insistimos no grande interesse didático em apresentar o Eletromagnetismo a partir das equações de Maxwell, ao invés de descrevermos as inúmeras situações particulares que convergem as quatro equações. A maioria das obras segue o caminho inverso, talvez por tradição ou por respeitar a cronologia da descoberta das leis. Mas, sob o ponto de vista fenomenológico, partir de um núcleo simples, compacto e completo de equações nos parece um procedimento mais adequado. Desta forma, tentaremos mostrar que as inúmeras situações físicas descritas não param, em geral, de casos particulares das equações de Maxwell. Portanto, dominar as ferramentas é o ponto que julgamos didaticamente preponderante. Sabemos que é impossível memorizar situações particulares, mas é totalmente factível conhecermos poucas leis e, sobretudo, a filosofia e a lógica científica das equações de Maxwell.

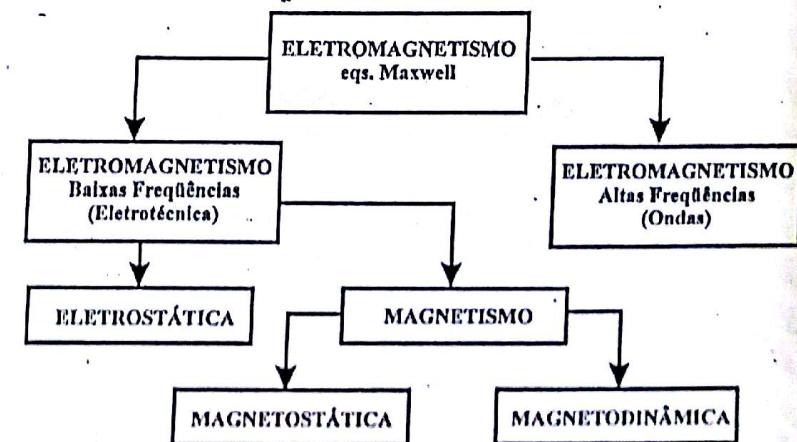
2.2 AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Como já evocado, podemos distinguir dois domínios do Eletromagnetismo, ambos inclusos nas equações de Maxwell:

- O domínio das altas freqüências, que compreende a análise e estudo de ondas eletromagnéticas e a propagação de energia pelas mesmas (freqüências superiores a algumas dezenas de kHz).

- O domínio das baixas freqüências, que compreende a maior parte dos dispositivos eletromagnéticos, como motores elétricos, relés, transformadores, disjuntores, etc... (freqüências não superiores a algumas dezenas de kHz). Nesta área, correspondente aos estados "quase-estacionários", podemos, em geral, estudar campos elétricos e magnéticos separadamente, ao contrário do outro acima citado, onde estes campos são interdependentes.

Esquematicamente, podemos dividir o Eletromagnetismo segundo o diagrama abaixo, onde cada bloco representa uma situação particular das equações de Maxwell.



2.2.1 As grandezas físicas fundamentais do Eletromagnetismo

Apresentaremos abaixo as grandezas físicas que aparecem nas equações de Maxwell. Porém, cabe ressaltar que tais grandezas existem como fenômenos naturais, como por exemplo, a massa de um corpo e o

tempo. Portanto, não há meios de explicá-las ou apresentar justificativas para as suas existências.

Essas grandezas são locais, ou seja, podem existir em todos os pontos do universo; são também, em grande maioria, campos vetoriais e não vetores isolados (como por exemplo, a velocidade de um ponto móvel). Isto terá forte-correlação com as equações de Maxwell, apresentadas logo após, também sob forma local. As grandezas eletromagnéticas são:

- O campo elétrico E
- A indução elétrica D (também chamada densidade de fluxo elétrico)
- O campo magnético H
- A indução magnética B (também chamada densidade de fluxo magnético)
- A densidade superficial de corrente J
- A densidade volumétrica de carga ρ

Definimos ainda:

- A permeabilidade magnética μ
- A permissividade elétrica ϵ
- A condutividade elétrica σ

Relembremos então o significado de cada uma dessas grandezas; no entanto, admitiremos que as noções de carga e corrente elétrica já são conhecidas.

a) O campo elétrico E

Uma carga ou um conjunto de cargas elétricas Q , sem movimento no espaço, tem a propriedade de criar, no volume que a envolve, uma grandeza chamada campo elétrico E conforme Fig. 2.1.

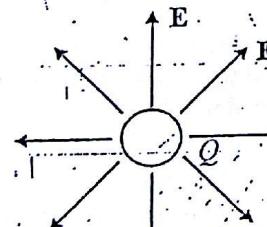


Figura 2.1 – Campo elétrico criado por carga

O campo elétrico E é um campo de vetores. A maneira com a qual podemos calcular E será vista nos próximos capítulos. Sua unidade é V/m .

b) O campo magnético H

Suponhamos que a mesma carga, ou conjunto de cargas da Fig. 2.2, ao invés de estar em repouso, possua uma velocidade de deslocamento. Neste caso, haverá a formação do campo magnético H , conforme esta figura.

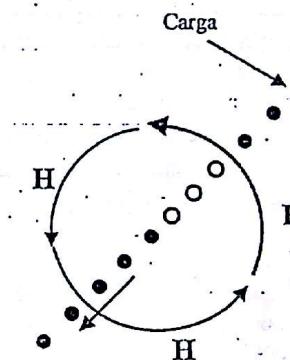


Figura 2.2 – Campo magnético criado por cargas em movimento

Um conjunto de cargas em deslocamento nos conduz à noção de corrente elétrica e esta última cria então o campo de vetores H , cuja maneira de calcular será também vista em breve. Se este movimento de cargas ocorrer em um fio condutor (como na maior parte de situações reais), o campo elétrico passa praticamente a não existir, pois os elétrons transitam entre posições vagas dos átomos que compõem o meio condutor e o somatório final de cargas é praticamente nulo.

Como veremos posteriormente, ímãs permanentes e variações de campos elétricos podem também gerar campos magnéticos. A unidade de campo magnético é A/m .

c) A indução B e a permeabilidade magnética μ

Sendo B um campo vetorial, é concebível que calculemos seu fluxo Φ através de uma superfície aberta S

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

Este fluxo Φ é chamado fluxo magnético.

A permeabilidade μ de um meio expressa intrinsecamente sua capacidade de se mostrar mais ou menos suscetível à passagem de fluxo magnético. Seria difícil introduzir estes conceitos sem utilizar a relação constitutiva

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Imaginemos dois meios geometricamente idênticos, porém possuindo permeabilidade μ_1 e μ_2 diferentes, sendo $\mu_1 > \mu_2$, conforme Fig. 2.3:

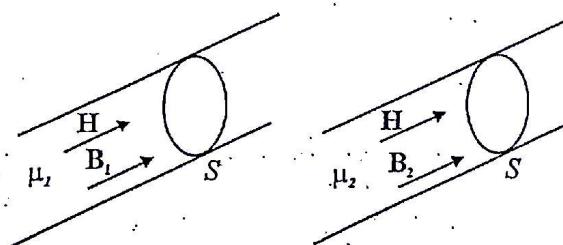


Figura 2.3 – Campos em meios de diferentes permeabilidades

Suponhamos que, por um meio externo, criemos campos H idênticos em ambos os meios, e que H seja constante em toda a seção S . Temos,

$$\mathbf{B}_1 = \mu_1 \mathbf{H} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \mu_2 \mathbf{H}$$

Os fluxos Φ_1 e Φ_2 são

$$\Phi_1 = B_1 S = \mu_1 H S \quad \text{e} \quad \Phi_2 = B_2 S = \mu_2 H S$$

onde B_1 e B_2 são os módulos de \mathbf{B}_1 e \mathbf{B}_2 perpendiculares a S .

Obtemos

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

Notamos então que quanto maior a permeabilidade do meio, maior a sua indução e maior o fluxo que poderá passar em sua seção S . Em outras palavras, B é chamado "indução" pois esta grandeza expressa a capacidade de induzir fluxo em um dado meio. Sua unidade é T (*Tesla*), enquanto o fluxo magnético é dado em Wb (*Weber*). Como no exemplo acima, a alta indução está associada à alta permeabilidade μ . Utilizando o sentido literal das expressões "indução" e "permeabilidade", podemos dizer que se um meio "induz" mais fluxo é porque ele o "permite" mais. A permeabilidade do ar é $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ *Henry/metro*. Utilizaremos freqüentemente a noção de permeabilidade relativa expressa por

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

Como exemplo, a permeabilidade relativa do ar é 1, ao passo que em certos materiais (por exemplo, chapas de Fe-Si) esta grandeza adimensional pode chegar a valores entre 10^3 e 10^6 .

d) A indução D e a permissividade elétrica ϵ

Podemos fazer um paralelismo direto entre os pares de grandezas ($D; \epsilon$) e (B, μ), vistos acima. Desta maneira, chegamos a outra relação constitutiva

$$D = \epsilon E$$

No entanto cabe salientar algumas diferenças de ordem prática. A primeira delas vem do fato de que ϵ dos diferentes meios varia relativamente pouco se comparado à permeabilidade μ . Nota-se de fato, que para os meios dielétricos mais utilizados, ϵ varia no máximo de um fator 100 ao passo que a variação de μ pode freqüentemente atingir fatores da ordem de 10^4 .

A segunda observação é que, em geral, quando resolvemos problemas práticos relativos a campos e induções elétricas, nos interessamos em particular pelo campo elétrico, ao passo que, em

magnetismo, é a indução magnética que assume o papel preponderante na análise do fenômeno.

A permissividade do ar é $\epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12}$ Farad/metro. A permissividade relativa é definida da mesma forma que a permeabilidade relativa. A indução elétrica é dada em Coulomb/metro².

e) A densidade superficial de corrente J

Imagine um fio condutor retilíneo e de seção S percorrido de forma uniforme por uma corrente I , no sentido indicado na Fig. 2.4

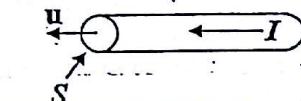


Figura 2.4 – Condutor com corrente I

Definimos um vetor unitário u perpendicular à seção S e no sentido no qual a corrente flui. A densidade superficial média de corrente atravessando a seção é dada por

$$J = \frac{I}{S}$$

(em A/m^2). Podemos definir então o vetor J como possuindo um módulo igual a J com direção e sentido dados por u , ou seja, $J = J u$. Desta maneira, o cálculo do fluxo de J através de S nos fornece I , pois

$$I = \int_S J \cdot ds$$

sendo ds uma párcele elementar de superfície. Nesta última expressão, podemos considerar que J varie na seção S .

f) A densidade volumétrica de carga ρ

É certamente uma grandeza-de-definição simples. Suponhamos que o somatório de cargas Q ocupe um volume V . Temos então que a densidade volumétrica média de carga é

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

(dada em Coulomb/metro³). Levando em conta que as cargas podem não estar distribuídas uniformemente no volume em questão, teríamos que

$$Q = \int_V \rho dv,$$

sendo dv uma quantidade elementar de volume.

g) A condutividade elétrica σ

Em geral, quando analisamos problemas de campos elétricos, podemos ter dois tipos de meios: meios dielétricos ou isolantes e meios condutores. Os isolantes são caracterizados por ϵ e por sua rigidez dielétrica (que será vista posteriormente). Os meios condutores são caracterizados por sua condutividade σ , cuja unidade é Siemens/metro. Esta última expressa a capacidade do meio de conduzir “mais” ou “menos” corrente elétrica. Apresentamos a relação abaixo,

$$J = \sigma E$$

que é a “lei de Ohm” sob forma local. Sobre esta relação, sugerimos a leitura do exemplo 2.4.1, onde ela é mostrada sob forma integral aplicada a um condutor retilíneo.

Esta lei $J = \sigma E$, bem como $B = \mu H$ e $D = \epsilon E$ são chamadas equações ou relações de “passagem” ou “constitutivas” e elas são utilizadas de forma complementar às equações de Maxwell.

2.2.2 As equações de Maxwell sob a forma local

As quatro equações de Maxwell são as seguintes:

$$\text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\text{div}B = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\text{div}D = \rho \quad (2.4)$$

A ordem em que estas equações são apresentadas é puramente arbitrária e pode diferir de texto para texto. Das mesmas, que serão analisadas a seguir, podemos deduzir uma outra. Aplicando a divergência na Eq. (2.1) temos

$$\text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \text{div}(\text{rot}H) = \text{div}J + \text{div}\frac{\partial D}{\partial t}$$

$$0 = \text{div}J + \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}D)$$

Utilizando a Eq. (2.4) temos

$$\text{div}J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

Esta equação é chamada de "equação da continuidade elétrica". Ela não introduz nenhum conceito particular, pois está inclusa na equação de Maxwell (2.1). Sobre seu significado físico, aconselhamos a leitura do Exemplo 2.4.2. Examinemos então, as equações acima.

- Equação (2.1)

A equação

$$\text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

expressa à maneira com a qual o campo magnético pode ser criado a partir da corrente de condução (ligada a J) e da variação temporal de indução elétrica (associada a $\partial D / \partial t$). Imaginemos inicialmente a situação da Fig. 2.5, onde não há indução elétrica, ou, caso esta exista, sua variação temporal é nula.

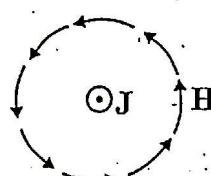


Figura 2.5 – Posicionamento entre campo magnético e densidade de corrente

A equação torna-se então $\text{rot}H = J$. Como visto no capítulo anterior, sendo H e J ligados por um rotacional, o posicionamento geométrico entre estas grandezas é como o mostrado na Fig. 2.5. O fluxo do vetor J é a corrente de condução, termo em geral preponderante em relação ao termo $\partial D / \partial t$ (no domínio das baixas freqüências), que será discutido mais em detalhe nos parágrafos seguintes.

- Equação (2.2)

A equação

$$\text{div}B = 0$$

significa, conforme o que foi visto no capítulo anterior, que o fluxo magnético é conservativo. Pode-se entender então que o fluxo magnético que entra em um volume é idêntico ao que sai do mesmo. Esta equação corresponde a uma condição que deve ser conhecida, e serve, em vários casos, como um apoio para a determinação do campo magnético. No entanto, é a Eq. (2.1) que estabelece a relação entre o campo magnético H e J permitindo, na maior parte de casos práticos, a determinação de H em função de J .

- Equação (2.3)

A equação

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

em analogia com a Eq. (2.1), mostra que uma variação temporal de indução magnética é capaz de criar um campo elétrico E . A situação geométrica entre estas grandezas é a mostrada na Fig. 2.6.

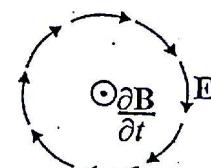


Figura 2.6 – Posicionamento entre E e variação temporal de indução magnética

Imagine que \mathbf{B} esteja aumentando no sentido que sai do plano da figura. Neste caso, devido ao sinal negativo da expressão, o campo elétrico \mathbf{E} teria a direção e o sentido mostrado na Fig. 2.6.

- Equação (2.4)

A observação da equação

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

mostra que o vetor \mathbf{D} é divergente e que seu fluxo não é conservativo. Desta maneira, podemos conceber volumes no espaço onde há uma variação entre os fluxos elétricos que entram e saem destes. Esta situação pode ser exemplificada na Fig. 2.7, onde temos uma carga elétrica centrada numa esfera que pode ser o volume através do qual há uma variação (no caso, uma criação) de fluxo.

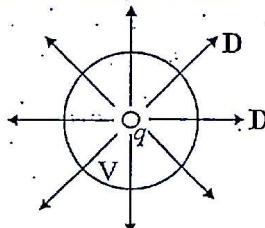


Figura 2.7 – Posicionamento entre indução elétrica e carga elétrica

Sendo \mathbf{D} e ρ ligados por um divergente, conforme o que foi visto no Cap. 1, o posicionamento geométrico entre a carga e \mathbf{D} é o mostrado na Fig. 2.7. O fluxo do vetor \mathbf{D} através da superfície que envolve o volume da esfera é diferente de zero.

As equações de Maxwell podem ser aplicadas a diversas situações particulares e para cada uma delas as características do problema devem ser adotadas de tal forma que o equacionamento resultante seja coerente com as condições do caso em questão. Sugermos aqui a leitura dos exemplos 2.4.3, 2.4.4 e 2.4.5.

2.2.3 As equações de Maxwell sob a forma integral

As equações de Maxwell sob a forma local são extremamente convenientes para que façamos manipulações matemáticas, pois elas são de

escrita compacta, e as operações envolvendo gradiente, divergente e rotacional são bem conhecidas e simples. Podemos, por exemplo, sem dificuldades, obter as equações diferenciais de segunda ordem envolvendo as grandezas eletromagnéticas. No entanto, para a resolução analítica de problemas, onde por exemplo, desejamos conhecer \mathbf{H} criado por \mathbf{J} é mais conveniente utilizar as equações de Maxwell sob a forma integral. Neste caso, é necessário que associemos estas equações a volumes ou seções nos quais devemos integrá-las.

A utilização dos teoremas da divergência e de Stokes são fundamentais para que, na resolução, não precisemos manipular diretamente com divergentes ou rotacionais.

Veremos agora as quatro equações de Maxwell sob a forma integral.

- Equação (2.1)

Utilizando a mesma numeração do parágrafo 2.2.2, temos a equação:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Definamos uma superfície S onde desejamos realizar um estudo envolvendo correntes e campos magnéticos. Chamemos $L(S)$ a linha delimitando esta superfície; aplicando a integração em S na equação acima, temos:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Aplicando o teorema de Stokes, temos:

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.6)$$

Temos então, do lado esquerdo desta equação, a circulação de campo \mathbf{H} ao longo de $L(S)$. No lado direito temos dois termos:

– O primeiro, chamado "corrente de condução" I ;

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

que representa as correntes, atravessando a seção S , em geral, através de condutores.

– O segundo, é chamado "corrente de deslocamento" Id :

$$Id = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot ds$$

Este termo pode ter duas conotações. A primeira é relativa a ondas eletromagnéticas e representa a variação do campo elétrico ($\epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$) que cria o campo magnético. A segunda, relativa a fenômenos capacitivos, será vista logo a seguir.

Como exemplo de utilização desta equação, consideremos, para um caso estático, um fio infinito percorrido por uma corrente I ; suponhamos que se deseja calcular o campo magnético criado por este fio a uma distância r do mesmo, conforme Fig. 2.8.

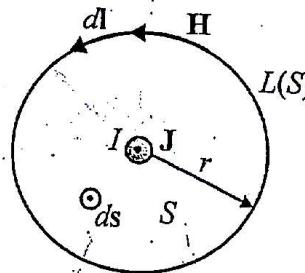


Figura 2.8 – Campo criado por um fio infinito

Nesta figura temos uma vista do fio segundo o qual a corrente I (e sua densidade superficial J) está saindo do plano da figura. Como superfície S escolhemos um círculo de raio r . Em qualquer um dos pontos da circunferência $L(S)$ podemos obter o valor do campo H .

Neste caso só temos a corrente I de condução. A equação sob a forma integral é:

$$\oint_{L(S)} H \cdot dI = \int_S J \cdot ds$$

Como H e dI são ligados por um rotacional, H é tangencial e, por uma questão de homogeneidade, podemos supor que seu módulo, para um r constante, é também constante. Como H e dI são colineares e de mesmo sentido (Fig. 2.8), temos, para o primeiro lado da equação acima

$$\oint_{L(S)} H \cdot dI = \int_{L(S)} H dl = H \int_{L(S)} dl = 2\pi r H$$

Quanto ao segundo membro da equação, podemos destacar (na superfície total S) a superfície S_f do fio onde $J \neq 0$. A integração só será diferente de zero na seção do fio e ela valerá I . Obtemos assim:

$$\oint_{L(S)} H \cdot dI = I \quad (2.7)$$

Esta equação, escrita sob esta forma, é chamada "Lei de Ampère". Neste caso particular, levando-se em conta o desenvolvimento de ambos os lados da equação, temos:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (2.8)$$

Vejamos agora um exemplo onde temos um dispositivo constituído por duas placas metálicas paralelas separadas por um material isolante, conforme Fig. 2.9a. Este tipo de dispositivo, conhecido como "capacitor" será visto mais em detalhe no próximo capítulo.

Suponhamos que em $t=0$, a chave é fechada; haverá então uma corrente I que será criada. No entanto, esta corrente não atravessará o isolante, e sua existência é relacionada com o movimento de cargas positivas e negativas para as placas.

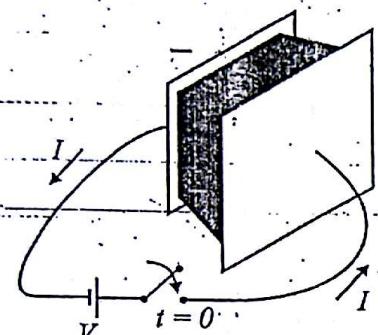
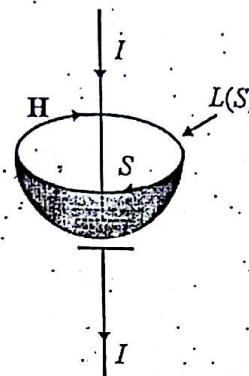


Figura 2.9a - Capacitor e fonte de tensão



2.9b - Campo H criado por I

Representemos esta situação sob a forma esquemática da Fig. 2.9b. Havendo corrente no fio, existe então o campo magnético H . Porém, nada impede que a superfície S , correspondente ao $L(S)$, passe pelo meio isolante por onde não há corrente. Neste caso, onde $J=0$, é o termo $\partial D / \partial t$ (cuja integração fornece a corrente de deslocamento) o responsável pela geração de H . Assim, o campo H é justificado pela variação temporal de indução elétrica D no dielétrico, não havendo corrente entre as placas. O termo “corrente de deslocamento” foi introduzido no século XIX pois, naquela época, o estudo do EM era seguidamente feito em analogia com a física mecânica (em particular com a mecânica de fluidos) e a derivada $\partial / \partial t$ traz, em si, a idéia de “deslocamento” material.

O termo $\partial D / \partial t$, introduzido por Maxwell, foi decisivo para fornecer suporte correto para a situação acima. Ademais, este mesmo termo é diretamente ligado ao fenômeno de ondas eletromagnéticas (ver exemplo 2.4.3) e também permite a completa interpretação da lei da “continuidade elétrica” (ver exemplo 2.4.2).

- Equação (2.2)

À equação $\text{div}B = 0$ associaremos um volume dentro do qual B é definido. Chamaremos $S(V)$ à superfície que envolve o volume V . Temos então, utilizando o teorema da divergência que:

$$\int_V \text{div}B \, dv = \oint_{S(V)} B \cdot ds = 0 \quad (2.9)$$

significando que o somatório do fluxo de B através de uma superfície fechada é nulo, ou seja, que o fluxo magnético é conservativo. Em outras palavras, o fluxo que penetra num volume é idêntico ao que sai do mesmo. Sugerimos a leitura da seção 1.5.3, onde a conservação de fluxo é mostrada num tubo de fluxo.

- Equação (2.3)

A equação $\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ é certamente a mais complexa, e veremos aqui sucintamente um exemplo que será mais detalhado no Cap. 5.

Imaginemos uma superfície S onde E e B sejam definidos e apliquemos a integração

$$\int_S \text{rot}E \cdot ds = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

Pelo teorema de Stokes obtemos

$$\oint_{L(S)} E \cdot dl = \int_S -\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

onde $L(S)$ é a linha que limita a superfície S . Vejamos a aplicação da expressão acima no exemplo relativo às Figs. 2.10a e 2.10b.

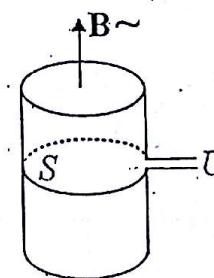
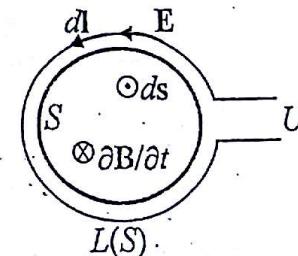


Figura 2.10a - Variação de B e campo E



2.10b - Vista superior

Consideremos a existência de um núcleo de um material magnético de tal maneira que este possua a propriedade de manter B constante em sua

seção S . No entanto, suponhamos que B é variável no tempo. Como superfície S utilizemos a própria seção deste núcleo. Uma espira de material condutor será colocada em contato com este núcleo (porém isolada eletricamente do mesmo), de tal forma que possamos considerá-la como sendo o caminho $L(S)$.

Fazendo uma analogia entre as equações $\text{rot}H = J$ e $\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ notamos que a variação de B cria um campo elétrico E na espira que será rotacional em relação à $-\frac{\partial B}{\partial t}$, da mesma forma que J cria H .

Observemos inicialmente que, assumindo como sentido de ds o mostrado na Fig. 2.10b, o sentido de dl deve ser o indicado na mesma figura. Com o sentido de $\frac{\partial B}{\partial t}$ assumido, temos

$$-\frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds > 0 \quad \text{e} \quad E \cdot dl > 0$$

mostrando a coerência do posicionamento dos vetores da Fig. 2.10b. A circulação de E ao longo de $L(S)$ nos conduz à uma força eletromotriz detectada em um voltímetro sob a forma de tensão U (este conceito será visto posteriormente). Temos então.

$$U = \oint_{L(S)} E \cdot dl \quad (2.10)$$

Vejamos o outro termo

$$-\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

Como B só depende do tempo, e não da sua posição na superfície de S temos que $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{dB}{dt}$.

Como a integração na superfície de S e a derivação no tempo são operações independentes, temos então:

$$-\int_S \frac{dB}{dt} \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds = -\frac{d\Phi}{dt}$$

igualando o resultado acima com o obtido na Eq. (2.10), obtemos a expressão

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.11)$$

que é conhecida como "lei de Faraday", pois foi Faraday que inicialmente evidenciou este fenômeno, segundo o qual "uma variação de fluxo cria uma força eletromotriz na espira envolvendo a seção através da qual este fluxo variou".

Notamos que a lei de Faraday corresponde a uma das equações de Maxwell. Veremos no Cap. 5 que a "lei de Lenz" é também contemplada por esta mesma equação.

- Equação (2.4)

À Eq. (2.4) $\text{div}D = \rho$ associaremos um volume V , envolvido por uma superfície $S(V)$. Suponhamos que o campo de vetores D seja definido em V e que existam cargas no interior deste volume. Temos assim

$$\int_V \text{div}D dv = \int_V \rho dv$$

Utilizando o teorema da divergência obtemos

$$\oint_{S(V)} D \cdot ds = \int_V \rho dv$$

Chamando Q a carga total contida no volume

$$Q = \int_V \rho dv$$

chegamos a

$$\oint_{S(V)} D \cdot ds = Q \quad (2.12)$$

Esta expressão significa que o fluxo do vetor D através de uma superfície que envolve um volume é igual à carga contida neste volume. Esta equação acima é o "teorema de Gauss".

Como exemplo de utilização desta equação, vejamos o caso de uma carga pontual no espaço, conforme a Fig. 2.11a.

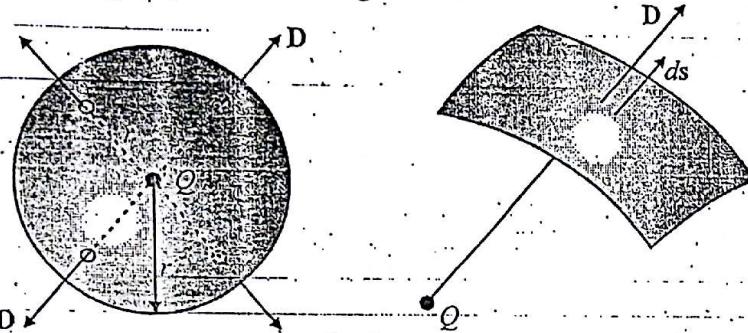


Figura 2.11a - Indução elétrica criada por carga

2.11b - Posição dos vetores

O volume V será a esfera de raio r . Sendo D e ρ ligados por um divergente, D será um vetor radial em relação à carga Q ; sendo ds um vetor também radial, conforme Fig. 2.11b, temos:

$$\int_{S(V)} D \cdot ds = \int_{S(V)} D ds = D \int_{S(V)} ds = 4\pi r^2 D$$

pois o módulo de D é idêntico em qualquer ponto de $S(V)$ e portanto independe de $S(V)$. Admitindo que estejamos no vácuo ($D = \epsilon_0 E$), e igualando os dois resultados, obtemos:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (2.13)$$

2.3 A APROXIMAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

No início deste capítulo, colocamos que as equações de Maxwell podem, em geral, ser aplicadas a dois domínios distintos do Eletromagnetismo, ou seja, à Estática (e à Quase-Estática) e campos de alta freqüência (associado às ondas eletromagnéticas).

Procuraremos mostrar abaixo que, em baixas freqüências, os campos elétricos e magnéticos podem ser estudados em geral de forma independente. As equações de Maxwell sob forma completa são:

$$\text{rot}H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\text{div}B = 0$$

$$\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\text{div}D = \rho$$

e com as relações constitutivas

$$B = \mu H \quad (2.14)$$

$$D = \epsilon E \quad (2.15)$$

$$J = \sigma E \quad (2.16)$$

formam um sistema fechado de equações que deve ser resolvido de forma simultânea. No entanto, para que possamos fazer uma simplificação das equações de Maxwell, é necessário que entendamos de forma clara a associação entre as mesmas. Para tal, examinemos o sistema físico da Fig. 2.12.

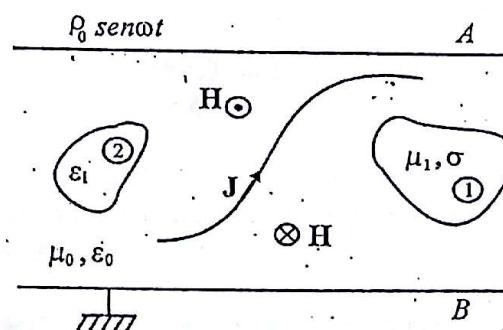


Figura 2.12 – Diferentes meios para análise de inter-relação entre equações

Admitamos que neste domínio temos um conjunto de materiais formado por ar (ϵ_0, μ_0), por um dielétrico (ϵ_1), por um material magnético condutor (σ e μ_1). Num fio elétrico flui uma corrente definida por sua

densidade superficial J . Nos limites superior e inferior do domínio temos duas placas condutoras sendo que na superior a densidade de carga elétrica varia senoidalmente entre $-\rho_0$ e ρ_0 ; a placa inferior está aterrada. Esta variação temporal de cargas pode ser assimilada como uma variação do potencial (conceito que veremos em detalhe mais adiante) entre as placas (com $V_0 \text{sen} \omega t$, em Volts). Definido este conjunto, podemos observar as seguintes relações (sem que as mesmas sejam exaustivas) entre as grandezas e equações:

a) J cria H através da relação $\text{rot}H = J$ (veremos logo a seguir o termo $\partial D / \partial t$);

b) B é determinado no material 1 através da relação $B = \mu H$, obedecendo a condição de fluxo conservativo por $\text{div}B = 0$ (conexão entre as Eqs. (2.1) e (2.2));

c) supondo que J seja variável no tempo (corrente senoidal, por exemplo) teremos a criação de E no material 1 (bem como em todo o domínio) através de $\text{rot}E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, pois $\frac{\partial B}{\partial t}$ não é nulo (conexão entre as Eqs. (2.2) e (2.3));

d) sendo 1 um material condutor ($\sigma \neq 0$) haverá criação de densidade de corrente induzida $J_i = \sigma E$;

e) J_i em conjunção com J do fio será responsável pela criação do campo magnético H_m (modificado) levando em conta as duas fontes de corrente através de $\text{rot}H_m = J + J_i$ (conexão entre as Eqs. (2.3) e (2.1));

Observemos agora a variação de carga entre as duas placas condutoras.

f) As cargas criam uma indução elétrica D através de $\text{div}D = \rho$;

g) Se ρ é variável no tempo, D também o será, e teremos $\partial D / \partial t \neq 0$. Este termo (densidade de corrente de deslocamento) irá novamente

modificar o campo magnético para $H_m = J + J_i + \partial D / \partial t$ (conexão entre as Eqs. (2.1) e (2.4));

h) Finalmente, no interior do material (2) teremos o campo elétrico E determinado por duas parcelas: $E = D / \epsilon$, sendo que D foi obtido pela Eq. (2.4) conforme ponto "f" acima e outro E oriundo da variação temporal de B conforme ponto "c".

Este conjunto de relações mostra que o sistema é interdependente e que as equações não podem ser solucionadas, teoricamente, de forma isolada.

Para proceder, de maneira formal, a separação ou a aproximação deste grupo de equações em duas partes, efetuaremos abaixo um raciocínio baseado nas três "desigualdades" que definem o domínio da Eletrotécnica, ou da "quase-estática".

1) Consideraremos um sistema físico representado pela grandeza $G(r, t)$, dependente do tempo t e de sua posição no espaço r . Sua derivada temporal é $\partial G / \partial t$ e suas derivadas espaciais $\partial G / \partial x$, $\partial G / \partial y$ e $\partial G / \partial z$ serão designadas por ∇G . A aproximação da "quase estática" é expressa por

$$\left| \frac{1}{c} \frac{\partial G}{\partial t} \right| \ll |\nabla G|$$

para praticamente todos os pontos do domínio; c é a velocidade da luz. Em caso de baixas freqüências, o comprimento de onda gerado no sistema é muito maior que as dimensões do mesmo, e portanto essas ondas não têm influência sobre o sistema que "pulsa" em fase. No entanto as derivadas parciais espaciais podem ser muito intensas. Imaginemos, por exemplo, um estreito entresferro de uma máquina elétrica onde os campos são fortes (bem como as suas variações espaciais) para dimensões pequenas. Este conjunto cria altos valores de ∇G .

2) A velocidade v dos materiais é muito inferior à velocidade da luz c , ou seja, as partes móveis da estrutura não se descolam na velocidade da luz, o que teria implicações relativistas.

3) A densidade volumétrica de energia de campos magnéticos é preponderante quando comparada à de campos elétricos. Utilizando as expressões correspondentes (que serão discutidas posteriormente), temos:

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \ll \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} \quad \therefore \quad \mu_0 \epsilon_0 E^2 \ll B^2$$

Observando que $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$:

$$|B| \gg \frac{1}{c} |E|$$

o que é também válido para suas derivadas espaciais ($|\nabla E| \ll c |\nabla B|$). Notemos também que para diferentes materiais (com ϵ e μ) obtemos a velocidade da luz modificada $c' = 1/\sqrt{\epsilon \mu}$, porém isto não invalidará a análise aqui feita.

Este conjunto de desigualdades é compatível com praticamente todas as situações de baixas freqüências. Para situações particulares, uma análise apropriada deve ser efetuada.

Examinemos então o termo $\partial D / \partial t$ utilizando as considerações acima:

$$\left| \frac{\partial D}{\partial t} \right| \equiv \epsilon_0 \left| \frac{\partial E}{\partial t} \right| \ll \epsilon_0 c |\nabla E| \ll \epsilon_0 c^2 |\nabla B| \equiv \epsilon_0 c^2 \mu_0 |\nabla H| = |\nabla H|$$

portanto

$$\left| \frac{\partial D}{\partial t} \right| \ll | \nabla H |$$

O resultado acima conduz à aproximação expressa por

$$-\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.17)$$

Adicionalmente, podemos calcular ordem de grandeza do termo $\partial D / \partial t$ numa situação de "quase-estática" e compará-la com \mathbf{J} . Imaginemos

um campo elétrico intenso $E = 10^5 \text{ V/m}$ e uma freqüência senoidal igual a 10^5 Hz no ar. Teremos

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 E_0 \sin \omega t) = \epsilon_0 \omega E_0 \cos \omega t$$

o que fornece uma amplitude próxima de 10^{-4} A/mm^2 , valor muito inferior a 1 A/mm^2 , usual em dispositivos elétricos. Portanto fica claro que, em baixas freqüências, o termo $|\partial D / \partial t|$ é desprezível em relação à $|\mathbf{J}|$, excetuando situações particulares que exigem estudos direcionados.

Ao desprezarmos o termo $\partial D / \partial t$ da primeira equação, estamos suprimindo a conexão entre as Eqs. (2.1) e (2.4). Poder-se-ia pensar que ainda existe uma conexão entre as Eqs. (2.3) e (2.4) pois uma é relativa a \mathbf{E} ($\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$) e a outra a \mathbf{D} ($\text{div} \mathbf{D} = \rho$), lembrando a relação $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. No entanto, \mathbf{E} é oriundo de uma variação temporal de \mathbf{B} na Eq. (2.3) o que é um fenômeno de origem magnética, ao passo que \mathbf{D} , em (2.4), é devido à densidade de cargas estáticas ρ , um caso eletrostático.

Podemos então definir dois sistemas de equações independentes, sendo que o primeiro:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.18)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.20)$$

e as relações constitutivas

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.22)$$

têm a propriedade de tratar os problemas de magnetismo. Se não houver variação temporal de grandezas ($\partial \mathbf{B} / \partial t = 0$) estaremos em presença da magnetostática, um caso particular.

O segundo grupo de equações consiste de

com

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.23)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (2.24)$$

e é relativo à eletrostática.

Para uma maior generalidade, seria necessário introduzir ainda o conceito de anisotropia nas características de permeabilidade, permissividade e condutividade dos materiais. Para este efeito, sugerimos a leitura do Exemplo 2.4.5. Por simplicidade, ao longo deste trabalho, consideraremos que os meios são isotrópicos.

2.4 EXEMPLOS

2.4.1 A lei de Ohm aplicada a um condutor retilíneo

No caso de um condutor retilíneo de comprimento l e seção uniforme S , conforme a Fig. 2.13, a lei de Ohm local $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ assumirá uma outra forma, como veremos abaixo.

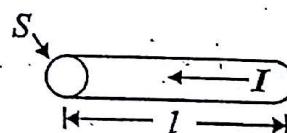


Figura 2.13 – Condutor retilíneo com seção constante

Temos que $J = \frac{I}{S}$ e adiantemos que o campo elétrico é, neste caso $E = \frac{V}{l}$, sendo aqui V a tensão entre os limites desta parcela de condutor. Substituindo estas duas igualdades na equação $J = \sigma E$, teremos

$$V = \frac{II}{\sigma S}$$

onde $I/\sigma S$ é a resistência R do fio; temos então $V = RI$, que é a "lei de Ohm" sob sua forma mais conhecida.

A diferença entre as duas formas de expressar a lei de Ohm é que a primeira $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ é chamada "forma local" pois ela é válida em qualquer ponto do espaço. No entanto, sob a forma $V = RI$, foi necessário que introduzíssemos a noção de dimensão (S e I) colocando esta lei sob forma dita "integral".

2.4.2 A equação da "continuidade elétrica"

A equação da "continuidade elétrica", vista no parágrafo 2.2.2, é

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ρ = 50

Já foi visto que, em geral, $\partial \rho / \partial t$ é nulo, e obtemos então $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$. Isto significa que o fluxo do vetor \mathbf{J} , ou seja, a corrente de condução é conservativa. Em outras palavras, a corrente que entra em um certo volume é a mesma que sai do mesmo. De fato, praticamente em todos os dispositivos eletromagnéticos a corrente que é injetada é igual a corrente que sai do mesmo. Como exemplo, bem sabemos que qualquer aparelho eletrodoméstico é conectado à rede elétrica através de "tomadas" elétricas que possuem dois terminais. Por um dos fios a corrente está entrando, ao passo que no outro a corrente está, simultaneamente, saindo. Assim, em qualquer volume que imaginemos envolvendo o aparelho. Teremos somente pelos fios os fluxos de \mathbf{J} (ou seja, I) que somados resultam num valor nulo (corrente entrando é negativa e saindo é positiva). Isto representa a conservação ou "continuidade" da corrente elétrica.

Se isto não ocorrer será porque uma certa quantidade de cargas está sendo acumulada ou extraída do dispositivo. Vejamos o exemplo da Fig. 2.14.

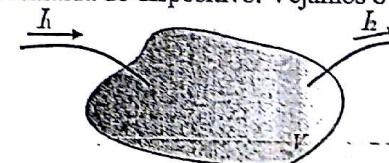


Figura 2.14 – Correntes entrando e saindo de um volume

Supondo que $I_2 < I_1$ (ou seja, a corrente que entra é maior do que a que sai), está havendo um acúmulo de cargas no volume V . Logo está havendo uma variação $\partial\rho/\partial t \neq 0$ neste volume. O sinal negativo da expressão

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

significa que o somatório do fluxo de \mathbf{J} , sendo negativo ($I_2 < I_1$) implicaria num aumento da densidade volumétrica de cargas ρ com o tempo. De fato, aplicando uma integração de volume e utilizando o teorema da divergência temos:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dv = \oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv$$

$$-I_1 + I_2 = -\frac{dQ}{dt}$$

Neste exemplo, o primeiro termo é, portanto, negativo, o que nos dá um $dQ/dt > 0$, ou seja, um aumento de cargas no volume com o tempo.

2.4.3 As equações de Maxwell no vácuo

No vácuo, não havendo matéria, não há suporte físico para correntes e cargas. Temos assim que $\mathbf{J} = 0$ e $\rho = 0$. Temos também que $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. As equações de Maxwell apresentam-se então sob a seguinte forma:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$$

Levando em consideração que a permeabilidade e a permissividade são constantes, as equações assumem a forma abaixo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$$

Notamos então que os fluxos de \mathbf{H} e de \mathbf{E} são conservativos. No domínio de altas freqüências, e em particular para ondas eletromagnéticas, verifica-se que a variação temporal de campo elétrico é responsável pela geração de \mathbf{H} ; inversamente a variação de \mathbf{H} gera \mathbf{E} . O termo $\partial \mathbf{D}/\partial t$, proposto por Maxwell, fez prever a existência do fenômeno de ondas eletromagnéticas, o que foi realizado posteriormente por H. Hertz (1857-1894) em 1888, após a morte de Maxwell.

Adicionalmente, podemos deduzir as equações de ondas em regime senoidal onde apenas uma variável, \mathbf{E} ou \mathbf{H} , é presente. Vejamos a equação relativa a \mathbf{H} e, para tal apliquemos rot na equação acima.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

No termo do lado esquerdo, aplicamos a igualdade vetorial da Eq. (1.23), ou seja,

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}$$

Tendo em vista que $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, temos $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\Delta \mathbf{H}$. Quanto ao termo do lado direito, temos:

$$\epsilon_0 \operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu_0 \mathbf{H} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Igualando os termos obtemos:

$$\Delta \mathbf{H} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}$$

Finalmente, observando que $\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$ (c é a velocidade da luz) e que a derivada segunda do tempo em regime senoidal pode ser substituída por $-\omega^2 = (j\omega)(j\omega)$, obtemos a equação

$$\Delta H + \frac{\omega^2}{c^2} H = 0$$

De maneira análoga podemos também obter a equação equivalente para E , ou seja,

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0$$

A solução dessas equações fornecerá o comportamento geométrico e temporal dos campos eletromagnéticos. Como no vácuo não temos as fontes físicas de campo (correntes, cargas ou materiais carregados), o campo eletromagnético será gerado por condições de contorno impostas no domínio de estudo.

2.4.4 As equações de Maxwell em meios com ϵ_0 e μ_0

Neste caso, J e ρ podem ser não nulas, porém $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. As equações assumem então a forma abaixo:

$$\text{rot}H = J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\text{div}H = 0$$

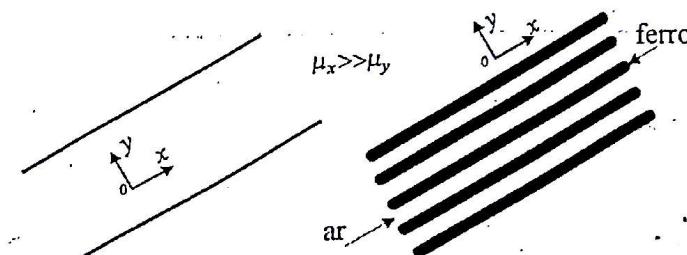
$$\text{rot}E = -\mu_0 \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\text{div}E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

2.4.5 As equações aplicadas a meios anisotrópicos quaisquer

É possível imaginar a aplicação das equações de Maxwell em várias situações e combinações de diferentes meios. É praticamente impossível que descrevamos todas as situações possíveis.

Procuraremos apresentá-las para uma situação relativamente abrangente. Para tanto, é necessário introduzir o conceito de anisotropia magnética. Suponhamos que existam meios cuja permeabilidade magnética seja prepondeante em uma certa direção. Imaginemos uma chapa de ferro com grãos orientados, ou mesmo um empilhamento de chapas para formação de, por exemplo, um núcleo de transformador, conforme a Fig 2.15.



- Figura 2.15 – Meios anisotrópicos

É concebível que em ambos os casos o fluxo magnético fluia com mais facilidade no sentido Ox . No primeiro caso isto é devido à orientação de grãos e no segundo devido à presença de micro entrefeiras entre as chapas. Imaginemos então a existência de um campo H tal que seus componentes H_x e H_y sejam iguais à H . Sendo μ_x e μ_y as permeabilidades nas direções Ox e Oy , temos

$$B_x = \mu_x H \quad \text{e} \quad B_y = \mu_y H$$

Notamos que B_x será maior que B_y . Portanto, haverá uma defasagem angular entre H e B . Se $H_x = H_y$, H formará um ângulo de 45° com Ox ; no entanto, B formará um ângulo diferente de 45° pois B_x e B_y são diferentes. Concluímos que a relação

$$B = \bar{\mu} H$$

onde $\bar{\mu}$ é um escalar não é geral, pois não satisfaz o caso acima. Vamos então introduzir o conceito de "tensor de permeabilidade" que será notado

sob a forma $\|\mu\|$. Relembremos antes que, em álgebra matricial, um vetor, por exemplo B , é expresso sob a forma de uma matriz-coluna como abaixo:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}$$

O tensor $\|\mu\|$ será a matriz quadrada seguinte:

$$\|\mu\| = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}$$

A expressão geral $\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H}$ é, matricialmente,

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

Assim, efetuando as operações matriciais convenientes, teremos

$$B_x = \mu_x H_x, \quad B_y = \mu_y H_y, \quad B_z = \mu_z H_z$$

Observemos que se o material é isotrópico, ou seja $\mu_x = \mu_y = \mu_z = \mu$, a equação $\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H}$ assume a forma particular $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Neste caso, os termos não diagonais de $\|\mu\|$ são nulos, pois supomos que não havia interdependência de variáveis. Assim, no exemplo acima, B_x só depende de H_x . No entanto, poderíamos ter relações mais complexas como

$$B_x = \mu_x H_x + \mu_{xy} H_y + \mu_{xz} H_z$$

e no tensor $\|\mu\|$ não haveria termos nulos.

Além do conceito de anisotropia, que torna complexo o estudo de materiais magnéticos, temos um outro fenômeno freqüente na maior parte de dispositivos eletromagnéticos segundo o qual a permeabilidade μ não é constante, pois depende do próprio valor de \mathbf{H} existente no material magnético em questão. Este fenômeno é chamado "saturação" e faz com que a relação geral de passagem entre \mathbf{B} e \mathbf{H} passe a ser

$$\mathbf{B} = \|\mu(H)\| \mathbf{H}$$

O conceito de anisotropia pode ser estendido à permissividade elétrica ϵ , de maneira análoga, temos

$$\mathbf{D} = \|\epsilon\| \mathbf{E}$$

onde o fenômeno de saturação é geralmente desprezível. Este mesmo conceito também pode ser aplicado à condutividade σ , e a outra relação de passagem torna-se

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E}$$

As equações de Maxwell e suas relações complementares para meios quaisquer são:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{B} = \|\mu(H)\| \mathbf{H}$$

$$\mathbf{D} = \|\epsilon\| \mathbf{E}$$

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E}$$

Sob esta forma, temos as equações expressas de maneira mais geral.

2.4.6 O potencial escalar elétrico

O uso de potenciais é muito freqüente e conveniente na resolução de problemas de campos. O potencial escalar elétrico (que será visto com mais detalhes no próximo capítulo) possibilita a determinação de campos elétricos em problemas estáticos. Observe-se que o potencial escalar, por sua própria natureza, possui um único valor para cada ponto no espaço (uma vez especificadas as condições de contorno), ao passo que o campo, sendo um vetor, possui três. Assim, definiremos V tal que

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.25)$$

que, para problemas estáticos, é coerente com

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

pois, $\text{rot}(\nabla V) = 0$. Aplicando esta definição acima na equação $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ para meios dielétricos temos

$$\text{div} \epsilon \mathbf{E} = \text{div} \epsilon (-\nabla V) = \rho$$

o que em 2D conduz a

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = -\rho \quad (2.26)$$

A solução desta equação (equação de Poisson) fornece a distribuição de V no espaço e, em consequência \mathbf{E} , pela relação $\mathbf{E} = -\nabla V$.

A mesma definição de \mathbf{E} pode ser também aplicada na equação de continuidade elétrica $\text{div} \mathbf{J} = 0$, em casos estáticos. Observando-se que em meios condutores temos $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, temos

$$\text{div} \mathbf{J} = \text{div} \sigma \mathbf{E} = -\text{div} \sigma (\nabla V) = 0$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (2.27)$$

que é a equação de Laplace definindo a distribuição de V em meios condutores. A resolução desta equação permite a obtenção de \mathbf{E} e, através de $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, a distribuição de corrente no domínio que pode possuir um ou mais materiais condutores.

2.4.7 O potencial vetor magnético

Em problemas onde a densidade de corrente não é nula, definimos um potencial vetor \mathbf{A} tal que

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$$

Esta relação é coerente com a equação de Maxwell $\text{div} \mathbf{B} = 0$, pois $\text{div}(\text{rot} \mathbf{A})$ é nulo. Podemos então aplicar esta relação na equação

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \text{rot} \frac{1}{\mu} \text{rot} \mathbf{A} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Esta equação pode assumir diferentes formas conforme a situação física tratada, e sugerimos a solução do problema 2.14 para que obtenhamos uma formulação muito utilizada no cálculo numérico 2D.

Ademais, podemos substituir $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ na equação $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, o

que dá

$$\text{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \mathbf{A} = 0$$

ou

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

Podemos colocar que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$$

onde Φ é um potencial escalar, pois $\text{rot} \nabla \Phi$ é nulo. Desta maneira, podemos escrever que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (2.28)$$

significando que \mathbf{E} pode ser obtido por uma variação temporal de \mathbf{A} (ou seja, da indução \mathbf{B}) ou através de um potencial escalar, como visto no exemplo precedente.

2.4.8 Corrente de deslocamento no capacitor de placas planas

Embora não tenhamos abordado ainda os capacitores (isto será feito no próximo capítulo), vamos aqui calcular as correntes de condução e de deslocamento num circuito onde temos um capacitor de placas planas de seção S com distância entre placas d e tendo um dielétrico de permissividade ϵ entre as placas. O intuito aqui é aprofundar a discussão sobre a corrente de deslocamento. Este capacitor é conectado a uma fonte de voltagem senoidal $V = V_0 e^{j\omega t}$. Adiantemos aqui que sua capacidade é dada por $C = \epsilon S/d$ e calcularemos a corrente de condução estabelecida no circuito elétrico através da teoria de circuitos. Logo após, calcularemos o termo $\partial D / \partial t$ criado no dielétrico que conduz à noção de corrente de deslocamento.

Inicialmente, da teoria de circuitos para um capacitor conectado à uma fonte de voltagem num circuito com resistência nula temos, para a corrente de condução no condutor,

$$I_c = C \frac{dV}{dt} = C j \omega V_0 e^{j\omega t} = j C \omega V$$

O termo $\partial D / \partial t$ é aqui chamado J_d

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial E}{\partial t}$$

sendo $E = V/d$ temos

$$J_d = \frac{\epsilon}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \epsilon j \omega V_0 e^{j\omega t} / d = j \epsilon \omega V / d$$

integrando J_d na seção do capacitor temos

$$I_d = j \epsilon \omega V S / d$$

observando-se que $C = \epsilon S/d$, obtemos

$$I_d = j \omega C V$$

que é idêntico à I_c , o que é coerente com a situação da Fig. 2.9. Porém cabe aqui salientar que I_d tem unidade de corrente, é chamado de "corrente de deslocamento" mas não corresponde a uma corrente fisicamente atravessando o dielétrico do capacitor, pois o mesmo é considerado ideal e, portanto, isolante. I_d corresponde unicamente à variação temporal de D , que se estabelece no dielétrico do capacitor devido à variação de cargas impostas nas placas condutoras pela fonte de tensão.

2.5 EXERCÍCIOS

2.1) Demonstre que, para qualquer superfície S fechada, temos

$$\oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

2.2) Com o objetivo de observar se, em função da freqüência, um meio se comporta predominantemente como isolante ou condutor, compare os módulos de $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ e \mathbf{J} para as freqüências de 60 Hz, 1 kHz, 1 MHz e 1 GHz

para o cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon = \epsilon_0$), chumbo ($\sigma = 0.5 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon = \epsilon_0$), água do mar ($\sigma \approx 4 \text{ S/m}$, $\epsilon = 81 \epsilon_0$) e terra ($\sigma = 10^{-3} \text{ S/m}$, $\epsilon = 10 \epsilon_0$).

2.3) Estabeleça as equações de Maxwell para campos magnéticos produzidos por densidades de correntes e de cargas constantes.

2.4) Mostre que, para uma região sem fontes ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$), um campo uniforme $\mathbf{B} = B_0 \sin \omega t \mathbf{i}$ não satisfaz as equações de Maxwell.

2.5) Mostre que, em regime senoidal para regiões sem fontes ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$), as duas equações de Maxwell utilizando a divergência podem ser demonstradas a partir das duas equações envolvendo o rotacional.

2.6) Demonstre que, para um caso geral, a equação $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ não pode ser obtida a partir de $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, obrigando a sua imposição para satisfazer o fenômeno natural implicado por ela.

- 2.7) Demonstre que em regime estático, para meios homogêneos e sem cargas estáticas, podemos obter $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$ a partir da equação $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$.
- 2.8) Um isolante dielétrico possuindo baixa condutividade é colocado entre as duas placas de um capacitor de placas planas conectado a uma fonte AC. Suas características são: $\sigma = 4 \text{ S/m}$, $\epsilon = 9\epsilon_0$. A fonte de voltagem é dada por $V = 1 \cos \omega t$. Calcule a freqüência para a qual a densidade de corrente de deslocamento é igual à densidade de corrente de condução no dielétrico.
- 2.9) Um campo elétrico $\mathbf{E} = E_0 \cos \omega t \mathbf{i}$ é aplicado em um dielétrico possuindo $\epsilon_r = 25$. Se $E_0 = 100 \text{ V/m}$ e $\omega = 10^9 \text{ rad/s}$, calcule o valor de pico da densidade de corrente de deslocamento que se estabelece no dielétrico.

2.10) Calcule o valor de A e β para que os campos

$$\mathbf{E} = 120\pi \cos(10^6 \pi t - \beta x) \mathbf{j} \quad (\text{V/m})$$

$$\mathbf{H} = A\pi \cos(10^6 \pi t - \beta x) \mathbf{k} \quad (\text{A/m})$$

satisfazam as equações de Maxwell num meio linear, isotrópico e homogêneo caracterizado por $\epsilon_r = 4$, $\mu_r = 4$ e $\sigma = 0$. Considere que não há correntes nem cargas no domínio de cálculo.

2.11) A indução magnética $\mathbf{B} = B_0 e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{i}$ é imposta num material com $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e $\mu = \mu_r \mu_0$. Assuma que não existem fontes ($\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$) no material. Utilizando as equações de Maxwell, calcule o campo elétrico \mathbf{E} , o campo magnético \mathbf{H} e a indução elétrica \mathbf{D} que se estabelece no material. Obtenha este resultado de duas maneiras, fazendo o cálculo através das duas equações envolvendo o rotacional; mostre que os resultados são idênticos (observe que $\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$).

2.12) O campo elétrico $\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{i}$ é aplicado num material com $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e $\mu = \mu_r \mu_0$. Considerando $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$, calcule o campo magnético \mathbf{H} e a indução magnética \mathbf{B} no material. Utilize as duas equações de Maxwell envolvendo o rotacional, como no problema acima.

2.13) Dada a equação $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

- a) Obtenha a equação da continuidade elétrica;
 b) particularize a mesma para uma situação estática;

- c) considere um meio condutor homogêneo com condutividade σ ; demonstre que podemos definir um potencial escalar elétrico V do qual deriva o campo \mathbf{E} ;
 d) adote a hipótese de que o campo elétrico \mathbf{E} se desenvolve unicamente na direção Ox e, utilizando a lei de Ohm ($\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$), aplique o potencial V na equação da continuidade elétrica, obtendo a mesma função em função de V , particularizando-a para um meio homogêneo e unidimensional;
 e) aplicação: considere um condutor com $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, conforme a Fig.2.16.

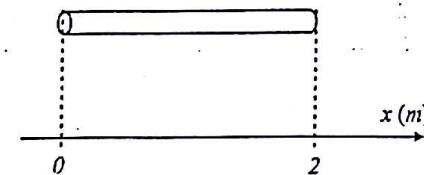


Figura 2.16

onde $V(0) = 1 \text{ Volt}$ e $V(2) = 0 \text{ Volt}$; sabendo que a seção transversal do condutor é de 2 mm^2 , ache a solução $V(x)$ e calcule a corrente fluindo no mesmo.

2.14) Entre duas placas condutoras paralelas e separadas por uma distância de $d = 10 \text{ m}$ é aplicada uma diferença de potencial $V = 2.5 \times 10^3 \sin \omega t \text{ Volts}$, com freqüência igual a 100 kHz . Neste domínio, temos somente um condutor de seção transversal de 1 mm^2 no qual flui uma corrente de 1 A . Sabendo que $|\mathbf{E}| = V/d$, demonstre que nesta situação a equação de

Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ pode ser aproximada por $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

- 2.15) a) Escreva as equações de Maxwell para problemas estacionários;
 b) mostre que a definição de um potencial vetor magnético \mathbf{A} , tal que $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$, é válida;
 c) numa situação bidimensional no plano Oxy ($B_z = 0$) admite-se que \mathbf{A} tenha somente um componente na direção Oz ($\mathbf{A} = A\mathbf{k}$); calcule então os componentes de \mathbf{B} em função de A ;
 d) suponha também que $\mathbf{J} = J\mathbf{k}$ e particularize a equação $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ em função de A .

2.16) Demonstre que desprezando a densidade de corrente de deslocamento para um meio homogêneo, linear e sem cargas, com condutividade σ e permeabilidade μ , podemos obter $\Delta E = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t}$.

2.17) Refaça os cálculos análogos e, nas mesmas condições do exercício acima, obtenha

$$\Delta H = \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

- 2.18) a) Escreva as equações de Maxwell para o caso estacionário;
 b) sob estas condições, podemos definir um potencial escalar elétrico do qual derivamos $E = -\nabla V$. Mostre que esta definição é válida;
 c) a relação constitutiva é aqui $D = \epsilon E$, onde consideramos a anisotropia de um meio dielétrico tal que

$$\|\epsilon\| = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

calcule os componentes de D em função de E e, após, em função de V ;
 d) aplique D em função de V na equação $\operatorname{div} D = \rho$ e obtenha a equação 2D de Poisson correspondente.

2.19) De forma similar ao Exemplo 2.4.6, demonstre que, em estática, podemos definir um potencial escalar magnético Ω quando $J = 0$. Obtenha a equação de Laplace correspondente para um domínio contendo meios caracterizados por suas permeabilidades μ .

2.20) Demonstre que a lei de Kirchhoff relativa a soma de correntes num nó de uma malha de circuito elétrico está diretamente relacionada com $\operatorname{div} J = 0$.

Capítulo 3

ELETROSTÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

Na parte final do capítulo precedente, foi visto que, em geral, no domínio das baixas freqüências, podem-se abordar os campos elétricos de forma independente dos campos magnéticos. Optou-se por estudar, inicialmente, os campos elétricos criados por cargas ou variações de potenciais elétricos o que, agregado de alguns conceitos complementares, constitui a Eletrostática. Suas equações básicas são duas: $\operatorname{div} D = \rho$, oriunda do grupo das quatro equações de Maxwell e $D = \epsilon E$, relação constitutiva onde a permissividade do material se faz presente.

Aparentemente, a Eletrostática é o "primo pobre" do Eletromagnetismo pois conceitualmente um só fenômeno seria associado a esta área (uma só equação de Maxwell) e, comparando-a com o magnetismo, pouca pesquisa é feita em Eletrostática. Mas seria um erro crasso considerar a Eletrostática sob este prisma, pois problemas e aplicações complexas de Engenharia estão diretamente relacionados com campos elétricos. Como veremos adiante, excesso de campo elétrico produz não somente as mais danosas consequências para equipamentos, como também pode colocar em risco a vida de seres vivos no local onde ocorre a falha. Por exemplo, uma má distribuição de campo elétrico pode ocasionar

2.16) Demonstre que desprezando a densidade de corrente de deslocamento para um meio homogêneo, linear e sem cargas, com condutividade σ e permeabilidade μ , podemos obter $\Delta E = \sigma\mu \frac{\partial E}{\partial t}$.

2.17) Refaça os cálculos análogos e, nas mesmas condições do exercício acima, obtenha

$$\Delta H = \sigma\mu \frac{\partial H}{\partial t}$$

- 2.18) a) Escreva as equações de Maxwell para o caso estacionário;
 b) sob estas condições, podemos definir um potencial escalar elétrico do qual derivamos $E = -\nabla V$. Mostre que esta definição é válida;
 c) a relação constitutiva é aqui $D = \epsilon E$, onde consideramos a anisotropia de um meio dielétrico tal que

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_y \end{bmatrix}$$

calcule os componentes de D em função de E e, após, em função de V ;
 d) aplique D em função de V na equação $\operatorname{div} D = \rho$ e obtenha a equação 2D de Poisson correspondente.

2.19) De forma similar ao Exemplo 2.4.6, demonstre que, em estática, podemos definir um potencial escalar magnético Ω quando $J = 0$. Obtenha a equação de Laplace correspondente para um domínio contendo meios caracterizados por suas permeabilidades μ .

2.20) Demonstre que a lei de Kirchhoff relativa a soma de correntes num nó de uma malha de circuito elétrico está diretamente relacionada com $\operatorname{div} J = 0$.

Capítulo 3

ELETROSTÁTICA

3.1 INTRODUÇÃO

Na parte final do capítulo precedente, foi visto que, em geral, no domínio das baixas freqüências, podem-se abordar os campos elétricos de forma independente dos campos magnéticos. Optou-se por estudar, inicialmente, os campos elétricos criados por cargas ou variações de potenciais elétricos o que, agregado de alguns conceitos complementares, constitui a Eletrostática. Suas equações básicas são duas: $\operatorname{div} D = \rho$, oriunda do grupo das quatro equações de Maxwell e $D = \epsilon E$, relação constitutiva onde a permissividade do material se faz presente.

Aparentemente, a Eletrostática é o "primo pobre" do Eletromagnetismo pois conceitualmente um só fenômeno seria associado a esta área (uma só equação de Maxwell) e, comparando-a com o magnetismo, pouca pesquisa é feita em Eletrostática. Mas seria um erro crasso considerar a Eletrostática sob este prisma, pois problemas e aplicações complexas de Engenharia estão diretamente relacionados com campos elétricos. Como veremos adiante, excesso de campo elétrico produz não somente as mais danosas consequências para equipamentos, como também pode colocar em risco a vida de seres vivos no local onde ocorre a falha. Por exemplo, uma má distribuição de campo elétrico pode ocasionar

destruição de equipamentos de potência, inviabilizando a geração e/ou distribuição de energia. Comparativamente, o campo magnético, quando mal estabelecido, geralmente não cria problemas de tal envergadura.

Dentro dos objetivos aqui traçados, procuraremos apresentar a Eletrostática de forma sucinta, basicamente focada nas aplicações em Engenharia Elétrica. Porém salientamos que existem livros, citados na seção bibliográfica, que discorrem de forma detalhada e efetiva a questão da carga e corrente elétrica que são observadas, inclusive, sob o aspecto microscópico (forças entre cargas, equilíbrios atômicos, etc.). Utilizaremos aqui a carga sobretudo como um suporte para a apresentação de conceitos importantes, como por exemplo, o potencial escalar elétrico. De fato, na grande maioria dos problemas em Engenharia Elétrica, o campo elétrico se estabelece através de uma variação do potencial elétrico. Isto nada mais é do que o acúmulo de cargas positivas e negativas em diferentes partes do domínio de estudo, mas normalmente raciocina-se em termos de "variação de voltagem" ou seja, com os potenciais.

3.2 O CASO DA CARGA ESTÁTICA

O caso da carga estática é, como dito, de interesse relativamente limitado em Engenharia Elétrica. No entanto, é utilizando-o que iremos desenvolver alguns conceitos de grande importância e utilidade.

3.2.1 O campo elétrico

Consideremos uma carga ou um conjunto de cargas estáticas q . Como visto no capítulo anterior, q terá a propriedade de criar um campo elétrico divergente no espaço que a envolve.

Vimos que a equação $\nabla \cdot D = \rho$, assume, sob a forma integral, a expressão do "Teorema de Gauss" $\int \nabla \cdot D \, dV = \int \rho \, dV$.

$$\boxed{\int_{S(V)} D \cdot dS = q} \quad (3.1)$$

onde $S(V)$ é a superfície que envolve o volume V contendo a carga q .

Escolhemos como volume V uma esfera de raio r . Admitindo que estamos no vácuo ($\epsilon = \epsilon_0$) e aplicando o teorema de Gauss acima, obtemos, como já visto anteriormente (parágrafo 2.2.6d)

$$ds = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

Grandeza, unida
 $\phi |_{0}^{\pi}, \theta |_{0}^{\pi}$

Capítulo 3 - Eletrostática

$$\oint D \cdot ds = q$$

$$\oint E_r \cdot ds = q$$

$$F_b \cdot A_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int E_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r^2 E_r \cdot (\pi) = \frac{q}{\epsilon_0}$$

É interessante conhecer também o vetor E . Definamos o vetor r como sendo $r = P - O$ como mostrado na Fig. 3.1.

O vetor unitário u na direção de r pode ser obtido por $u = \frac{r}{|r|}$. Assim E , que está ligado à noção de divergência em relação a q , poderá ser escrito sob a forma abaixo:

$$E = Eu$$

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.3)$$

O campo elétrico, na sua forma vetorial, será utilizado nos parágrafos seguintes.

3.2.2 A força sobre uma carga

Nota-se experimentalmente que a força F exercida sobre uma carga q' sob a ação de um campo elétrico E é dada pela expressão

$$F = q'E \quad (3.4)$$

Supondo que o campo E tenha sido criado por uma carga q , conforme Fig. 3.2, temos

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^3} r$$

sendo que o módulo vale

$$F = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.5)$$

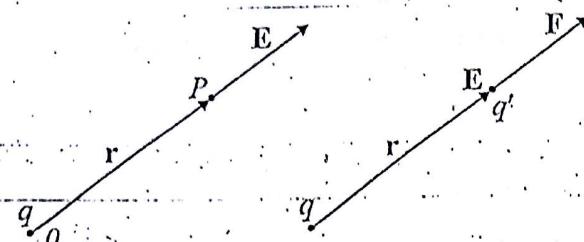


Figura 3.1 – Campo elétrico

Figura 3.2 – Força aplicada a uma carga

Esta expressão é também conhecida como “lei de Coulomb”, segundo a qual a força é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa.

3.2.3 O potencial escalar elétrico V

Conhecendo a noção de força do parágrafo anterior, podemos calcular o trabalho dW exercido por esta força através da expressão

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

sendo $d\mathbf{l}$ o deslocamento do ponto no qual temos a carga q' submetida à força \mathbf{F} . Vamos nos interessar, em particular, na quantidade de trabalho por unidade de carga q' . Abstraindo-nos assim de q' , obtemos uma expressão relacionada com o trabalho, porém com a vantagem de representar apenas a “potencialidade” da carga q em fornecer trabalho. Temos então:

$$\frac{dW}{q'} = \frac{\mathbf{F}}{q'} \cdot d\mathbf{l}$$

Definindo como potencial V o trabalho por unidade de carga, e sabendo que $\mathbf{F} = q' \mathbf{E}$ temos:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

A introdução do sinal negativo será vista logo a seguir.

Assumindo que o campo elétrico possa ser variável ao longo de um trajeto, a energia por unidade de carga para levarmos uma carga de l_1 a l_2 , pode ser expressa como:

$$V_2 - V_1 = - \int_{l_1}^{l_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

Consideraremos o exemplo da carga pontual onde, conforme a Fig. 3.3, desejamos deslocar a carga de teste q' da posição definida pelo vetor \mathbf{r}_1 à posição definida por \mathbf{r}_2 , afastando, portanto, q' de q .

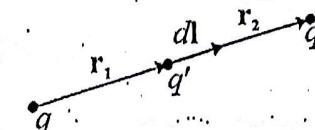


Figura 3.3 – Deslocamento de carga pontual

Chamando V_1 o potencial em \mathbf{r}_1 e V_2 o potencial em \mathbf{r}_2 temos:

$$V_2 - V_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{l}$$

escolhendo o caminho $d\mathbf{l} = dr$ temos: $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{l} = r dl = rdr$. Como resultado desta integração, temos:

$$V_2 - V_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad (3.6)$$

Notemos que o sinal negativo introduzido na expressão $dV = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ faz com que o binômio do lado direito acima seja negativo, o que também obriga a que V_2 seja menor que V_1 . Efetivamente, pelas convenções adotadas, o potencial mais próximo de q é superior ao potencial em pontos mais distantes. Assim, um campo elétrico se desenvolve do potencial maior para o menor, o que faz ser divergente em relação à carga q .

Por outro lado, notamos que o resultado da integração depende somente dos pontos inicial e final do caminho a ser percorrido. Realmente, no caso de um percurso fechado teremos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (3.7)$$

o que é fácil de ser verificado no caso da Fig. 3.4a

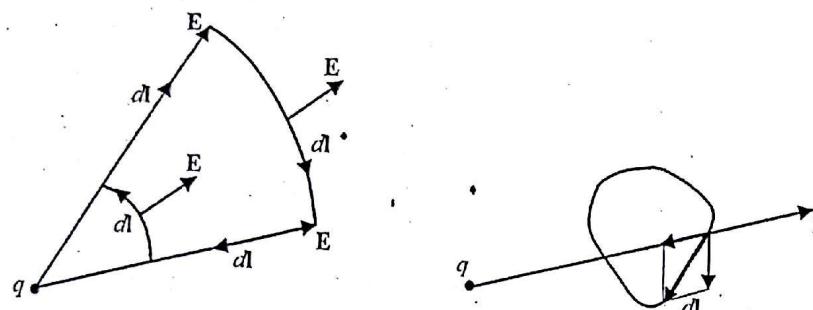


Figura 3.4a – Circ. de E num caminho fechado

3.4b – Caminho em forma qualquer

Notemos que onde \mathbf{E} é perpendicular a $d\mathbf{l}$ temos $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. No caminho radial onde $d\mathbf{l}$ e \mathbf{E} estão no mesmo sentido, temos $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} > 0$. No outro caminho radial, onde estes vetores se encontram em sentidos contrários, o resultado será idêntico em módulo, porém negativo. O mesmo ocorre para um caminho qualquer, conforme Fig. 3.4b, onde todo $d\mathbf{l}$ pode ser decomposto vetorialmente em um componente radial e outro tangencial. Esta decomposição, manipulada convenientemente no produto escalar $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$, nos fornecerá uma soma nula sempre que o caminho for fechado. Lembramos que

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

representa o trabalho por unidade de carga. No exemplo acima, quando uma carga q' é deslocada de tal forma que volte ao seu ponto inicial, notamos que o trabalho efetuado é nulo. Neste caso, podemos dizer que estamos em presença de um campo conservativo, significando que não houve variações energéticas no caso em que q' percorra um caminho fechado.

Por outro lado, podemos dizer que o campo elétrico \mathbf{E} deriva de um potencial escalar V , segundo a expressão:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.8)$$

Ao aplicarmos a circulação de ambos os lados podemos obter a expressão do potencial absoluto, como abaixo:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \nabla V \cdot d\mathbf{l} \quad (3.9)$$

Levando em conta a Eq. (1.5), ($dV = \nabla V \cdot d\mathbf{l}$), temos:

$$V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + K \quad (3.10)$$

onde K é uma constante. No caso da carga pontual q , fazendo $d\mathbf{l} = d\mathbf{r}$, obtemos:

$$V = - \int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} + K$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + K.$$

Fixando $V = 0$ para $r = \infty$, temos que a constante K é nula e

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.11)$$

É sempre necessário que se defina um valor para a constante K , pois diferentes valores de V podem criar o mesmo campo \mathbf{E} . Vejamos os exemplos das Figs. 3.5a e 3.5b

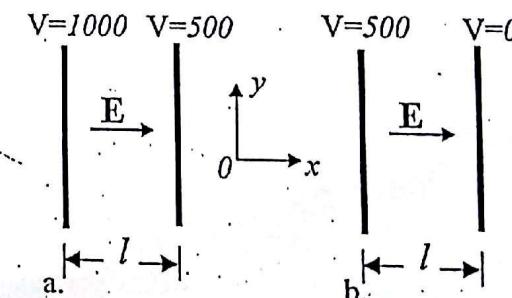


Figura 3.5 – Diferentes potenciais produzindo o mesmo campo elétrico

Admitindo que \mathbf{E} seja constante na direção Ox e que não há espraiamento nas bordas do dispositivo, temos:

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x}$$

e portanto $E_x = \Delta V/l$. Em ambos os casos temos $E_x = 500/l$. No entanto, os valores de V são diferentes. Concluímos que para que V seja completamente definido em todo o domínio é necessário que fixemos V em algum ponto deste domínio (ou seja, fixando um valor para K).

3.3-CAMPO NÃO CONSERVATIVO (fem)

Além do campo eletrostático conservativo, existe um outro tipo de campo, dito "não conservativo".

Suponhamos a existência de um laço fechado de corrente pela presença de um fio condutor de comprimento L e seção S . A lei de Ohm é

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \mathbf{J} \frac{RS}{L} \quad (3.12)$$

onde $R = L/\sigma S$ representa a resistência R do fio. Calculemos a circulação de \mathbf{E} ao longo do circuito

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = I \frac{R}{L} \oint dl = IR$$

visto que $I = JS$.

No entanto, vimos no parágrafo anterior que a circulação de \mathbf{E} , campo eletrostático conservativo, ao longo de um caminho fechado é nula. Temos, portanto, que

$$0 = IR$$

Isto significa que a corrente associada ao campo conservativo só pode ser nula. Vejamos o exemplo da Fig. 3.6. Se colocarmos um bloco de material condutor (ou o circuito filiforme acima evocado) em um campo eletrostático, haverá um movimento instantâneo de cargas no bloco, como é mostrado na Fig. 3.6 (ver exemplo 3.11.3). No entanto, este campo não é capaz de manter uma circulação de corrente.

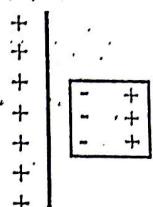


Figura 3.6 – Distribuição de cargas num material condutor entre duas placas carregadas

Para sustentar uma corrente, precisamos de uma fonte de energia, pois a corrente é um movimento permanente de elétrons no circuito. Este movimento é impedido pela resistência do circuito, e existe a dissipação de energia sob a forma de calor (efeito Joule). Esta energia deve ser originada por um campo de força elétrica não conservativa. Como exemplo, a ação química de uma bateria pode produzir uma força não conservativa através da qual os elétrons poderão circular no laço, até o momento em que a energia da bateria acabe (onde a expressão "não conservativa").

Admitamos então que o campo elétrico total \mathbf{E}_t seja a soma do campo eletrostático conservativo \mathbf{E}_c e um outro \mathbf{E}_f .

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_f$$

Utilizaremos novamente a lei de Ohm, da Eq. (3.12)

$$\mathbf{E} = \mathbf{J} \frac{RS}{L}$$

no circuito da Fig. 3.7, onde temos uma fonte de energia elétrica e onde consideraremos que toda a resistência do circuito está concentrada em R .

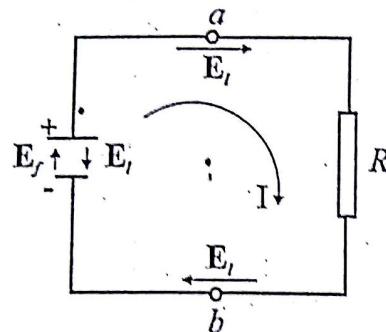


Figura 3.7 – Circuito com fonte (bateria) de campo não-conservativo

Integrando a expressão acima ao longo do circuito

$$\oint_c \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} = \oint_c \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l} + \oint_c \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = I \frac{R}{L} \oint_c d\mathbf{l} = IR$$

Sendo $\mathbf{E}_t = -\text{grad}V$, já vimos que a primeira integral é nula, o que nos leva a

$$\oint_c \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = IR$$

U tal que

$$U = \oint_c \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} \quad (3.13)$$

será chamado de força eletromotriz (*fem*) da bateria. U só existe entre os terminais da bateria e o vetor \mathbf{E}_f está indicado na Fig. 3.7. Estas grandezas U e \mathbf{E}_f são relacionadas com a ação química interna da bateria e, portanto, a integral correspondente está limitada aos limites da bateria (esquematicamente os pontos *a* e *b*) pois o restante do circuito, fio e a resistência, não podem gerar campo.

$$U = \oint_c \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{E}_f \cdot d\mathbf{l} \quad (3.14)$$

Temos então que a equação $U = RI$ só pode ser colocada em evidência após admitirmos a existência do campo elétrico não conservativo \mathbf{E}_f .

3.4 A REFRAÇÃO DO CAMPO ELÉTRICO

O campo elétrico na passagem de um meio para outro pode sofrer uma variação de direção. Este efeito, chamado "refração", é semelhante ao que ocorre em raios luminosos na passagem por meios de índice de refringência diferentes.

Suponhamos conforme a Fig. 3.8a, a existência de dois meios de permissividades elétricas diferentes: ϵ_1 no meio 1 e ϵ_2 no meio 2. Suponhamos também que na fronteira entre os dois meios exista uma carga estática uniformemente distribuída; como esta carga está localizada na superfície fronteira, ela será definida por sua densidade superficial de carga ρ_s .

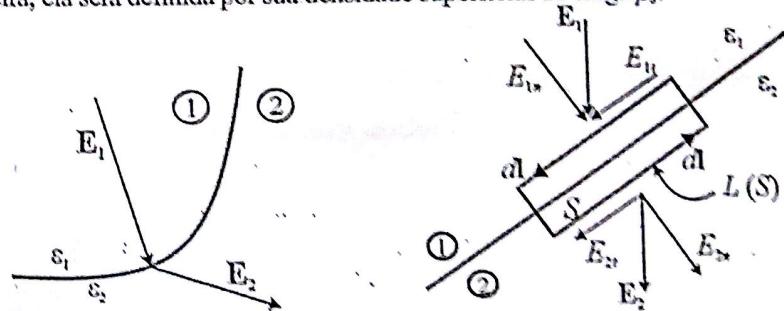


Figura 3.8a – Refração do campo elétrico;

3.8b – Cálculo de campos tangenciais

Não havendo variação temporal de grandezas, temos a equação de Maxwell $\text{rot} \mathbf{E} = 0$, à qual associaremos uma superfície S mostrada na Fig. 3.8b, infinitamente próxima da fronteira entre os meios 1 e 2; consideraremos \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 constantes em S . Utilizando o teorema de Stokes, temos

$$\oint_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Considerando desprezíveis as circulações nos lados menores de $L(S)$, obtemos:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{S_1} \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \int_{S_2} \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = 0$$

sendo L_1 e L_2 as partes do contorno que se encontram nos meios 1 e 2 respectivamente. Notando que

$$\mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} = (\mathbf{E}_{1n} + \mathbf{E}_{1t}) \cdot d\mathbf{l} = E_{1n} dl$$

e analogamente

$$\mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = -E_{2n} dl$$

obtemos

$$E_{1n} \int_{L_1} dl - E_{2n} \int_{L_2} dl = 0$$

Como L_1 e L_2 são iguais, chegamos à

$$E_{1n} = E_{2n} \quad (3.15)$$

significando que os componentes tangenciais de campo elétrico se conservam.

Observemos agora a equação $\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$, à qual associaremos um volume infinitamente pequeno e próximo da fronteira, conforme a Fig. 3.9:

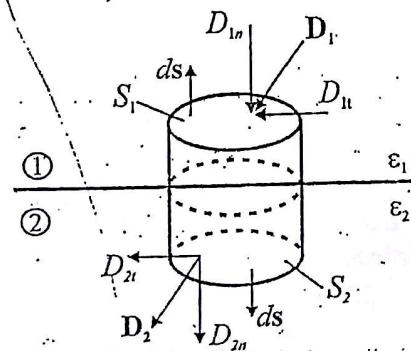


Figura 3.9 – Cálculo de induções elétricas normais

Integrando esta equação no volume citado e utilizando o teorema da divergência temos:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = q$$

sendo q a carga contida no volume. Esta carga está situada na parcela de fronteira S_f seccionada pelo cilindro e será

$$q = \rho_s S_f \quad (3.16)$$

Por outro lado, o fluxo do vetor \mathbf{D} será dividido em duas partes. Consideraremos nulo este fluxo na superfície lateral do volume, tendo em vista que este corresponde a uma altura infinitamente pequena devido à proximidade com a fronteira.

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} + \int_{S_2} \mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

onde S_1 e S_2 são as bases do cilindro utilizado. Como

$$\mathbf{D}_1 \cdot d\mathbf{s} = (\mathbf{D}_{1n} + \mathbf{D}_{1t}) \cdot d\mathbf{s} = -D_{1n} ds$$

e analogamente

$$\mathbf{D}_2 \cdot d\mathbf{s} = D_{2n} ds$$

temos, utilizando a Eq. (3.16)

$$-D_{1n} \int_{S_1} ds + D_{2n} \int_{S_2} ds = \rho_s S_f$$

considerando que $S_1 = S_2 = S_f$, obtemos

$$D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \quad (3.17)$$

ou

$$\epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \rho_s \quad (3.18)$$

significando que a variação de indução na passagem de um meio para outro é igual à densidade superficial de cargas existentes na fronteira entre estes dois meios.

Examinemos o caso particular, porém freqüente, onde não há cargas estáticas acumuladas na fronteira ($\rho_s = 0$). Neste caso, temos:

$$E_{1n} = E_{2n} \quad \text{e} \quad \epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$$

Observando a Fig. 3.10 abaixo

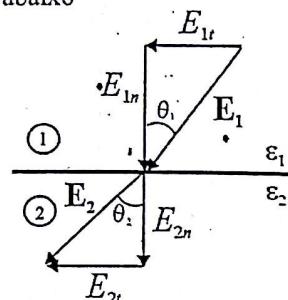


Figura 3.10 – Refração de campo elétrico na passagem entre dois meios

podemos escrever as seguintes expressões:

$$\tan \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \text{e} \quad \tan \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}$$

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{D_{2n}/\epsilon_2}{D_{1n}/\epsilon_1}$$

e obtemos:

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (3.19)$$

Notamos que quanto maior a variação de permissividade, maior será a variação angular entre os campos E_1 e E_2 . No entanto, cabe salientar que entre os meios dielétricos mais usuais esta variação de E não é muito importante. Citemos como exemplo que entre o ar, porcelana, óleo mineral isolante, papelão (estes dois últimos utilizados freqüentemente em transformadores) a relação máxima entre permissividades não ultrapassa o valor 10. Observamos na Fig. 3.11 a variação angular que sofre o campo elétrico em uma estrutura onde temos dois meios com diferentes permissividades. O meio 1 possui $\epsilon_r = 1$ e o meio 2, englobado pelo anterior, possui $\epsilon_r = 4$. Este traçado foi obtido através do sistema de cálculo de campos EFCAD.

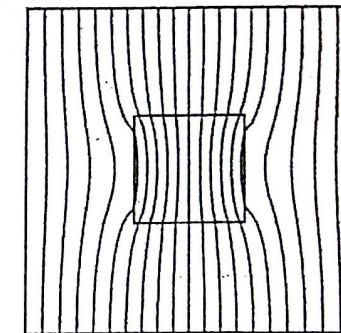


Figura 3.11 – Distribuição de campo elétrico num material com $\epsilon_r = 4$

Obs.: EFCAD é um sistema de cálculo de campos elétricos e magnéticos baseado na técnica de elementos finitos e utilizando recursos gráficos conversacionais característicos dos microcomputadores do tipo IBM-PC. Ele foi desenvolvido pelo GRUCAD-Grupo de Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

3.5 CARGAS INDUZIDAS EM CONDUTORES

Sabendo que um condutor se encontra no mesmo potencial, o campo E no seu interior é nulo, pois $E = -\text{grad}V$ e neste caso $\text{grad}V = 0$. A propósito, esse efeito é relacionado com uma histórica experiência chamada a “gaiola de Faraday”. Este sábio inglês percebeu que se envolvemos uma certa região por um condutor (ou uma gaiola) o campo elétrico dentro do mesmo é nulo. A análise em questão requer um certo cuidado quando observamos a seguinte situação: consideremos um campo E_a homogêneo no espaço, conforme a Fig 3.12a:

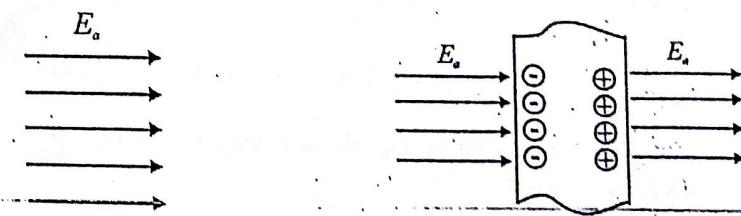


Fig. 3.12a – Campo homogêneo no espaço

3.12b – Material condutor é colocado

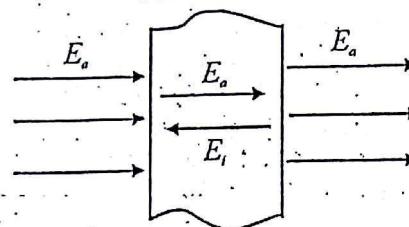


Figura 3.12c - Campo de reação interno no material

Coloquemos, conforme Fig. 3.12b, um condutor na região onde existe este campo. Tendo em vista a Eq. (3.18), relativa à conservação do componente normal de D , e sabendo que no interior do condutor $D = 0$, temos

$$\rightarrow \epsilon_r E_{lh} - \epsilon_0 E_a = \rho_s$$

sendo ρ_s a densidade superficial de carga que se cria na periferia do condutor. Isto ocorre em ambos-os-lados da placa: negativa do lado esquerdo para o campo convergente à placa e positiva à direita. Mas, se temos cargas com sinais opostos nas extremidades da placa, como explicar a existência de um campo nulo no interior da mesma? A resposta vem do fato de que o campo E_i criado pela carga é igual e oposto ao campo E_a , e que, superpostos, anulam-se, conforme Fig. 3.12c.

Um outro exemplo interessante é o da carga pontual Q que é circundada por uma esfera condutora oca e neutra, conforme Fig. 3.13a.

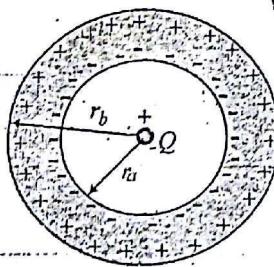


Figura 3.13a - Carga envolta por esfera condutora

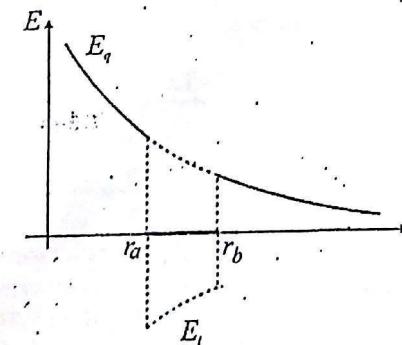


Figura 3.13b - Campo total em função de r

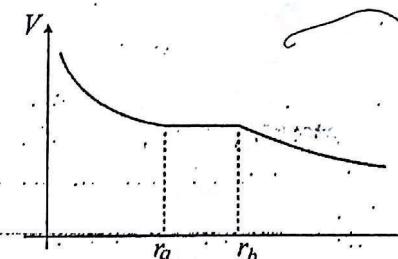


Figura 3.13c - Potencial em função de r

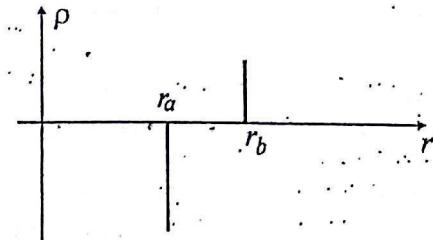


Figura 3.13d - Densidade de carga na esfera

Notemos na Fig. 3.13b que o campo elétrico na esfera oca é nulo (soma do campo elétrico E_q devido à carga Q e E_i devido à carga induzida). O potencial ali permanece constante (Fig. 3.13c) e em r_a e r_b temos as densidades superficiais de carga, conforme a Fig. 3.13d.

3.6 A RIGIDEZ DIELETÉTRICA

Em muitos dispositivos sujeitos a altas variações de tensão, e em particular, em equipamentos de alta tensão, a expressão relativa ao campo eletrostático $\mathbf{E} = -\nabla V$ assume um papel de grande importância. Procuremos evidenciá-la através do exemplo da Fig. 3.14.

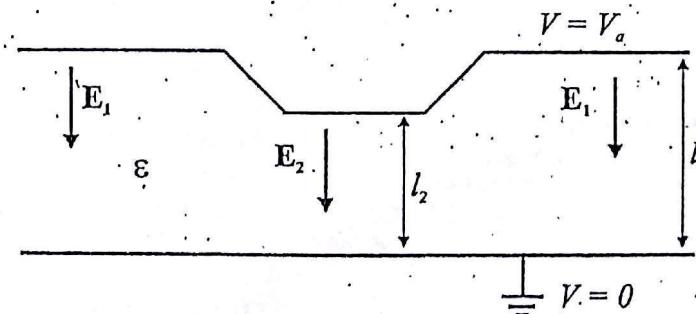


Figura 3.14 - Distribuição de campo elétrico

Suponhamos que uma parte do equipamento esteja aterrada ($V=0$). Uma outra parte do mesmo está em alta tensão $V=V_a$. Como $\mathbf{E} = -\nabla V$, podemos dizer, em razoável aproximação, que

$$E_1 = \frac{V_a - 0}{l_1} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{V_a - 0}{l_2}$$

Como $l_1 > l_2$ é evidente que $E_2 > E_1$. Notamos, então, que em certas partes do equipamento podem existir campos (ou gradientes de potencial) de fortes intensidades. Se estes campos excederem um certo limite, os efeitos resultantes poderão ser nocivos para o equipamento.

Definimos então a rigidez dielétrica K de um isolante. Consideremos que, conforme a Fig. 3.15, exista um isolante colocado entre duas placas metálicas separadas pela distância l e submetidas a uma tensão V entre elas.

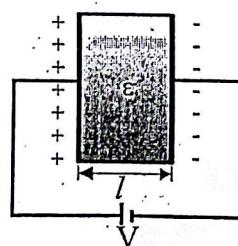


Figura 3.15 – Tensão aplicada num isolante

Ao aplicarmos uma tensão V haverá um acúmulo de cargas positivas e negativas nas placas. Aumentando esta tensão V , atingiremos uma tensão crítica V_C na qual haverá um acúmulo tal de cargas entre as duas placas que criará uma corrente (ou arco elétrico) entre elas "perfurando" o isolante e, portanto, fazendo com que ele perca suas propriedades de isolação. Definiremos a rigidez dielétrica K como sendo:

$$K = \frac{V_C}{l} \quad (\text{V/m}) \quad (3.20)$$

K representa a tensão máxima que um isolante pode suportar por unidade de comprimento sem que haja ruptura no mesmo.

A unidade de K é a mesma que a de campo elétrico, ou gradiente de tensão. Portanto, voltando ao exemplo da Fig. 3.14, é necessário que o

campo mais intenso do equipamento (no caso E_2) não exceda a rigidez dielétrica do meio onde ele se encontra.

Neste sentido, observemos o quanto é necessário que conheçamos os campos elétricos em um equipamento e, em particular, os campos mais intensos. O perfeito conhecimento da distribuição de campos permite um dimensionamento racional do dispositivo, pois ao mesmo tempo que ele será seguro (pois $|E| < K$) ele poderá ser otimizado em suas formas geométricas; assim teremos um equipamento seguro, compacto e de custos menos elevados.

Salientamos finalmente que um campo elétrico excessivo pode ser nocivo não somente para o equipamento, como evidenciado acima, mas também no aspecto que tange à segurança de seres vivos que se encontram na zona onde este campo se localiza.

3.7 O EFEITO DE PONTAS

O "efeito de pontas" é um fenômeno muito conhecido em Engenharia Elétrica e seguidamente associado ao efeito "corona" (que será apresentado a seguir). Isto constitui uma fonte constante de preocupação para os engenheiros, sobretudo na área de alta voltagem, pois é causador de campos elétricos intensos que podem, eventualmente, causar a ruptura do dielétrico em contato com a ponta. Vamos aqui demonstrar como uma ponta produz um campo elevado em relação a uma outra ponta menos aguda. Imaginemos uma peça condutora com a forma da Fig. 3.16.

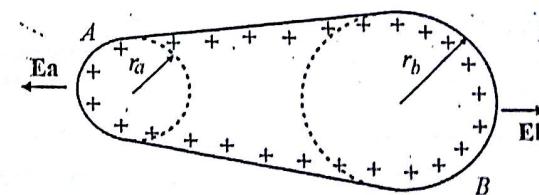


Figura 3.16 – Condutor com pontas de diferentes raios

As duas pontas A e B serão, por simplicidade, duas semi-esferas de raios r_a e r_b respectivamente. Considerando esta peça como um condutor perfeito, sabemos que toda ela se encontra com o mesmo potencial, e que o campo elétrico no seu interior é nulo. Vamos admitir que o campo E_a (ver

figura) na extremidade da peça seja idêntico ao produzido pela esfera de raio r_a possuindo a mesma densidade superficial de carga ρ_a que temos na peça desta figura. Idem pra E_b . Examinemos o potencial V_a e V_b produzidos nas superfícies das esferas hipotéticas segundo a expressão (3.11).

$$V_a = \frac{q_a}{4\pi\epsilon_0 r_a} \quad \text{e} \quad V_b = \frac{q_b}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

onde q_a e q_b são as cargas das esferas. Como os potenciais são idênticos, temos

$$\frac{q_a}{r_a} = \frac{q_b}{r_b} \quad (3.21)$$

Calculemos agora as densidades superficiais de carga nas esferas

$$\rho_a = \frac{q_a}{4\pi r_a^2} \quad \text{e} \quad \rho_b = \frac{q_b}{4\pi r_b^2}$$

obtendo a seguinte relação, com o auxílio da Eq. (3.21)

$$\frac{\rho_a}{\rho_b} = \frac{q_a r_b^2}{q_b r_a^2} = \frac{r_a r_b^2}{r_b r_a^2} = \frac{r_b}{r_a} \quad (3.22)$$

Finalmente, utilizaremos a Eq. (3.18), relativa à indução elétrica normal, lembrando que o campo dentro de um condutor é nulo. Temos então

$$\epsilon_0 E_a = \rho_a \quad \text{e} \quad \epsilon_0 E_b = \rho_b$$

o que dá

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{\rho_a}{\rho_b} \quad \text{ou} \quad \frac{E_a}{E_b} = \frac{r_b}{r_a}$$

Nota-se que o campo elétrico é inversamente proporcional ao raio, evidenciando um campo maior na ponta mais aguda.

3.8 O EFEITO CORONA

O efeito corona pode ser definido como uma perda de carga criada pela ionização do ar que envolve um condutor carregado com carga elétrica. Para ilustrar esse processo, imaginemos um condutor carregado com cargas positivas numa ponta aguda. As mesmas formam um intenso campo elétrico como visto acima (cargas acumuladas e campos elétricos são efeitos simultâneos). Essas atraem as cargas negativas presentes nas moléculas de ar (ou do meio que circunda o condutor), de tal maneira que íons se formam nesta região. Os mesmos são fortemente acelerados em direção à ponta do condutor. Ocorrerão colisões entre estas partículas e moléculas neutras de ar. Isto leva a uma produção significativa de novos íons, o que pode ser chamado de “avalanche iônica”. Como consequência, o ar próximo a essa ponta torna-se condutor, fazendo com que corrente elétrica flua da ponta para o ar. Isto pode emitir uma luz relativa às colisões nas moléculas de ar, bem como um som estridente característico.

Para o ar, o valor de campo elétrico para que tal fenômeno se crie é de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$, sendo que este pode variar em função de condições diversas de pressão, temperatura, umidade, pureza do ar, etc...

O efeito corona deve ser evitado tanto quanto possível. Por um lado representa uma perda de energia, pois parte da energia do sistema é utilizada para a formação dessas correntes parasitas. A superfície sob sua influência pode também sofrer modificações físico-químicas, algo não desejável pois não foi concebida para tal. Por outro lado, dependendo do ambiente, condições atmosféricas (incluindo poluição) e da concepção geométrica e física do dispositivo em questão, o corona pode expandir, criando arcos elétricos de mais intensidade e extensão, direcionado à outras partes do equipamento. É desnecessário descrever as possíveis e danosas consequências.

Sugermos a leitura do exemplo 3.11.5, relativo à descarga atmosférica, pois o mesmo possui forte correlação com o tópico aqui abordado.

3.9 O CAPACITOR

3.9.1 Definição de capacitância

Consideremos duas placas condutoras paralelas de seção S e separadas por uma distância d . Entre estas duas placas, temos um dielétrico de permissividade ϵ . Suponhamos que estas duas placas estão ligadas exteriormente a uma fonte de tensão V , conforme a Fig. 3.17.

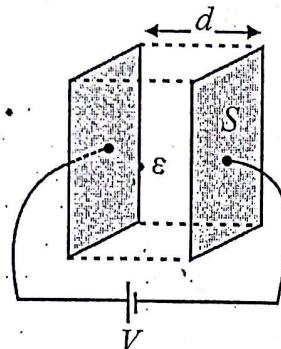


Figura 3.17 – Capacitor de placas planas

Aparecerá em uma das placas condutoras um acúmulo de cargas $+Q$, enquanto na outra teremos a carga $-Q$ correspondente. Caso, por exemplo, dobrarmos a tensão desta fonte, as cargas também dobrarão. Há, portanto, uma proporcionalidade entre cargas e tensão que se mantém, à condição de não ultrapassarmos a tensão crítica que poderia provocar a ruptura do isolante.

$$\frac{Q}{V} = \frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q_2}{V_2} = \text{constante}$$

Este coeficiente de proporcionalidade é chamado "capacitância" e é designado por C . Temos então

$$C = \frac{Q}{V}$$

Calculemos, a título de exemplo, a capacitância do dispositivo da Fig. 3.17, conhecido como "capacitor de placas planas". Faremos a suposição de que o campo elétrico entre as placas seja constante e não sofra "efeito de bordas" ou "espraiamento" nos limites geométricos do capacitor. Esta aproximação (campo constante independentemente da distância à placa) faz com que devamos considerar cada placa como um plano infinito carregado (pois um plano finito implica obrigatoriamente um campo não constante). Calculemos então o campo E gerado por um plano infinito possuindo uma carga definida através de sua densidade superficial de carga "qs", conforme a Fig. 3.18.

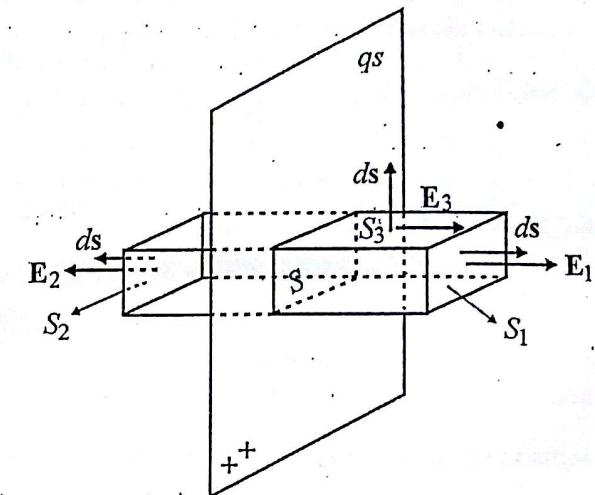


Figura 3.18 – Cálculo de campo elétrico para um plano infinito

Utilizaremos a equação $\text{div } \vec{E} = \rho$ que sob sua forma integral é o teorema de Gauss

$$\int_{S(V)} \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q$$

Como volume escolheremos um paralelepípedo cujas extremidades ficam equidistantes do plano. O fluxo de E será dividido em 3 parcelas, correspondentes às superfícies S_1 , S_2 e S_3 , sendo que esta última representa todas as superfícies laterais. Temos então:

$$\int_{S_1} \epsilon E_1 \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \epsilon E_2 \cdot d\vec{s} + \int_{S_3} \epsilon E_3 \cdot d\vec{s} = Q$$

Notemos que E_3 e ds são vetores perpendiculares. Por outro lado, considerando E_1 e E_2 constantes obtemos

$$\epsilon E_1 S_1 + \epsilon E_2 S_2 = Q$$

Sendo S_1 e S_2 equidistantes do plano e iguais a S , podemos, por homogeneidade, admitir que $E_1 = E_2 = E$, o que nos permite escrever

$$\epsilon ES + \epsilon ES = Q$$

Notemos finalmente que a carga contida neste volume é a mesma que está contida na intersecção do volume com o plano, ou seja, na superfície S , indicada na Fig. 3.18. Obtemos

$$2\epsilon ES = \oint S \text{ d}V \xrightarrow{\text{número de superfícies } P_S}$$

ou seja

$$E = \frac{Q_S}{2\epsilon} \Rightarrow$$

O campo criado pela placa 2, com carga negativa é, em módulo idêntico, porém, convergente em relação à placa, conforme a Fig. 3.19.

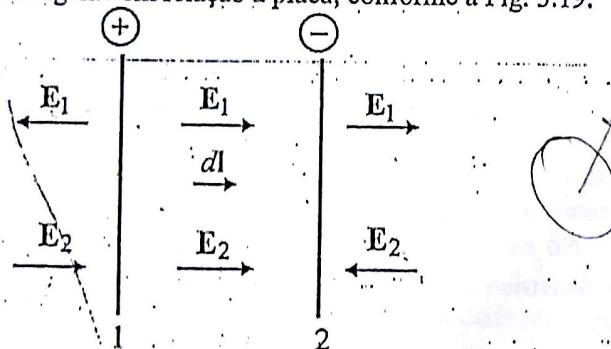


Figura 3.19 – Composição de campos das duas placas

Verificamos então que o campo é nulo na zona externa às duas placas ($E_1 + E_2 = 0$) e, entre elas, será $E = \frac{Q_S}{\epsilon} \Rightarrow P_S = E \cdot E$

A obtenção do campo é importante para o sempre necessário cálculo da variação de tensão V entre as duas placas, como abaixo:

$$V = - \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

ou seja pela circulação de E de uma placa à outra. O $d\mathbf{l}$ está indicado na Fig. 3.19. Admitindo que E é constante entre as placas, obtemos:

$$|V| = \frac{Q_S}{\epsilon} d$$

(para o cálculo de capacidade, vamos nos interessar, em particular pelo módulo de V). A carga contida no dispositivo é $Q = P_S S$ sendo S a seção da placa. Assim:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{P_S \cdot S}{E \cdot d} = \frac{\epsilon E S}{d} C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon S}{d}$$

Uma observação importante é que, embora a capacidade seja definida a partir de Q e V , a expressão final de capacidade depende sempre de fatores construtivos do dispositivo, ou seja, no exemplo acima, da escolha do dielétrico ϵ e das dimensões do dispositivo S e d .

3.9.2 A energia de um capacitor

Para carregarmos um capacitor com uma carga Q , é necessário despendermos uma certa energia associada a esta operação. Suponhamos que a mesma demore um tempo t que vai de zero até T , e que, simultaneamente, a carga q se eleve de zero a Q bem como a tensão v , que variará de zero a V . Sendo W esta energia temos:

$$W = \int_0^T v i dt$$

No entanto, notemos que $i = \frac{dq}{dt}$; fazendo a substituição na equação acima obtemos

$$W = \int_0^Q v dq$$

Como $C = \frac{q}{v} = \frac{Q}{V}$, temos

$$W = \int_0^V v d(Cv)$$

Sendo C uma constante (pois depende apenas dos fatores construtivos do capacitor) chegamos finalmente à:

$$W = \frac{1}{2} CV^2 \quad (3.23)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

3.9.3 A energia do campo eletrostático conservativo

A energia calculada acima pode ser também interpretada como a energia necessária para criar um campo elétrico no interior do capacitor, pois são fenômenos simultâneos e, energeticamente, equivalentes.

Calculemos a densidade volumétrica de energia no caso do capacitor de placas planas visto acima.

$$\frac{W}{vol} = \frac{W}{Sd} = \frac{1}{2} \frac{CV^2}{Sd}$$

Notando que $C = \epsilon S/d$ e $V = E d$, obtemos:

$$\frac{W}{vol} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon E^2}{Sd} \quad (3.24)$$

Embora este resultado tenha sido obtido para um caso particular, o mesmo é geral e aplicável a todo campo E criado num dielétrico com permissividade ϵ .

3.10 AS EQUAÇÕES DE LAPLACE E POISSON

Suponhamos que no domínio de estudo não há variação temporal de grandezas. Neste caso, podemos definir um potencial escalar V do qual deriva o campo eletrostático conservativo tal que $E = -\nabla V$. Observemos que esta definição é coerente com $\text{rot} E = 0$, pois $\text{rot}(-\nabla V) = 0$ e $\text{rot}(\nabla V)$ é sempre nulo (se $\partial B / \partial t$ não for nulo, não podemos utilizar esta definição). Temos então:

$$\text{div} D = \rho$$

$$\text{div} \epsilon E = \rho$$

$$\text{div} \epsilon (\text{grad} V) = -\rho$$

que sob forma explícita é

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \epsilon \frac{\partial V}{\partial z} = -\rho \quad (3.25)$$

Em duas dimensões esta equação passa a ser:

$$\frac{\partial}{\partial x} \epsilon \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \epsilon \frac{\partial V}{\partial y} = -\rho \quad (3.26)$$

Esta é a equação de Poisson que define a distribuição do potencial V no domínio dielétrico onde temos campos eletrostáticos. Para resolver esta equação devemos conhecer as condições de contorno (os potenciais impostos nas fronteiras do domínio), a geometria dos meios dielétricos existentes, bem como suas permissividades e as cargas estáticas.

No caso onde não há cargas estáticas ($\rho = 0$) e que só existe um meio dielétrico no domínio de estudo (ϵ constante) a equação assume a forma:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (3.27)$$

que é uma equação de Laplace. Neste caso, a fonte geradora de campo elétrico advém obrigatoriamente das condições de contorno pela imposição de diferenças de potencial.

É importante salientar que a solução analítica dessas equações na maior parte de problemas reais é extremamente laboriosa e, em casos de geometrias complexas, praticamente impossível. No entanto, apresentaremos a solução desta equação em um caso de grande simplicidade.

Novamente utilizaremos o exemplo do capacitor de placas planas onde desejamos conhecer o campo entre as placas. Consideraremos desprezível o espraiamento do campo nas extremidades das placas. Geometricamente, o dispositivo é mostrado na Fig. 3.20.

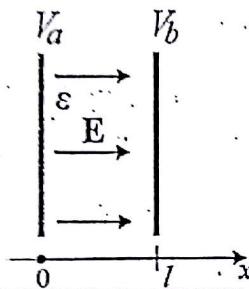


Figura 3.20 – Campo criado entre placas condutoras

As condições de contorno são: $V=V_a$ para $x=0$, e $V=V_b$ para $x=l$. Com as hipóteses adotadas, podemos dizer que este problema é unidimensional e se desenvolve na direção Ox . A equação de Laplace passa a ser então:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

A solução desta equação só pode ser $V(x) = ax + b$ cuja derivada segunda é nula. Conhecendo as condições de contorno, teremos:

$$V_a = a \cdot 0 + b \quad \text{e} \quad V_b = a \cdot l + b$$

que nos permite calcular a e b ; substituindo a e b por seus valores obtemos:

$$V(x) = \frac{V_b - V_a}{l} x + V_a$$

Como $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}V$, neste caso temos

$$\mathbf{E} = -\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{ou} \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$E_x = \frac{V_a - V_b}{l}$$

No caso em que $V_a > V_b$, temos para E_x positivo o sentido dos x crescentes, ou seja, \mathbf{E} se desenvolve do potencial maior para o menor, como esperado.

3.11 EXEMPLOS

3.11.1 O fio infinito carregado

Imagine um fio infinito carregado com uma carga definida por sua densidade linear de carga, " q/l ", conforme a Fig. 3.21. Desejamos calcular o campo elétrico \mathbf{E} a uma distância R do fio.

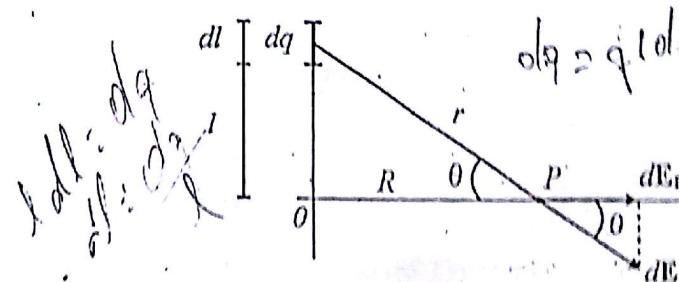


Figura 3.21 – Campo a partir de uma parcela de fio com carga

Este problema pode ser resolvido de duas maneiras diferentes. Vejamos a primeira. Imaginemos que o fio é constituído por uma infinidade de cargas pontuais dq . Cada carga dq produzirá um campo dE no ponto P da Fig. 3.21.

No início deste capítulo vimos que uma carga pontual q produz um campo \mathbf{E} a uma distância r dada pela Eq. (3.2) reproduzida abaixo:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Por analogia, podemos escrever no caso deste problema:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Tendo em vista que a carga é aqui definida através da densidade linear de carga ql , temos

$$dq = ql dl$$

Por outro lado, notamos que o componente vertical de dE será anulada pelo componente correspondente quando considerarmos um outro dq situado simetricamente em relação ao ponto 0. O componente que nos interessa é então:

$$dE_r = \frac{ql dl}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos\theta \quad (3.28)$$

Neste momento, notamos que l , r e θ são variáveis interdependentes; devemos então explicitar esta expressão em função de uma só variável. Notamos que:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{l}{R}; \quad \cos\theta = \frac{R}{r}$$

e portanto:

$$dl = R \sec^2\theta d\theta; \quad r = \frac{R}{\cos\theta}$$

Substituindo dl e r na expressão (3.28) obtemos:

$$dE_r = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta$$

$$E_r = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 R} \cos\theta d\theta = \frac{ql}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Observemos que são os ângulos $-\pi/2$ e $\pi/2$ que definem a dimensão infinita do condutor. Caso o fio fosse finito, seriam outros ângulos limites

que determinariam a dimensão do fio bem como a posição do ponto P em relação ao segmento de fio.

Este problema do fio infinito pode também ser resolvido de outra maneira, onde utilizamos diretamente o teorema de Gauss. Notemos inicialmente que existe uma infinidade de pontos distantes R do fio; estes pontos estão contidos na superfície lateral de cilindro (chamada de "superfície gaussiana" ou simplesmente "gaussiana"), conforme a Fig 3.22. A equação $\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho$, sob forma integral é

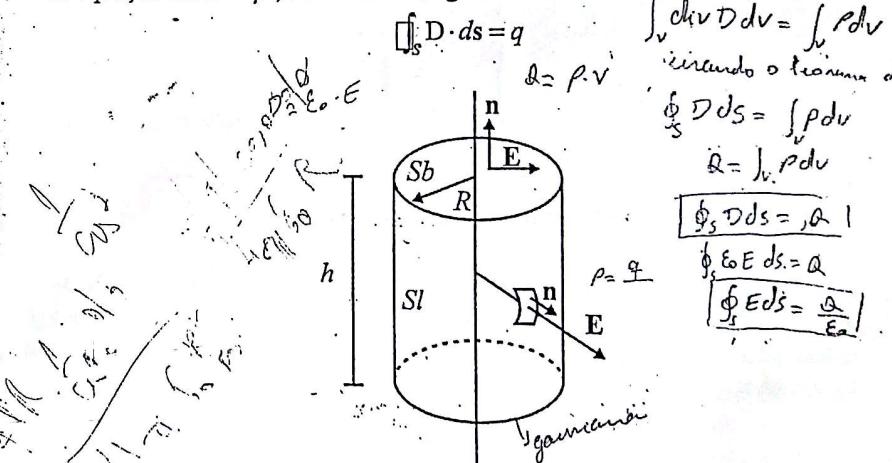


Figura 3.22 – Superfície gaussiana para aplicação do teorema de Gauss

Calculando $\mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}$, notamos que nas bases do cilindro este produto escalar é nulo. Na superfície lateral sendo \mathbf{E} e $d\mathbf{s}$ vetores paralelos e de mesmo sentido, obtemos:

$$\int_{S_{\text{lateral}}} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \epsilon_0 E 2\pi Rh$$

$$\epsilon_0 \cdot E \cdot \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{R} R d\theta dl = \epsilon_0 E R \pi h \quad dS = 2\pi Rh dl$$

A carga contida no volume é qlh , pois está contida na intersecção do fio com o cilindro. Assim sendo, chegamos à:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q \quad R \cdot l \quad \rightarrow \text{remo o simbolo de} \\ \epsilon_0 E 2\pi Rh = R \cdot l \quad E = \frac{(ql)}{2\pi\epsilon_0 R} \quad \text{diminuindo termos de cargo (l)} \\ \epsilon_0 E 2\pi Rh = q \cdot l \cdot K \quad \text{como } l = ql \text{ dado no enunciado} \\ E = \frac{q \cdot l}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Notamos que a aplicação do teorema de Gauss é bem mais simples, mas quando podemos aplicá-la? Não há uma regra fixa que nos responda esta questão; a intuição e a prática de problemas nos levam em geral ao caminho de resoluções mais simples e racionais. No entanto, quando podemos definir uma superfície ao longo da qual os pontos possuem o mesmo campo (em módulo), em geral, o teorema de Gauss pode ser aplicado. No problema acima, se o fio não fosse infinito, o campo \mathbf{E} variaria axialmente e o teorema de Gauss não poderia ser aplicado para efeitos de resolução algébrica. No entanto, se por algum meio o campo \mathbf{E} for corretamente avaliado, a aplicação dos valores de \mathbf{E} obtidos no teorema de Gauss conduz, necessariamente, à sua verificação.

3.11.2 A meia casca esférica carregada

Desejamos calcular o campo elétrico no ponto P da Fig. 3.23 criado por uma meia casca esférica condutora carregada com uma carga Q .

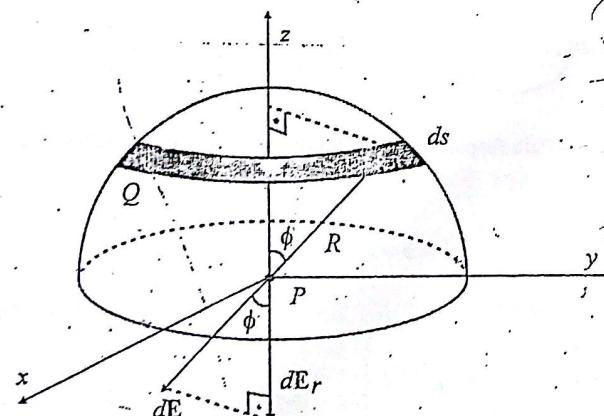


Figura 3.23 – Decomposição de campo criado por uma casca esférica

É um caso onde a aplicação direta do teorema de Gauss é impossível para resolução algébrica deste problema.

Definimos a densidade superficial de carga $qs = Q/2\pi R^2$. A parcela de carga dq é relativa a um ds que criará um dE no ponto P ; o componente vertical deste campo não será anulado e vale:

$$dQ = Ps \cdot ds$$

$$dE_r = \frac{qs ds}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\phi$$

Ps = S, symbolo de densidade superficial da carga;

Este problema, por sua própria forma geométrica, nos leva a utilizar coordenadas esféricas. O ds relativo a este sistema de coordenadas é:

$$ds = R^2 \sin\phi d\theta d\phi$$

$$E_r = \frac{qs}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta$$

notando que $\cos\phi \sin\phi = (\sin 2\phi)/2$, obtemos

$$E_r = \frac{qs}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} 2\pi$$

e substituindo qs por $Q/2\pi R^2$, o valor de E_r é:

$$E_r = Q/8\pi\epsilon_0 R^2 \quad E_{\theta} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

na forma de uma casca esférica homogênea

3.11.3 Tempo de acomodação de cargas livres num condutor

Uma certa quantidade de carga colocada num bloco condutor homogêneo irá se distribuir na sua superfície. Iremos aqui avaliar o tempo relativo a este movimento de cargas. Em se tratando de uma corrente elétrica que se estabelece, utilizaremos a equação (2.5) da continuidade elétrica

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

Tendo em vista que isto ocorre num condutor utilizaremos também a lei de Ohm local $J = \sigma E$ e temos

$$\text{div}E = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

O lado esquerdo da equação acima pode ser relacionado com a equação de Maxwell $\text{div}E = \frac{\rho}{\epsilon}$, pois ϵ é, para um só meio, constante. Isto fornece

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho = 0$$

A solução para esta equação diferencial é

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/T} \quad \text{com} \quad T = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

e onde ρ_0 é a densidade inicial de carga, ou seja, ρ_0 corresponde a densidade volumétrica de carga no momento em que a carga foi colocada no volume do condutor. Percebemos que a mesma tende a zero, pois no volume, após certo tempo, não mais haverá cargas, visto que elas se concentram na sua superfície externa.

Este tempo de acomodação é definido por T e, para $t=T$ tem-se $\rho(T) = \rho_0/e$. Para o cobre ($\sigma = 0.58 \cdot 10^8 \text{ S/m}$ e $\epsilon = \epsilon_0$), este valor é:

$$T \approx 10^{-19} \text{ s}$$

ou seja, para efeitos práticos, esta redistribuição (cargas se acomodando na superfície) é instantânea. Para um material isolante, como por exemplo a mica ($\sigma = 10^{-16} \text{ S/m}$ e $\epsilon_r = 6$), o valor de T é aproximadamente 10 horas, ou seja, numa aplicação normal, é como se a carga não se movesse no interior deste isolante.

3.11.4 Permissividade elétrica em dielétricos e condutores

Sabemos que um campo elétrico que se estabelece no espaço é relacionado com a indução elétrica pela expressão $D = \epsilon_0 E$. No entanto, se este campo for criado num material dielétrico, o mesmo será acrescido de uma polarização P devido a polaridade das suas moléculas. O processo de criação desta polaridade deve ser analisado com cuidado. Inicialmente, vejamos a Fig. 3.24a onde temos as moléculas de material dielétrico ou isolante. Quando um campo externo é aplicado à mesma, as moléculas são “polarizadas”, ou seja, sua parte negativa é orientada para a esquerda, conforme a Fig. 3.24b.

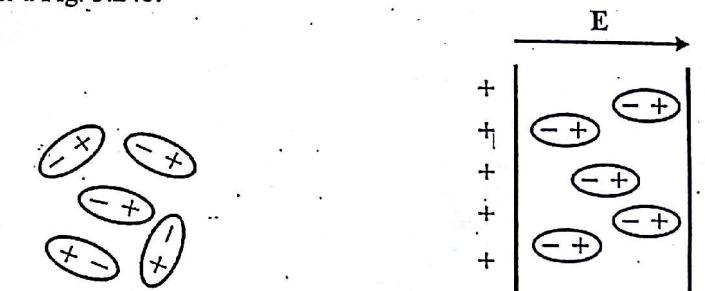


Figura 3.24a – Polarização de moléculas livres 3.24b – Moléculas sob a ação do campo

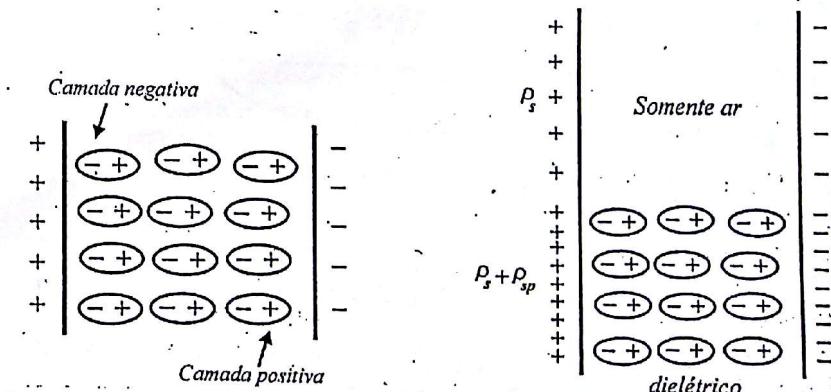


Figura 3.24c – Cargas nas bordas do isolante 3.24d – Dielétrico é inserido entre placas

Sendo um material isolante, não há ruptura da estrutura da molécula e percebe-se que no seu interior não há criação de campo ou indução elétrica suplementar, pois as cargas, para este efeito, se anulam entre moléculas vizinhas. No entanto, na extremidade da esquerda há uma "camada" de moléculas com suas cargas negativas alí acumuladas, conforme Fig. 3.24c. Imaginemos agora que entre duas placas condutoras, temos, na parte superior o vácuo, conforme 3.24d. Aplicando uma certa tensão entre as mesmas, criam-se cargas positivas e negativas, que corresponderão a uma densidade superficial de carga ρ_s , positiva na placa do lado esquerdo e negativa na outra. Ao inserirmos um material isolante (parte inferior da Fig. 3.24d), suas moléculas serão polarizadas e na parte esquerda do material temos o acúmulo superficial de cargas negativas devido à polarização, o que induz uma densidade positiva suplementar de carga ρ_{sp} na placa condutora (ver parte inferior da Fig. 3.24d). O mesmo ocorrerá na placa do lado direito, porém com ρ_{sp} negativo. Este acréscimo de densidade de carga terá como resultado um acréscimo na indução elétrica de \mathbf{P} (tal que $\mathbf{P} = \rho_{sp}$, conforme parágrafo 3.9.1) e a indução elétrica \mathbf{D} será modificado para

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Podemos também escrever esta equação como $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, onde

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{E}} = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \epsilon_r$$

onde $\chi = \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0 \mathbf{E}}$ é chamado "susceptibilidade elétrica" e ϵ_r a permeabilidade relativa, já apresentada. Na prática, pouco se utiliza a noção de polarização pois o ϵ_r já leva em conta este efeito, observando que a permissividade relativa é amplamente divulgada nas tabelas de características de materiais.

Nos metais a situação é diferente e não existe polarização de moléculas ou átomos pois os elétrons que a criariam possuem total liberdade de locomoção e vão se acumular numa das superfícies do corpo enquanto na outra teremos cargas positivas. Igualando as duas expressões de \mathbf{D} acima temos $\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ que pode ser escrita como $\mathbf{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \mathbf{E}$. Embora os fenômenos relativos ao movimento de cargas livres seja instantâneo (ver

exemplo precedente) a sucessão dos mesmos é a seguinte: 1) \mathbf{E} se estabelece no metál; 2) é criada a polaridade dos átomos; 3) como os elétrons são livres, eles se deslocam para a superfície do corpo, fazendo com que \mathbf{P} se torne nulo no interior do material, ao mesmo tempo que ϵ tende ao valor ϵ_0 .

Fica claro desta apresentação que o comportamento dos dielétricos (isolantes) e condutores é bastante diferente pois nestes últimos os elétrons se deslocam livremente. Suponhamos agora que vamos avaliar um problema envolvendo dielétricos e condutores. É óbvio que o tratamento desses dois tipos de meios deve ser feito de acordo com as suas características físicas. Podemos tratar o condutor como um dielétrico artificial e utilizar um só equacionamento, o que pode simplificar a solução do problema. Por exemplo, iremos utilizar a equação de Poisson (3.26) (notando que ela tem como característica constitutiva a permissividade elétrica dos meios). Neste caso, um condutor poderá ser considerado um dielétrico com $\epsilon_r \rightarrow \infty$. Vejamos porque, com a ajuda da Fig. 3.25 onde temos um metal colocado num campo elétrico de módulo E_a no ar. E_m é o campo elétrico no metal.

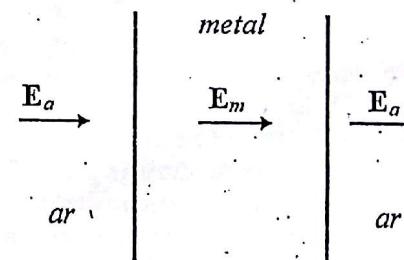


Figura 3.25 – Metal condutor no espaço

Por uma questão de conveniência não vamos considerar a densidade superficial de carga que naturalmente se estabelece na superfície do condutor. Em compensação, devemos achar uma maneira de assegurar um campo desprezível no metal. Para tanto devemos escrever a equação da continuidade de componentes normais de indução elétrica (3.17), com uma densidade superficial de carga nula, o que conduz à $D_{1n} = D_{2n}$. Isto pode ser escrito sob a forma $\epsilon_0 E_a = \epsilon_0 \epsilon_r E_m$ ou $E_m = E_a / \epsilon_r$. Assim, se impusermos, por exemplo, $\epsilon_r = 1000$ (valor típico), temos $E_m \ll E_a$, simulando com

excelente precisão a presença de condutores num domínio, onde predominam materiais dielétricos. Este método é seguidamente empregado em simulações numéricas para meios dielétricos, onde, nas regiões com meios condutores, impõe-se $\epsilon_r = 1000$.

3.11.5 Descargas atmosféricas

O raio atmosférico é o arco elétrico mais potente criado pela natureza. Porém, antes de considerarmos o raio, observemos o ambiente no qual ele se estabelece. Na ionosfera, que se situa a uma distância que varia de 25 a 60 km da superfície da Terra, existe a incidência do "vento solar", que consiste numa grande quantidade de prótons que são emitidos pelo sol como parte da sua radiatividade natural, efeito que é aumentado pela forte radiação ultravioleta também proveniente do sol. Essas cargas positivas são captadas na ionosfera pelo campo magnético terrestre, formando uma camada de cargas acima da Terra. Em certas regiões do planeta, como os pólos, tal efeito é observado como "auroras boreais" (anéis de Van Allen). A quantidade de carga varia do dia (alta densidade de carga) para a noite (baixa densidade devido ao bloqueio ao fluxo de prótons causado pela própria presença da Terra) e também varia em dependência da atividade solar. Como esta carga é positiva, ela induz uma carga negativa na superfície da Terra. Uma outra fonte de carga negativa na Terra é a precipitação de chuva e neve onde o atrito das partículas com o ar tende a criar cargas negativas que são conduzidas para a Terra. Porém a principal fonte de carga no solo é devido ao primeiro fenômeno acima citado.

Existe, portanto, um campo elétrico entre a Terra e a ionosfera. A diferença de potencial, em condições climáticas normais, é de 300 kVolts, o que gera um campo elétrico de 100 Volts/m no solo terrestre. Esse valor pode parecer estranho pois um cálculo aproximado fornece um campo elétrico de $|E| \approx 300\,000 \text{ Volts}/30\,000 \text{ m} = 10 \text{ Volts}/\text{m}$, admitindo que a ionosfera se encontre a uma distância de 30 km. A razão deste valor de 100 Volts/m é a seguinte: a ionosfera é relativamente condutora (devido à presença dos íons NO^+ , O_2^+ e O^+ oriundos do "vento solar"). À medida que nos aproximamos do solo terrestre a presença desses íons é menor e, próximo ao solo, podemos considerar a atmosfera como isolante. Em consequência, o campo é ali mais intenso, ou seja, ao nos afastarmos do solo, passamos gradativamente de um meio isolante a um meio condutor.

Então, o campo não pode ser calculado como acima (como uma simples relação entre a variação de tensão e distância) e, efetivamente o campo decresce de forma exponencial com a altura. Por exemplo, o campo elétrico a 1 km de altura vale aproximadamente 65 Volts/m ao passo que, a 2 km de altura, vale 25 Volts/m. Na ionosfera (acima de 35 km) o campo fica reduzido à 0.3 Volts/m. Esses valores são médios, porém relativamente estáveis pois chuvas, tempestades e atividades climáticas semelhantes homogeneizam o campo em aproximadamente 100 Volts/m na superfície da terra.

Voltemos agora à questão da descarga atmosférica. Uma nuvem carregada pode criar entre a sua parte inferior e o solo uma diferença de potencial de até 100 milhões de Volts, portanto, bastante superior à diferença de 300 kVolts acima citada. Uma nuvem em movimento adquire cargas elétricas através do atrito na atmosfera, especialmente criado pelos cristais de gelo e queda de granizo (cuja existência é explicada pela baixa temperatura na altura das nuvens). Considerando 2000 m a distância da nuvem com o solo, o campo elétrico é bem mais intenso que aquele que normalmente existe e, neste caso, a carga da nuvem é negativa. A simples presença da nuvem carregada induz uma importante carga positiva no solo próximo à nuvem. Tendo em vista que em condições atmosféricas de chuva a rigidez dielétrica do ar é bem menor, esta variação de potencial pode gerar o raio, que corresponde a uma transferência de carga negativa para o solo.

O estabelecimento de raios é um fenômeno complexo e o apresentaremos de forma simplificada.

Existem raios entre nuvens e nuvens-terra. Neste último caso, o arco parte da nuvem que é fortemente carregada negativamente e "procura" o caminho mais ionizado em direção à terra. Aproximando-se da terra, irá na direção dos pontos mais altos por, basicamente, duas razões: inicialmente para percorrer o caminho mais curto, e também porque os pontos mais altos correspondem seguidamente a torres metálicas e pára-raios, que pelo fenômeno das pontas agudas, criam ao seu redor um campo relativamente intenso e com capacidade de ionizar o ar.

A medida que o raio se aproxima, este campo se intensifica, bem como a ionização da região que envolve a ponta e o efeito corona (ver seção 3.8), produzindo uma descarga que vai em direção ao raio, conforme Fig. 3.26.

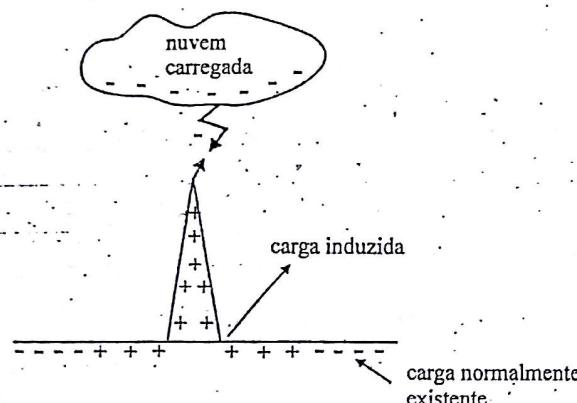


Figura 3.26 - Descarga atmosférica

A melhor maneira de se proteger de um raio seria colocar um invólucro metálico em torno da região a ser protegida, porém esta solução é, geralmente, impraticável. O que normalmente se faz é instalar um cabo metálico aterrado na parte mais alta de, por exemplo, um prédio, capaz de suportar correntes da ordem de 2000 A. Observemos a Fig. 3.27, onde temos um cabo aterrado e a região próxima a ele.

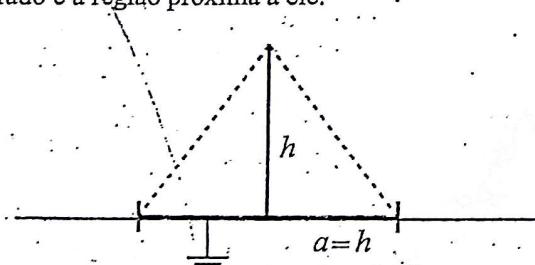


Figura 3.27 - Zona de proteção de um pára-raios

A região delimitada pelo cabo, a linha horizontal definida pela dimensão $a = h$ e a linha pontilhada se encontram, em boa aproximação, com o mesmo potencial, e o campo elétrico criado no mesmo é praticamente nulo. O raio tenderá a não entrar nesta zona (onde não há ionização) e se dirigir a ponta mais alta da haste, chamada, portanto, pára-raio. De fato, estatisticamente, a zona protegida não é atingida por raios.

3.11.6 Ruptura de dielétrico no ar envolvendo uma esfera condutora carregada

Suponhamos que uma esfera condutora de raio $R=40\text{ mm}$ esteja carregada com uma densidade de carga superficial qs . O ar em sua volta possui uma rigidez dielétrica $K = 3\text{ kV/mm}$. Calculemos:

a) O valor máximo de qs para que não haja ruptura de dielétrico no ar. Aplicemos o teorema de Gauss a uma esfera de raio genérico $r > R$, ou seja,

$$\int_{S(r)} \epsilon_0 E \cdot ds = \int_{\text{esf.}} qs ds \quad \text{ou} \quad \epsilon_0 4\pi r^2 E = qs 4\pi R^2$$

o que dá $E = qs \frac{R}{\epsilon_0 r^2}$. O valor máximo de E se estabelece na periferia da

esfera, quando $r = R$, ou seja, teremos $E = qs/\epsilon_0$. Para que não haja ruptura de dielétrico, o valor máximo de E é K . Para os dados numéricos do problema, teremos $qs = \epsilon_0 K$, o que dá $qs = 0.265 \times 10^{-4} \text{ C/m}^2$.

Cabe notar que há também uma outra forma de calcular este valor de E através da continuidade de componente normal de indução elétrica. Isto é dado pela Eq. (3.17), que é $D_{2n} - D_{1n} = qs$. Considerando a esfera condutora como meio 1 e sabendo que E é nulo no seu interior, obtemos $D_{2n} = qs$, ou $\epsilon_0 E = qs$, que no caso do limite de ruptura do dielétrico resulta em $qs = \epsilon_0 K$.

b) O valor máximo de potencial na casca esférica para não haver ruptura: considerando que o potencial no infinito tende a zero, podemos utilizar a expressão (3.11)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Observemos que a carga Q será dada por $Q = qs 4\pi R^2$ que substituindo nesta equação de V dá $V = qs R / \epsilon_0 = KR$. Para os valores de R e K deste exemplo, temos $V = 120\text{ KV}$. Observe-se que quanto maior o raio, maior pode ser a tensão, o que é coerente com o efeito de pontas visto anteriormente.

3.11.7 Cópia xerográfica e impressoras a laser

Trata-se de uma aplicação da Eletrostática relativamente moderna (as primeiras máquinas de reprodução começaram a ser comercializadas há aproximadamente 30 anos) que faz parte do nosso quotidiano de tal forma que constitui um dos usos mais freqüentes dos princípios eletrostáticos. A realização de uma cópia passa por 6 passos:

- Carregamento eletrostático uniforme de uma placa ou tambor constituído por um material fotocondutor como o selênio, aplicado sob forma de lâmina fina sobre um material condutor. A carga elétrica é colocada na placa de diferentes maneiras, como por exemplo, uma ponta ou haste ligada a uma fonte de alta tensão, que, ao "varrer" a superfície de selênio, procede a uma descarga elétrica sobre ela. O suporte desta placa é um material condutor carregado negativamente; mas o movimento de cargas não ocorre pois o material fotocondutor não permite o deslocamento de cargas até ser sensibilizado pela luz. A Fig. 3.28a mostra esta primeira etapa.

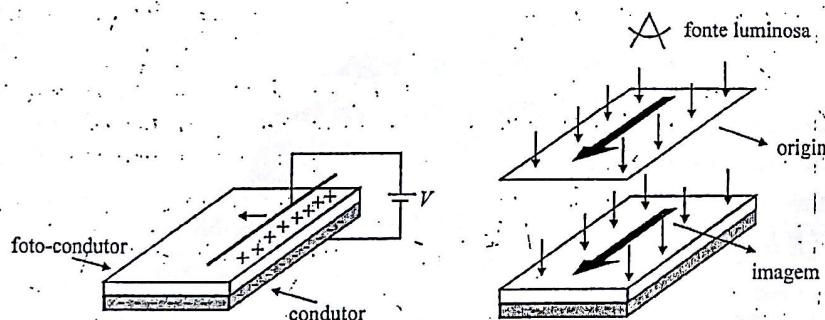


Figura 3.28a – Carregamento de cargas

3.28b – Exposição na placa semicondutora

- O original, através de uma fonte de luz intensa é projetado sobre a lâmina fotocondutora, que ao ser atingida pela luz, se torna condutora. Na Fig. 3.28b, por exemplo, deseja-se copiar uma seta; ao projetar-se forte luz, as zonas externas à imagem da seta se tornam condutoras, fazendo com que suas cargas positivas passem a se locomover e combinar com as cargas negativas do suporte metálico.
- Após esse passo, partículas muito finas, constituídas sobretudo de carbono (do "toner") carregadas negativamente, são atraídas pelas cargas positivas que permaneceram imóveis (zona da seta), criando

uma camada de carbono com carga negativa que terá, neste caso, a forma da seta.

- Após, uma página carregada positivamente atrai as partículas de carbono respeitando a forma original da imagem a ser reproduzida.
- Para a fixação da imagem, o papel é aquecido para fundir o carbono na página.
- O tambor é limpo e recarregado para uma nova imagem.

O processo relativo à impressora a laser é bastante similar e difere do acima exposto apenas por criar uma imagem no tambor através de pulsos orientados por raios laser. Basicamente para cada ponto branco (ou seja, o complemento à imagem a ser impressa) um feixe a laser é produzido (o que é equivalente à etapa b acima), tornando a região correspondente condutora e portanto neutralizando as suas cargas. Assim, resta a parte escura ser impressa.

3.11.8 Ruptura de dielétricos

Entre as placas planas condutoras (conforme Fig. 3.29), submetidas a uma variação de potencial $V = 21 \text{ kV}$, estão confinados três materiais dielétricos cujas características são: material 1 com $\epsilon_{r1} = 2$ e $K_1 = 4 \text{ kV/mm}$; material 2 com $\epsilon_{r2} = 3$ e $K_2 = 4 \text{ kV/mm}$ e material 3 com $\epsilon_{r3} = 1$ e $K_3 = 4 \text{ kV/mm}$. Iremos calcular os campos E_1 , E_2 e E_3 nos materiais 1, 2 e 3, respectivamente, e verificaremos se haverá ruptura de dielétricos num ou mais materiais. Consideraremos que não há espraiamento de campo nas bordas das placas condutoras e que, portanto, o campo só terá componentes horizontais.

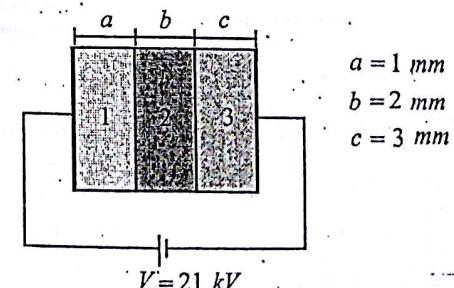


Figura 3.29 – Composição de três isolantes dielétricos

Sabendo que $|\vec{V}| = \int_L E dl$ temos

$$E_1 a + E_2 b + E_3 c = V$$

E, observando a continuidade da componente normal de indução elétrica,

$$D_1 = D_2; D_2 = D_3 \quad \text{ou} \quad \epsilon_{r1} E_1 = \epsilon_{r2} E_2 = \epsilon_{r3} E_3$$

substituindo os valores numéricos

$$E_1 + 2E_2 + 3E_3 = 21 \quad \text{e} \quad 2E_1 = 3E_2 = E_3$$

Mantivemos aqui as unidades mm e kV pois K é dado em kV/mm . A solução é imediata e temos $E_1 = 2,5 \text{ kV/mm}$; $E_2 = 1,68 \text{ kV/mm}$; $E_3 = 5,04 \text{ kV/mm}$. Haverá, portanto, ruptura no dielétrico 3, pois $E_3 > K_3$.

3.11.9 A vela para ignição de motores a explosão

Embora, em geral, atribuamos à ruptura de dielétrico um caráter nocivo, um exemplo contrário está presente no nosso dia-a-dia. Na vela de motores a explosão, a ruptura de dielétrico é favorável e indispensável para o seu funcionamento. O objetivo da vela é o de iniciar o processo de ignição da mistura ar-gasolina dentro do cilindro de um motor de carro (ou qualquer outro veículo ou dispositivo utilizando motor a explosão, excetuando os motores diesel). Na Fig. 3.30, temos esquematicamente uma vela de carro. Sua parte externa é, através da rosca de fixação, eletricamente conectada à carcaça do carro (ligada à "massa"), portanto num potencial 0 Volt. A sua haste interna, isolada da parte externa, está conectada a uma bobina elevadora de tensão. A rigidez dielétrica da mistura ar-gasolina é de aproximadamente 15 kV/mm . Sabendo que a distância entre os eletrodos é de $d=1 \text{ mm}$, calcularemos a tensão necessária na bobina.

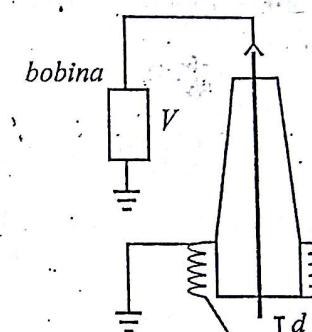


Figura 3.30 – Vela de ignição de motor a explosão

O cálculo do campo que se estabelece entre os eletrodos pode ser feito de forma aproximada através de $E = -\text{grad } V$, ou seja, o módulo de E será dado por $E = V/d$. Este cálculo é imediato e dá $V = Ed$. Como E , neste caso, deve ser igual, no mínimo a K , temos $V = 15 \text{ kV}$. Porém cabe salientar que normalmente se trabalha com campos que devem ter o dobro do valor de K , pois nos motores velhos geralmente óleo lubrificante se faz presente na mistura ar-gasolina e eleva consideravelmente sua rigidez dielétrica. Assim, na maior parte de motores modernos a tensão da bobina oscila entre 30 e 60 kV.

3.11.10 O capacitor esférico

Dado duas esferas condutoras de raios a e b , separadas por um dielétrico possuindo um $\epsilon_r = 2$, desejamos calcular a capacidade deste dispositivo, mostrado na Fig. 3.31.

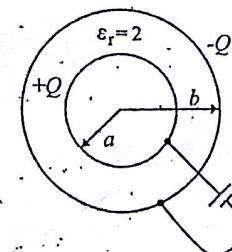


Figura 3.31 – Capacitor esférico

Calculemos o campo elétrico entre as duas esferas, utilizando o teorema de Gauss

$$\text{área da esfera } A = \frac{4}{3}\pi r^3 \\ dA = 4\pi r^2 \\ \text{esfera } S = 4\pi r^2$$

$$\int \epsilon E \cdot ds = q$$

onde a superfície S é a casca esférica de raio r , tal que $a < r < b$. Temos então:

$$\epsilon E \cdot 4\pi r^2 = Q \quad \text{e} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

Cabe salientar que em $r < a$ e $r > b$, o campo é nulo, pois em ambos os casos o somatório de cargas contido nas superfícies S correspondentes é nulo.

Para o cálculo de V , necessitamos E , que será obtida através da definição do vetor $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ como foi feito no início deste capítulo. Temos, conforme a Eq. (3.3)

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} \quad \left\{ \frac{dr}{r^2} = \left[r^{b-1} - r^{a-1} \right] \frac{1}{b-a} = \frac{1}{r^{b-a}}$$

V será então calculado com segue

$$|V| = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\epsilon r^3} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{(b-a)}{ab} \Rightarrow V = \frac{Q(b-a)}{4\pi\epsilon(ab)}$$

sendo $C = \frac{Q}{V}$ temos

$$C = \frac{4\pi\epsilon ab}{b-a}$$

como $\epsilon = 2\epsilon_0$ obtemos

$$C = \frac{8\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$

3.11.11 O capacitor esférico com duas camadas de dielétrico

Suponhamos que se deseje duplicar o valor de capacidade do dispositivo visto no exemplo anterior pela colocação de uma camada de um dielétrico possuindo um $\epsilon_r = 5$, como é mostrado na Fig. 3.32.

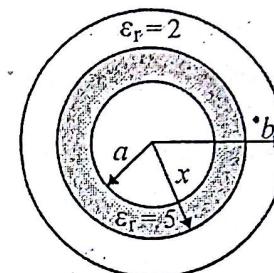


Figura 3.32 – Capacitor esférico com duas camadas de dielétrico

Calcularemos x em função de a para obter esta condição, assumindo que, neste exemplo, $b=2a$. Chamaremos C_1 , a capacidade do exemplo anterior:

$$C_1 = \frac{8\pi\epsilon_0 ab}{b-a} = 16\pi\epsilon_0 a$$

A colocação de uma camada do outro dielétrico nos leva a um dispositivo que pode ser assimilado a um conjunto de dois capacitores em série. De fato, nada nos impede que imaginemos na fronteira entre os dois dielétricos a presença fictícia de duas placas condutoras possuindo as cargas $+Q$ e $-Q$, como indica a Fig. 3.33.

$$C = 4\pi\epsilon \left(\frac{a \cdot b}{b-a} \right) \quad (3.29)$$

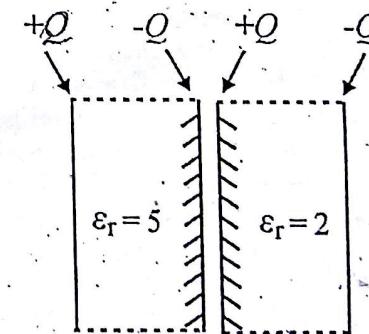


Figura 3.33 – Separação de dois dielétricos por uma lâmina hipotética de condutor

O capacitor C_2 será então constituído por dois capacitores C_2' e C_2'' em série cujas capacidades valem, conforme a expressão (3.29)

$$C_2' = \frac{20\pi\epsilon_0 ax}{x-a}$$

$$C_2'' = \frac{16\pi\epsilon_0 ax}{2a-x}$$

Sabendo que

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_2''} = \frac{x-a}{20\pi\epsilon_0 ax} + \frac{2a-x}{16\pi\epsilon_0 ax}$$

como C_2 , deve ser igual ao dobro de C_1 temos também que $\frac{1}{C_2} = \frac{1}{2C_1}$.

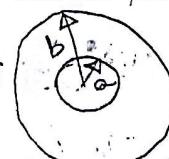
Substituindo os valores de C_1 e C_2 , obtemos:

$$x = 12a/7$$

3.11.12 A capacidade da Terra

Como visto no exemplo 3.11.5, cargas negativas estão presentes no solo terrestre ao passo que cargas positivas encontram-se na ionosfera. Vivemos, portanto, num imenso capacitor. O melhor modelo para o seu cálculo seria o capacitor de placas esféricas, sendo que a esfera interna teria o raio do planeta, 6370 Km, e a externa, o raio da ionosfera, 6395 km (considerando 25 km a altura da ionosfera em relação ao solo). Utilizando as notações do exemplo 3.11.10, temos $a=6370$ e $b=6395$ km. Com a Eq. (3.29) obtida acima

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 ab}{b-a}$$



e aplicando os valores numéricos chegamos à $C=0.18 F$, que é, portanto, a capacidade da Terra. Sabendo que a carga distribuída na superfície da Terra é de $Q=1.65 \times 10^6 C$, podemos avaliar a energia armazenada nesse "capacitor", que é dada por $W=Q^2/2C$, aproximadamente $W=7.5 \times 10^{12} J$. Isto equivale a energia de um milhão de baterias de 12 V e 100 Ah carregadas.

densidade linear dens. sup. dens. volumétrica
 $R = \rho L$ $\rho_s = \frac{\rho}{L}$ $\rho_v = \frac{\rho}{V}$

$$\rho = \rho_s L$$

3.12 EXERCÍCIOS

- 3.1) Seja um fio semi-infinito com densidade linear de carga ql . Calcule o campo elétrico E criado pelo fio no ponto P , conforme a Fig. 3.34.

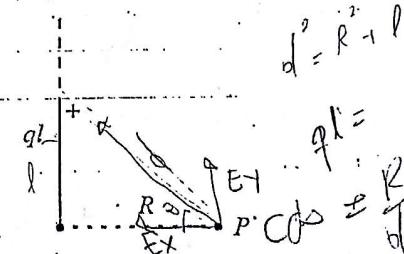


Figura 3.34

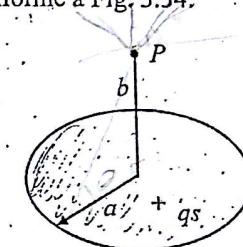


Figura 3.35

- 3.2) O disco da Fig. 3.35 é carregado com a densidade superficial de carga qs . Calcule o campo elétrico E no ponto P .

- 3.3) Dado o condutor filiforme da Fig. 3.36, carregado uniformemente com uma carga total Q , calcule o campo elétrico E no ponto P .

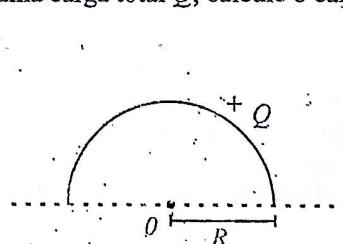


Figura 3.36

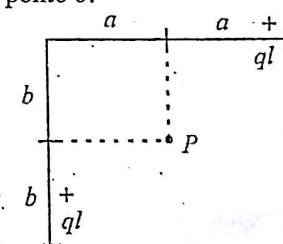


Figura 3.37

- 3.4) Na Fig. 3.37 temos dois condutores carregados com uma densidade linear de carga ql . Calcule E criado no ponto P .

- 3.5) Calcule o campo elétrico E criado por semi-esfera de raio R no ponto O , centro da esfera correspondente. Considere que esta semi-esfera possui uma carga Q uniformemente distribuída no seu volume.

- 3.6) Uma esfera de raio R é carregada com uma carga elétrica cuja densidade volumétrica $q_v(r)$ varia linearmente de tal forma que $q_v(0)=0$ e $q_v(R)=q_0$. Considere $\epsilon=\epsilon_0$ dentro e fora da esfera.

- a) Escreva a lei de variação de $q_v(r)$;

- b) calcule o campo $E(r)$ no interior e no exterior da esfera;
 c) trace o gráfico $E(r)$ indicando o valor de $E(R)$.
- 3.7) A calota esférica da Fig. 3.38 é carregada com uma densidade superficial de carga $q_s(\phi)$ que varia linearmente com o ângulo ϕ de tal forma que $q_s(0) = 0$ e $q_s(\pi/4) = q_0$.
- Obtenha a lei $q_s(\phi)$;
 - calcule o campo E no ponto P (centro da esfera).

Para a integração despreze os termos de ordem superior à 4 e considere as seguintes aproximações:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

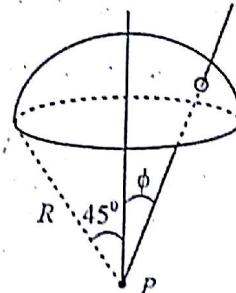


Figura 3.38

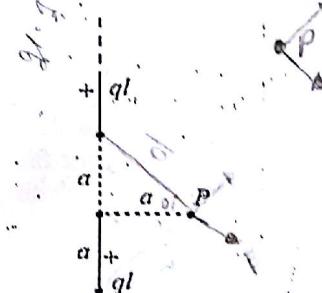


Figura 3.39

- 3.8) Calcule o campo elétrico no ponto P criado pelo fio da Fig. 3.39 carregado com uma densidade linear de carga ql .

- 3.9) Um fio semicircular de raio R na Fig. 3.40 é carregado com uma densidade linear de carga $q_l(\theta)$ que varia linearmente com o ângulo θ , de tal forma que $q_l(0) = 0$ e $q_l(\pi) = q_0$. Calcule o campo elétrico E criado no ponto O.

Obs: Para integração, utilizar a técnica de integração por partes.

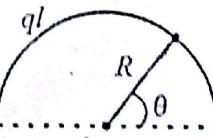


Figura 3.40

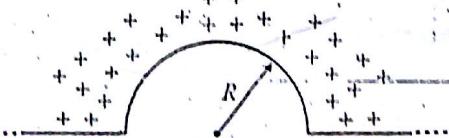


Figura 3.41

- 3.10) O semiplano infinito da Fig. 3.41 é carregado com uma densidade superficial de carga $qs(r) = \frac{\rho_0 R}{r}$, para $r > R$. Calcule o campo elétrico E no ponto P.

- 3.11) O segmento de fio da Fig. 3.42 é carregado com uma densidade linear de carga $ql(r) = \frac{q_0 R}{r}$. Calcule E criado no ponto P.

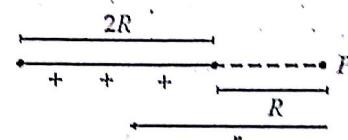


Figura 3.42

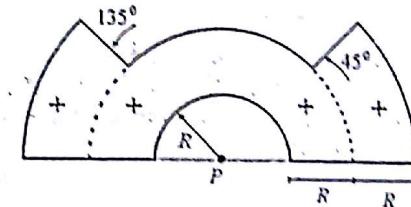


Figura 3.43

- 3.12) A Fig. 3.43 é planar e corresponde a um material carregado com uma densidade superficial constante de carga qs . Observe que o corte existe para $2R < r < 3R$ e $45^\circ < \theta < 135^\circ$. Calcule o campo E no ponto P.

- 3.13) Um esfera oca, apresentada em corte na Fig. 3.44 é carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ ; r representa um raio genérico. Considere $\epsilon = \epsilon_0$ em todo o domínio. Calcule E para:

- $r \leq R_1$;
- $R_1 < r \leq R_2$;
- $r > R_2$.

Construa o gráfico $E(r)$ indicando os valores de campo para $r = R_1$ e $r = R_2$.

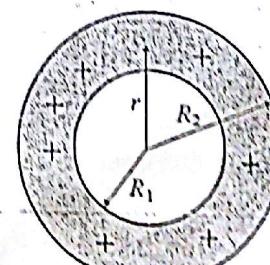


Figura 3.44

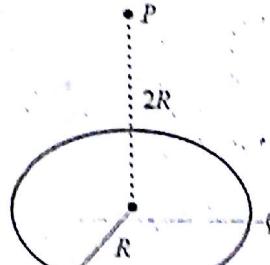


Figura 3.45

3.14) Calcule o campo E no ponto P criado por uma espira filiforme carregada com uma carga Q , conforme a Fig. 3.45.

3.15) O cilindro de raio R é infinito e é constituído por um material com $\epsilon = 2\epsilon_0$. Fora temos ar. Ele se encontra carregada com uma densidade volumétrica de carga que varia segundo $q_v(r) = \frac{q_0 r}{R}$. Calcule E para:

- $0 < r \leq R$;
- $r > R$;

Desenhe o gráfico $E(r)$ indicando o valor de $E(R)$. Explique a descontinuidade de E na fronteira entre cilindro e ar.

3.16) Uma calota semi-esférica, vista em corte na Fig. 3.46, possui uma densidade volumétrica de carga dada por

$$q_v(r, \phi) = \frac{q_0 R}{r} \sin\phi$$

sendo ϕ o ângulo relativo a coordenadas esféricas. Considerando $R_2 = 2R_1$ calcule o campo E criado em P .

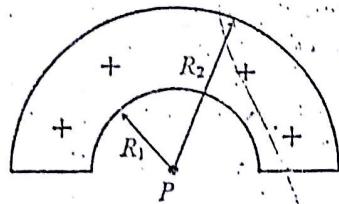


Figura 3.46

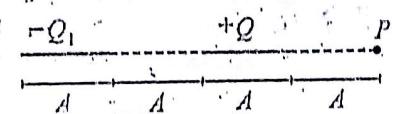


Figura 3.47.

3.17) As cargas $-Q_1$ e Q criam campos no ponto P mostrado na Fig. 3.47. Calcule o valor de Q_1 em função de Q para que E seja nulo no ponto P .

3.18) A coroa circular da Fig. 3.48 encontra-se carregada com uma densidade superficial de carga qs :

- Calcule o campo E no ponto P ;
- trace, de forma aproximada, a curva $E(z)$.

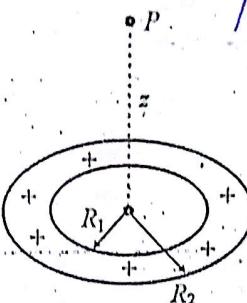


Figura 3.48

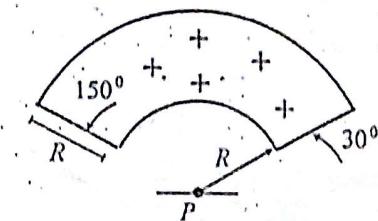


Figura 3.49.

3.19) A parcela de disco circular, mostrada na Fig. 3.49, existe para $30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$ e $R \leq r \leq 2R$ e se encontra carregada por uma densidade de carga que obedece à lei:

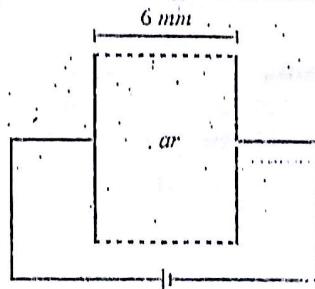
$$qs(\theta) = q_0 \cos\theta$$

Calcule o campo E criado em P .

3.20) Na situação da Fig. 3.50a, despreze o espalhamento do campo nas bordas das placas condutoras.

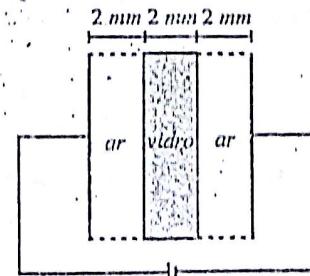
- Calcule o campo E entre as placas e verifique se há ruptura do dielétrico no ar;
- na Fig. 3.50b, é introduzida uma porcelana isolante na região central entre as placas; novamente calcule os campos no ar e vidro, e verifique se há ruptura nos dielétricos.

Dado: $K_{ar} = 3 \text{ kV/mm}$; $K_{vidro} = 4 \text{ kV/mm}$; $\epsilon_{ar} = \epsilon_0$; $\epsilon_{vidro} = 4\epsilon_0$.



$$V = 10 \text{ kV}$$

Figura 3.50a



$$V = 10 \text{ kV}$$

Figura 3.50b

3.21) Na Fig. 3.51, as placas condutoras estão submetidas a uma diferença de potencial de 4 kV. Entre elas temos uma combinação de dielétricos, cujos dados se encontram no desenho. Considere a aproximação segundo a qual os campos só possuem componentes horizontais e não há espraiamento. Para todos os dielétricos temos $K = 1.5 \text{ kV/mm}$.

- Calcule os campos E_1 , E_2 e E_3 nos dielétricos 1, 2 e 3;
- haverá ruptura de dielétrico? se houver, indique onde.

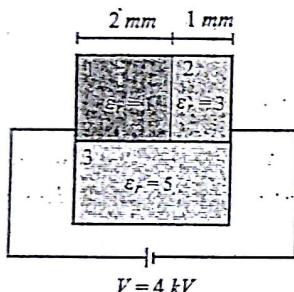


Figura 3.51

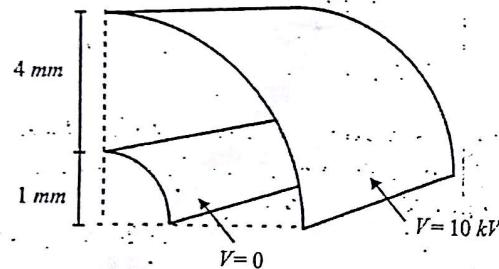


Figura 3.52

3.22) Considere duas placas infinitas de forma cilíndrica, conforme Fig. 3.52, submetidas aos potenciais indicados. Suponha que entre elas tenhamos ar ($\epsilon_r = 1$ e $K = 3 \text{ kV/mm}$). Despreze os efeitos de bordas.

- Calcule a expressão de $V(r)$ entre as placas (utilize a equação de Laplace relativa a V em coordenadas cilíndricas);
- calcule a expressão de $E(r)$;
- indique se haverá criação de arco elétrico entre as placas.

3.23) Uma linha de transmissão de 750 kV encontra-se numa região onde temos um transformador aterrado, como mostrado na Fig. 3.53. Calcule a distância d entre o transformador e a linha de tal maneira que o campo elétrico $|E|$ não exceda a 10% da rigidez dielétrica do ar ($K = 2 \text{ kV/mm}$).

Calcule $|E|$ de forma aproximada através de $|E| = |grad V|$.

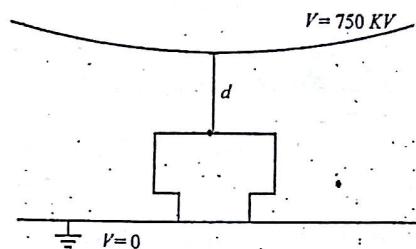


Figura 3.53

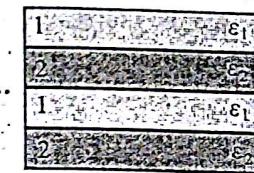


Figura 3.54

3.24) Na Fig. 3.54 temos um conjunto de lâminas finas de dois dielétricos 1 e 2 de permissividade ϵ_1 e ϵ_2 , respectivamente. São materiais isotrópicos mas, como conjunto, formam um material anisotrópico. A distribuição quantitativa é de n : (tal que $0 \leq n \leq 1$) para o material 1 e $1-n$ para o material 2. Usando as relações de conservação de componentes tangenciais de campo e componentes normais de indução elétrica, calcule as permissividades resultantes ϵ_x e ϵ_y para o conjunto.

Calcule ϵ_x e ϵ_y para $n = 0.98$ e $\epsilon_1 = 8$ e $\epsilon_2 = 1$.

3.25) O campo elétrico E atravessa a lâmina com $\epsilon_2 = 1$ como indicado na Fig. 3.55, onde os dados são fornecidos.

- Calcule o ângulo α ;
- calcule o desvio linear x que o campo incidente E sofre ao atravessar a lâmina.

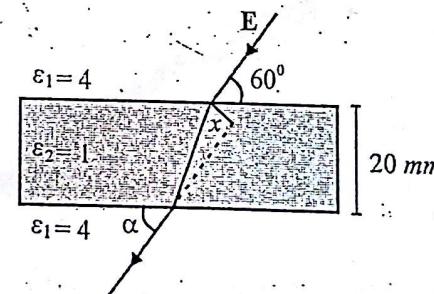


Figura 3.55

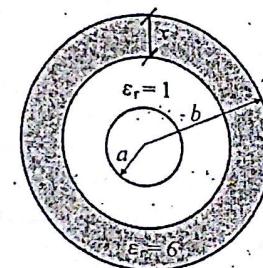


Figura 3.56

3.26) Calcule a capacidade de um capacitor constituído por dois cilindros de raios a e b ($a < b$) de altura h . O dielétrico colocado entre as placas condutoras possui $\epsilon_r = 1$. Despreze espraiamento (efeitos de borda).

3.27) Com o objetivo de aumentar a capacidade do capacitor do problema anterior, uma camada de espessura x de um dielétrico com $\epsilon_r = 6$ é aplicada junto ao cilindro-externo, conforme a Fig. 3.56. Calcule x para que o novo capacitor possua uma capacidade duplicada em relação ao capacitor original assumindo que $b = 2a$.

3.28) A capacidade de um capacitor de placas planas é $C = \epsilon S / d$ (ver parágrafo 3.9). Consideremos que para um dado capacitor seu dielétrico seja tal que $\epsilon = \epsilon_0$. Com o intuito de duplicar a sua capacidade, este dielétrico é parcialmente substituído por outro com $\epsilon = 4\epsilon_0$, conforme Fig. 3.57, sem que as dimensões do dispositivo sejam modificadas. Calcule a porção n de S que deve ser ocupada pelo segundo dielétrico.

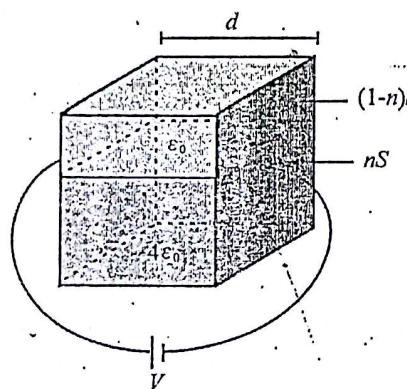


Figura 3.57

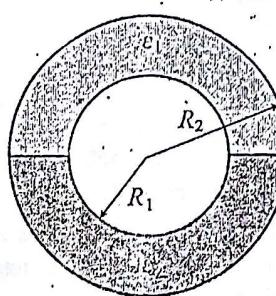


Figura 3.58

3.29) Calcule a capacidade C_1 do capacitor de placas esféricas de raios R_1 e R_2 com um único dielétrico $\epsilon_1 = \epsilon_0$ entre as placas.

3.30) Considere que metade do dielétrico original do caso acima é substituída por um outro, conforme Fig. 3.58, com $\epsilon_2 = n\epsilon_0$. Calcule n para que a nova capacidade C_2 seja o dobro de C_1 .

3.31) A capacidade de um capacitor de placas planas é $C = \epsilon S / d$. Considere que para um certo capacitor temos $\epsilon = \epsilon_0$. Suponhamos que se deseje duplicar a capacidade do dispositivo sem modificar suas dimensões externas, utilizando-se um dielétrico com $\epsilon = 6\epsilon_0$.

a) Calcule a porcentagem de S na qual deve ser colocado o segundo dielétrico, conforme Fig. 3.59a;

b) calcule a porcentagem de d na qual deve ser colocado o segundo dielétrico, conforme Fig. 3.59b.

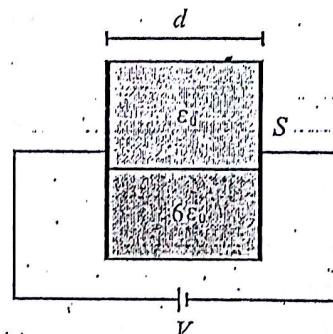


Figura 3.59a

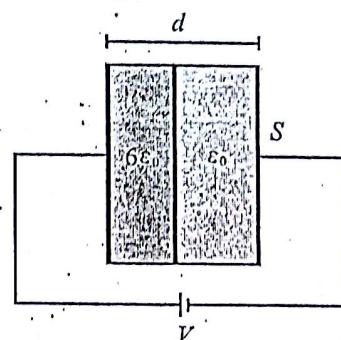


Figura 3.59b

3.32) a) Calcule a capacidade C_1 de um capacitor cilíndrico cujas placas condutoras possuem raios a e $3a$, altura h e ar ($\epsilon = \epsilon_0$) entre elas;

b) a fim de aumentar a capacidade, um dielétrico com $\epsilon = 10\epsilon_0$ e de espessura a é introduzido no dispositivo, conforme Fig. 3.60. Calcule a altura x em função de h , tal que obtemos a nova capacidade C_2 do conjunto tal que $C_2 = 2C_1$.

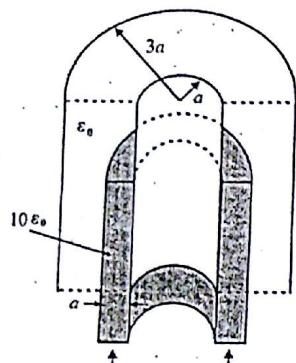


Figura 3.60

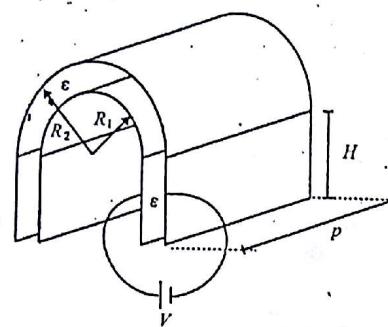


Figura 3.61

Obs: despreze o espalhamento de campos; para facilitar a visualização, somente metade da estrutura é mostrada na figura.

3.33) Calcule a capacidade do dispositivo da Fig. 3.61, desprezando efeitos de bordo do campo elétrico.

3.34) Calcule a capacidade do dispositivo da Fig. 3.62, sabendo que o material dielétrico possui $\epsilon = 3\epsilon_0$; despreze efeitos de bordo do campo elétrico.

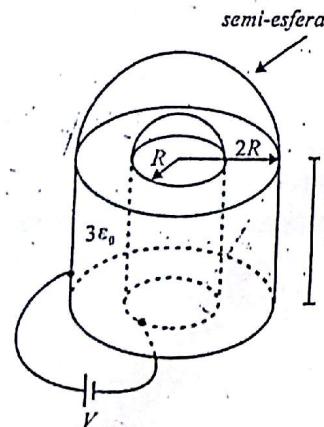


Figura 3.62

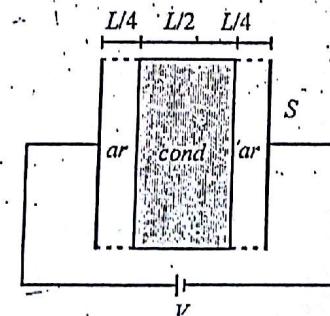


Figura 3.63

3.35)-Considere um cilindro infinito de raio R . Assumindo uma densidade volumétrica de carga ρ uniforme no mesmo, calcule E e V dentro e fora do cilindro. Assuma $\epsilon_r = 1$ dentro e fora do cilindro.

3.36) Num capacitor de placas planas, tendo inicialmente ar entre as placas, é colocado um material condutor, ocupando a metade do volume conforme Fig. 3.63. Calcule:

- O campo elétrico em função de V entre as placas antes da colocação do condutor;
- os campos elétricos no ar e no condutor;
- os valores de densidade superficial de carga no condutor;
- o valor da nova capacidade.

3.37) Em coordenadas cartesianas, no volume compreendido entre $z = -a/2$ e $z = a/2$ temos uma densidade volumétrica de cargas ρ e $\epsilon = \epsilon_0$. Fora deste volume não há cargas. Calcule E e V dentro e fora do volume.

3.38) A densidade volumétrica de carga dentro de uma esfera é dada por $\rho = kr^2$. Calcule E e V dentro e fora da esfera.

3.39) Duas placas condutoras paralelas estão separadas por 1 mm, com ar entre elas. Se um potencial de 100 V é aplicado entre elas, uma carga de $10^{-8} C$ se estabelece nas placas. Calcule a seção das placas.

3.40) Demonstre que $r^n \sin n\theta$, $r^n \cos n\theta$ e a soma destes termos é a solução da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas e em duas dimensões (n é um inteiro positivo ou negativo).

3.41) Utilize a equação de Poisson para calcular o potencial V na região compreendida entre duas placas paralelas infinitas, separadas por uma distância L . Os potenciais nas placas são 0 e V_0 e o espaço entre elas contém um densidade de carga $\rho = \rho_0 x$, sendo ρ_0 uma constante e x a distância medida a partir da placa aterrada, com $V = 0$. Calcule também a densidade superficial de carga nas duas placas (considere a permissividade ϵ constante na estrutura).

3.42) Utilizando a equação de Laplace calcule o potencial V entre duas esferas concêntricas separadas por ar. A esfera interna tem raio a e $V = V_0$, ao passo que a externa tem raio b e $V = 0$. Calcule também E .

3.43) Refaça o problema anterior, invertendo o potencial nas esferas, com $V = V_0$ na esfera externa e $V = 0$ na interna.

3.44) Utilizando o equacionamento adequado, calcule E , V e ρ_s -relativos ao caso apresentado na Fig. 3.13a.

Capítulo 4

MAGNETOSTÁTICA

4.1 INTRODUÇÃO

A Magnetostática é, como visto no Cap. 2, o Magnetismo aplicado a fenômenos estáticos, ou seja, quando as grandezas físicas não variam no tempo.

O Magnetismo, como o nome sugere, trata dos fenômenos associados a campos magnéticos, assim como na Eletrostática nos interessamos por campos elétricos. A grande importância do Magnetismo vem do fato de que campos magnéticos podem gerar forças mecânicas para inúmeras atividades do homem como locomoção, para o funcionamento de indústrias e inclusive à própria geração de eletricidade. Se nos perguntássemos se o campo elétrico poderia substituir o campo magnético na transformação eletromecânica de energia a resposta seria negativa. Embora possamos conceber motores baseados em campos elétricos, a densidade volumétrica de potência nos mesmos é muito baixa. Na realidade tais motores existem, porém são destinados a aplicações especiais que não requerem torques e potências volumétricas altas. Examinemos as expressões de densidade volumétrica de energia para campos elétricos e magnéticos. A

densidade volumétrica de energia para o campo elétrico é, conforme visto no Cap. 3, dada por:

$$W_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Para o campo magnético (como veremos neste capítulo), a expressão equivalente é:

$$W_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Para que tenhamos uma idéia quantitativa, utilizemos um campo elétrico muito intenso de $3 \times 10^6 \text{ V/m}$ (correspondendo ao campo de ruptura dielétrica no ar) e uma indução magnética (não muito intensa) de 1.0 T , de presença freqüente em inúmeras aplicações. Efetuando o cálculo das expressões acima percebe-se que $\frac{W_m}{W_e} \approx 10^6$. Isto evidencia que potências, forças e torques são grandezas que atingem valores muito mais intensos com campos magnéticos que com campos elétricos.

Neste capítulo abordaremos também os materiais magnéticos, tendo em vista que a presença dos mesmos, utilizados convenientemente, propiciam a criação de inúmeros dispositivos de grande eficácia com os quais lidamos no nosso dia-a-dia. A apresentação dos materiais magnéticos poderia constituir um capítulo separado. No entanto, sob o aspecto didático, nos parece adequado incluí-la neste capítulo, pois as aplicações estáticas do campo magnético no vázio são bastante restritas.

Num primeiro momento, a magnetostática pode parecer bastante limitada, tendo em vista que a grande maioria dos dispositivos eletromagnéticos possui movimento. Porém quando as correntes induzidas e a histerese podem ser desprezadas, o estudo de casos dinâmicos pode ser feito estaticamente "ponto a ponto". Ou seja, para cada ponto de funcionamento (no tempo correspondente) pode-se utilizar uma abordagem estática. Desta maneira, a composição dos resultados estáticos, calculados separadamente, poderá fornecer o comportamento dinâmico da estrutura em questão. Na prática, este é o procedimento geralmente adotado.

Veremos ainda neste capítulo, o conceito de indutância e, em certas passagens, a noção de tempo será utilizada, sem que isto venha afetar o propósito deste texto. Relembreamos que as equações de Maxwell para a Magnetostática são:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.1)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (4.3)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.4)$$

A relação $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ será de relevância quando tratarmos de problemas de correntes induzidas no próximo capítulo.

4.2 EQUAÇÕES DE MAXWELL NA MAGNETOSTÁTICA

4.2.1 A equação $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$

Esta equação indica qualitativa e quantitativamente a formação de \mathbf{H} a partir de \mathbf{J} . Relembremos que a sua expressão sob a forma integral é

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.5)$$

onde S é uma superfície aberta onde \mathbf{H} e \mathbf{J} estão definidos. Utilizando o teorema de Stokes, o lado esquerdo da expressão fica sendo

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\int_S (\text{rot} \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.6)$$

onde $L(S)$ é a linha que limita a superfície S . O lado direito de (4.5) representa o fluxo do vetor \mathbf{J} através de S , o que é a corrente de condução I atravessando S . Obtemos então

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (\text{Lei de Ampère}) \quad (4.7)$$

que indica que a circulação de \mathbf{H} ao longo de um caminho fechado $L(S)$ que envolve uma seção S é igual à corrente atravessando esta seção. A equação de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{H} = J$, escrita sob a forma acima é conhecida como "lei de Ampère".

Vejamos a aplicação desta equação no caso de um fio infinito percorrido por uma corrente I , conforme a Fig. 4.1. Escolhendo como seção S o círculo de raio R , a aplicação da lei de Ampère é simplesmente

$$I = \oint$$

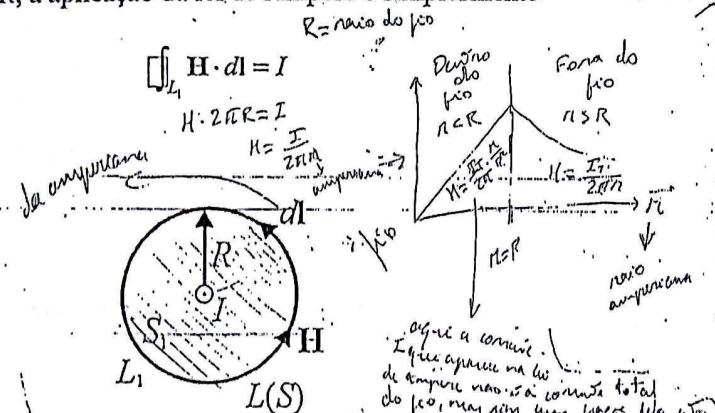


Figura 4.1 - Seção circular para cálculo de campo criado por um fio infinito

Sendo \mathbf{H} e dl vetores colineares e de mesmo sentido, o produto escalar $\mathbf{H} \cdot dl$ se transforma no produto dos módulos H e dl . Como, por uma questão de homogeneidade, H é idêntico em todos os pontos de L_1 , H não depende de L_1 , e a integração fica sendo

$$H \int_{L_1} dl = I \quad \text{ou} \quad H 2\pi R = I$$

Campo magnético criado por um fio infinito

$$H = \frac{I}{2\pi R} \quad (\text{A/m}) \quad (4.8)$$

Notamos que o fato de escolher S de tal maneira que dl coincida com \mathbf{H} fez com que a integração nos conduzisse facilmente à solução, observando que o módulo de \mathbf{H} é constante ao longo da linha.

Suponhamos agora que escolhêssemos a superfície S_2 indicada na Fig. 4.2a.

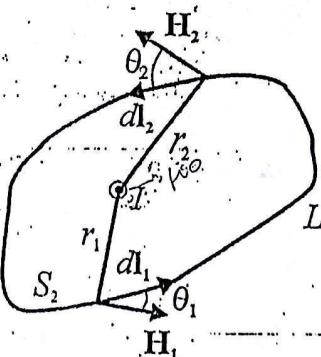
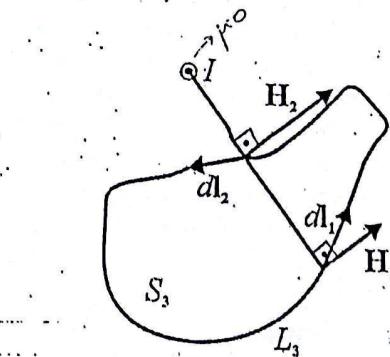


Figura 4.2a - Seção S irregular



4.2b - Seção passando fora do fio infinito

Sendo S_2 uma superfície de forma irregular, dividiríamos L_2 em n segmentos dl e teríamos

$$\oint_{L_2} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{l_1} \mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{l_2} \mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 + \dots + \int_{l_n} \mathbf{H}_n \cdot d\mathbf{l}_n$$

Notamos que para uma só equação temos n incógnitas. É importante salientar que a lei de Ampère é sempre válida mas, no caso específico desta superfície escolhida, sua aplicação, em vista de solucionar a equação acima, é praticamente impossível. Adiciona-se ainda a esta dificuldade o fato de que, sendo \mathbf{H} sempre tangencial em relação ao círculo cujo centro estaria no condutor, o produto escalar $\mathbf{H}_n \cdot d\mathbf{l}_n$ se torna $H_n dl_n \cos(\theta_n)$, fazendo aparecer o ângulo θ_n entre \mathbf{H}_n e $d\mathbf{l}_n$.

Poderíamos ainda escolher um outro tipo de seção, como S_3 mostrada na Fig. 4.2b, a qual não envolve o condutor. Temos então

$$H \int_{L_3} dl = 0$$

pois $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \cdot \cos(0^\circ) = 0$

Como I atravessando S_3 é nulo, teríamos $H = 0$? Na realidade, o \mathbf{H} criado pelo fio não depende da superfície S que escolhemos para aplicar a lei de

$$\text{Fig. 4.1: } \omega_1, 90^\circ; \omega_2, 180^\circ - \omega_1$$

Ampère, e portanto, tendo em vista a presença de $I \neq 0$ no condutor, \mathbf{H} será também diferente de zero. No entanto, observando a Fig. 4.2b verificamos que, por exemplo, $\mathbf{H}_1 \cdot d\mathbf{l}_1 > 0$ e que $\mathbf{H}_2 \cdot d\mathbf{l}_2 < 0$. Todas as parcelas $\mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ somadas nos levam a um valor nulo, sem que para tanto \mathbf{H} seja nulo.

Concluindo, salientamos que a lei de Ampère, originada de uma equação de Maxwell, é sempre válida, porém sua aplicabilidade nem sempre é factível.

Um aspecto também importante da equação $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, aparece quando aplicamos o divergente de ambos os seus lados. Obtemos, como já foi visto no Cap. 2, a equação

pag 50 e pag 67

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (4.9)$$

que é a equação da continuidade elétrica. Ela significa que a corrente de condução I , que é o fluxo do vetor \mathbf{J} , é conservativa; assim, a corrente que entra em um volume é a mesma que sai do mesmo.

4.2.2 A equação $\text{div } \mathbf{B} = 0$

Esta equação tem um sentido análogo à equação $\text{div } \mathbf{J} = 0$ acima, com a diferença que, neste caso, é o fluxo magnético que é conservativo. Notamos que esta equação não nos indica como \mathbf{B} é formado em função de \mathbf{J} , ao contrário da equação $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$. No entanto, a condição de fluxo conservativo deve ser conhecida, pois, como veremos nos próximos parágrafos, sua aplicação é necessária à resolução de certos problemas.

Cabe aqui fazer uma reflexão sobre as leis $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ e $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Vimos no final do parágrafo 1.6.3 que para definir um campo vetorial precisamos conhecer seu rotacional e seu divergente. Estas duas equações estabelecem uma associação extremamente sutil para a definição do campo \mathbf{H} (ou \mathbf{B}). Isto vem do fato de que numa temos \mathbf{H} e na outra \mathbf{B} , sendo que estas grandezas estão relacionadas entre si por $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. Desta forma, a permeabilidade magnética μ tem um papel importante na definição dos campos. Para uma primeira situação voltemos ao caso do fio infinito no espaço (Fig. 4.1) vista acima. Neste caso, sendo $\mu = \mu_0$ (portanto constante) temos $\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 \text{div } \mathbf{H} = 0$, o que resulta em $\text{div } \mathbf{H} = 0$. Assim, temos uma condição sobre o rotacional ($\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$) e sobre a divergência. Sendo esta última nula, o campo \mathbf{H} não possui componentes radiais como

mostrado na Fig. 4.1. Para um segundo caso, observemos as Fig. 4.3a e 4.3b. Na Fig. 4.3a temos um fio infinito no ar. O campo, obtido por análise numérica, apresenta a forma esperada, ou seja, totalmente tangencial. Na Fig. 4.3b é colocada no domínio uma peça de material com alta permeabilidade. Por sua própria natureza, a mesma irá atrair o fluxo magnético, fazendo com que apareçam componentes radiais de campo.

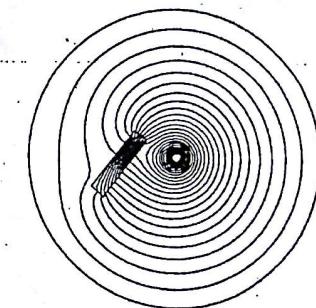
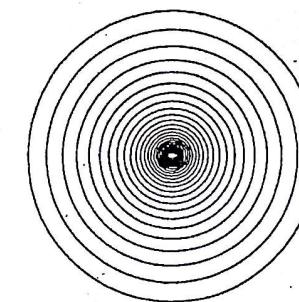


Figura 4.3a – Campo criado no ar

4.3b – Peça ferromagnética gera campos radiais

No entanto, o cálculo preciso mostra que a distribuição de campos continua respeitando a lei de Ampère ($\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$) e a condição de fluxo magnético conservativo ($\text{div } \mathbf{B} = 0$) pois, para qualquer volume fechado, o somatório de fluxos é nulo.

4.2.3 A equação $\text{rot } \mathbf{E} = 0$

Esta equação, caso particular de $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, nos indica que não há formação de campo elétrico \mathbf{E} devido a uma variação temporal de \mathbf{B} . Isto não significa que não haja campo elétrico no domínio de estudo do problema magnetostático em questão. Nada impede que o nosso domínio de estudo esteja inserido em um campo \mathbf{E} externo; mas esse não afetará as grandezas físicas dos fenômenos sob análise. Ou seja, no domínio não haverá formação de campo elétrico adicional devido aos dispositivos em estudo contidos neste domínio.

4.3 A LEI DE BIOT-SAVART

As três equações acima constituem o bloco principal da magnetostática. Podemos atribuir à lei de Ampère, oriunda de $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ uma significativa importância tendo em vista que é a única que associa o campo \mathbf{H} a sua fonte geradora \mathbf{J} . Porém, embora esta lei seja válida em qualquer circunstância, sua aplicação é restrita a poucos casos reais sem que aproximações sejam efetuadas. Uma de suas poucas aplicações exatas é o exemplo do fio infinito acima, admitindo que considerar o fio como sendo infinito não seja uma aproximação.

A lei de Biot-Savart é uma expressão que nos auxilia na obtenção de \mathbf{H} em função da corrente que o gera. É necessário notar que a lei de Biot-Savart, sob o aspecto conceitual, não acrescenta absolutamente nada às equações de Maxwell. Poderíamos considerá-la como uma variação algébrica da lei de Ampère. Esta lei foi proposta por Biot e Savart como uma lei experimental. Sua demonstração, feita posteriormente, é relativamente complexa, envolvendo grandezas eletromagnéticas ainda não apresentadas, e estimamos que não há interesse particular em efetuá-la aqui.

Cabe salientar que fora estas duas leis não há nenhum meio analítico de determinar o campo \mathbf{H} em função de \mathbf{J} . Somente os métodos numéricos, relativamente modernos, podem determinar \mathbf{H} em um bom número de casos, sem que tenhamos ainda meios de solucionar todos os problemas existentes.

Para apresentar a lei de Biot-Savart, observemos a Fig. 4.4, onde desejamos calcular o campo \mathbf{H} no ponto P criado pela corrente I passando por um condutor de forma qualquer. Esta lei é apresentada sob a forma diferencial abaixo:

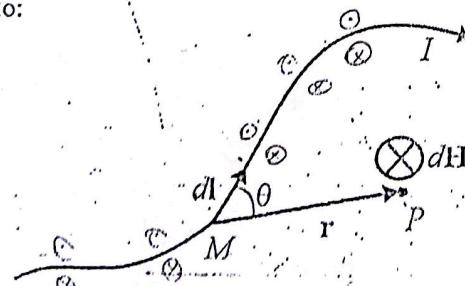


Figura 4.4 – Definição de vetores para aplicação da lei de Biot-Savart

$$\begin{aligned} & \text{PROD. VETORIAL} \\ & \mathbf{A} \times \mathbf{B} = A \cdot B \cdot \sin \theta \\ & \text{PROD. ESCALAR} \\ & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$d\mathbf{H} = I \frac{dl \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad d\mathbf{H} = I \frac{dl}{4\pi r^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad d\mathbf{H} = I \frac{dl}{4\pi r^2} \sin \theta \quad d\mathbf{H} = I \frac{dl}{4\pi r^2} \cos \theta$$

O fio é dividido em pequenos segmentos aos quais podemos associar o vetor dl , cujo sentido é o da corrente I . Devemos então definir o vetor \mathbf{r} como sendo $\mathbf{r} = \mathbf{P} - \mathbf{M}$. O somatório vetorial dos $d\mathbf{H}$ no ponto P nos fornecerá o campo \mathbf{H} criado pelo condutor percorrido por I .

No caso da Fig. 4.4, $d\mathbf{H}$ terá direção e sentido indicados nessa figura. Uma vez conhecida a direção de $d\mathbf{H}$, facilmente obtida pelo produto vetorial de $dl \times \mathbf{r}$, podemos calcular o módulo de $d\mathbf{H}$, que será

$$d\mathbf{H} = I \frac{dl}{4\pi r^2} \sin \theta \quad (4.11)$$

onde θ é o ângulo entre dl e \mathbf{r} . Esta lei permite o cálculo de \mathbf{H} mesmo se o condutor possuir uma forma irregular. Neste caso devemos decompô-lo em um número finito de segmentos e somar vetorialmente os $d\mathbf{H}$ obtidos. Pode-se fazer uma analogia com o que foi visto na Eletrostática: uma parcela de carga dQ produz um campo elétrico $d\mathbf{E}$ num ponto distante r da carga cujo módulo é $d\mathbf{E} = dq/(4\pi \epsilon_0 r^2)$. Da mesma forma, uma parcela dl de fio conduzindo uma corrente I produz um campo magnético $d\mathbf{H}$ num ponto distante r de dl dado por $d\mathbf{H} = I dl \sin \theta / (4\pi r^2)$, em módulo. Assim como na Eletrostática, o uso desta técnica é uma excelente ferramenta para resolver inúmeros problemas e casos reais de campo criado por correntes. Note-se que em se tratando de uma lei dada sob forma diferencial, não é difícil conceber um programa computacional que efetue estas operações automaticamente.

Podemos aplicar a lei de Biot-Savart, sob forma analítica, para um número significativo de estruturas. Vejamos, como exemplo, o cálculo de \mathbf{H} criado por um fio infinito percorrido por I em um ponto P distante R do mesmo. Para tanto, observemos a Fig. 4.5.

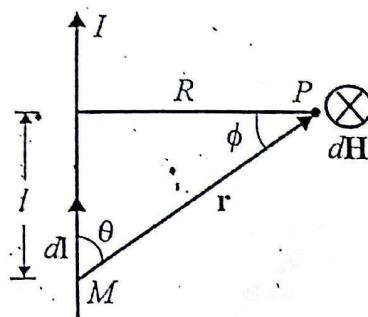


Figura 4.5 – Aplicação de Biot-Savart para um fio infinito

Notando que dH penetra no plano da Fig. 4.5, calculemos então

$$dH = \frac{I dl}{4\pi r^2} \sin\theta$$

ou

$$dH = \frac{I dl}{4\pi r^2} \cos\phi \quad (4.12)$$

Notando que

$$\tan\phi = \frac{l}{R} \quad \text{e} \quad \cos\phi = \frac{R}{r}$$

temos

$$dl = R \sec^2\phi d\phi \quad \text{e} \quad r = \frac{R}{\cos\phi}$$

$$JH = \frac{I}{4\pi} \cdot R \sec^2\phi d\phi \cdot \cos\phi = \frac{I}{4\pi} \cdot R \cdot \sec\phi d\phi \cdot \cos\phi = \frac{I}{4\pi} \cdot \frac{\omega R dd\phi}{R}$$

Substituindo estas expressões em (4.12), após simplificações temos

$$H = \frac{I}{4\pi R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi d\phi = \frac{I}{4\pi R} \cdot (u\mu_1 - u\mu_2)$$

$$H = \frac{I}{4\pi R} (1 - (-1)) = \frac{2I}{4\pi R} = \frac{I}{2\pi R}$$

Os limites de integração ($-\pi/2$ e $+\pi/2$), são os ângulos que ϕ assumirá correspondendo aos limites $-\infty$ e $+\infty$ do fio. Como resultado, obtemos

$H = I/2\pi R$, idêntico ao valor de H calculado pela lei de Ampère para a mesma situação. É evidente que o exemplo efetuado acima tem um interesse didático. A utilização da lei de Ampère é mais simples, e devemos sempre empregá-la quando possível. Porém, existem muitos casos em que somente a lei de Biot-Savart pode ser empregada, como veremos posteriormente.

4.4. A REFRAÇÃO DO CAMPO MAGNÉTICO

Assim como para o campo elétrico E , o campo magnético H também sofre uma variação angular na passagem de um meio 1 para um meio 2 que possuem, respectivamente, as permeabilidades μ_1 e μ_2 , conforme a Fig. 4.6.

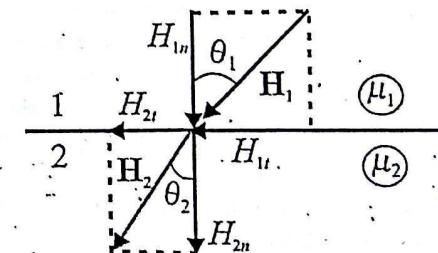


Figura 4.6 – Refração de campo magnético na passagem de meios

As equações de Maxwell a serem utilizadas são $\text{rot}H = J$ e $\text{div}B = 0$. Vejamos inicialmente a primeira delas e imaginemos a fronteira entre os materiais 1 e 2, conforme a Fig. 4.7.

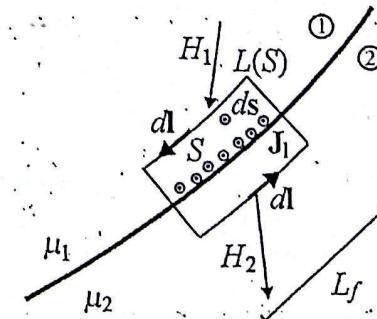


Figura 4.7 – Refração de campo magnético com presença de corrente na interface

Consideraremos que existe uma película de corrente infinitamente próxima à fronteira definida por sua densidade linear de corrente J_l (dada em A/m). A superfície escolhida S é infinitamente próxima da fronteira e possui comprimento L_f .

Temos então, pela lei de Ampère: $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$:

$$\oint_{(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

I é a corrente que atravessa S que, neste caso, é $J_l L_f$. A circulação de \mathbf{H} , conforme o que já foi visto para \mathbf{E} no Cap. 3 é, já igualando com I ,

$$H_{1t} L_f - H_{2t} L_f = J_l L_f$$

e temos

$$H_{1t} - H_{2t} = J_l$$

No caso em que J_l é igual a zero, a relação entre θ_1 e θ_2 pode ser obtida utilizando as equações

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0 \quad \text{e} \quad \text{div} \mathbf{B} = 0$$

assumindo que não existam correntes na fronteira entre os meios.

Utilizando as equações acima de maneira análoga ao que é feito com as equações $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ e $\text{div} \mathbf{D} = 0$ no capítulo precedente, obtemos resultados equivalentes, ou seja:

- há conservação do campo tangencial: $H_{1t} = H_{2t}$

- há conservação da indução normal: $B_{1n} = B_{2n}$

Assim podemos escrever

$$\tan \theta_1 = \frac{H_{1t}}{H_{1n}} \quad \text{e} \quad \tan \theta_2 = \frac{H_{2t}}{H_{2n}}$$

e

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{H_{2n}}{H_{1n}}$$

Lembrando que $H = B/\mu$, obtemos

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (4.13)$$

Como veremos à seguir, existem meios que possuem μ muito elevados. Em contato com meios possuindo baixos μ , temos variações importantes de permeabilidade. Suponhamos, por exemplo, que $\mu_2 = \mu_0$, $\mu_1 = 1000\mu_0$ e que θ_1 é 85° . Então

$$\tan \theta_2 = \frac{\tan 85^\circ}{1000}$$

ou

$$\theta_2 = 0,65^\circ$$

O efeito é mostrado aproximadamente na Fig. 4.8. Notamos que, ao contrário dos campos elétricos, esta variação angular é muito forte. Como exemplo, citemos que o campo \mathbf{H} na passagem da fronteira entre o ferro ($\mu = 1000\mu_0$) e o ar ($\mu = \mu_0$) sofrerá uma variação angular tal que, na zona do ar, ele será praticamente perpendicular à fronteira com o ferro.

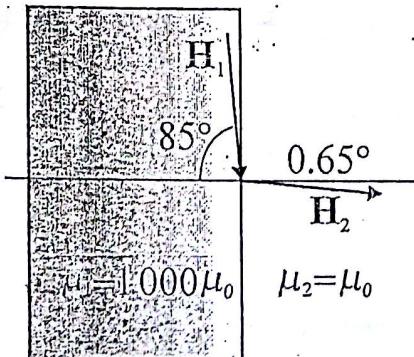


Figura 4.8 – Passagem de campo do ferro para o ar

Nas Figs. 4.9a e 4.9b, notamos a variação angular de campos elétricos ($\epsilon_2/\epsilon_1=5$) e campos magnéticos ($\mu_2/\mu_1=1000$). Estes exemplos foram obtidos através do sistema EFCAD.

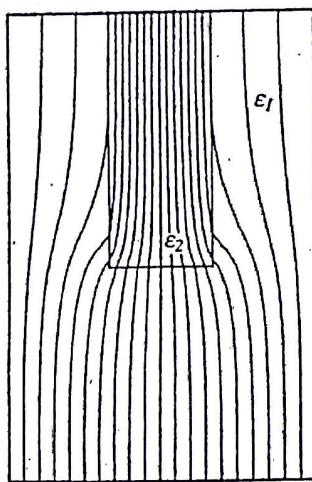


Figura 4.9a – Variação pequena de ϵ

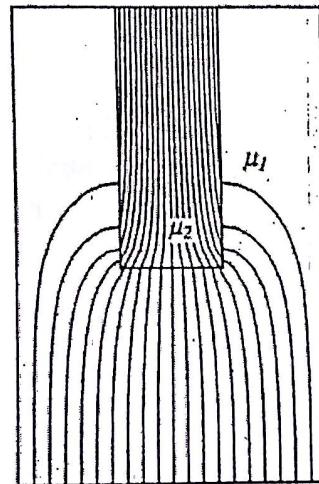


Figura 4.9b – Variação elevada de μ

4.5 OS MATERIAIS MAGNÉTICOS

Relembremos que a permeabilidade relativa de um certo material é

$$\mu_r = \frac{\mu \rightarrow \text{do meio}}{\mu_0 \rightarrow \text{do ar}}$$

onde μ é permeabilidade real do meio e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ é a permeabilidade do ar. Assim, μ_r do ar é igual a 1.

Existem basicamente dois tipos de materiais magnéticos. São eles:

- a) meios doces (ou moles): diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos

b) meios duros: ímãs permanentes

Não é nosso objetivo analisar a estrutura destes meios sób o aspecto molecular. Veremos apenas como eles se comportam sob o ponto de vista macroscópico.

4.5.1 O diamagnetismo

Estes meios têm uma permeabilidade relativa um pouco abaixo de 1. Citemos os principais casos: mercúrio, ouro, prata, cobre. O cobre, por exemplo, tem $\mu_r = 0.999991$; os outros possuem μ_r na mesma ordem de grandeza. Na prática, podemos considerar que o μ_r destes meios é praticamente igual a 1. Um efeito do diamagnetismo pode ser ilustrado na Fig. 4.10.

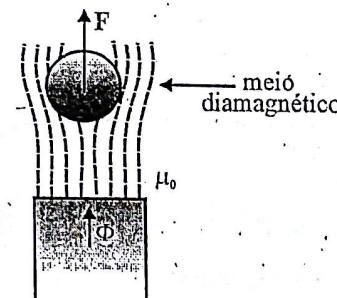


Figura 4.10 – Fluxo magnético em meio diamagnético

*que Mar. não
que Mar. não
 $\mu_r < 1 \Rightarrow \mu_r < \mu_0$*

Se colocarmos um meio diamagnético sob a ação de um campo uniforme, tendo em vista que $\mu_r < 1$ o fluxo passará preferencialmente pelo ar, que é um meio mais permeável. Isto faz com que (como será visto no Cap. 6) apareça uma força de repulsão entre o corpo e a fonte geradora de campo. No entanto, como a relação de permeabilidades é muito próxima de 1, este efeito será de intensidade muito fraca, e dificilmente mensurável.

4.5.2 O paramagnetismo

Os materiais paramagnéticos possuem um μ_r muito próximos de 1, porém superiores a 1. Citemos como exemplo, o alumínio, onde $\mu_r = 1.000021$. Assim, como para os meios diamagnéticos, podemos

considerá-los como possuindo $\mu_r = 1$, pois os efeitos práticos devido ao paramagnetismo são, geralmente, desprezíveis.

4.5.3 O ferromagnetismo

4.5.3.1 Apresentação geral

Os materiais-ferromagnéticos possuem μ_r muito superior a 1. Como veremos a seguir, são meios de extrema importância em dispositivos eletromagnéticos, devido aos seus altos valores de μ_r . Citemos, por exemplo, que o ferro com 0,2% de impureza possui μ_r em torno de 6000.

Algumas ligas de ferro chegam a $\mu_r = 10^6$. É interessante notar que, se um meio ferromagnético estiver em um ambiente aquecido, e se a temperatura ultrapassar um valor crítico, chamado "temperatura Curie", este meio passa a ter o comportamento de um material paramagnético. Cada meio possui a sua própria "temperatura de Curie"; para o ferro, este valor é de aproximadamente 770°C. Outra característica deste tipo de material é o fenômeno da "saturação", ou seja, o μ_r dependerá do módulo do campo magnético $|H|$ que estiver aplicado no material; este fenômeno, também chamado de "não-linearidade" pode ser facilmente explicado com a ajuda da Fig. 4.11. Nesta figura temos um circuito magnético feito com um meio onde μ_r possui um valor muito alto. Inserimos neste circuito uma amostra de um meio ferromagnético do qual desejamos obter as características magnéticas.

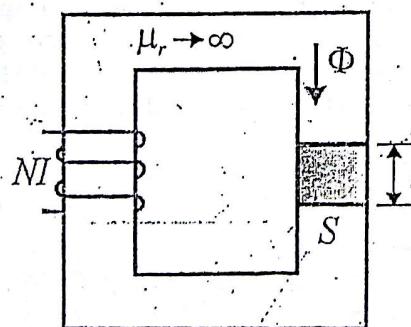


Figura 4.11 – Circuito magnético com uma amostra de material ferromagnético

Veremos a seguir que $H = NI/l$, e, notando que $B = \Phi/S$, podemos medir a corrente I imposta na bobina e o fluxo Φ que atravessará o meio. Partindo de um valor baixo de I , notamos que Φ aumenta proporcionalmente com o valor de I . A partir de um certo valor de I observamos que Φ não aumentará na mesma proporção que I . Como H e B são diretamente proporcionais à I e Φ obtemos o gráfico mostrado na Fig. 4.12:

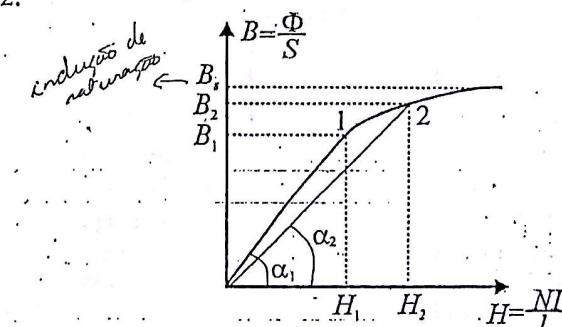


Figura 4.12 – Comportamento do fluxo magnético em meios ferromagnéticos

B_s , indicado nesta figura, é chamado "indução de saturação". Cabe salientar que uma curva característica de um material magnético é sempre $B(H)$, pois na curva $\Phi(I)$ está implícita a ideia de dimensões (S, n, l) que particularizam o meio a uma estrutura particular. Portanto, $B(H)$ é a curva fornecida pelo fabricante do material, pois é válida para qualquer forma e tamanho da amostra do meio.

Podemos também obter a curva da permeabilidade de um meio em função de H . Lembrando que $B = \mu H$, o cálculo da tangente de um ângulo α , indicado na Fig. 4.12, nos fornece μ , pois $\tan \alpha = B/H = \mu$.

$$\begin{aligned} B &= \mu \cdot H \\ Y &= Cx + b \\ &\text{com } \text{angulo} \end{aligned}$$

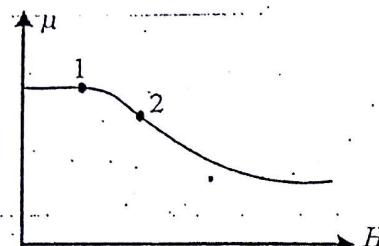


Figura 4.13 – Permeabilidade em função do campo magnético

Nota-se que até o ponto 1, a tangente é a mesma. A partir deste ponto, α começa a diminuir ($\alpha_2 < \alpha_1$); portanto, a permeabilidade diminui. Na Fig. 4.13, temos a curva $\mu(H)$ correspondente. Desta forma, a saturação magnética é acompanhada de uma diminuição de permeabilidade. Na realidade, no início da curva $B(H)$ há uma variação de α não apresentada. Porém, como os dispositivos eletromagnéticos bem dimensionados trabalham em relativa saturação, (longe do início da curva), podemos, em geral, desprezar esta perturbação:

Para uma melhor compreensão do fenômeno da saturação, Weiss, em 1906, introduziu o conceito dos “domínios de Weiss”. Eles são pequenos (entre 10^{-3} e $10^{-6} m$) e cada volume contém, em média, 10^{16} átomos. Um domínio de Weiss possui uma direção predominante de campo magnético, oriunda do alinhamento natural dos spins de elétrons. Os diferentes domínios estão, no entanto, alinhados de forma randômica, resultando num campo praticamente nulo no material.

Uma particularidade dos materiais ferromagnéticos é que a aplicação de um campo magnético externo numa amostra faz com que os domínios se alinhem e se chegue ao valor M_s (magnetização de saturação). Este valor de campo H é da ordem de $80 A/m$. Se o mesmo fosse aplicado ao ar, teríamos $B = \mu_0 H$; porém num material ferro magnético temos a magnetização adicional dos domínios, ou seja, $B_s = \mu_0 (H + M_s)$. No caso do ferro B_s , indução de saturação, é de aproximadamente $1.3 T$. Podemos então calcular:

$$M_s = \frac{B_s}{\mu_0} - H = \frac{1.3}{4\pi 10^{-7}} - 80 = 10^6 - 80 \approx \frac{B_s}{\mu_0}$$

Assim, mostramos que o campo H contribui muito pouco para a magnetização M_s ; porém ele é fundamental para o alinhamento dos domínios, sem o qual M_s seria nulo. De fato quando fazemos $H=0$, os domínios voltam ao seu arranjo randômico.

Caso coloquemos um meio ferromagnético sob a ação de um campo magnético, observaremos a situação da Fig. 4.14. Como seu $\mu_r \gg 1$, o fluxo magnético será fortemente atraído pelo material ferromagnético, que é um meio mais permeável. Nota-se experimentalmente que neste caso o corpo será atraído. A explicação deste fenômeno será vista posteriormente no Cap. 6.

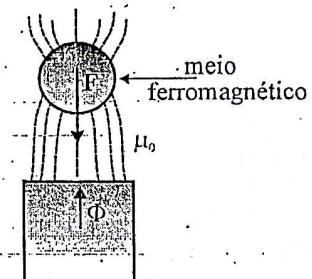


Figura 4.14 – Fluxo atraído pelo material ferromagnético

4.5.3.2 A influência do ferro em circuitos magnéticos

Um fio infinito percorrido por uma corrente I , cria num ponto do espaço um campo que, como já visto, tem módulo $H = I/2\pi r$, sendo r a distância do ponto ao fio. A corrente do fio I pode ser chamada força magnetomotriz (fmm) pois é capaz de gerar um campo magnético. Imaginemos a situação, mostrada na Fig. 4.15, onde envolvemos o mesmo fio por um meio ferromagnético, possuindo um alto valor de μ_r .

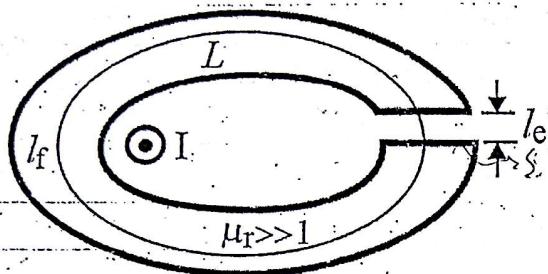


Figura 4.15 – Linha de campo magnético em torno de um fio com a presença do ferro

Suponhamos também que este circuito possua uma ruptura física; a zona relativa a esta ruptura será chamada entreferro. Para o cálculo do campo utilizaremos a lei de Ampère.

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I$$

Escolhendo um L que coincida com o campo \mathbf{H} , dividiremos o mesmo em l_f no ferro e l_e no entreferro; a expressão acima se transforma em

$$\int_{l_f} \mathbf{H}_f \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_e} \mathbf{H}_e \cdot d\mathbf{l} = I$$

Assumindo que os campos sejam constantes nas suas respectivas regiões, obtemos

$$H_f l_f + H_e l_e = I \quad (4.14)$$

Havendo duas incógnitas nesta equação, precisamos estabelecer uma outra equação que é obtida pela consideração segundo a qual o fluxo Φ_f no ferro é idêntico ao fluxo Φ_e no entreferro

$$\Phi_f = \Phi_e \quad \text{ou} \quad \mu_f H_f S_f = \mu_0 H_e S_e$$

sendo S_f e S_e as seções transversais no ferro e entreferro (perpendiculares ao plano da figura). Supondo que estas possuam aproximadamente o mesmo valor, temos que

$$H_f = \frac{\mu_0}{\mu_f} H_e \quad (4.15)$$

e, portanto, $H_f \ll H_e$. Com Eq. (4.15) em (4.14),

$$\frac{\mu_0}{\mu_f} H_e l_f + H_e l_e = I$$

$$\frac{\mu_0}{\mu_f} H_e l_f + H_e l_e = I$$

$$H_e = \frac{I}{\frac{\mu_0}{\mu_f} l_f + l_e} \leftarrow H_e \left(\frac{\mu_0}{\mu_f} l_f + l_e \right) = I \quad (4.16)$$

Como $\mu_f \gg \mu_0$, temos $H_e = I/l_e$. Se o circuito estiver muito saturado, esta aproximação não é válida.

Supondo que $I = 10A$ e que $l_e = 1mm$ (valor típico de entreferro em estruturas eletrotécnicas) obtemos $H_e = 10000 A/m$. Voltando ao caso do fio no espaço, mencionado no início do parágrafo, calculando também para $I = 10A$ o campo criado a 1 mm (distância muito próxima ao fio) pela expressão $H = I/2\pi r$, obtemos $H = 1591 A/m$, valor significativamente menor que $H_e = 10000 A/m$.

Como conclusão, observamos os seguintes fenômenos relativos à presença de meio ferromagnético em circuitos magnéticos:

a) modificação da forma da indução magnética e condução do fluxo à região onde sua presença é necessária;

b) a criação de campos de alta intensidade na região de entreferro. Veremos, no Cap. 6, que as forças de origem magnéticas dependem quadraticamente de H , o que majora o interesse de campos intensos;

c) a circulação do campo no meio ferromagnético é desprezível se $\mu_f \gg \mu_0$ pois $H_f \ll H_e$ e temos que praticamente toda fmm é aplicada no entreferro, donde

$$B = \mu_0 H \quad H_f = \frac{B_f}{\mu_f} \quad H_e = \frac{B_e}{\mu_0}$$

$$H_f \ll H_e$$

Assim, entreferro com uma seção menor que em qualquer circuito, é mais eficiente que no ferro, a qual é menor.

Introduzindo a equação (4.17) na equação (4.16), obtemos

$\int_{l_e} H_e \cdot d\mathbf{l} \approx nI$

supondo que ao invés de um só fio, tenhamos n fios.

$$I = R \cdot V$$

4.5.4 Os ímãs permanentes

4.5.4.1 Apresentação geral dos materiais duros

Relembremos que classificamos os materiais magnéticos como abaixo:

– Materiais doces ou moles: são materiais que, uma vez anulado o campo magnético neles aplicado, não guardam uma indução "remanente" significativa. São meios "passivos" à presença de campo magnético. Caso o campo externo varie em módulo ou direção, o mesmo acontecerá com o campo no interior deste meio, sem praticamente nenhum efeito de retardamento. Todos os meios apresentados até aqui são deste tipo.

– Materiais duros: são meios que, ao contrário dos meios doces, guardam uma indução remanente significativa, uma vez que o campo externo é extinto. Os materiais duros são também chamados ímãs permanentes. O funcionamento magnético de um ímã pode ser descrito com a ajuda das Figs. 4.16a e 4.16b.

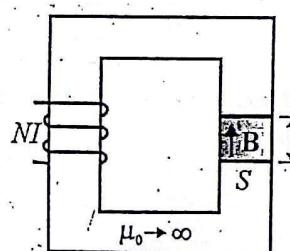


Figura 4.16a – Circuito magnético com ímã

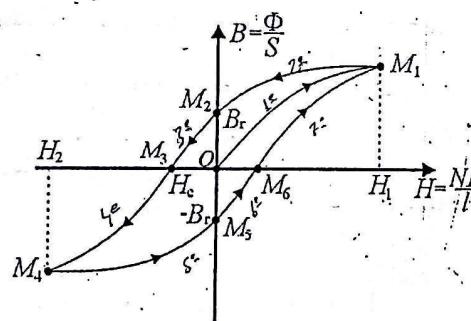


Figura 4.16b – Curva de $B(H)$ para ímã

Suponhamos que nosso circuito magnético (Fig. 4.16a) seja constituído por um material ferromagnético com alta permeabilidade. No entreferro do circuito é colocado o material duro, mas que não tenha sido ainda submetido à ação de qualquer campo-magnético. Observemos que H criado no entreferro, portanto no ímã, é proporcional a I , pois $H = NI/l$ e que B no ímã é proporcional ao fluxo mensurável Φ , pois $B = \Phi/S$.

Acompanhemos então as diferentes etapas no ciclo de funcionamento do ímã.

$$\begin{aligned} J\Phi &= B\delta S \\ J\Phi &= B(S - \delta S) \\ J\Phi &= BS - J\delta S \\ J\delta S &= BS - J\Phi \\ J\delta S &= NI - J\Phi \\ J\delta S &= NI - J(NI/l) \\ J\delta S &= NI - NJ(l/N) \\ J\delta S &= NI - NJ \\ J\delta S &= NI(1 - J/l) \end{aligned}$$

a) inicialmente, agindo sobre a corrente I , fazemos H passar de zero a H_1 . A curva percorrida será OM_1 , chamada curva de "primeira imantação";

b) diminuímos H de H_1 até zero, (M_1 à M_2), ou seja, fazemos $I = 0$; é neste momento que aparece a característica intrínseca dos meios duros, pois o ímã guarda uma imantação remanente considerável, indicada como B_r , na Fig. 4.16b.. Notemos que, neste momento, onde $I = 0$, há um fluxo circulando no circuito magnético devido ao B_r do ímã;

c) colocamos corrente I no sentido contrário, fazendo com que H passe de zero à H_c , (trecho $M_2 M_3$). No campo H_c , o fluxo do ímã é idêntico em módulo, mas contrário ao fluxo gerado pela bobina; não há fluxo no circuito magnético e $B = 0$. Este campo H_c é chamado "campo coercitivo" ou "campo coercivo";

d) se continuássemos o ciclo ($M_3 M_4 M_5$), novamente criariamos uma indução remanente B_r no ponto M_5 com sentido contrário ao B_r do ponto M_2 .

Este ciclo é chamado ciclo de histerese, cuja área interna é significativa para os meios duros. Os materiais ferromagnéticos doces também possuem um ciclo de histerese, porém a área contida no ciclo é relativamente pequena.

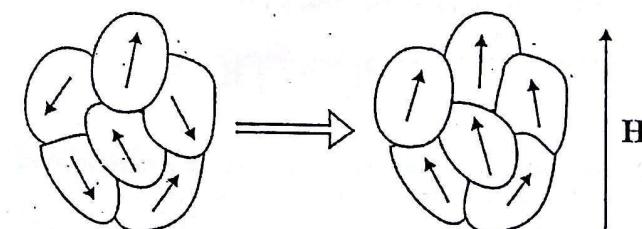


Figura 4.17 – Domínios de Weiss sendo alinhados pela presença de um campo externo

Voltando ao conceito dos domínios de Weiss, mostrados na Fig. 4.17, uma vez que H é extinto nos materiais duros, os campos dos domínios tenderão a se manter na mesma situação de alinhamento. A ação conjunta dos "domínios de Weiss" formará a indução remanente do ímã.

Nos materiais doces, a situação é aproximadamente a mesma, porém a aplicação de um pequeno campo externo no sentido contrário será suficiente para eliminar esta indução remanente, ao contrário do ímã.

Um ímã é definido por sua curva no segundo quadrante (trecho M_2 à M_3 , da Fig. 4.16b), reproduzida aqui na Fig. 4.18. Esta curva, em geral

conhecida ou fornecida pelo fabricante, nos indica a indução remanente B_r , o campo coercitivo H_c bem como sua própria forma entre estes dois pontos. Seu objetivo é definir como a indução do ímã varia em função do campo existente em seu interior. Vejamos, então, porque ela é representada no segundo quadrante. Na Fig. 4.19 destacamos uma linha de campo de um ímã no ar. Aplicando a lei de Ampère, calcularemos a circulação de H ao longo do seu caminho L , e onde l_i e l_e são suas partes interna e externa.

$$\oint_L H \cdot d\ell = 0 \quad (\text{não há correntes}) \quad \text{e} \quad \int_{l_i} H_i \cdot d\ell + \int_{l_e} H_e \cdot d\ell = 0$$

Notamos então que H_i tem obrigatoriamente o sentido oposto de H_e no caminho de circulação, visto que os produtos escalares devem ter soma nula, conforme é mostrado na Fig. 4.19. Nesta análise qualitativa assumiremos que os campos são uniformes em suas parcelas de caminho (l_i e l_e) respectivas. Temos então

$$H_i = -H_e \frac{l_e}{l_i}$$

com o sentido mostrado na figura.

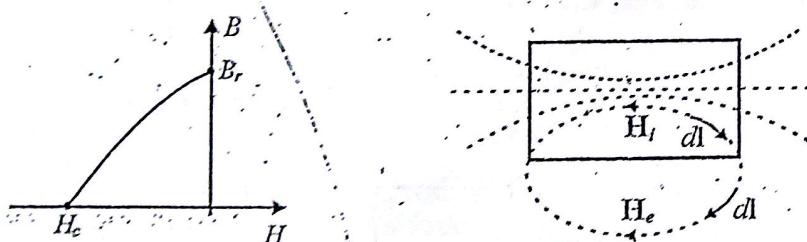


Figura 4.18 – Curva no segundo quadrante

Figura 4.19 – Circulação de campo

No entanto, como há conservação de fluxo, as induções magnéticas B_i e B_e estão obrigatoriamente no mesmo sentido, em relação ao caminho de circulação. Por outro lado, como no ar B e H possuem a mesma direção e sentido ($B = \mu_0 H$), a situação de B e H no ímã é na zona que o envolve é obrigatoriamente como mostrado na Fig. 4.20; constatamos que no interior do ímã H e B possuem sentidos contrários.

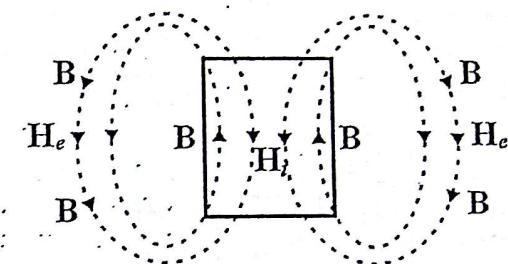


Figura 4.20 – Posicionamento de induções e campos magnéticos nas regiões interna e externa do ímã

Adicionalmente, constatamos que a permeabilidade aparente do ímã é negativa, visto que $H < 0$ e $B > 0$, conforme a curva da Fig. 4.18 situada no segundo quadrante.

4.5.4.2 A energia associada a um ímã

É concébivel que, existindo um campo magnetostático, exista também uma energia de ordem magnética associada a este campo representando o trabalho necessário para a sua criação. Se o campo é definido num volume V , adiantaremos aqui que esta energia é dada pela expressão

$$W = \int \frac{1}{2} HB dV \quad (4.18)$$

que será demonstrada abaixo. Esta expressão é também válida para o ímã, e consideraremos como volume V o tubo de fluxo mostrado na Fig. 4.21, possuindo uma parte interna V_i e uma externa V_e . O fluxo definido neste tubo é $d\Phi$.

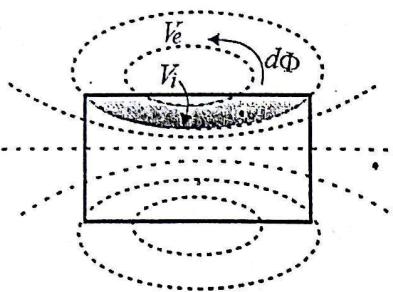


Figura 4.21 – Fluxo criado por um ímã permanente

Sendo ds a seção do tubo e dl uma parcela elementar do seu comprimento, podemos escrever que $dv = dsdl$. Temos então:

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_i} H dl \cdot B ds + \frac{1}{2} \int_{V_e} H dl \cdot B ds$$

Substituindo $d\Phi$ por seu valor oriundo da integração da indução magnética B , temos

$$W = \frac{1}{2} d\Phi \int_{l_i} H dl + \frac{1}{2} d\Phi \int_{l_e} H dl$$

sendo l_i e l_e os caminhos de circulação interno e externo, sob forma vetorial obtemos:

$$W = \frac{1}{2} d\Phi \left[\int_{l_i} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} + \int_{l_e} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right] = \frac{1}{2} d\Phi \int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$$

Como não há corrente, temos pela lei de Ampère que $W = 0$ significando que a soma das energias interna (em V_i) e externa (em V_e) é nula. Estendendo este resultado para todo o ímã, composto por um conjunto de tubos de fluxo, temos:

$$W_e = -W_i$$

Como a energia interna do ímã é dada por

$$W_i = \frac{1}{2} \int_V BH dv$$

a energia liberada é então

$$W_e = -\frac{1}{2} \int_V BH dv \quad (4.19)$$

Pode parecer estranho que um ímã permanente tenha a capacidade de produzir um fluxo magnético sem que necessitemos fornecer qualquer energia ou trabalho ao mesmo. Todavia, isto passa a ser comprehensível quando aceitamos, sem qualquer questionamento, que uma estrutura atômica ou molecular possua, pela simples rotação dos elétrons em torno de um núcleo (portanto, uma corrente), uma orientação de campo magnético chamada *dipolo magnético*. Isto ocorre sem qualquer necessidade de adição externa de energia. Ora, um ímã permanente nada mais é do que um conjunto de partículas ou moléculas (grupadas nos domínios de Weiss) que possuem seus dipolos magnéticos naturais orientados numa direção preferencial.

Voltando à Eq. (4.19), notamos que esta energia depende do produto BH relativo ao ponto de funcionamento do ímã e do seu volume. Em geral, é interessante concentrar esta energia em uma zona específica. Vejamos os exemplos das Figs. 4.22a e 4.22b:

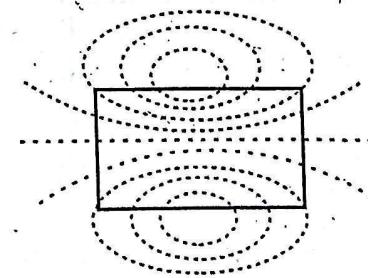


Figura 4.22a – Fluxo do ímã é disperso

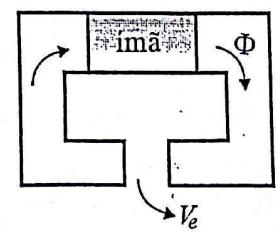


Figura 4.22b – Fluxo é concentrado no entreferro

Na Fig. 4.22a notamos que a energia do ímã fica distribuída no espaço e obtemos, portanto, no volume que envolve o ímã, uma baixa densidade volumétrica de energia. Imaginemos que o ímã da Fig. 4.22b seja idêntico ao da Fig. 4.22a. Embora o ponto de funcionamento BH não seja exatamente o mesmo (pois ele depende dos meios que envolvem o ímã),

notamos que a energia deste ímã será concentrada num volume bem menor V_e . Teremos então uma alta densidade de energia nesta zona; a energia do ímã não será dispersa como no primeiro exemplo.

Tendo em vista a Eq. (4.19) relativa à energia do ímã, notamos que, para um dado volume de ímã, esta depende do produto BH . Existe um ponto na curva $B(H)$ característica do ímã (Fig. 4.18) cujo produto BH é máximo, representando um ponto de trabalho do ímã onde ele pode liberar a energia máxima. Evidentemente nos pontos $B = B_r$ (e portanto $H = 0$) ou $B = 0$ (e portanto $H = H_c$) o produto BH será nulo e o ímã não fornecerá nenhuma energia ao exterior. O primeiro caso $B = B_r$ seria representado, de forma aproximada na Fig. 4.23, onde o ímã é envolto por um circuito magnético sem entreferro, e μ_f é considerado infinito. Nesta situação a reluctância ao fluxo criado pelo ímã é muito pequena. Considerando os campos H_f e H_i constantes no ferro e ímã através da lei de Ampère, temos: $H_f l_f + H_i l_i = 0$. Vimos que, se $\mu_f \gg \mu_0$ (observando que a permeabilidade intrínseca do ímã é próxima à do ar), temos que H_f possui um valor baixo e que, embora $H_i \ll H_f$, este último é também baixo (porém negativo) o que corresponderia a um valor de B próximo a B_r . O segundo caso, onde $H = H_c$ (e $B = 0$) representa a situação onde o efeito do ímã (capacidade de produzir fluxo magnético) foi anulado, por exemplo, por uma bobina existente no circuito magnético na qual o ímã está inserido. Este caso é o indicado na Fig. 4.16a, e o ponto de trabalho do ímã é M_3 da Fig. 4.16b.

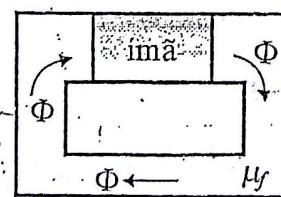


Figura 4.23 – Indução do ímã é próxima da indução remanente

Examinemos um exemplo de cálculo de campo criado por um ímã permanente, conforme a Fig. 4.24 onde temos um ímã inserido num circuito magnético com $\mu_r \gg 1$ e possuindo um entreferro.

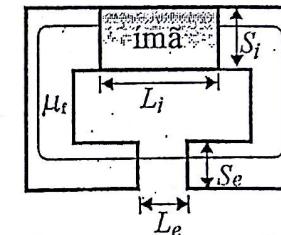


Figura 4.24 – Circuito magnético excitado por um ímã permanente

Escrevendo a lei de Ampère, admitindo que os campos são constantes em suas respectivas zonas, a circulação de H ao longo de L fica sendo:

$$H_i L_i + H_f L_f + H_e L_e = 0$$

Como $H_f \approx 0$, temos

$$H_i L_i = -H_e L_e \quad (4.20)$$

Por outro lado, a conservação de fluxo dá:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= \Phi_{\text{ext}} \\ B_i S_i &= \mu_0 H_e S_e \end{aligned} \quad (4.21)$$

dividindo (4.21) por (4.20) temos

$$\frac{B_i}{H_i} = -\mu_0 \frac{S_e}{S_i} \frac{L_i}{L_e} \quad (4.22)$$

Da expressão (4.22) obtemos B_i/H_i em função de fatores dimensionais da estrutura. Este valor é negativo, o que é normal, pois o ímã trabalha no segundo quadrante. De fato, o valor B_i/H_i representa, no plano $B-H$, a direção de uma reta; a interseção desta reta (chamada "reta de carga" ou "reta de trabalho") com a curva característica do ímã, nos fornece os pontos

B_i e H_i de trabalho do ímã em função das dimensões do circuito magnético, conforme a Fig. 4.25.

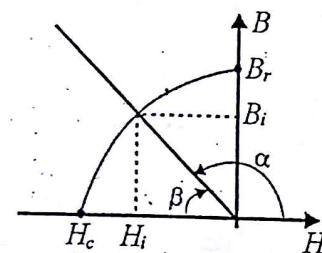


Figura 4.25 – Reta de carga (ou de trabalho) do ímã permanente

O ângulo α é tal que

$$\tan \alpha = \frac{B_i}{H_i} = -\mu_0 \frac{S_e L_i}{S_i L_e}$$

Levando em conta a propriedade da função trigonométrica tangente, podemos utilizar diretamente o ângulo β tal que

$$\beta = \arctan \left[\mu_0 \frac{S_e L_i}{S_i L_e} \right]$$

Uma vez conhecidos B_i e H_i podemos determinar H_e , multiplicando (4.20) por (4.21)

$$B_i H_i S_i L_i = -\mu_0 H_e^2 S_e L_e$$

Chamando V_i o volume do ímã, tal que $V_i = S_i L_i$ e V_e o volume do entreferro, tal que $V_e = S_e L_e$, obtemos

$$H_e = \left[-\frac{B_i H_i V_i}{\mu_0 V_e} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.23)$$

Notamos então que H_e será tanto maior quanto maior for o produto $B_i H_i$ do ímã (daí o interesse de trabalhar com o produto $(BH)_{max}$ do ímã) e também tanto maior quanto maior for a relação V_i/V_e (interesse em aumentar o volume do ímã e utilizar pequenos entreferros).

4.5.4.3 Os principais tipos de ímãs

Inicialmente, citemos que, para um ímã permanente, é de grande interesse que o mesmo possua um elevado valor de campo coercitivo H_c , bem como uma elevada indução remanente B_r . Um valor de H_c importante impede que o ímã seja facilmente desmagnetizado e a um B_r elevado podemos em geral associar a capacidade de criar campos elevados no circuito magnético no qual o ímã está inserido.

Até 1930, usavam-se ligas metálicas como ferro-cromo-tungstênio-cobalto. Além de um fraco desempenho, tinham um H_c muito baixo ($H_c < 20000 \text{ A/m}$). Em 1940 apareceram as ligas Alnico (Fe+Al+Ni+Co) cujo B_r é de aproximadamente 1 T e com $H_c > 50000 \text{ A/m}$. Este tipo de ímã é hoje pouco utilizado, exceto para aplicações em altas temperaturas ou quando uma boa estabilidade térmica é exigida, como por exemplo, aparelhagem de medidas.

Em 1947, com o aparecimento dos ímãs de cerâmica ferrite ($\text{SrFe}_{12}\text{O}_{19}$ ou $\text{BaFe}_{12}\text{O}_{19}$), a utilização dos ímãs generalizou-se pois estes ímãs são baratos e possuem um valor elevado de H_c (100000 A/m). Embora seu B_r seja baixo ($B_r \approx 0.4 \text{ T}$) suas qualidades prevalecem e esses ímãs continuam sendo muito empregados para aplicações freqüentes e corriqueiras (por exemplo, automotivas e eletrodomésticos). Outra qualidade deste tipo de ímã vem do fato de que ele é isolante (contrariamente aos demais outros tipos de ímãs), o que o coloca como elemento preferencial para utilizações em freqüência (pois não existirão correntes parasitas circulando nos mesmos).

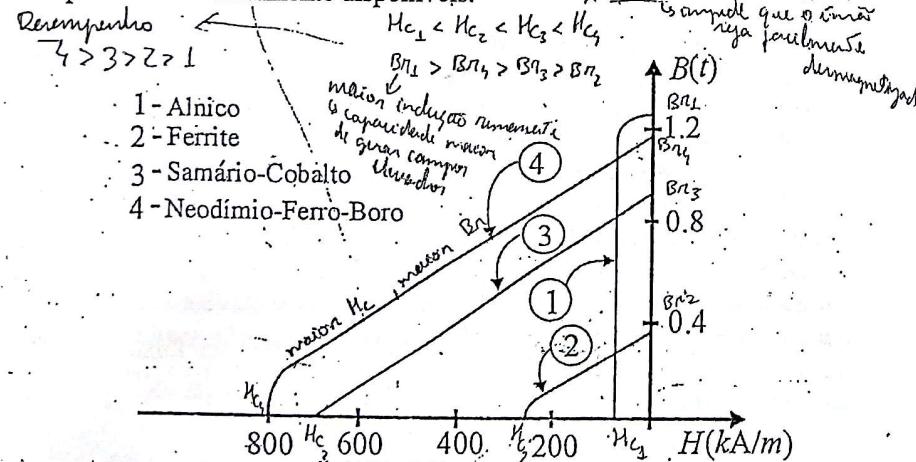
Em 1974, os ímãs constituídos por elementos de terras raras surgiram. Os ímãs de samário-cobalto (Sm_2Co_5 , com $B_r \approx 0.8 \text{ T}$ e $H_c \approx 600000 \text{ A/m}$ e, após, $\text{Sm}_2\text{Co}_{17}$ com $B_r \approx 1 \text{ T}$ e $H_c \approx 600000 \text{ A/m}$) representam, comparados com ferrite e alnico, uma revolução neste domínio pois além de possuírem um elevado H_c , têm também um alto valor de B_r . Porém, devido a um processo complexo de fabricação e a dificuldade de obtenção de matérias-primas para os mesmos, seu preço foi considerado

dissuasivo e só foram (e continuam sendo) utilizados para estruturas de alto desempenho como servomotores e dispositivos que necessitem de alta densidade de potência.

Em 1983, foi descoberto um ímã baseado num outro elemento de terras raras, o neodímio, mais abundante que o samário. A composição destes ímãs não necessita cobalto, associando o neodímio com ferro e boro. Eram ímãs menos caros e de melhor desempenho ($\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ com $B_r \approx 1.2 \text{ T}$ e $H_c \approx 800\,000 \text{ A/m}$) que os ímãs de samário em temperatura ambiente.

Porém eram acompanhados de dois graves problemas: uma fraca estabilidade com a temperatura e uma grande sensibilidade à corrosão. Estes inconvenientes foram suficientemente corrigidos para que esses ímãs pudessem ser utilizados na maior parte das aplicações industriais. Uma vez tomadas as precauções necessárias no que tange à temperatura, eles podem ser utilizados atualmente até temperaturas de 150°C e podem receber tratamentos que os protejam contra a corrosão. São agora produzidos e utilizados em grande escala.

A Fig. 4.26 dá uma idéia-comparativa das curvas $B(H)$ dos principais ímãs permanentes atualmente disponíveis.



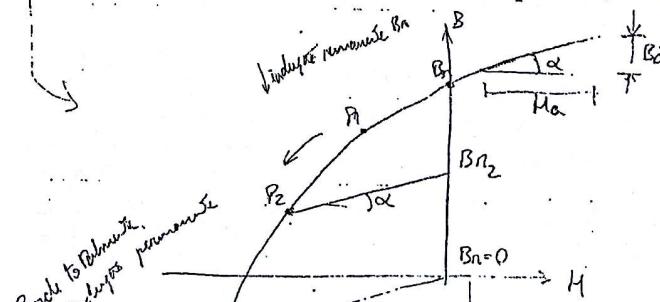
As características magnéticas dos diferentes ímãs são apresentadas na tabela abaixo:

Material a (20°C)	$B_r [\text{T}]$	$H_c [\text{kA/m}]$	$(BH)_{\max} [\text{kJ/m}^3]$	μ_r
Alnico	0.8 ~ 1.25	59 ~ 160	52 ~ 82	3 ~ 5
Ferrite	0.37 ~ 0.42	180 ~ 280	25 ~ 30	1.04 ~ 1.2
Sm-Co	0.98 ~ 1.12	600 ~ 800	180 ~ 240	1.05 ~ 1.3
Ne-Fe-B	1.2 ~ 1.3	950 ~ 1350	280 ~ 350	1.03 ~ 1.06

Além dos ímãs acima citados podemos assinalar a existência de ímãs "bonded" ou "compositas", que são constituídos pela associação do "pó" oriundo dos materiais de ímãs (como ferrite ou Ne-Fe-Bo) com um agente de ligação apropriado: elastômero para obterem-se ímãs flexíveis e resinas que sob a ação do aquecimento formam um material rígido. Se o desempenho desses ímãs é aproximadamente 50% inferior aos que formam suas bases, eles oferecem a vantagem de um preço mais acessível e de uma maior facilidade de emprego no dispositivo respectivo (quadros e fixações magnéticas, sistemas de fechamento de portas, pequenos motores elétricos, etc...).

4.5.4.4 O funcionamento dinâmico dos ímãs

A utilização de um ímã permanente requer cuidados para que o mesmo não seja desmagnetizado. Imaginemos que sua curva esteja representada na Fig. 4.27. Nos ímãs mais freqüentemente utilizados (ferrite, Ne-Fe-Bo, Alnico), a permeabilidade "diferencial" ($\operatorname{tg}\alpha = B_a / H_a$) é muito próxima à do ar ($\mu_r = 1$). Ao trabalharmos no ponto P_1 , o ímã preserva sua indução remanente B_r ; no entanto, se utilizarmos o ponto de trabalho P_2 ele perderá sua indução remanente B_r , e terá uma nova indução B_{r2} , fazendo com que o desempenho fique abaixo do que ele poderia ter; se chegarmos ao ponto P_3 , ele perderá totalmente sua indução remanente. Deve-se, portanto, evitar pontos de trabalho do ímã além do ponto P_1 mostrado na Fig. 4.27.



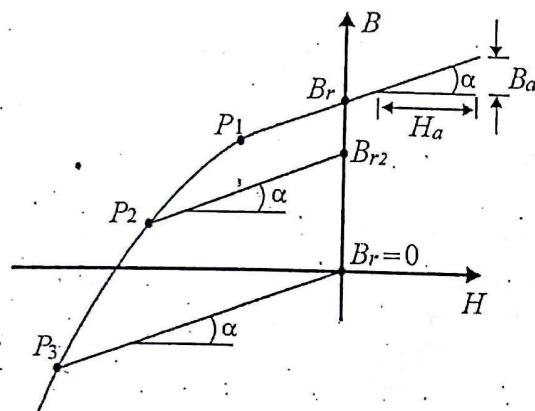


Figura 4.27 – Funcionamento dinâmico de um imã permanente

4.6 ANALOGIA ENTRE CIRCUITOS MAGNÉTICOS E ELÉTRICOS

Observemos simultaneamente os dois grupos de equações colocados abaixo:

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t}$$

campo de tensão
devido à corrente

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}$$

$$\text{div} \mathbf{J} = 0$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_m$$

campo magnético
devido à corrente

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

As expressões matemáticas sendo equivalentes, podemos esperar que haja também uma equivalência entre as propriedades físicas oriundas destes dois grupos. Os pares de grandezas físicas correspondentes são:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}); \quad \left(-\frac{\partial \mathbf{B}_e}{\partial t}, \mathbf{J}_m\right); \quad (\mathbf{J}, \mathbf{B}); \quad (\sigma, \mu)$$

Notemos que embora existam variáveis homônimas em ambos os grupos (\mathbf{J}_m , \mathbf{J}) e (\mathbf{B}_e , \mathbf{B}) elas possuem significados diferentes. Mostraremos logo a seguir que o grupo do lado esquerdo é relativo à física de circuitos

elétricos e \mathbf{J} é ligado à corrente que circula nos fios do circuito, ao passo que \mathbf{J}_m presente no grupo do lado direito é uma fonte de campo magnético. Analogamente, a indução \mathbf{B} é relacionada com o fluxo que circula no circuito magnético, ao passo que \mathbf{B}_e , variável no tempo, será a fonte de criação de um campo elétrico.

Admitamos que $\partial \mathbf{B}_e / \partial t = 0$ e $\mathbf{J}_m = 0$. Temos então

$$\text{rot} \mathbf{E} = 0$$

podemos definir um potencial escalar elétrico V do qual deriva \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = -\text{grad} V$$

pois

$$\text{rot}(\text{grad} V) = 0$$

este potencial V pode ser obtido, por exemplo, através da utilização de baterias. Observe-se também que $\text{rot} \mathbf{E} = 0$ sob forma integral recaia na expressão $\oint_{L(s)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Como

$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ é a tensão numa parcela $d\mathbf{l}$ de um circuito fechado, recaímos na "lei de laços de tensão" cuja soma, num caminho fechado, é nula. Temos

$$\text{div} \mathbf{J} = 0$$

significa que o fluxo de \mathbf{J} é conservativo, ou seja a corrente que entra em um certo volume é igual a que sai do mesmo. É chamada "lei dos nós". Podemos definir uma corrente I , como sendo

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

diferente de zero se S for uma superfície aberta.

Podemos definir uma resistência elétrica, tal que

$$\text{rot} \mathbf{H} = 0$$

idem

$$\mathbf{H} = -\text{grad} V_m$$

pois

$$\text{rot}(\text{grad} V_m) = 0$$

este potencial pode ser obtido, por exemplo, através da $fmm nI$ de uma bobina.

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

idem, para o fluxo do vetor \mathbf{B}

Podemos definir um fluxo magnético

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$$

diferente de zero se S é uma superfície aberta.

Podemos definir uma relutância magnética como sendo

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma S}$$

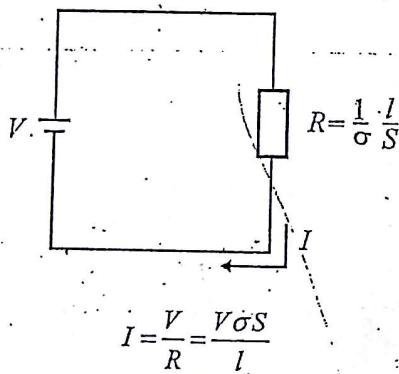
sendo l e S o comprimento e a seção do material resistivo

- para as resistências em série e em paralelo temos resistências equivalentes R_e

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Exemplo:



A condutividade do fio é assumida como infinita e a única resistência à passagem de corrente é R .

A observação deste paralelismo entre circuitos magnéticos e elétricos nos indica que podemos calcular as grandezas de um circuito magnético através do seu circuito equivalente elétrico. Assim, como exemplo, o

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$N \cdot \Phi = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu \cdot l$$

nº de linhas para um loop de conexão

Fórmula magneto motriz

$$\Rightarrow R = \frac{1}{\mu_0 S} \quad V_m = N \cdot \Phi \equiv H \cdot l$$

sendo l e S o comprimento e a seção do entreferro.

- para o cálculo da relutância equivalente R_e as operações são análogas

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Fluxo magnético

$$\Phi = \int B \cdot dS = BS$$

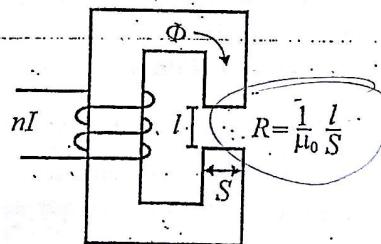
$$\Phi = \mu \cdot H \cdot S$$

$$V_m = \partial \Phi$$

$$H \cdot l = \partial \cdot H \cdot S$$

$$\frac{1}{R_e} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

Exemplo:



$$\Phi = \frac{nI}{R} = \frac{nI \mu_0 S}{l}$$

- Assumindo a permeabilidade do ferro como infinita, a única relutância à passagem de fluxo é o entreferro.

círculo magnético da Fig. 4.28a pode ser calculado utilizando o circuito elétrico da Fig. 4.28b.

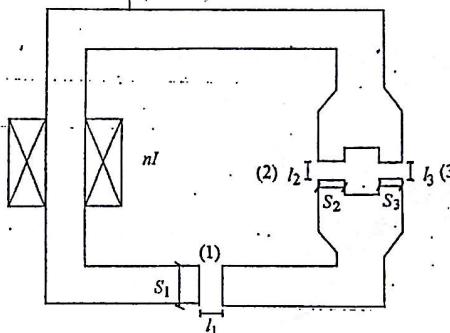


Figura 4.28a – Círculo magnético

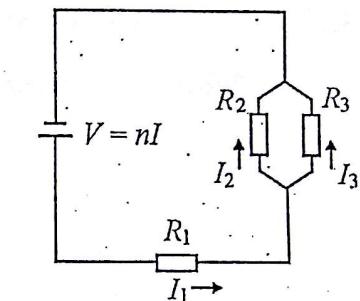


Figura 4.28b – Círculo elétrico análogo

$$\text{Definindo } R_1 = \frac{1}{\mu_0 S_1} \frac{l_1}{h_1}; \quad R_2 = \frac{1}{\mu_0 S_2} \frac{l_2}{h_2}; \quad R_3 = \frac{1}{\mu_0 S_3} \frac{l_3}{h_3}$$

podemos calcular as correntes I_1 , I_2 e I_3 procedendo exatamente como se fosse um circuito elétrico. Estes valores, obtidos em função de nI , R_1 , R_2 e R_3 , serão os valores de Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 , fluxos magnéticos passando nos entreferros (1), (2) e (3). Lembrando que, por exemplo, $\Phi_1 = \mu_0 h_1 S_1$, podemos então obter facilmente h_1 , h_2 e h_3 .

No entanto, este procedimento de cálculo de um circuito magnético é acompanhado de alguns inconvenientes e limitações:

- se o circuito magnético estiver saturado, o estabelecimento de um circuito elétrico é mais delicado, pois resistências relativas às relutâncias existentes no ferro devem ser adicionadas nos ramos do circuito (seriam dadas por

$$R = \frac{1}{\mu_f S} l);$$

- o algebrismo que acompanha a resolução das equações é mais laborioso;

- em circuitos magnéticos existe dispersão ou espalhamento de fluxo, ao passo que o mesmo não ocorre com a corrente no circuito elétrico.

Consideramos que esta equivalência é, sobretudo, válida para uma análise qualitativa do circuito magnético, pois o cálculo de circuito elétrico é

bastante usual. Assim, no exemplo das Figs. 4.28a e 4.28b, a percepção que $I_1 = I_2 + I_3$, é algo que se estabelece mais facilmente que conservação de fluxo $\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$, que é o fenômeno equivalente.

4.7 INDUTÂNCIAS E INDUTÂNCIAS MÚTUAS

4.7.1 Definição de indutância

Consideraremos o esquema da Fig. 4.29, constituída por dois circuitos elétricos C_1 e C_2 , colocados eventualmente em presença de materiais ferromagnéticos. Não consideraremos perdas de qualquer ordem no meio ferromagnético.

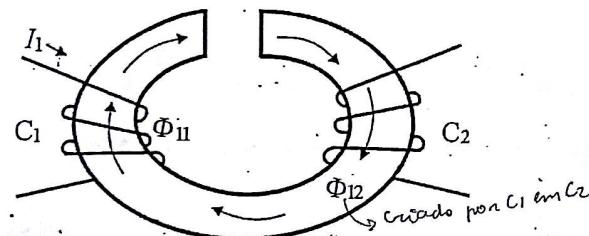


Figura 4.29 – Circuito magnético possuindo dois circuitos elétricos

No circuito C_1 há uma corrente I_1 , que pode ser variável no tempo, porém possui uma freqüência suficientemente baixa para que possamos desprezar perdas decorrentes desta variação de I_1 , (tais perdas em questão serão examinadas posteriormente).

A corrente I_1 em C_1 criará um fluxo magnético. Uma parte deste será enlaçado pelo circuito C_2 . Este fluxo, chamado Φ_{12} será o fluxo criado por C_1 em C_2 . Se, por exemplo, dobrarmos a corrente I_1 , Φ_{12} será também duplicado, admitindo que o material ferromagnético não sofra efeito de saturação. Suponhamos que o circuito C_2 possua n_2 espiras, definamos então "enlace de fluxo" como sendo o produto do número de vezes que o circuito C_2 enlaçará o fluxo Φ_{12} ou seja, $n_2\Phi_{12}$, também chamado "fluxo concatenado" e notado $\lambda_{12} = n_2\Phi_{12}$. Sem a saturação existe então um fator de proporcionalidade K entre o enlace de fluxo e a corrente I_1 , tal que

$K = \lambda_{12} / I_1$. Este fator será chamado "indutância mútua entre C_1 e C_2 " e será designado por M_{12} , tal que

$$M_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_1} = \frac{n_2 \Phi_{12}}{I_1} \quad (4.24)$$

Notamos também que o circuito C_1 , possuindo n_1 espiras, produz um fluxo Φ_{11} na sua própria região de existência, e podemos então definir a "indutância própria" ou simplesmente "indutância" de C_1 como sendo

$$L_1 = \frac{\lambda_{11}}{I_1} = \frac{n_1 \Phi_{11}}{I_1} \quad (4.25)$$

onde $\lambda_{11} = n_1 \Phi_{11}$. Quando há saturação dos materiais magnéticos, a proporcionalidade entre λ_{12} e I_1 ou λ_{11} e I_1 deixará de existir, porém as definições de indutâncias acima continuam idênticas. Com esta perda de proporcionalidade, as indutâncias M_{12} e L_1 variam com o valor de I_1 e serão, portanto, funções de I_1 .

4.7.2 A energia de um sistema linear

No caso do sistema acima, desprezando as perdas ôhmicas, a tensão U_1 , correspondente à *fem* nos terminais do circuito C_1 é, em módulo

$$U_1 = \frac{d\lambda_{11}}{dt} = \frac{d}{dt}(L_1 I_1)$$

A potência elétrica associada a C_1 é

$$P_1 = U_1 I_1 = \frac{d\lambda_{11}}{dt} I_1$$

e a energia, também aqui em módulo (significando a energia que deve ser fornecida para criação do fluxo magnético Φ_{11} no circuito indutor) é

$$W = \int_0^t P_1 dt = \int_0^t I_1 \frac{d\lambda_{11}}{dt} dt = \int_0^t I_1 d(L_1 I_1)$$

onde no intervalo $[0, t]$ a corrente variou de forma correspondente em $[0, I_1]$. Admitindo que o sistema é linear, ou seja, não havendo saturação no ferro, L_1 é constante e temos então

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 \quad (4.26)$$

esta expressão representa a energia magnética que é necessária para que a bobina do circuito C_1 crie o campo responsável pelo fluxo Φ_{11} .

Admitamos agora que em ambos os circuitos C_1 e C_2 existam as correntes I_1 e I_2 . Temos então

$$U_1 = \frac{d\lambda_{11}}{dt} + \frac{d\lambda_{21}}{dt}$$

$$U_2 = \frac{d\lambda_{22}}{dt} + \frac{d\lambda_{12}}{dt}$$

Analogamente à situação acima, podemos escrever que a energia total é

$$W = \int_0^t (U_1 I_1 + U_2 I_2) dt$$

$$W = \int_0^{I_1, I_2} (d\lambda_{11} + d\lambda_{21}) I_1 + \int_0^{I_2, I_1} (d\lambda_{22} + d\lambda_{12}) I_2$$

Notando que $\lambda_{12} = M_{12} I_1$ e $\lambda_{21} = M_{21} I_2$, bem como que $\lambda_{11} = L_1 I_1$ e $\lambda_{22} = L_2 I_2$, obtemos

$$W = \int_0^{I_1, I_2} (I_1 L_1 dI_1 + M_{21} I_1 dI_2) + \int_0^{I_2, I_1} (I_2 L_2 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + \int_0^{I_1, I_2} (M_{21} I_1 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1) \quad (4.27)$$

Pode-se verificar que a integral acima é tal que

$$\int_0^{I_1, I_2} (M_{21} I_1 dI_2 + M_{12} I_2 dI_1) =$$

$$\frac{1}{2} (M_{21} + M_{12}) I_1 I_2 + \frac{1}{2} \int_0^{I_1, I_2} (M_{21} - M_{12})(I_1 dI_2 - I_2 dI_1) \quad (4.28)$$

O fato de chamar um circuito de C_1 e outro de C_2 é puramente arbitrário. Poderíamos inverter esta notação. No entanto, a energia magnética W não poderia ser alterada pelo simples fato de invertermos esta notação. Isto nos obriga a que, na expressão (4.28), M_{21} seja igual M_{12} pois no caso contrário, a expressão de W seria alterada. Temos então

$$M_{21} - M_{12} = 0 \quad \text{e} \quad M_{21} = M_{12}$$

que é um resultado aplicável em qualquer situação. A integral presente no lado direito da expressão (4.28) é portanto nula, e obtemos então

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2 \quad (4.29)$$

Esta expressão pode ser generalizada para J circuitos sob a forma

$$W = \sum_{i=1}^J \frac{1}{2} L_i I_i^2 + \sum_{i=1}^J \sum_{l=i+1}^J M_{il} I_i I_l \quad (4.30)$$

4.7.3 A energia do campo magnético

Vamos avaliar a energia associada a um campo magnético. O que significa esta grandeza? Ela representa o trabalho que deve ser fornecido para criarmos um campo H num meio isotrópico de permeabilidade μ resultando portanto na indução magnética B . Inversamente essa energia pode ser recuperada pelo sistema físico no qual está inserido este campo ao extinguirmos o mesmo. Esta formulação que segue permite levar em conta o fenômeno de não-linearidade ou saturação do material magnético. Assim, uma certa energia foi necessária para que passássemos, num certo meio, de

uma indução nula à indução B , durante uma variação de tempo entre zero e t . Para estabelecermos a expressão de energia, imaginemos a situação da Fig. 4.30a, onde temos um meio de permeabilidade μ , um campo H e uma indução B .

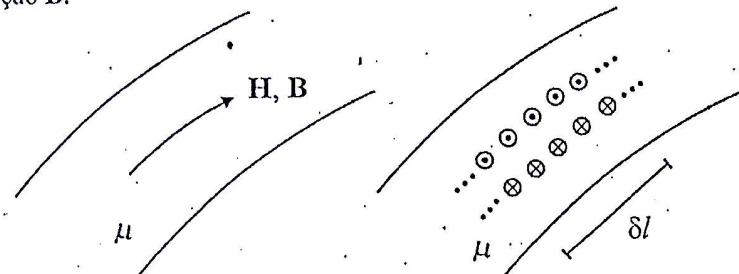


Figura 4.30a – Campo magnético num meio

4.30b – Solenóide com campo idêntico

Imagine que este campo seja substituído por um solenóide longo (Fig. 4.30b) de comprimento elementar δl e seção δS que crie, no seu interior, um campo equivalente a H . A corrente será definida através de uma densidade linear de corrente J expressando o número de Amperes por comprimento de solenóide. Assim, para um comprimento δl , I será $J\delta l$. Escrevendo a lei de Ampère e supondo nulo o campo fora do solenóide, temos

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\delta l} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\delta l} J dl \quad (4.31)$$

Temos então $H = J$. Por outro lado, a energia elétrica que devemos fornecer ao solenóide para que a corrente se estabeleça no valor I , é

$$\delta W = \int_0^t V I dt$$

onde V é a tensão aplicada no solenóide. Notemos que as grandezas variam simultaneamente da seguinte forma:

$t \rightarrow [0, t]$ (tempo)

$J \rightarrow [0, J]$ (densidade linear de corrente)

$H \rightarrow [0, H]$ (campo magnético)

$B \rightarrow [0, B]$ (indução magnética)

$I \rightarrow [0, I]$ (corrente no solenóide)

Lembrando que $I = J\delta l$ e que

$$|V| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(B\delta S)}{dt} = \frac{dB}{dt} \delta S$$

temos

$$\delta W = \int_0^t J\delta l \frac{dB}{dt} \delta S dt = \int_0^t J dB \delta l \delta S$$

e com $J = H$

$$\delta W = \int_0^B H dB \delta l \delta S$$

Sendo δS o volume do solenóide, obtemos a expressão de densidade volumétrica de energia magnética, que é

$$W_v = \int_0^B H dB \quad (4.32)$$

No caso geral de um meio magnético apresentando saturação a energia magnética para criarmos uma indução B no material corresponde à área escura da Fig. 4.31a.

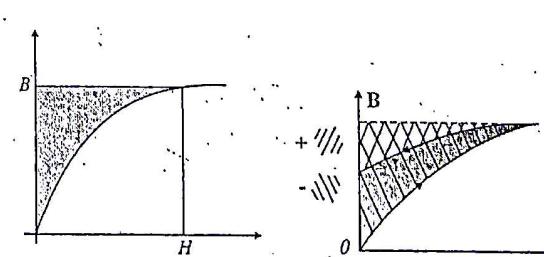


Figura 4.31a – Dens. energia 4.31b – Área escura resultante 4.31c – Ciclo histerese

$$W_v = \iint_{ciclo} H dB$$

Observemos que quando B aumenta, obtemos, algebricamente, uma área positiva. Ao diminuirmos B , à área se torna negativa (ver Fig. 4.31b). Se

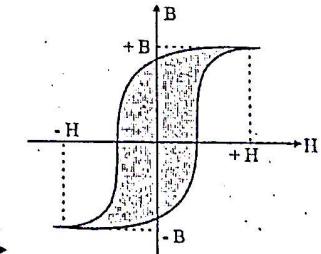


Figura 4.31a – Dens. energia

4.31b – Área escura resultante

4.31c – Ciclo histerese

este raciocínio se aplicar a um ciclo fechado, a área total corresponde à área do ciclo de histerese, conforme a Fig. 4.31c, cujo valor é dado por

$$W_v = \int_{\text{ciclo}} H dB$$

Este ciclo, como já visto, existe para o ímã permanente. Porém os materiais doces (chapas de ferro-silício, por exemplo) também apresentam, em menor intensidade, o mesmo fenômeno. O fato de percorrer este ciclo (pela passagem, por exemplo, de um fluxo magnético senoidal) ocasiona a "perda por histerese", que será vista detalhadamente no próximo capítulo.

Caso o meio não apresente saturação, (μ constante), obtemos

$$W_v = \mu \int_0^H H dH = \mu \frac{H^2}{2}$$

Utilizando a relação $B = \mu H$, a expressão acima pode apresentar as diversas formas abaixo:

$$W_v = \mu \frac{H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu} \quad (4.33)$$

Calculemos agora a energia volumétrica do campo, porém de forma aplicada a um toróide, dispositivo bastante usual. Para a expressão de energia é utilizado o conceito de indutância que, conforme a Eq. (4.26), é $W = LI^2/2$. O campo magnético H criado em um toróide envolto por uma bobina percorrida pela corrente I e possuindo n espiras, é mostrado na Fig. 4.32.

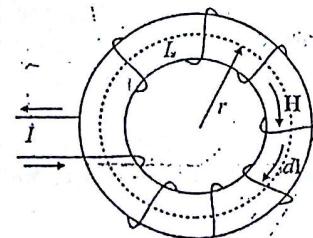


Figura 4.32 – Campo estabelecido num toróide

A seção transversal do toróide é S , seu raio médio é r e ele é constituído por um meio de permeabilidade μ . Aplicando a lei de Ampère, onde o caminho de circulação é L , mostrado na Fig. 4.32, temos

$$\int_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = nI \quad \text{e} \quad H = \frac{nI}{2\pi r} \quad (4.34)$$

admitindo que H é constante da seção S . Sendo $L = n \frac{\Phi}{I}$, temos

$$L = n\mu \frac{nI}{2\pi r} S \frac{1}{I} = \frac{\mu n^2 S}{2\pi r} \quad (4.35)$$

Sendo a energia do campo magnético $W = \frac{1}{2} LI^2$, procuraremos calcular a energia volumétrica

$$W_v = \frac{W}{S 2\pi r} = \frac{\frac{1}{2} LI^2}{S 2\pi r}$$

Substituindo L por seu valor da expressão (4.35) e notando que $I = \frac{H 2\pi r}{n}$ da expressão (4.34), temos

$$W_v = \frac{1}{2} \mu H^2$$

que é a expressão da energia volumétrica associada a um campo magnético estático H . Como já visto, esta expressão pode também ser escrita sob as formas abaixo

$$W_v = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu} \quad (4.36)$$

4.8 EXEMPLOS

4.8.1 Cálculo de H e indutância de um solenóide longo

Consideremos o solenóide mostrado em corte da Fig. 4.33, onde $l \gg R$, o que caracteriza o solenóide como sendo "longo". Cálculos feitos com o apoio do sistema EFCAD mostram que para $l > 3R$ podemos considerar o solenóide como longo e obter um valor correto de H , no interior e no meio do mesmo. Admitiremos que H_i no interior do solenóide seja constante e H_e , no seu exterior também o seja. Apliquemos então a lei de Ampère

$$\oint L H \cdot d\ell = nI \quad (n - \text{número de espiras})$$

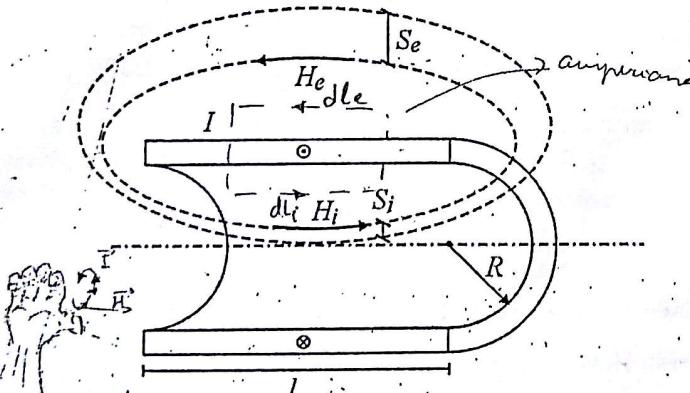


Figura 4.33 – Campo estabelecido num solenóide longo. Numa seção transversal, o campo magnético é constante no interior e descreve-se por $H_i = \mu_0 n I / l$. No exterior, o campo magnético é constante e descreve-se por $H_e = \mu_0 n I / l$.

$$H_i L_i + H_e L_e = nI \quad (L_i \equiv l)$$

Mostraremos a seguir que $H_e \ll H_i$; obtemos então

$$H_i \approx nI/l$$

Para mostrar que $H_e \ll H_i$, destacaremos entre as linhas de campos duas delas formando um tubo de fluxo, que é conservativo (conforme à Fig. 4.33). A seção do tubo no interior do solenóide é S_i e S_e no exterior. É evidente que, por um efeito de difusão do campo, $S_e \ll S_i$. Como o fluxo se conserva, temos

$$\mu_0 H_e S_e = \mu_0 H_i S_i$$

o que dá

$$H_e = H_i \frac{S_i}{S_e} \quad \text{ou: } S_i = 3 \quad S_e = 8 \quad H_e = H_i \cdot \frac{3}{8} = 0,375 H_i$$

e portanto $H_e \ll H_i$, como tínhamos avançado acima. A indutância própria é dada por

$$L = \frac{n \Phi}{I}$$

$$\Phi = \mu_0 \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \frac{nI}{l} \pi R^2$$

$$L = \mu_0 \frac{n^2 \pi R^2}{l}$$

Cabe salientar que, embora na expressão inicial de indutância apareçam as grandezas Φ e I , o resultado final de L é sempre uma função de parâmetros dimensionais do dispositivo.

Observemos que para utilizar a lei de Ampère fomos obrigados a considerar a aproximação segundo a qual o campo é constante no interior do solenóide. Se o solenóide fosse curto, o cálculo analítico seria possível, porém o mesmo teria uma dificuldade algébrica bem superior a este caso (ver exemplo 4.8.3).

Na Fig. 4.34, vemos a distribuição de fluxo magnético em um solenóide longo, obtido pelo sistema EFCAD e, portanto, próximo do caso real.

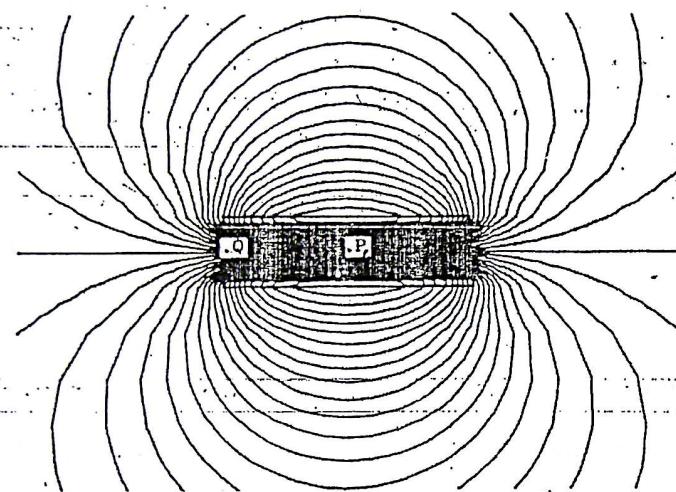


Figura 4.34 – Campo magnético de um solenóide calculado numericamente

Para as dimensões utilizadas no sistema EFCAD, obtivemos um campo que no interior do solenóide e no meio (ponto P) difere em relação ao cálculo analítico de 16%; porém o campo obtido no interior mais próximo da borda (ponto Q), o erro é da ordem de 44%.

4.8.2 Cálculo de \mathbf{H} criado por uma espira circular

Desejamos calcular o campo \mathbf{H} no ponto P da Fig. 4.35 criado pela corrente I circulando na espira. A projeção do ponto P sobre o plano da espira coincide com o ponto O , centro da espira.

docto (dl) testem veras no resultado de \vec{H} se desconsiderar o polígono $d\vec{H}$.

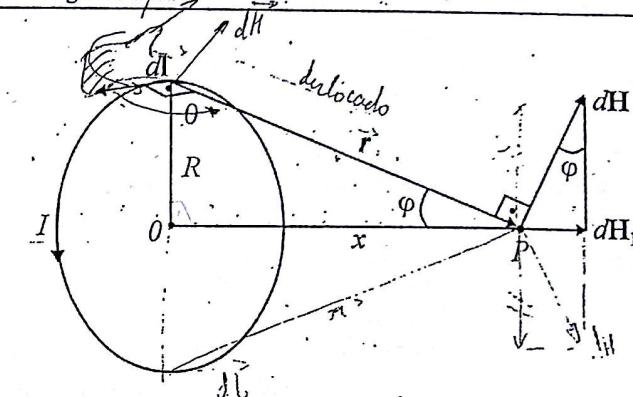


Figura 4.35 – Campo criado por uma espira circular

Inicialmente, notemos que o campo \mathbf{H} só pode ser obtido através da lei de Biot-Savart, pois não há um caminho L ao longo do qual o campo \mathbf{H} tenha seu módulo constante, e então a lei de Ampère, embora sempre válida, seria aqui de difícil aplicação.

Para facilitar a visualização consideremos o dl no ponto mais alto da Fig. 4.35; dl e r são perpendiculares; a direção de $d\mathbf{H}$ é ortogonal ao plano formado por dl e r , como mostrada na figura; o componente paralelo ao plano da espira (vertical na figura acima) de $d\mathbf{H}$ será anulado quando considerarmos o $d\mathbf{H}$ devido ao dl diametralmente oposto ao dl em questão.

$$\text{Temos} \left. \begin{array}{l} \text{Biot-Savart} \\ \vec{dH} = \frac{I}{4\pi r^2} \frac{dl \times \vec{r}}{r^3} \end{array} \right\} dH = \frac{Idl}{4\pi r^2} \sin\theta$$

onde $\theta = 90^\circ$. A componente de dH_r será $dH_r = \frac{Idl}{4\pi r^2}$.

$$dH_n = dH \cos\phi$$

$$dH_r = \frac{Idl}{4\pi r^2} \sin\phi$$

ϕ é constante e vale

$$\sin\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$R^2 = R^2 + x^2$$

$$dH_r = \frac{Idl}{4\pi(R^2 + x^2)} \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$H_r = \frac{IR}{4\pi\sqrt{(R^2+x^2)^3}} \int_R dl$$

x/2

A integral nos fornece o comprimento da espira, ou seja, $2\pi R$ e

$$H_r = \frac{IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

No caso particular onde $x=0$, ou seja, calculando H no centro da espira, conforme a Fig. 4.36, obtemos $H_r = \frac{I}{2R}$.

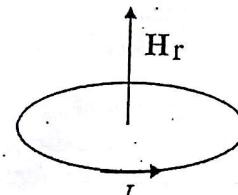


Figura 4.36 – Caso particular do campo no centro da espira ($x=0$)

4.8.3 Campo criado no interior de um solenóide

Podemos utilizar o resultado acima para obter o campo no interior de um solenóide, em qualquer ponto do seu eixo de simetria. O solenóide é mostrado na Fig. 4.37.

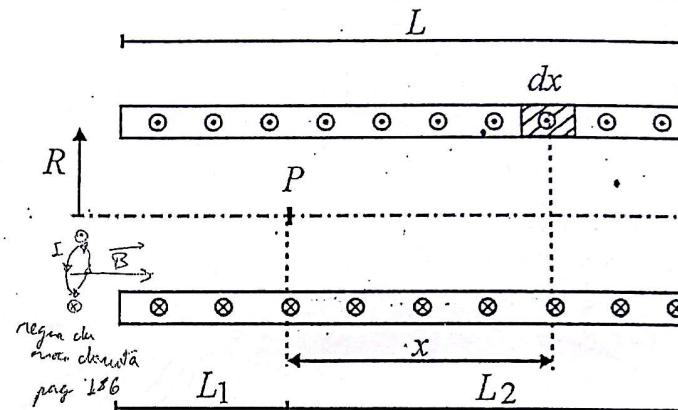


Figura 4.37 – Cálculo de campo num ponto P qualquer no interior de um solenóide

Uma parcela dx criará um campo dH no ponto P ; segundo a expressão de campo do exemplo anterior, temos

$$dH = \frac{dIR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Para obter a quantidade de corrente dI , definiremos uma densidade linear de corrente $J_l = NI/L$, sendo N o número de espiras e I a corrente imposta no solenóide. Assim dI será $J_l dx$, o que resulta em

$$dH = \frac{R^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}} \frac{NI}{L} dx$$

Efetuando a integração para um ponto situado conforme a Fig. 4.37 temos

$$H = \frac{NIR^2}{2L} \int_{-L_1}^{L_2} \frac{dx}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$H = \frac{NI}{2L} \left[\frac{x}{(R^2+x^2)^{1/2}} \right]_{-L_1}^{L_2} = \frac{NI}{2L} \left[\frac{L_2}{\sqrt{R^2+L_2^2}} + \frac{L_1}{\sqrt{R^2+L_1^2}} \right]$$

Particularizando-se para um ponto no meio do solenoide, ou seja, $L_1 = L_2 = L/2$, temos

$$H = \frac{NI}{(4R^2+L^2)^{1/2}}$$

Ademais, se o solenoide for longo $L \gg R$, temos $H \approx NI/L$, conforme o primeiro exemplo.

4.8.4 Campo criado por uma espira retangular

Desejamos calcular o campo no ponto P , que se situa no encontro das diagonais da espira retangular da Fig. 4.38. Esta última é percorrida pela corrente I .

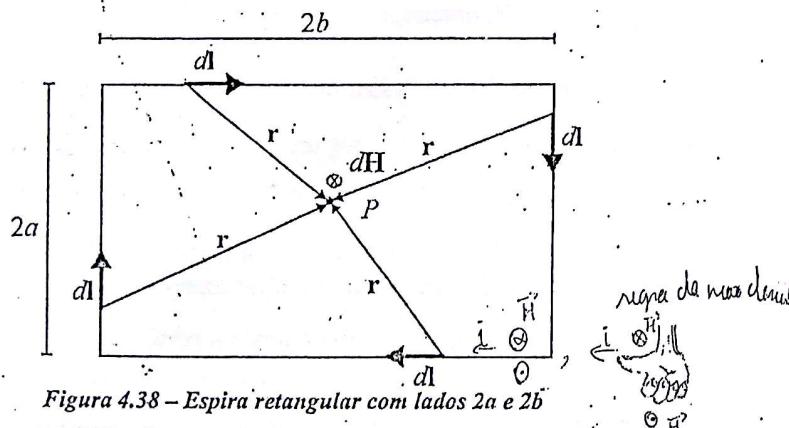


Figura 4.38 - Espira retangular com lados $2a$ e $2b$

Pela mesma razão citada no exemplo precedente, devemos calcular o campo através da lei de Biot-Savart. Nota-se que os produtos vetoriais $dl \times r$ farão com que os campos dH devidos aos quatro segmentos de fios tenham o mesmo sentido e direção no ponto P , penetrando no plano da figura. Calculemos então o H devido ao segmento de fio mostrado na Fig. 4.39.

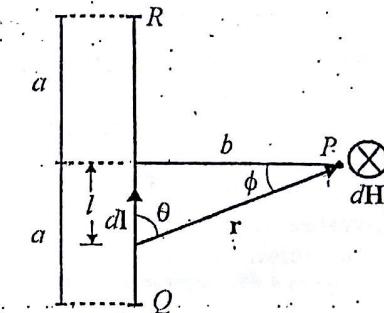


Figura 4.39 - Segmento vertical da espira

$$dH_1 = \frac{Idl}{4\pi r^2} \sin\theta = \frac{Idl}{4\pi r^2} \cos\phi$$

Coloquemos todas as variáveis em função de ϕ observando que $\tan\phi = \frac{l}{b}$ temos que $dl = b \sec^2\phi d\phi$ e que $\cos\phi = \frac{b}{r}$; temos $r = \frac{b}{\cos\phi}$. Substituindo dl e r na expressão de dH , obtemos

$$H_1 = \frac{I}{4\pi b} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos\phi d\phi = \frac{I}{4\pi b} [\sin\phi_2 + \sin\phi_1]$$

Os ângulos limites correspondem aos pontos Q e R da Fig. 4.39, e são tais que:

$$\sin\phi_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{e} \quad \phi_2 = \arctan\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Obtemos para H_1

$$H_1 = \frac{I}{4\pi b} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right] = H_1 = \frac{I}{2\pi b} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Chamemos H_2 o campo devido ao outro segmento de fio, mostrado na Fig. 4.40.

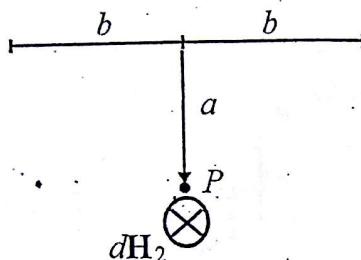


Figura 4.40 – Segmento horizontal da espira

Por analogia, o campo H_2 , será

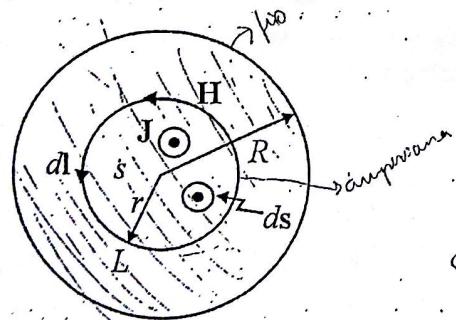
$$H_2 = \frac{I}{2\pi a} \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

O campo total será $H_t = 2H_2 + 2H_1$, ou seja

$$H_t = \frac{I}{\pi\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) = \frac{I}{\pi ab} \sqrt{a^2 + b^2}$$

4.8.5 Cálculo do campo dentro de um fio

Suponhamos que o fio seja retilíneo e que a corrente I percorra o mesmo de maneira uniforme, conforme a Fig. 4.41.

Figura 4.41 – Fio infinito percorrido pela corrente I

Para obtermos o campo num raio $r < R$, devemos calcular a densidade de corrente J

$$J = I/\pi R^2$$

Escolhemos o caminho de circulação L mostrado na Fig. 4.41 (a circunferência de raio r). Aplicamos então a lei de Ampère

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \underbrace{\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}}_{I' \text{ envolvida}}$$

A integral do lado direito da expressão acima nos dará a corrente envolvida por L , ou seja, a corrente I' atravessando S

$$I' = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$$

(Nó que é a corrente total do fio, mas uma fração dele que percorre a superfície de raio r (anular))

$$I' = \oint \pi r^2 = L \frac{r^2}{R^2}$$

$$J = \frac{I_r}{A} = \frac{I_r}{\pi R^2} \Rightarrow I' = \frac{I_r}{\pi R^2} \cdot \pi r^2$$

(Corrente que percorre a superfície de raio r)

A circulação de H em L é $2\pi r H$. Obtemos então $H = \frac{I_r}{2\pi R^2}$. É evidente que quando $r = R$, obtemos $H = \frac{I}{2\pi R}$.

Para um $r > R$, o valor de H será $H = \frac{I}{2\pi r}$, recaindo na já conhecida expressão do campo criado por um fio infinito. Esta abordagem mostra que, ao nos aproximarmos do centro do fio ($r \rightarrow 0$), a expressão $H = \frac{I}{2\pi r}$ deixa de ser válida, pois nos conduziria a um campo tendendo ao infinito, algo que energeticamente é impossível. Contrariamente, observamos pela expressão $H = \frac{I_r}{2\pi R^2}$ que o campo também tende a zero.

4.8.6 Cálculo da indutância de um cabo coaxial

Desejamos calcular a indutância por unidade de comprimento de um cabo coaxial mostrado nas Figs. 4.42a e 4.42b. Consideraremos, inicialmente, apenas o fluxo entre os fios ($a < r < b$) onde haverá

obrigatoriamente um meio isolante. Logo a seguir levaremos em conta o fluxo estabelecido no próprio cabo interno.

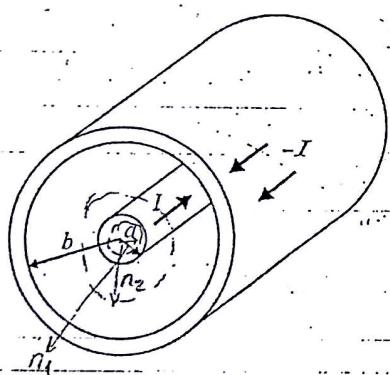
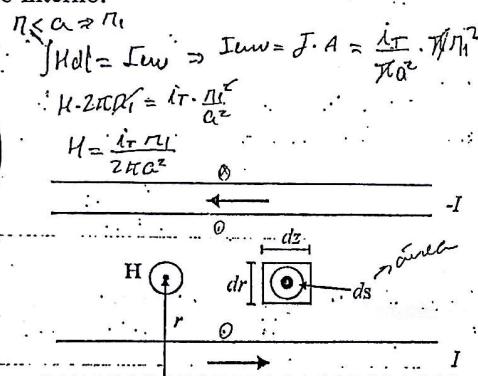


Fig. 4.42a - Cabo coaxial



4.42b - Vista axial

Considerando o cabo retilíneo, o campo entre os fios será calculado como foi feito para o fio infinito. Teremos então $H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. O fluxo será obtido através de

$$\phi = \int_S B \cdot ds$$

Área
 do reitor do
 campo que
 não é reto
 devido à curva
 também

Sendo B e ds (Fig. 4.42b) vetores colineares e de mesmo sentido temos

$$\phi = \int_S \mu_0 H ds = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} \int_0^z dz$$

$$\phi = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \ln \frac{b}{a} z$$

A indutância é então $L = \frac{\phi}{I} = \frac{\mu_0 z}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ e a indutância por unidade de comprimento de cabo será

$$\frac{L}{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Notemos que o fluxo fora do cabo é nulo pois a corrente total envolvida por um caminho L externo de circulação é nula. Porém, para que o cálculo seja mais exato, é necessário que levemos também em conta o fluxo que é criado dentro do próprio cabo interno, e este cálculo requer atenção devido ao fato de que devemos considerar não o fluxo total mas sim o fluxo concatenado pela corrente do cabo, segundo o conceito de indutância. Como visto no exemplo anterior, o campo magnético dentro do cabo é dado por

$H = \frac{Ir}{2\pi a^2}$, onde R foi substituído por a , raio do cabo interno. Admitindo que a permeabilidade do cabo seja idêntica a do ar (pois em geral são constituídos de cobre ou alumínio), a parcela elementar de fluxo atravessando a superfície $dr dz$ criada por este campo seria dada por

$$d\phi = \mu_0 H dr dz$$

Porém, não é este o fluxo que devemos calcular pois, para a avaliação de indutância, precisamos obter o fluxo concatenado pela corrente correspondente ao raio r (situado entre 0 e a), ou seja, é concatenado pela parcela de corrente dada por $\frac{I\pi r^2}{\pi a^2}$, razão pela qual devemos aplicar à expressão acima o fator $\frac{r^2}{a^2}$; assim

$$\phi_c = \mu_0 \int_0^a H \frac{r^2}{a^2} dr \int_0^z dz = \mu_0 \int_0^a \frac{Ir}{2\pi a^2} \frac{r^2}{a^2} dr \int_0^z dz$$

o que fornece $\phi_c = \mu_0 \frac{I}{8\pi} z$. A indutância relativa ao cabo interno por unidade de comprimento é assim dada por $\frac{L}{z} = \frac{\mu_0}{8\pi}$. À mesma deve ser adicionada a indutância relativa ao fluxo entre os cabos, acima calculada, e obtemos como valor final de indutância

$$\frac{L}{z} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a} + \frac{\mu_0}{8\pi}$$

Observemos que se os raios a e b são próximos esta segunda parcela da expressão acima é preponderante em relação à primeira.

4.8.7 Campo criado por uma barra com corrente I

Deseja-se calcular o campo criado por uma barra infinita no ponto P , conforme a Fig. 4.43a.

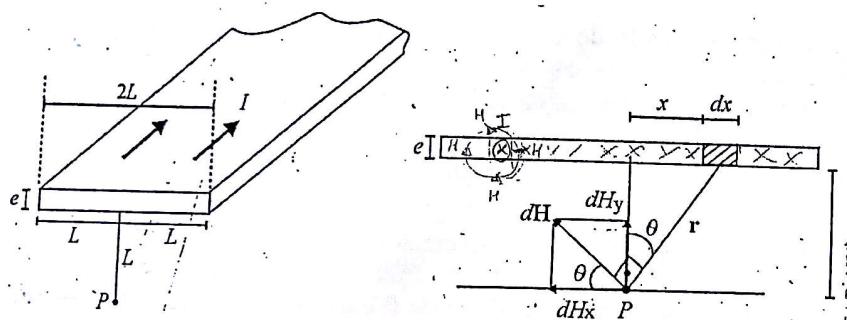


Figura 4.43a – Barra infinita

4.43b – Vista frontal da barra infinita

Iremos considerar que a barra é constituída por fios infinitamente longos, conduzindo uma corrente dI cada, conforme Fig. 4.43b. Este fio elementar carregando a corrente dI , cria o campo dH em P que pode ser decomposto em dH_x e dH_y . Definamos a densidade de corrente J como $J = I/(2Le)$, sendo o denominador a seção transversal da barra. Temos então $dI = Jdx e$. Utilizando a expressão de campo criado por um fio infinito, temos

$$dH_x = \frac{dI}{2\pi r} \cos \theta \quad \text{e} \quad dH_y = \frac{dI}{2\pi r} \sin \theta$$

ou $dH_x = \frac{Jdx e}{2\pi r} \cos \theta$. Observamos que r e x podem ser expressos em função de θ , como abaixo

$$\tan \theta = \frac{x}{L} \quad \text{ou} \quad dx = L \sec^2 \theta d\theta$$

$$\cos \theta = \frac{L}{r} \quad \text{ou} \quad r = L/\cos \theta$$

Obtemos então

$$dH_x = \frac{JeL \sec^2 \theta \cos \theta d\theta}{2\pi L/\cos \theta} = \frac{Je}{2\pi} d\theta$$

$$H_x = \frac{Je}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta = \frac{Je}{4}$$

substituindo J pelo seu valor $I/2Le$, temos

$$H_x = I/8L$$

Para o cálculo de H_y , procedemos da mesma maneira chegando a

$$dH_y = \frac{JeL \sec^2 \theta \sin \theta d\theta}{2\pi L/\cos \theta} = \frac{Je \sin \theta}{2\pi \cos \theta} d\theta$$

chamando $u = \cos \theta$ e $du = -\sin \theta d\theta$, temos

$$H_y = -\frac{Je}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{du}{u} = -\frac{Je}{2\pi} [\ln u]_{-\pi/4}^{\pi/4} = 0$$

É óbvio que, se P se projeta no meio da barra, $H_y = 0$. No entanto, o cálculo de H_y foi conduzido pois se P não se encontra nesta posição particular, H_y deve ser avaliado.

4.8.8 Cálculo de um circuito magnético

Dado o circuito magnético da Fig. 4.44a, desejamos calcular o campo nos entreferros. Utilizaremos as notações mostradas nas Figs. 4.44b e 4.44c. Com estas notações, a letra "S" indica a seção transversal do entreferro; " l " é distância que separa o ferro. O número entre parênteses indica o número do entreferro. Assim, no exemplo da Fig. 4.44a, no

entreferro 1 (seção S_1 e distância l_1) o campo que existe no mesmo será notado h_1 .

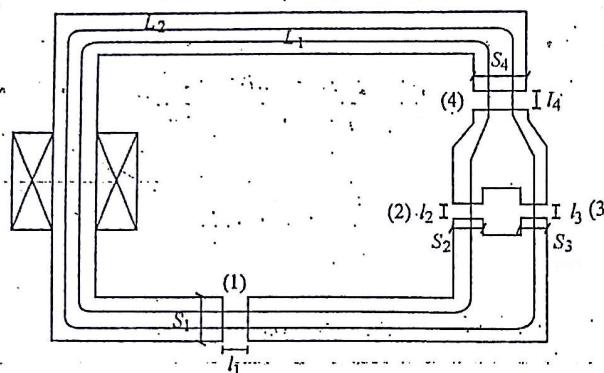


Figura 4.44a – Circuito magnético com quatro entreferros

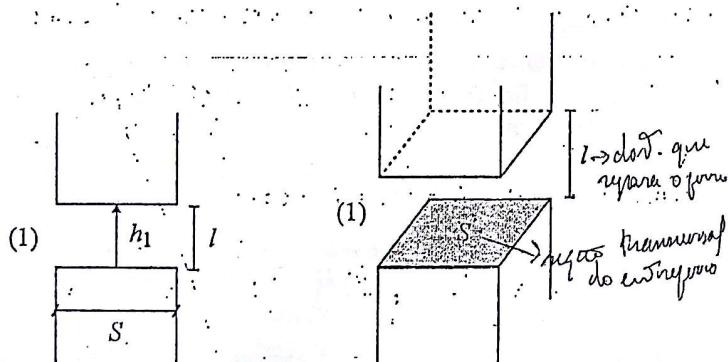


Figura 4.44b – Notações para entreferro

4.44 c – Detalhe do entreferro

Antes de abordar este problema faremos algumas observações:

- consideraremos $\mu_f \ll \mu_0$, o que significa que o h_f (campo no ferro) é desprezível em relação aos campos nos entreferros; a circulação de h_f é portanto também desprezível;
- o campo nos entreferros é considerado constante, sem espraiamento nas suas bordas; notemos que se as superfícies do ferro não estiverem face-a-face o cálculo de campo não é possível e somente métodos numéricos trarão

resultados satisfatórios. Para solucionarmos o problema, devemos escrever as equações de circulação de campo relativas aos caminhos que envolvem a bobina indutora de campo. Neste exemplo temos

– Caminho L_1

$$h_1 l_1 + h_2 l_2 + h_4 l_4 = nI \quad (4.37)$$

– Caminho L_2

$$h_1 l_1 + h_3 l_3 + h_4 l_4 = nI \quad (4.38)$$

Tendo 2 equações e 4 incógnitas devemos procurar na condição de conservação de fluxo as outras 2 equações que completarão nosso sistema

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3$$

$$\mu_0 h_1 S_1 = \mu_0 h_2 S_2 + \mu_0 h_3 S_3 \quad (4.39)$$

$$\phi_1 = \phi_4$$

$$\mu_0 h_1 S_1 = \mu_0 h_4 S_4 \quad (4.40)$$

Notemos que escrever a equação $\phi_4 = \phi_2 + \phi_3$, é totalmente redundante com as equações (4.39) e (4.40). Cabe salientar que as equações de circulação de campo (envolvendo a bobina) e as equações de conservação de fluxo (sem redundâncias) formam um sistema de equações de possível solução.

Suponhamos neste exemplo que

$$S_1 = S_4 = S \quad \text{e} \quad S_2 = S_3 = S/3$$

e que $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l$. O sistema de equações fica então

$$\begin{aligned} \text{de 4.37} \quad & h_1 + h_2 + h_4 = nI/l \Rightarrow h_2 = \frac{nI}{l} - h_1 - h_4 & h_{12} = h_1 - h_1 \\ \text{de 4.38} \quad & h_1 + h_3 + h_4 = nI/l \Rightarrow h_3 = \frac{nI}{l} - h_1 - h_4 & h_{13} = h_3 \\ \text{de 4.39} \quad & h_1 = h_2/3 + h_3/3 & h_1 = h_4 \\ \text{de 4.40} \quad & h_1 = h_4 \end{aligned}$$

A observação das duas primeiras equações mostram que $h_2 = h_3$. Obtemos como resultado

$$h_1 = h_4 = \frac{2nI}{7l} \quad \text{e} \quad h_2 = h_3 = \frac{3nI}{7l}.$$

O fluxo gerado pela bobina será igual a $\phi_1 = \mu_0 \frac{2nI}{7l} S$. A indutância própria do circuito elétrico da bobina é dada por $L = n\phi/I$, o que fornece:

$$L = \mu_0 \frac{2n^2}{7l} S$$

4.8.9 Cálculo de um circuito magnético saturável

No exemplo precedente foi considerado que o ferro possui uma permeabilidade infinita; como efeito, o campo hf no ferro foi considerado desprezível. Porém, se a força magnetomotriz nI da bobina for muito intensa, o circuito magnético apresentará saturação devido ao fluxo elevado. Neste caso, o campo hf apresentará um valor não desprezível e a permeabilidade do ferro não poderá ser considerada infinita. Para solucionarmos este problema é necessário que conheçamos a curva $B(H)$ do material utilizado no circuito magnético. A solução passará por um processo iterativo, tendo em vista que, embora tendo a curva $B(H)$ do ferro, não sabemos o ponto da mesma no qual o meio irá trabalhar.

Consideremos o circuito da Fig. 4.45, onde haverá saturação do ferro obedecendo a curva $B(H)$ indicada na Fig. 4.46.

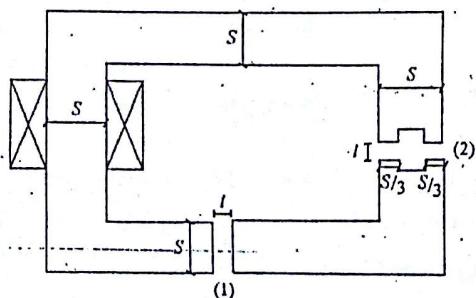


Figura 4.45 – Circuito magnético

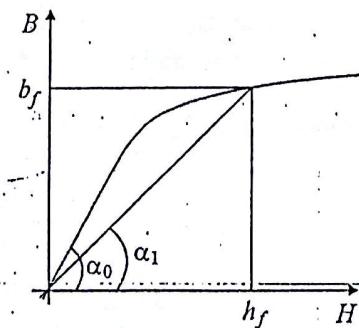


Figura 4.46 – Curva $B(H)$ do ferro

Chamaremos l_f o comprimento médio do circuito magnético. Escrevamos as equações de circulação de campo e conservação de fluxo

$$\begin{aligned} h_1 l + h_2 l + hf l_f &= nI \\ hf &= \phi_1 \quad \therefore hf S = \mu_0 h_1 S \\ \phi_1 &= \phi_2 \quad \therefore \mu_0 h_1 S = 2\mu_0 h_2 \frac{S}{3} \end{aligned}$$

O sistema pode ser então escrito sob a forma:

$$h_1 l + h_2 l + hf l_f = nI \quad (4.41)$$

$$\mu_f hf = \mu_0 h_1 \quad (4.42)$$

$$h_1 = 2h_2/3 \quad (4.43)$$

Deste sistema devemos obter um processo iterativo a fim de solucionar o problema. Uma das maneiras de chegarmos ao mesmo consiste em substituir h_2 da Eq. (4.43) na Eq. (4.41) e teríamos um sistema reduzido às variáveis hf e h_1 , ou

$$\frac{5}{2}h_1 l + hf l_f = nI \quad (4.44)$$

$$hf = \frac{\mu_0}{\mu_f} h_1 \quad (4.45)$$

O processo pode iniciar-se em regime linear onde $hf^0 = 0$; a este valor de hf^0 obtemos μ_f^0 da curva $B(H)$ através do cálculo da tangente do ângulo α_0 indicado na Fig. 4.46; o processo será

- da Eq. (4.44) obtemos $h_1^1 = \frac{2nI}{5l}$;
- da Eq. (4.45) obtemos $hf^1 = \frac{\mu_0}{\mu_f^0} h_1^1$;

- da curva $B(H)$, com valor de hf^1 , obtemos bf^1 e calculamos

$$\mu_f^1 = \frac{bf^1}{hf^1}, \text{ tangente de } \alpha_1$$

- com o valor hf^1 podemos voltar à Eq. (4.44) onde obtemos o novo h_l^2 , através de

$$h_l^2 = (nI - hf^1 l_f) \frac{2}{5l}$$

- na Eq. (4.45), obtemos o novo hf^2 ;
- vai-se a curva $B(H)$ e assim sucessivamente até que se obtenha a convergência, quando a variação de grandezas é menor que um erro especificado. Este processo pode ser indicado de forma geral como abaixo:

$$h_l^i = (nI - hf^{i-1} l_f) \frac{2}{5l};$$

$$hf^i = \frac{\mu_0}{\mu_f} h_l^i;$$

- da curva, obtemos μ_f^i ;

Uma vez que a convergência é obtida, o que em geral ocorre, pode-se obter o valor de h_2 através da Eq. (4.43).

Notemos que neste exemplo consideramos que o campo no ferro é o mesmo em todas as partes do circuito magnético. Isto se deve ao fato de que a seção S do ferro é constante. Caso isto não ocorra, deve-se partitionar o ferro de maneira a calcular os diferentes campos no ferro, como é indicado na Fig. 4.47. Na equação de circulação aparecerá mais uma variável hf_2

$$\dots hf_1 l_f + hf_2 l_f + \dots = nI$$

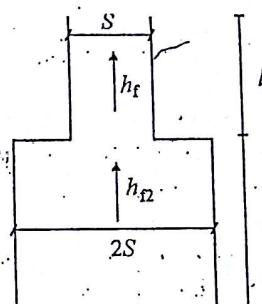


Figura 4.47 – Circuito magnético com estreitamento

Para que o sistema de equações se mantenha coerente devemos estabelecer mais uma equação que é relativa à conservação do fluxo

$$\mu_f f_2 h_f 2S = \mu_f h_f S.$$

Assinalamos também que num circuito magnético bem dimensionado tais situações não devem ocorrer.

4.8.10 Circuito magnético comportando ímãs permanentes

Na Fig. 4.48 temos um circuito magnético cuja força magnetomotriz é fornecida por ímã de características conhecidas. Desejamos calcular os campos nos entreferros do circuito.

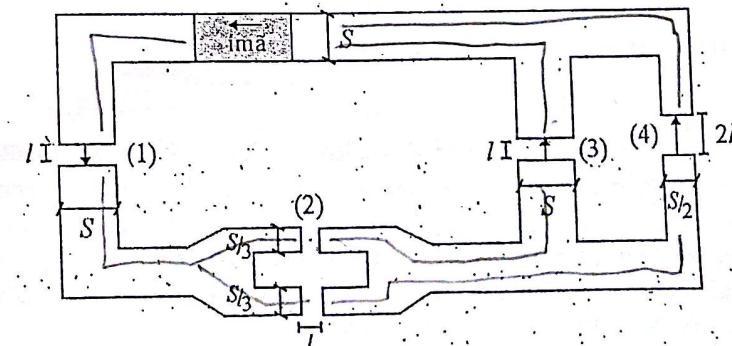


Figura 4.48 – Circuito magnético excitado por ímã permanente

Escrevamos as duas equações relativas à circulação de campo para os dois caminhos passando pelo imã

$$H_i L + h_1 l + h_2 l + h_3 l = 0 \quad (4.46)$$

$$H_i L + h_1 l + h_2 l + h_4 2l = 0 \quad (4.47)$$

Poderíamos também ter utilizado o caminho passando pelos entreferros (3) e (4); para tanto, devemos tomar algumas precauções: inicialmente é necessário definir o sentido do fluxo magnético nestes entreferros devido ao fluxo do imã, como está indicado na Fig. 4.48 (ambos para cima); depois, lembremo-nos que na equação de circulação de campo deve-se levar em conta o sentido do vetor dl , como indicado na Fig. 4.49.

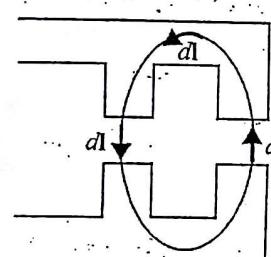


Figura 4.49 – Vetor dl necessário para circulação de campo

Notemos então que a equação

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I = 0$$

fornecerá, devido ao produto escalar

$$-h_3 l + h_4 2l = 0 \quad (4.48)$$

Observemos que se diminuirmos a Eq. (4.46) da Eq. (4.47) obtemos $h_4 2l - h_3 l = 0$, significando que a Eq. (4.48) é redundante com as Eqs. (4.46) e (4.47). Isto reforça o que já foi colocado, ou seja, ao utilizarem-se apenas equações cujos caminhos de circulação passam pela bobina (ou imã, neste caso) obter-se-á (com as equações de conservação de fluxo) o que é necessário para a solução do problema.

Vejamos então as equações relativas à conservação de fluxo:

$$\phi_i = \phi_1 \quad \phi_1 = \phi_2 \quad \phi_2 = \phi_3 + \phi_4$$

que se tornam

$$B_i S = \mu_0 h_1 S \quad (4.49)$$

$$\mu_0 h_1 S = 2\mu_0 h_2 \frac{S}{3} \quad (4.50)$$

$$2\mu_0 h_2 \frac{S}{3} = \mu_0 h_3 S + \mu_0 h_4 \frac{S}{2} \quad (4.51)$$

Obtemos então o seguinte sistema de equações

$$H_i L + h_1 l + h_2 l + h_3 l = 0$$

$$H_i L + h_1 l + h_2 l + h_4 2l = 0$$

$$B_i = \mu_0 h_1$$

$$h_1 = 2h_2/3$$

$$2h_2/3 = h_3 + h_4/2$$

Fazendo as substituições convenientes obtemos $\frac{B_i}{H_i} = -\mu_0 \frac{L/10}{I/33}$.

Esta relação, dada em módulo, corresponde à tangente do ângulo β da Fig. 4.50; podemos então utilizar a curva característica do imã e obter os valores do trabalho do imã, como indicado nesta figura.

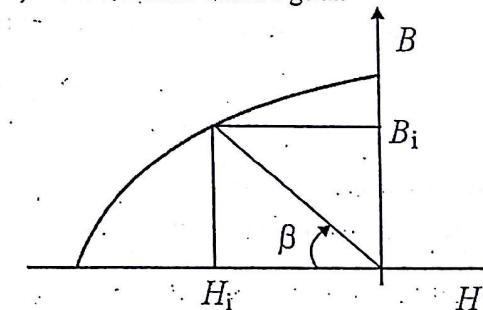


Figura 4.50 – Definição do ângulo para fins de obtenção do ponto de trabalho do imã

$$\beta = \operatorname{arctg} \mu_0 \frac{L}{l} \frac{10}{33}$$

Uma vez obtidos os valores de B_i e H_i podemos facilmente determinar h_1 , h_2 , h_3 e h_4 com as equações acima.

Peçamos uma aplicação numérica; para a curva característica do ímã, utilizemos a equação relativa à Fig. 4.51 ($B_i = \mu_0 H_i + 0,4$), que corresponde a um ímã de ferrite.

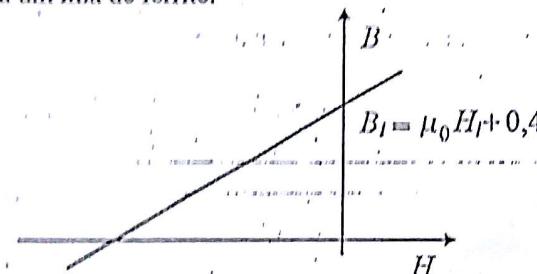


Figura 4.51 - Equação do ímã permanente

Consideremos também

$$L = 4 \text{ cm} \quad S = 4 \text{ cm}^2 \quad l = 2 \text{ mm}$$

Utilizando as equações

$$B_i = -\mu_0 \frac{L}{l} \frac{10}{33} H_i \quad \text{e} \quad B_i = \mu_0 H_i + 0,4$$

obtemos os valores

$$B_i = 0,343 \text{ T} \quad \text{e} \quad H_i = -45082 \text{ A/m}$$

Sabendo que $b_i = \mu_0 h_i$, obtemos $h_1 = 272950 \text{ A/m}$; como $h_2 = 3h_1/2$ obtemos $h_2 = 409426 \text{ A/m}$; utilizando da mesma maneira as outras relações, calculamos também $h_3 = 218360 \text{ A/m}$ e $h_4 = 109180 \text{ A/m}$.

4.8.11 Equivalência entre ímã permanente e bobina de corrente

É possível substituir um ímã permanente por uma bobina alimentada com corrente equivalente. Esta operação pode ser útil no momento em que por conveniências físicas ou algébricas é mais interessante efetuar cálculos

únicamente com bobinas. Inicialmente, é importante notar que a permeabilidade do ímã é baixa, próxima a do ar, conforme a tabela do parágrafo 4.5.4c. Portanto um ímã possui, intrinsecamente, uma retenção à sua capacidade de externar seu fluxo. Consideremos o circuito magnético muito simples da Fig. 4.52a cujo fluxo é estabelecido por um ímã cuja característica é dada pela equação $B_i = \mu_i H_i + B_r$, onde μ_i é a permeabilidade do ímã e B_r sua indução remanente.

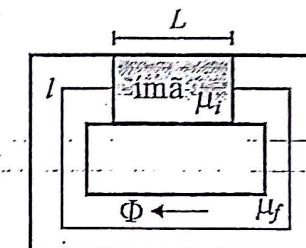


Figura 4.52a - Circuito com ímã permanente

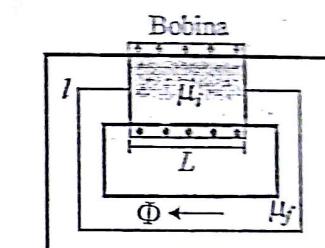


Figura 4.52b - Circuito equiv. com bobina

Imaginemos que o ímã será substituído por uma bobina tendo no seu interior um material com a mesma permeabilidade do ímã e que produza o mesmo campo no ferro, conforme Fig. 4.52b. Como esta bobina é hipotética, vamos considerá-la muito fina, definindo portanto uma densidade linear J_i de corrente, que fornecerá uma fmm igual a $J_i L$. Inicialmente examinemos as equações do circuito com ímã permanente:

- circulação de campo : $H_i L + h l = 0$

- conservação de fluxo : $\phi_i = \phi_f \quad \text{ou} \quad B_i = \mu_f h$

- equação do ímã : $B_i = \mu_i H_i + B_r$

onde h é o campo no ferro, l seu comprimento e observando ainda que as seções transversais S do ímã e do ferro são idênticas. Resolvendo o sistema de equações acima, obtemos para o campo h no ferro

$$h = \frac{B_r}{\mu_i} \frac{1}{(\mu_f/\mu_i + l/L)} \quad (4.52)$$

Para o circuito magnético com a bobina, temos as seguintes equações:

- circulação de campos: $H_b L + h l = J_l L$

- conservação de fluxo: $\phi_b = \phi_f$ ou $\mu_i H_b = \mu_f h$

onde H_b é o campo no interior da bobina. Resolvendo este sistema de equações, obtemos para h

$$h = J_l \frac{1}{(\mu_f/\mu_i + l/L)} \quad (4.53)$$

Para que o campo h seja idêntico nos dois circuitos magnéticos, igualamos as Eqs. (4.52) e (4.53), e chegamos à

$$J_l = \frac{B_r}{\mu_i}$$

Embora este resultado tenha sido obtido para um caso particular, esta equivalência é sempre válida.

4.9 EXERCÍCIOS

- 4.1) a) Calcule o campo magnético H criado pelos dois fios no ponto P , distante x do fio infinito I , conforme Fig. 4.53; b) trace, de forma aproximada, a curva $H(x)$ para $0 < x < A$; c) calcule o valor de x para que H seja mínimo, bem como o valor de H mínimo.

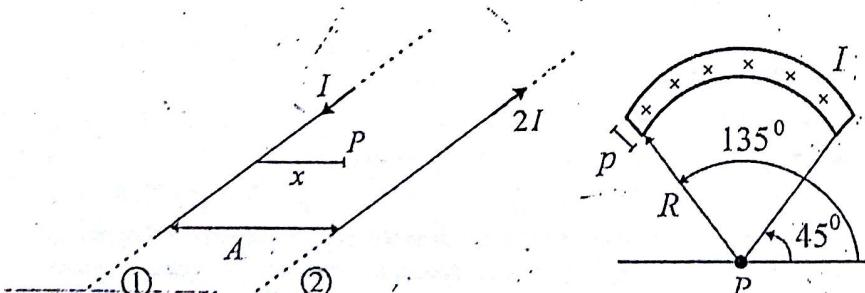


Figura 4.53

Figura 4.54

- 4.2) A canaleta de espessura $p \ll R$ é infinita e conduz uma corrente I , conforme a Fig. 4.54. Calcule a densidade de corrente J e o campo magnético H no ponto P .

- 4.3) No plano Oxy ($z=0$) existe uma corrente dada por sua densidade linear $J=J_0 z$, que se estabelece em todo o plano infinito Oxy . Calcule o campo H que se forma em ambos os lados do plano ($z < 0$ e $z > 0$).

- 4.4) Suponha que a densidade superficial de corrente J dentro de um fio circular de raio R varie segundo a lei $J(r) = a + b r^2$ sendo r o raio genérico ($0 < r \leq R$). Sabendo que $J(0)=0$ e $J(R)=J_0$, calcule o campo magnético dentro e fora do fio. Trace o gráfico $H(r)$ indicando $H(R)$.

- 4.5) No cabo coaxial da Fig. 4.55 circula a corrente I no cabo interno ($r \leq R_1$) e $-I$ no externo ($R_2 \leq r \leq R_3$). No espaço entre os dois cabos temos um isolante. Calcule H para os seguintes casos: a) $r \leq R_1$; b) $R_1 < r \leq R_2$; c) $R_2 \leq r \leq R_3$; d) $r > R_3$. Indique qual é o interesse deste tipo de cabo.

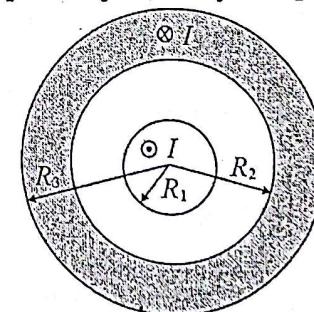


Figura 4.55

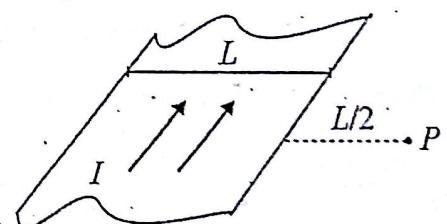


Figura 4.56

- 4.6) Uma placa infinita de espessura desprezível e largura L conduz uma corrente I , conforme a Fig. 4.56. Calcule o campo magnético H criado pela placa no ponto P .

- 4.7) Duas barras paralelas e infinitas possuem correntes I e $2I$, conforme Fig. 4.57. Considere $e \ll A$.

- a) Calcule o campo H criado unicamente pela barra da esquerda no ponto P distante x desta barra;

- b) calcule o campo criado pelas duas barras no ponto P ;

- c) obtenha a distância x em função de A onde o campo total é nulo.

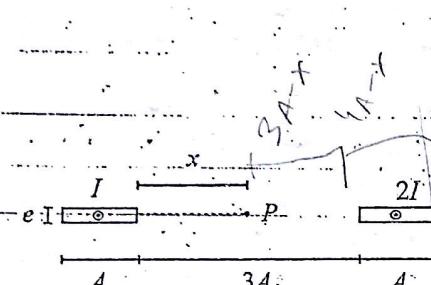


Figura 4.57

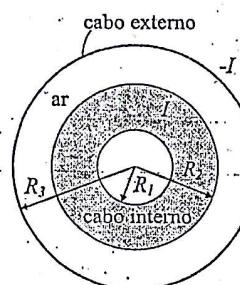


Figura 4.58

4.8) No cabo coaxial de Fig. 4.58 o condutor interno é percorrido pela corrente I . O cabo externo, percorrido por $-I$, tem espessura desprezível. Calcule H para a) $r < R_1$; b) $R_1 \leq r \leq R_2$; c) $R_2 < r \leq R_3$; d) $r > R_3$. Trace, de forma aproximada, a curva $H(r)$.

4.9) A barra infinita da Fig. 4.59 tem uma espessura desprezível. Calcule o campo H no ponto P .

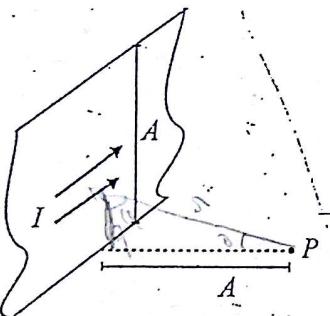


Figura 4.59

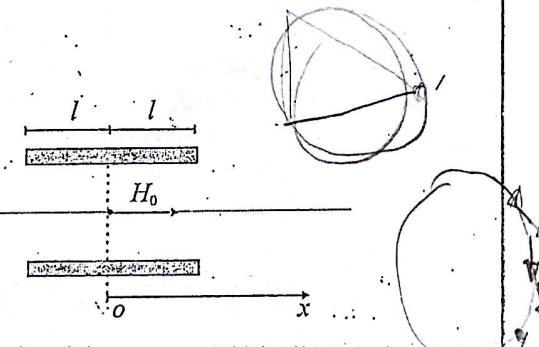


Figura 4.60

4.10) Considere o solenóide da Fig. 4.60 com n espiras e percorrido pela corrente I . Em $x=0$, no meio do solenóide, o campo vale H_0 . O campo magnético, na linha que coincide com o eixo longitudinal de simetria, se estabelece entre $-\infty$ e $+\infty$.

a) Assumindo que $H(x)$ diminua exponencialmente sob a forma αe^{-bx} a partir de $x=0$ e que em $x=l$ valha $H_0/2$, obtenha a lei $H(x)$;

b) com esta expressão e aplicando a lei de Ampère, obtenha o valor de H_0 e a expressão final de $H(x)$;

c) aplicação numérica: calcule $H(x)$ para $I=2\text{ A}$, $n=50$ espiras e $l=5\text{ cm}$.

4.11) Utilizando a lei de Biot-Savart, calcule o campo magnético no ponto P para as situações das Figs. 4.61 abaixo.

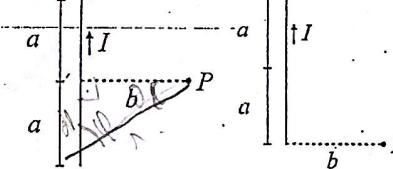


Figura 4.61a

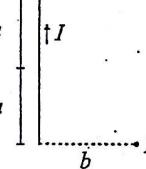


Figura 4.61b

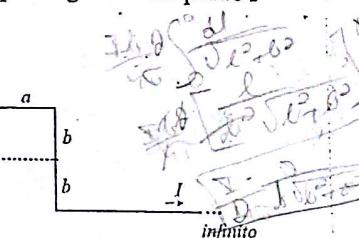


Figura 4.61c

4.12) Utilizando a lei de Biot-Savart, calcule o campo magnético no ponto P para as situações da Fig. 4.62 abaixo.

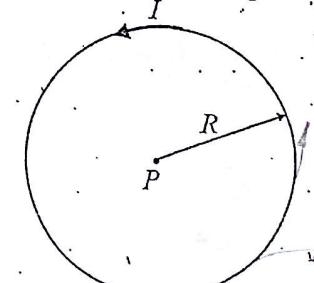


Figura 4.62a

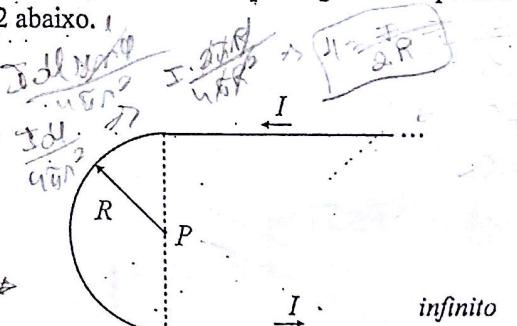
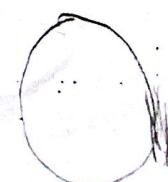


Figura 4.62b

4.13) a) Dado o segmento de espira circular de raio R da Fig. 4.63a, calcule o campo magnético H criado no seu centro O ; b) suponha que o ponto O seja também o centro de outra parcela de espira circular de raio $2R$ e calcule o ângulo α , conforme Fig. 4.63b para que o campo total em O seja nulo.



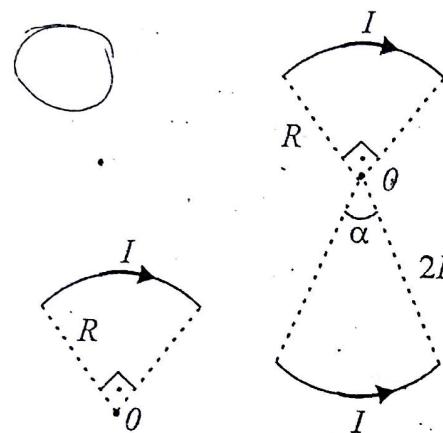


Figura 4.63a

Figura 4.63b

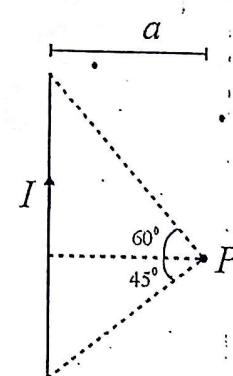


Figura 4.64

4.14) Calcule o campo magnético criado no ponto P pelo segmento de fio da Fig. 4.64.

~~4.15)~~ Calcule o campo magnético criado pela espira retangular da Fig. 4.65 no ponto P . Observe que este ponto se projeta perpendicularmente ao plano da espira no ponto de encontro das diagonais.

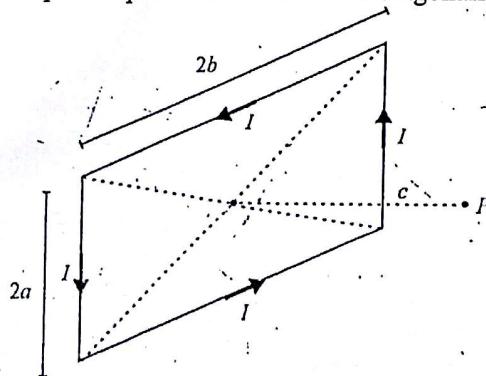


Figura 4.65

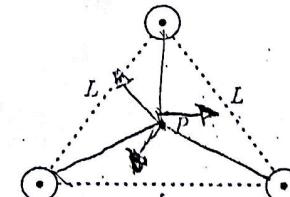


Figura 4.66

4.16) Três fios infinitos percorridos pela corrente I estão posicionados conforme a Fig. 4.66. Calcule: a) o campo magnético criado por um dos fios

no baricentro do triângulo, ponto P ; b) o campo resultante em P , levando em conta os três fios.

4.17) Suponha que na figura do problema anterior o fio que se encontra na posição mais alta tenha sua corrente invertida. Calcule novamente o campo resultante no ponto P .

~~4.18)~~ Utilizando a expressão do campo magnético obtida no Exercício 12, calcule o campo criado no ponto O da Fig. 4.67 por uma barra circular percorrida pela corrente I . Considere $e \ll R_1$.

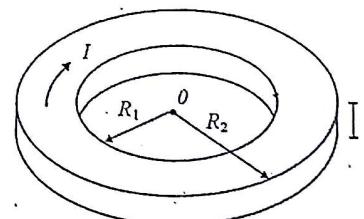


Figura 4.67

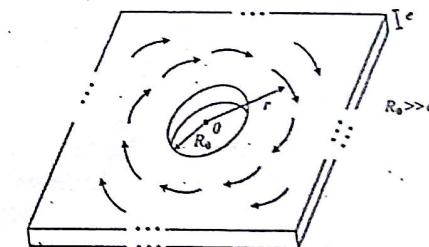


Figura 4.68

~~4.19)~~ A placa infinita da Fig. 4.68 possui um furo de raio R_0 . Ela é percorrida por uma corrente circular cuja densidade decai segundo a expressão $J(r) = J_0 R_0 / r$. Calcule o campo em O , assumindo que $e \ll R_0$.

~~4.20)~~ Dada a estrutura da Fig. 4.69, calcule o campo magnético H criado no ponto P . Considere os fios eletricamente isolados no ponto de contato.

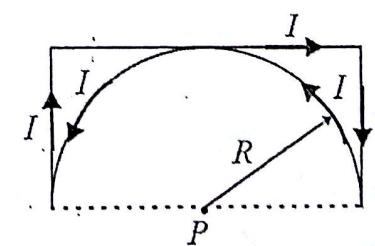


Figura 4.69

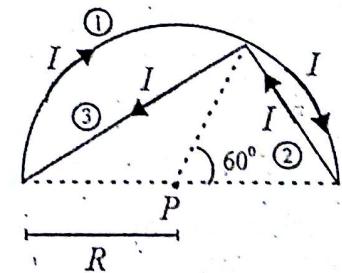


Figura 4.70

- ✓ 4.21) O circuito elétrico de Fig. 4.70 cria um campo magnético no ponto P .
 a) Calcule o campo H_1 devido ao trecho 1 da espira; b) idem para o trecho 2; c) idem para 3; d) obtenha o campo resultante em P .

- ✓ 4.22) Na Fig. 4.71 os fios 1 e 2 têm a forma indicada e se estendem ao infinito. O ponto P situa-se no centro da circunferência. a) Calcule o campo criado pelo fio 1 no ponto P ; b) calcule o campo resultante criado pelos dois fios.

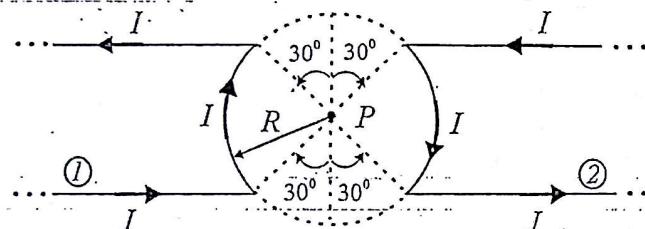


Figura 4.71

- ✓ 4.23) Duas espiras com a forma de triângulo equilátero estão inscritas e circunscritas na circunferência de raio R , conforme a Fig. 4.72. a) Calcule o campo H_1 criado pela espira menor no ponto O ; b) idem, H_2 devido a espira maior; c) obtenha a relação $|H_1|/|H_2|$.

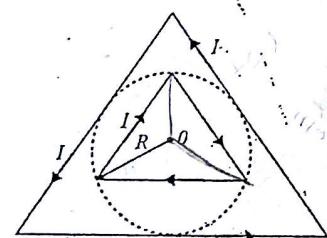


Figura 4.72

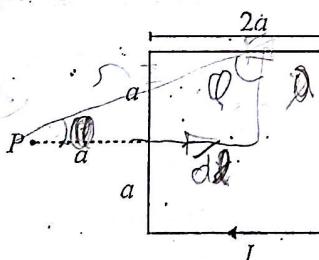


Figura 4.73

- ✓ 4.24) Calcule o campo magnético no ponto P criado pela espira quadrada de lado $2a$, conforme a Fig. 4.73.

- ✓ 4.25) Na Fig. 4.74 temos um fio infinito que sofre uma mudança de direção de 90° no ponto O . Associe os eixos x e y . Calcule o campo magnético $H(x,y)$ criado pelo fio para um ponto genérico $P(x,y)$.

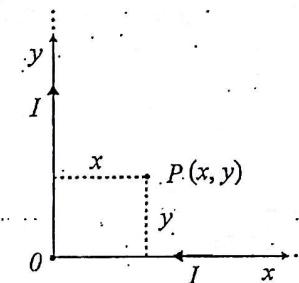


Figura 4.74

- ✓ 4.26) Nos circuitos magnéticos das Figs. 4.75a (entreferros em série) e 4.75b (entreferros em paralelo), calcule os campos h_1 e h_2 nos entreferros respectivos (1) e (2), assumindo que a permeabilidade do ferro é muito superior à do ar ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$) e que os campos magnéticos sejam constantes nos entreferros sem sofrer espraiamento (efeitos de bordo). Obs: considere que S é a seção transversal do entreferro, perpendicular ao fluxo magnético.

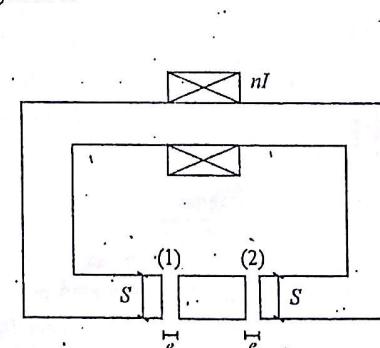


Figura 4.75a

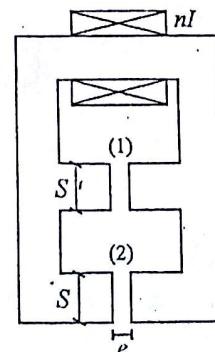


Figura 4.75b

- ✓ 4.27) Refaça os cálculos para os dois circuitos magnéticos, das Figs. 4.75, utilizando a analogia com circuitos elétricos.

- ✓ 4.28) Dados os circuitos magnéticos das Figs. 4.76a,b,c e considerando as aproximações e convenções do Exercício 4.26: a) Escreva as equações de

circulação de campo e conservação de fluxo; b) deduza os campos nos entreferros; c) calcule a expressão do fluxo gerado pela bobina.

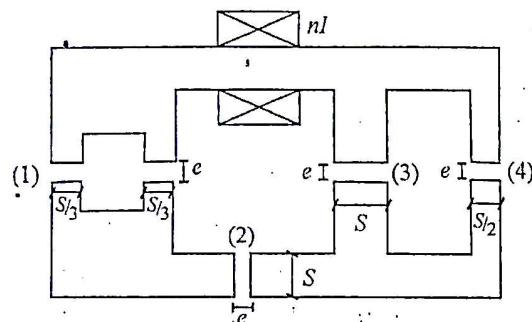


Figura 4.76a

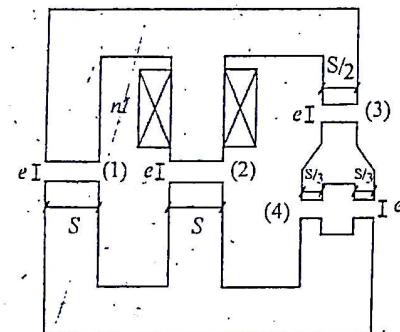


Figura 4.76b

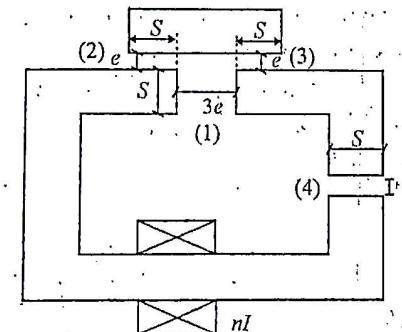


Figura 4.76c

~~4.29)~~ Dado o circuito magnético da Fig. 4.77 e considerando as aproximações e convenções do Exercício 4.26: a) Escreva as equações de circulação de campo e conservação de fluxo; b) deduza os campos nos entreferros para os seguintes dados: $S = 4 \text{ cm}^2$, $e = 1 \text{ mm}$, $I = 2 \text{ A}$, $n = 100$ espiras. Obs: considere o campo sempre perpendicular à seção transversal do entreferro.

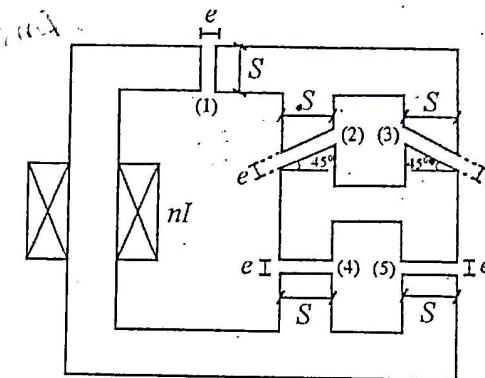


Figura 4.77

~~4.30)~~ Considere as aproximações já acima adotadas para o circuito magnético da Fig. 4.78. Assuma também que $e \ll R$. Observe que nas figuras temos o detalhamento dos entreferros (1) e (2). a) Escreva as equações de circulação de campo e conservação de fluxo; b) para $nI=300$ Ae , $R=2 \text{ cm}$ e $e=1 \text{ mm}$, obtenha os valores de campo nos entreferros.

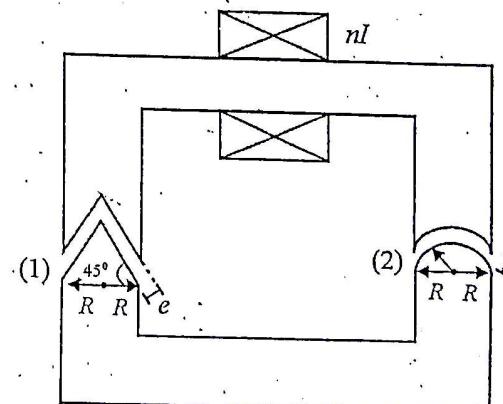
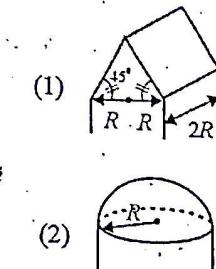


Figura 4.78



~~4.31)~~ Na Fig. 4.79 temos uma estrutura axi-simétrica, ou seja, sua forma é cilíndrica, obtida pela rotação da seção mostrada em torno do seu eixo de simetria vertical.

- a) Escreva as equações de circulação de campos e conservação de fluxo;
 b) determine R_i para que a indução magnética no entreferro central (1) seja idêntica a do entreferro externo (2);
 c) determine os campos h_1 e h_2 nos respectivos entreferros (1) e (2).

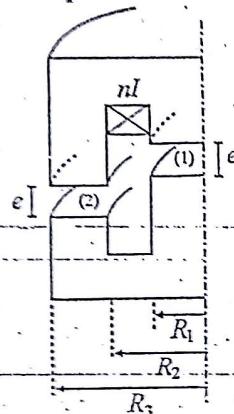


Figura 4.79

4.32) O circuito magnético da Fig. 4.80 possui um ímã permanente cuja característica é dada pela curva $B_i = \mu_0 H_i + 0.8$ e $L = 1\text{ cm}$. Temos ainda $S=2\text{ cm}^2$ e $e=2\text{ mm}$. Calcule os campos magnéticos nos entreferros e a indução B_i de trabalho do ímã.

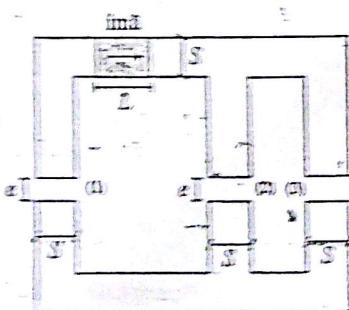


Figura 4.80

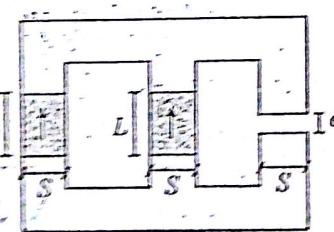


Figura 4.81

4.33) No circuito magnético da Fig. 4.81, foram colocados dois ímãs idênticos em paralelo com o intuito de aumentar o campo no entreferro. Escreva as equações apropriadas para obter o campo no entreferro levando em conta a curva característica do ímã $B_i = \mu_0 H_i + 0.8$. Além de h no entreferro, calcule também o valor de B_i .

4.34) A estrutura da Fig. 4.82 é axi-simétrica e temos um ímã cilíndrico gerando fluxo. Considere $e \ll R_2$.

- a) Escreva as equações de circulação de campo e conservação de fluxo;
 b) calcule os campos nos entreferros utilizando os seguintes dados:
 $B_i = \mu_0 H_i + 0.6$ (curva do ímã); $e=2\text{ mm}$; $R_1=1\text{ cm}$; $R_2=2\text{ cm}$;
 $R_3=3\text{ cm}$; $R_4=3.162\text{ cm}$; $L=2\text{ cm}$. Ache também o valor de B_i .

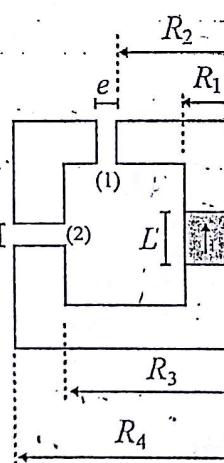


Figura 4.82

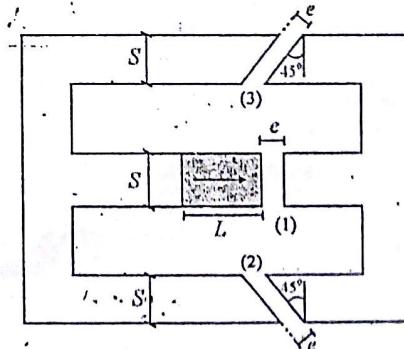


Figura 4.83

4.35) Para o circuito magnético da Fig. 4.83:

- a) Escreva as equações de circulação de campo e conservação de fluxo;
 b) calcule os campos nos entreferros e B_i utilizando os seguintes dados: $B_i = \mu_0 H_i + 0.8$ (curva do ímã); $e=2\text{ mm}$; $L=2\text{ cm}$ e $S=3\text{ cm}^2$.

4.36) O circuito magnético da Fig. 4.84 é excitado por uma bobina e um ímã permanente, ambos gerando fluxo no mesmo sentido. Não havendo

saturação, este circuito pode ser equacionado e resolvido de duas formas diferentes:

- A bobina e o ímã permanente atuando simultaneamente;
- calculando o campo gerado no entreferro unicamente pela bobina (desconsiderando o ímã) e após refazendo os cálculos com o campo gerado unicamente pelo ímã (desconsiderando a bobina); os campos no entreferro são então adicionados.

Efetue os cálculos "a" e "b" conforme indicado acima para os seguintes dados: $B_i = \mu_0 H_i + 0.8$ (curva do ímã); $e = 2 \text{ mm}$; $L = 1 \text{ cm}$ e $S = 2 \text{ cm}^2$ e $nI = 1000 \text{ Ae}$, obtendo os campos nos entreferros e a indução B_i .

Obs: no cálculo onde somente a bobina é ativada, considere o ímã como um entreferro de comprimento L .

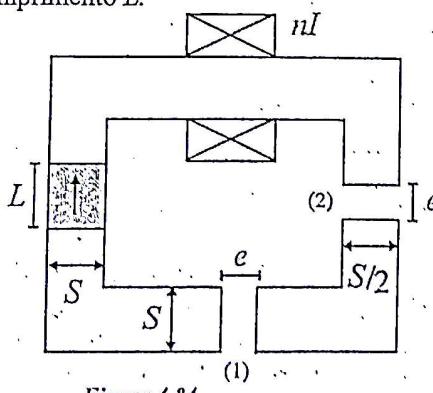


Figura 4.84

4.37) Utilizando a técnica "b" do problema precedente, calcule, de forma imediata, os campos nos entreferros quando o ímã permanente e a bobina estão gerando fluxos de sentidos contrários.

4.38) Um conjunto de lâminas de ferro com $\mu_r = 1000$ é formado de tal forma que 97% do volume é ocupado pelo ferro sendo que o restante pode ser considerado como ar. Calcule as permeabilidades do conjunto no sentido paralelo às lâminas e no sentido perpendicular às mesmas.

4.39) Na Fig. 4.85 temos os dados relativos à refracção de campos magnéticos numa interface entre ferro e ar, onde consideramos a existência de uma corrente nesta interface definida por sua densidade linear J_t .

Calcule o ângulo θ_2 para as seguintes situações, sabendo que $H_1 = 10^5 \text{ A/m}$:

- $J_t = 0 \text{ A/m}$;
- $J_t = 5 \times 10^4 \text{ A/m}$;
- $J_t = 0.507 \times 10^5 \text{ A/m}$.

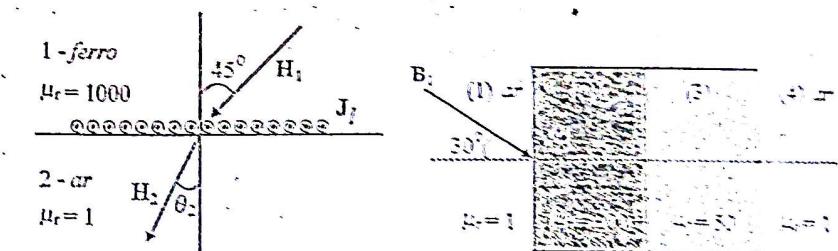


Figura 4.85

Figura 4.86

4.40) Dois materiais ferromagnéticos (1 e 2) adjacentes formam um conjunto situado no ar (designado como material 4 no lado esquerdo e como 4 no lado direito), conforme Fig. 4.86. A indução magnética B incide no meio 2 e vale 0.1 Tesla . Calcule a indução (módulo e direção) nos meios 1 e 3, bem como no ar à direita (material 4).

4.41) Calcule a indutância própria por unidade de comprimento de um cabo paralelo formado por dois fios infinitos apresentado na Fig. 4.87. Considere somente o fluxo gerado na região entre os dois fios. O raio do fio é a e b é a distância que separa os dois fios. Considere também $a < b$.

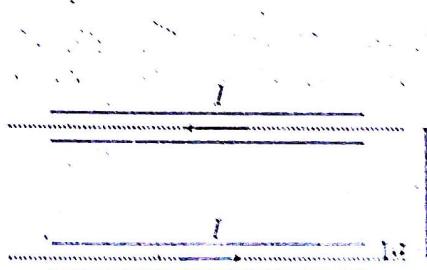


Figura 4.87

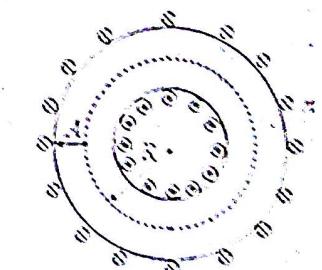


Figura 4.88

4.42) Calcule a indutância própria de um toróide de seção circular constituído de um material ferromagnético com $\mu_r = 200$ envolto por um fio com n espiras, conforme Fig. 4.88. O raio do toróide é R e o raio de sua seção transversal vale A . Considere $A \ll R$.

4.43) O circuito elétrico C_1 é o fio infinito mostrado na Fig. 4.89. O circuito elétrico C_2 é a espira retangular situada no mesmo plano do fio infinito. Calcule a indutância mútua M_{12} .

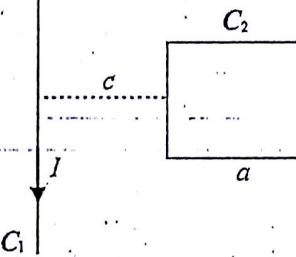


Figura 4.89.

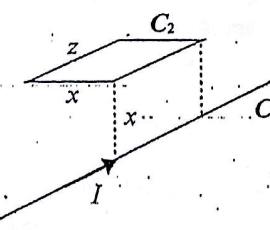


Figura 4.90

4.44) Similarmente ao problema anterior, calcule M_{12} para a situação da Fig. 4.90.

4.45) a) Calcule o campo magnético H_0 no ponto O (centro da espira) criado pela corrente I circulando no circuito elétrico C_1 mostrado na Fig. 4.91; b) considerando que o campo magnético criado por C_1 varie segundo a lei $H(r) = H_0(1 + 0.25r/R_0)$ para $0 < r < R_0$, calcule a indutância mútua M_{12} , sendo C_2 a espira de raio $R_0/2$.

$$\begin{aligned} H_0 &= I d\ell / \ell \text{ (definição)} \\ &\Rightarrow H_0 = I \cdot 2\pi R_0 / (2\pi R_0) = I \\ &\Rightarrow H_0 = I \text{ (definição)} \\ M_{12} &= \mu_0 S H_0 (A) \cdot d\varphi / dH_0 \text{ (definição)} \\ &\Rightarrow M_{12} = \mu_0 S H_0 (A) \cdot d\varphi / d(I/2R_0) \end{aligned}$$

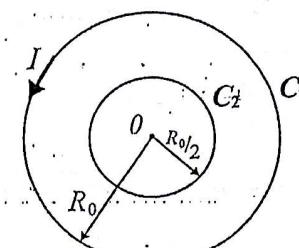


Figura 4.91

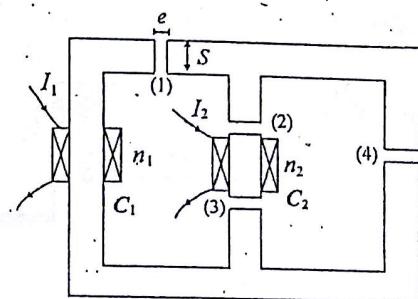


Figura 4.92

4.46) No circuito magnético da Fig. 4.92 considere as aproximações do problema 4.26 relativas ao campo no entreferro e que todos os entreferros são geometricamente idênticos ao entreferro (1).

- Ativando somente o circuito elétrico C_1 ($I_1 \neq 0$ e $I_2 = 0$) obtenha os campos nos entreferros;
- calcule L_1 e M_{12} ;
- ativando somente o circuito elétrico C_2 ($I_1 = 0$ e $I_2 \neq 0$) refaça os cálculos e obtenha L_2 e M_{12} .

Obs: n_1 e n_2 são os números de espiras nos circuitos elétricos C_1 e C_2 , respectivamente.

4.47) No circuito magnético da Fig. 4.93a considere que o ferro tenha permeabilidade infinita e que a mesma não varie com o fluxo magnético. No entreferro colocamos a amostra de um outro material ferromagnético cuja curva $B(H)$ é dada na Fig. 4.93b. Os outros dados são: $n = 10$ espiras, $l = 5$ cm e $S = 20 \text{ cm}^2$.

- Calcule H na amostra para $I=2 \text{ A}$ (considere H constante e vertical na amostra);
- calcule o fluxo magnético para $I=2 \text{ A}$ e a indutância própria do dispositivo;
- refaça os cálculos para $I=4, 8, 12$ e 20 A e obtenha as indutâncias correspondentes;
- trace a curva $L(I)$ e conclua.

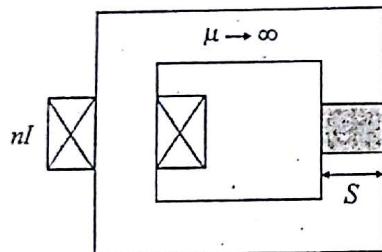


Figura 4.93a

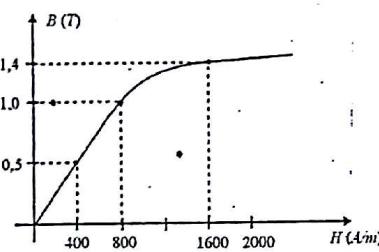


Figura 4.93b

4.48) No circuito magnético da Fig. 4.94a considere o campo no entreferro constante e sem espraiamento. A curva $B(H)$ característica do ferro é aproximada pela equação $B(H) = 2(1 - e^{-H/1000})$ e é mostrada na Fig. 4.94b. Os outros dados são: $nI = 1550 Ae$, $l = 1\text{ mm}$, $l_f = 30\text{ mm}$ (comprimento médio do circuito em ferro) e $S = 2\text{ cm}^2$. Baseado no exemplo 4.8.9 estabeleça um algoritmo em processo iterativo que permita obter o campo no entreferro, o campo no ferro e a permeabilidade final do ferro. Proceda com algumas iterações e/ou elabore um programa computacional para este algoritmo.

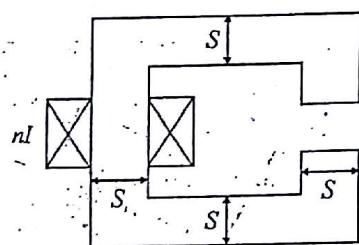


Figura 4.94a

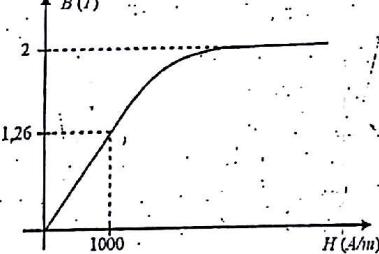


Figura 4.94b

Capítulo 5

MAGNETODINÂMICA

5.1 INTRODUÇÃO

Na Magnetodinâmica, os fenômenos variáveis no tempo são abordados. Como já foi colocado no Capítulo 4, na Magnetostática temos ferramentas que possibilitam abordar um grande número de casos dinâmicos, porém, isto é feito como uma sucessão de casos estáticos, de tal forma que a composição dos resultados fornece o comportamento dinâmico. Essa estratégia não se mostra suficiente quando estamos em presença de correntes induzidas pois, neste caso, as equações da Magnetostática não contemplam um tratamento físico que as representem. As equações da Magnetodinâmica, com as aproximações adotadas no Cap. 2 são:

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \xrightarrow{\text{campo magnético}} \text{J} \text{ densidade superficial de corrente} \quad (5.1)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad \xrightarrow{\text{indução magnética}} \text{densidade de fluxo magnético} \quad (5.2)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{campo elétrico}} \quad (5.3)$$

As relações constitutivas são:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \xrightarrow{\text{permeabilidade magnética}} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \xrightarrow{\text{condutividade elétrica}} \quad (5.5)$$

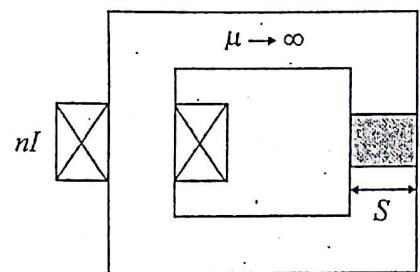


Figura 4.93a

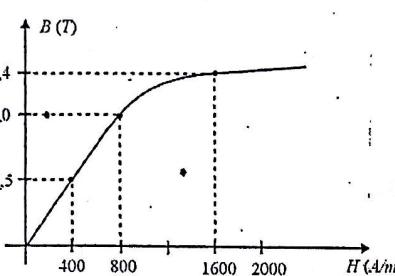


Figura 4.93b

4.48) No circuito magnético da Fig. 4.94a considere o campo no entreferro constante e sem espraiamento. A curva $B(H)$ característica do ferro é aproximada pela equação $B(H) = 2(1 - e^{-H/1000})$ e é mostrada na Fig. 4.94b. Os outros dados são: $nI = 1550 Ae$, $l = 1\text{ mm}$, $l_f = 30\text{ mm}$ (comprimento médio do circuito em ferro) e $S = 2\text{ cm}^2$. Baseado no exemplo 4.8.9 estabeleça um algoritmo em processo iterativo que permita obter o campo no entreferro, o campo no ferro e a permeabilidade final do ferro. Proceda com algumas iterações e/ou elabore um programa computacional para este algoritmo.

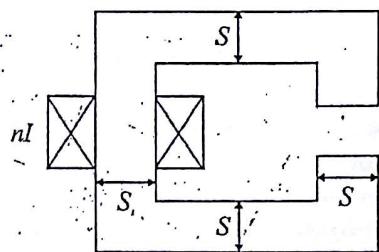


Figura 4.94a

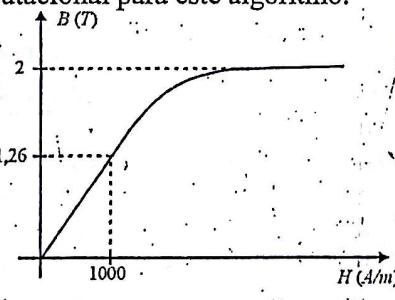


Figura 4.94b

Capítulo 5

MAGNETODINÂMICA

5.1 INTRODUÇÃO

Na Magnetodinâmica, os fenômenos variáveis no tempo são abordados. Como já foi colocado no Capítulo 4, na Magnetostática temos ferramentas que possibilitam abordar um grande número de casos dinâmicos, porém, isto é feito como uma sucessão de casos estáticos, de tal forma que a composição dos resultados fornece o comportamento dinâmico. Essa estratégia não se mostra suficiente quando estamos em presença de correntes induzidas pois, neste caso, as equações da Magnetostática não contemplam um tratamento físico que as representem. As equações da Magnetodinâmica, com as aproximações adotadas no Cap. 2 são:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} \xrightarrow{\substack{\text{campo magnético} \\ \text{densidade superficial de corrente}}} \text{densidade superficial de corrente} \quad (5.1)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \xrightarrow{\substack{\text{densidade magnética} \\ \text{(densidade de fluxo magnético)}}} \text{densidade de fluxo magnético} \quad (5.2)$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\substack{\text{campo elétrico} \\ \text{(campo de Hertz)}}} \text{campo de Hertz} \quad (5.3)$$

As relações constitutivas são:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \xrightarrow{\substack{\text{permeabilidade magnética}}} \text{permeabilidade magnética} \quad (5.4)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \xrightarrow{\substack{\text{condutividade elétrica}}} \text{condutividade elétrica} \quad (5.5)$$

$$\text{Notamos que na terceira equação temos o termo } -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ supostamente}$$

diferente de zero, que aqui assumirá um papel preponderante. Casos relativos à penetração de campos, blindagem magnética, correntes induzidas, perdas magnéticas, geradores de energia, entre tantos outros, são de possível abordagem com as ferramentas desenvolvidas neste capítulo e relacionadas com este termo. As leis de Faraday e Lenz são também, sob o aspecto fenomenológico, oriundas desta equação de Maxwell.

Estaremos em presença de problemas que podem ter grande complexidade. Por um lado temos uma variável nova: o tempo. Por outro, os problemas são praticamente todos tridimensionais, pois, como veremos em breve, a indução magnética \mathbf{B} e o campo elétrico \mathbf{E} (advindo da variação temporal de \mathbf{B}) são perpendiculares. Este conjunto de fatores faz com que os problemas de Magnetodinâmica sejam, na maior parte dos casos, de difícil abordagem. Seguidamente somos obrigados a proceder com algumas aproximações para que soluções sejam obtidas, o que em geral ocorre através de uso de algebrismo e estratégia numérica adaptados ao caso em questão. Isto não impede que evidenciemos, com boa precisão, uma série de fenômenos de Magnetodinâmica existentes em praticamente todas as estruturas elétricas que funcionam com excitação variável no tempo ou que, através do movimento relativo entre as suas partes, apresentem grandezas variáveis no tempo exigindo o uso da Eq. (5.3).

5.2 AS EQUAÇÕES DA MAGNETODINÂMICA

As equações $\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$ e $\text{div} \mathbf{B} = 0$, detalhadas no capítulo precedente, são aqui amplamente utilizadas sem qualquer particularidade. Relembremos que a primeira, sob forma integral, é a lei de Ampère enquanto que a segunda significa que o fluxo magnético é conservativo. A equação de real interesse é que caracteriza o domínio da "quase-estática" ou Magnetodinâmica é

$$\oint \text{rot} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{Lc. de Ampère}) \quad \text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{variação de } \mathbf{B} \text{ gera } \mathbf{E}$$

que indica que a variação temporal de \mathbf{B} cria um campo elétrico \mathbf{E} . Para uma melhor compreensão desta expressão, examinemos o exemplo apresentado abaixo. Inicialmente esta expressão será escrita sob sua forma integral e,

para tanto, imaginemos uma superfície aberta S , delimitada por $L(S)$, onde \mathbf{E} e \mathbf{B} sejam definidos. Aplicemos a integração abaixo:

$$\int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

Utilizando o teorema de Stokes, obtemos:

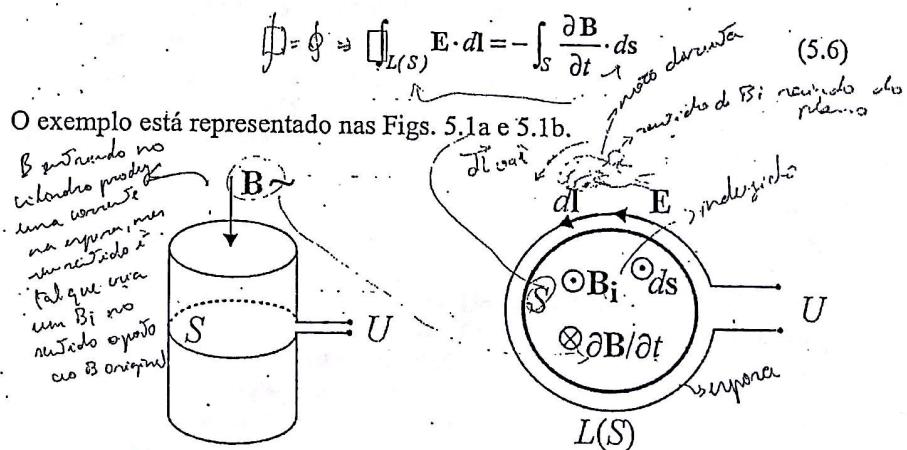


Figura 5.1a – Indução \mathbf{B} no meio homogêneo

5.1b – Vista superior

Consideremos a existência de um núcleo cilíndrico de um material ferromagnético homogêneo de tal maneira que possamos admitir que a indução magnética \mathbf{B} é constante na seção S . No entanto, vamos supor que \mathbf{B} possa ser variável no tempo, ou seja, é idêntico em todos os pontos de S num determinado momento. Esta seção S é adotada para a Eq. (5.6), e para $L(S)$, presente na mesma expressão, utilizaremos uma linha coincidente com uma espira em contato com o núcleo (mas isolada eletricamente), conforme mostrado nas Figs. 5.1. Observando a expressão $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ notamos que a variação de \mathbf{B} cria um campo elétrico \mathbf{E} na espira que é rotacional em relação a $-\partial \mathbf{B} / \partial t$, como indicado na Fig. 5.1b. A circulação de \mathbf{E} ao longo de $L(S)$, ou seja, da espira nos conduz a uma *fem* detectada num voltímetro sob a forma de tensão U (ver Cap. 3). Temos então:

$$U = \int_{L(S)} E \cdot dl$$

Observemos agora o outro termo da Eq. (5.6).

$$-\int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

Inicialmente, notamos que aqui B só depende do tempo pois é considerado constante na superfície S . Podemos então escrever $\partial B / \partial t = dB / dt$. Como a integração na superfície S e a derivação no tempo são operações independentes, temos:

$$-\int_S \frac{d B}{dt} \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds = -\frac{d \Phi}{dt}$$

onde Φ é o fluxo magnético. Igualando os dois termos da Eq. (5.6) obtidos acima temos então:

$$U = -\frac{d \Phi}{dt} \quad (5.7)$$

Esta é conhecida como "Lei de Faraday", pois foi o cientista Faraday quem/inicialmente evidenciou este fenômeno. Esta expressão implica que uma variação temporal de indução magnética é responsável pela criação de uma força eletromotriz. É, portanto, diretamente relacionada com a geração de eletricidade. Para termos uma idéia imediata sobre geração, imaginemos um aparato extremamente simples, mas teoricamente suficiente para entendermos a aplicação da lei de Faraday no que diz respeito à geração de eletricidade. Na Fig. 5.2a temos um solenóide, mostrado "em corte" pelas duas barras escuras.

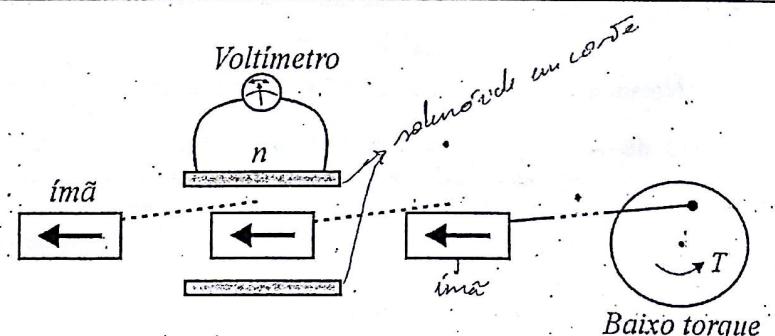


Figura 5.2a – Princípio do gerador (circuito aberto)

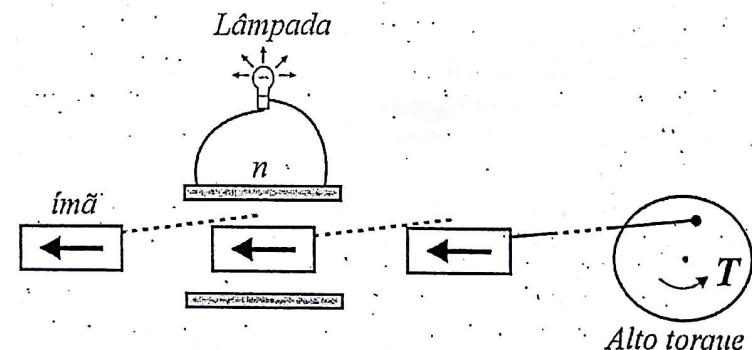


Figura 5.2b – Circuito com carga; trabalho mecânico é maior

Um voltmetro é ligado em série nos terminais deste solenóide sendo que no seu interior é colocado um ímã permanente que, através de um trabalho mecânico, terá um movimento oscilatório. Ora, como as espiras do solenóide "enxergam" uma variação de fluxo, o voltmetro irá detectar uma *sem* nos seus terminais, indicando uma tensão também variável. Neste momento, o trabalho mecânico fornecido é pequeno (apenas o necessário para vencer a inércia, o atrito e outras pequenas perdas), pois pelo circuito do solenóide não há circulação de corrente e a energia elétrica colhida é, portanto, nula.

Na situação da Fig. 5.2b o voltmetro é substituído por uma carga (uma lâmpada elétrica, por exemplo). Havendo uma *sem* nos terminais da lâmpada, uma corrente elétrica passa a circular na mesma. Agora, o trabalho mecânico passa a ser considerável, pois há energia útil que é aqui

transformada em energia térmica (luminosa). Os geradores modernos, por mais complexos que possam tecnologicamente ser, funcionam baseados exatamente neste mesmo princípio, donde podemos perceber a superlativa importância da descoberta de Faraday para a nossa vida e sociedade moderna. A título de curiosidade, num livro sobre os mais importantes homens para a humanidade, Faraday encontra-se numa posição de destaque. Embora este tipo de ranking seja por natureza um assunto polêmico, o mérito deste cientista é inquestionável.

O sinal negativo de $\text{rot}E = -\partial B / \partial t$ irá nos revelar uma segunda lei inclusa nessa equação: a lei de Lenz. Com o auxílio da Fig. 5.1b, notamos que, se a espira estiver em curto-círcuito, por ela circulará uma corrente (pois $J = \sigma E$) no mesmo sentido de E . Esta corrente, chamada de "corrente induzida", será responsável por um campo magnético no interior do núcleo que terá o sentido oposto a $\partial B / \partial t$. Esta indução de reação é chamada B_i na Fig. 5.1b. Portanto este campo induzido pela corrente da espira tenderá a se opor ao aumento de B . Esta é a lei de Lenz cuja essência pode ser expressa por: "o sentido da corrente induzida é tal que o fluxo produzido por ela tende a se opor à variação de fluxo que a originou". Assim, percemos que as leis de Faraday e Lenz estão inclusas numa única equação de Maxwell.

Aprofundemos um pouco mais o fenômeno acima. Na realidade, não é necessária a presença de uma espira em curto-círcuito para que tenhamos corrente induzida. Imaginemos que o próprio núcleo da Fig. 5.1a seja composto de material condutor. Neste caso, teremos grandes anéis de corrente induzida que circularão no próprio núcleo, conforme Fig. 5.3a. Tendo liberdade para circular num bloco de material condutor, essas correntes terão valores elevados e estão associadas ao efeito Joule, ou seja, a perda por aquecimento relativo a correntes circulando em condutores. Como foi dito, neste caso elas terão grandes magnitudes e poderão levar o bloco a ponto de fusão, dependendo obviamente da intensidade de B . Por outro lado, imaginando que inicialmente tivéssemos campo nulo no bloco, a corrente induzida estabelecer-se-á de tal forma que a variação temporal do fluxo será impedida ao ponto que a soma da indução imposta e da indução oriunda dos anéis de corrente induzida tende a um valor nulo.

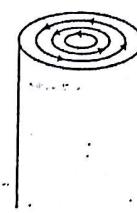
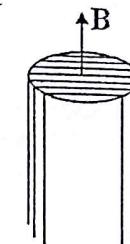


Fig. 5.3a – Anéis de corrente induzida no núcleo



5.3b – Núcleo laminado

Quanto à corrente induzida, fica uma questão: serão os seus efeitos desejáveis? A resposta depende do tipo de aplicação. Se desejarmos aquecer um núcleo (fusão por indução), a resposta é positiva. No caso de um motor elétrico de indução, a corrente induzida é também necessária para que seja gerado torque, viabilizando o seu funcionamento. Nestes exemplos, a criação de corrente induzida é benéfica aos dispositivos. Como exemplo contrário, citemos o transformador, cujo objetivo é a transferência de energia entre primário e secundário. Neste caso, quando uma parcela da energia é consumida por aquecimento devido ao efeito Joule no núcleo do transformador, como acima visto, a corrente induzida no núcleo é nociva e deve, na medida do possível, ser evitada. Especificamente, uma medida pode ser tomada: é feita uma laminação do núcleo, conforme mostrada na Fig. 5.3b. Sabemos que as lâminas são eletricamente isoladas (por um tratamento de superfície)umas das outras. Desta maneira, os grandes laços de correntes induzidas, estabelecidos circularmente na seção do núcleo, serão evitados, fazendo com que o fluxo possa transitar no circuito magnético do transformador. Isto não impede que ainda existam correntes induzidas nas lâminas, gerando perdas, mas elas não serão suficientemente grandes para impedir o funcionamento do dispositivo.

Quando as correntes induzidas são nefastas, elas são seguidamente chamadas "correntes de Foucault", que portanto aquecem a estrutura por efeito Joule (isto será abordado mais detalhadamente num parágrafo vindouro). No caso contrário, elas são simplesmente chamadas "correntes induzidas". Mas é importante notarmos que ambas, conceitualmente, constituem um mesmo fenômeno físico, partindo da mesma equação de Maxwell $\text{rot}E = -\partial B / \partial t$.

5.3 A PENETRAÇÃO DE CAMPOS EM CONDUTORES

A penetração de campos em meios condutores, ferromagnéticos ou não, é um problema que, dependendo da geometria, pode ser muito complexo. No entanto, fazendo algumas hipóteses será possível estabelecer equações que descrevam o comportamento espacial e temporal das grandezas eletromagnéticas nos condutores. Iremos obter equações com apenas uma incógnita, que, uma vez resolvidas, nos indicarão como os campos penetram nos materiais condutores. Cabe salientar que esta questão de penetração, seguidamente esquecida, é de fundamental importância para o engenheiro eletricista ou qualquer projetista que trabalha com dispositivos eletromagnéticos, e a negligência de seus efeitos pode levar a projetos desastrosos.

Estabeleçamos que estamos na presença de meios isotrópicos e lineares. Operando com as equações de Maxwell chegaremos em equações diferenciais parciais de segunda ordem.

5.3.1 A equação de H

Utilizando a equação $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$ podemos aplicar o rotacional de ambos os lados e obtemos:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{H}) = \text{rot} \mathbf{J} \quad (5.8)$$

$\Delta \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{A}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{A})$ pag 35
Aplicando a Eq. (1.23), o lado esquerdo ficar:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{H}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{H}) - \Delta \mathbf{H} \quad (5.9)$$

Assumindo que o meio é uniforme temos:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \therefore \mu \text{div} \mathbf{H} = 0 \therefore \text{div} \mathbf{H} = 0$$

o que faz com que

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{H}) = -\Delta \mathbf{H} \quad (5.10)$$

Quanto ao lado direito temos

$$\text{rot} \mathbf{J} = \text{rot} \sigma \mathbf{E} = \sigma \text{rot} \mathbf{E} = \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.11)$$

Substituindo as Eqs. (5.10) e (5.11) na Eq. (5.8) obtemos

$$\Delta \mathbf{H} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (5.12)$$

5.3.2 A equação de B

Substituindo na Eq. (5.12) $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ em ambos os lados chegamos a

$$\Delta \mathbf{B} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.13)$$

5.3.3 A equação de E

Partamos da expressão $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ na qual aplicaremos o rotacional de ambos os lados. Isto dá:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = -\text{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

Assumindo que não há cargas livres no domínio e que ϵ é constante, a equação $\text{div} \mathbf{D} = \rho$ se transforma em

$$\text{div} \mathbf{E} = 0 \quad (5.15)$$

Aplicando a igualdade da Eq. (1.23) no termo do lado esquerdo da Eq. (5.14), temos:

$$\text{rot} \mathbf{E} = \text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) - \text{rot}(\text{rot} \mathbf{E})$$

que, com $\text{div} \mathbf{E} = 0$, se torna

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (5.16)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{E}) = -\Delta \mathbf{E}$$

Quanto ao lado direito da Eq. (5.14), observamos

$$-\text{rot} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial (\text{rot} \mathbf{B})}{\partial t} = -\frac{\partial (\mu \text{rot} \mathbf{H})}{\partial t} = -\mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.17)$$

Substituindo as Eqs. (5.16) e (5.17) na Eq. (5.14) chegamos a

$$\Delta \mathbf{E} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (5.18)$$

5.3.4 A equação de \mathbf{J}

A equação de \mathbf{J} pode ser obtida através da equação $\text{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ substituindo \mathbf{E} por \mathbf{J}/σ ; temos então

$$\frac{1}{\sigma} \text{rot} \mathbf{J} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Aplicando rotacional de ambos os lados obtemos:

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{J}) = -\mu \sigma \frac{\partial(\text{rot} \mathbf{H})}{\partial t} \quad (5.19)$$

O lado esquerdo, tendo em vista que $\text{div} \mathbf{J} = 0$, é

$$\text{rot}(\text{rot} \mathbf{J}) = \text{grad}(\text{div} \mathbf{J}) - \Delta \mathbf{J} = -\Delta \mathbf{J} \quad (5.20)$$

E chegamos a

$$\Delta \mathbf{J} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (5.21)$$

Notemos que esta equação poderia também ser diretamente obtida a partir da Eq. (5.18), substituindo \mathbf{E} por \mathbf{J}/σ .

5.3.5 A solução das equações

As Eqs. (5.12), (5.13), (5.18) e (5.21) possuem todas a mesma forma matemática abaixo

$$\Delta \mathbf{P} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (5.22)$$

onde o campo vetorial genérico \mathbf{P} assume o papel das variáveis \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{E} e \mathbf{J} . Procuraremos a solução para uma delas e as conclusões serão extensíveis às outras. Observemos, no entanto, que a Eq. (5.22), embora de escrita compacta, é bastante complexa e, para unicamente um de seus três termos (na direção Ox , por exemplo), torna-se sob forma explícita em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P_x}{\partial z^2} = \mu \sigma \frac{\partial P_x}{\partial t} \quad (5.23)$$

A solução da mesma é difícil, e para que tenhamos uma real avaliação disto, lembremo-nos que já foram aqui feitas algumas hipóteses simplificadoras além de existirem equações similares para os componentes Oy e Oz da mesma Eq. (5.22).

De forma prática, para que possamos analisar estas equações e obter desta análise algumas conclusões de suma importância, procuraremos limitar nosso estudo a um caso mais simples. Admitiremos duas hipóteses: a primeira diz respeito ao tipo de campo, que será considerado puramente senoidal. A segunda, relativa à geometria do condutor, será vista a seguir. Para uma abordagem de mais fácil assimilação, trabalharemos com \mathbf{J} densidade de corrente que se estabelece no meio condutor, sabendo, de antemão, que as conclusões poderão ser estendidas às outras grandezas. Vamos aqui utilizar a formulação de Euler para números complexos. Temos que:

CAMPO PURAMENTE SENOIDAL

$$\boxed{B = B_0 \cos(\omega t)} \quad J = J_0 e^{j\omega t} \quad (5.24)$$

onde $j = \sqrt{-1}$, $\omega = 2\pi f$ é a pulsação, f é a freqüência e J_0 a amplitude da senóide. Assim,

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = j\omega J_0 e^{j\omega t} = j\omega \mathbf{J} \quad (5.25)$$

que, aplicado na Eq. (5.21) fornece

$$\Delta \mathbf{J} = \sigma \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \Rightarrow \Delta \mathbf{J} = \sigma \mu j \omega \mathbf{J} \quad \Delta \mathbf{J} = \sigma \mu j \omega \mathbf{J} = 0$$

$$\Delta J - j\sigma\omega J = 0 \quad (5.26)$$

Utilizando

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \quad (5.27)$$

a expressão 5.26 se transforma em

$$\Delta J - \frac{2j}{\delta^2} J = 0 \quad (5.28)$$

Esta equação é ainda de difícil tratamento e enunciamos aqui a segunda hipótese que simplificará geometricamente o problema: supomos que o material condutor é um bloco semi-infinito, ou seja, o mesmo é limitado por um plano Oxy , conforme a Fig. 5.4.

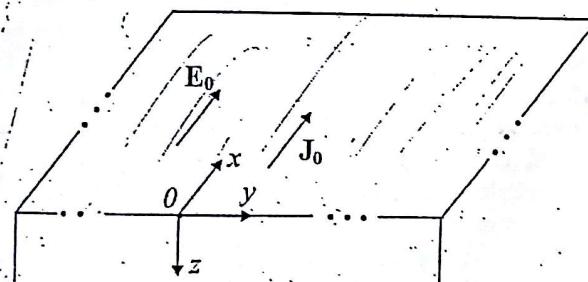


Figura 5.4 – Bloco condutor semi-infinito limitado pelo plano Oxy

Consideremos que existe um campo elétrico E_0 oscilante conhecido na direção Ox estendido a toda a fronteira Oxy no limiar da parte externa do bloco condutor. Existindo continuidade tangencial de campos (parágrafo 3.4) eles se estabelecerão no limite do bloco pela parte interna. Porém no lado interno, onde a condutividade não é nula, teremos a densidade de corrente $J_0 = \sigma E_0$, que é também conhecida.

Com as hipóteses adotadas, J só terá um componente na direção Ox e só dependerá da coordenada z . A Eq. (5.28) assume a forma simplificada abaixo:

$$\frac{d^2 J_x(z)}{dz^2} - \frac{2j}{\delta^2} J_x(z) = 0 \quad (5.29)$$

cuja solução é

$$J_x(z, t) = J_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad (5.30)$$

Nesta expressão, colocamos em evidência:

- a amplitude da cossenóide $J_0 e^{-z/\delta}$
- a fase $-z/\delta \Rightarrow$ desfasagem (em rad)

Nota-se que à medida que z aumenta, ou seja, penetrarmos no bloco condutor, a amplitude diminui, ao passo que a fase varia. Examinando $J_0 e^{-z/\delta}$ observamos que a amplitude decai exponencialmente. Chamaremos “profundidade de penetração” o valor δ . Quando temos $z = \delta$, ou seja, quando nos colocamos na “profundidade de penetração”, temos:

$$J = J_0 e^{-\delta/\delta} = J_0/e \approx 0,37 J_0$$

Neste ponto, J vale aproximadamente 37% do valor de J_0 . Consideramos, para efeitos práticos, que J se torna desprezível para $z = 3\delta$ ($\approx 5\% J_0$). Este fenômeno é chamado “efeito pelicular” (efeito “skin”).

Adicionalmente, observando a expressão $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}}$, fica evidente que

quanto maior a freqüência, menor é a penetração de campos; por outro lado quanto maior a permeabilidade (materiais ferromagnéticos, por exemplo) menor também será esta penetração e finalmente, quanto maior a condutividade, menor também será δ . Nos casos limites, onde a freqüência é nula (campos contínuos) e o material é isolante ($\sigma = 0$), o valor de δ tende a infinito, ou seja, não há efeito de atenuação de campos.

Quanto à fase $-z/\delta$, ela também varia com z , o que faz com que na periferia ($z = 0$) tenhamos $\cos(\omega t - 0)$ e, num outro ponto $\cos(\omega t - \alpha)$, sendo α um ângulo que varia com z . Imaginemos que os fenômenos sejam observados para um dado instante de tempo t (ou seja, “fotografamos a cena” num momento específico). O argumento da função cosseno irá se modificar à medida que o nosso ponto de observação penetra no condutor, ou, à medida que z aumenta. De modo geral, podemos dizer que esse argumento gera, em radianos, ângulos que farão o cosseno variar entre -1 e $+1$. Salientamos que isto se verifica num momento específico. Por exemplo,

suponhamos que para z_1 temos $\cos \theta = +1$, enquanto para z_2 teríamos $\cos \theta = -1$, conforme mostrado na Fig. 5.5.

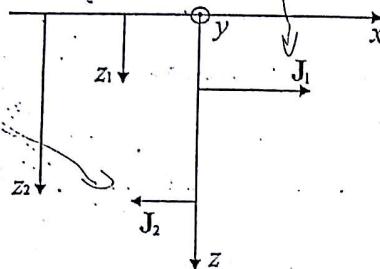


Figura 5.5 – Variação de J para dois pontos distintos no bloco condutor

Evidentemente, o módulo de J_2 seria menor que o de J_1 devido à atenuação exponencial da amplitude. Compondo os efeitos de atenuação e fase, a imagem geométrica e temporal que poderíamos fixar da equação

$$J(z, t) = J_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta)$$

é de um movimento harmônico amortecido, como por exemplo, o caso de uma corda fixada numa parede à qual impomos um movimento variável, conforme mostrado na Fig. 5.6 (os efeitos de reflexão não são aqui considerados). Temos assim, a propagação de uma onda que se atenua.

$$H(z, t) = H_0 e^{-z/\delta} \omega_r (\omega t - z/\delta)$$

$$B(z, t) = B_0 e^{-z/\delta} \omega_r (\omega t - z/\delta)$$

$$E(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \omega_r (\omega t - z/\delta)$$

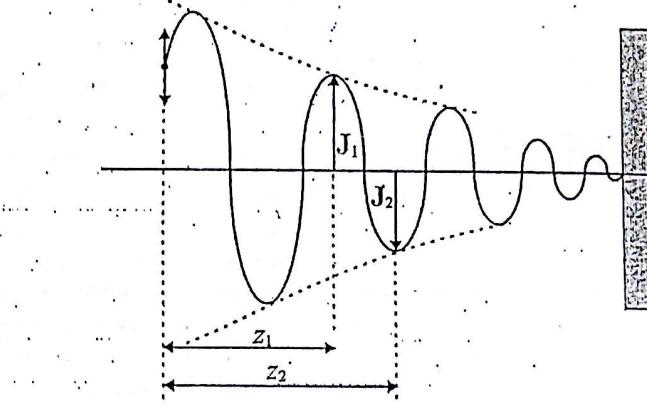


Figura 5.6 – Analogia entre a penetração de corrente com o movimento de uma corda

O que foi visto acima é também válido para as grandezas H , B e E , tanto no aspecto qualitativo quanto quantitativo, pois as Eqs. (5.12), (5.13), (5.18) e (5.21) possuem os mesmos coeficientes. A profundidade de penetração δ é a mesma para todas as grandezas, ou seja, todas sofrem a mesma atenuação e se extinguem no mesmo ponto z . Apenas salientemos que H e B são perpendiculares a J e E , conforme Fig. 5.7, devido ao rotacional que liga J (e E) com H (e B).

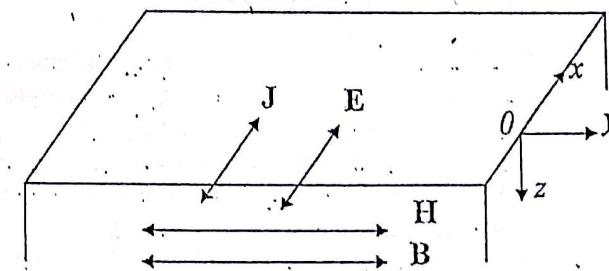


Figura 5.7 – Posicionamento das diferentes grandezas eletromagnéticas

Tendo em vista que uma série de hipóteses foram feitas para chegarmos aos resultados acima, fica uma questão: qual a aplicabilidade dos

resultados em dispositivos reais? Para respondê-la precisamos analisar os aspectos seguintes:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \Rightarrow r_{\text{cobre}} \approx 380$$

$$\delta = \sqrt{\frac{z}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{z}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5.8 \cdot 10^7 \cdot 2\pi \cdot 60}}$$

$$\delta = 8.53 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\delta = 8.53 \text{ mm}$$

quanto à geometria semi-infinita do bloco condutor: calculando a profundidade de penetração δ para o cobre, a uma freqüência de 60 Hz ($\mu = \mu_0$ e $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$) obtemos $\delta = 8.53 \text{ mm}$. Esta dimensão é pequena em relação às dimensões de uma estrutura eletromagnética usual (motores, transformadores, cabos de linhas de transmissão, etc...) Isto faz com que possamos, com boa aproximação, considerar que a massa de condutor tenha dimensões grandes em relação a δ . Caso as dimensões do dispositivo não possam ser consideradas grandes em relação a δ e a aproximação suscite dúvidas, um estudo particular (certamente de relativa complexidade) deve ser feito.

Para um meio ferromagnético, onde a permeabilidade relativa é muito superior a 1 (freqüentemente entre 20, para ferro saturado, e superior a 1000 na zona linear), em geral, este estudo é válido, pois o valor de δ decai com o aumento da permeabilidade (valores típicos de δ são menores que 1 mm).

quanto à variação senoidal das grandezas: inicialmente é relevante lembrar que a maioria dos dispositivos funcionam nesse regime de trabalho. Por outro lado, uma variação de forma não senoidal pode ser decomposta em série de Fourier, ou seja, será composta de um somatório de funções (cos)senoidais de diferentes pulsações. O componente fundamental tem a mesma freqüência da onda, e, em geral, é o que possui a maior amplitude. Assim, este componente é o que terá a maior penetração no bloco condutor, pois as outras harmônicas, de freqüências mais elevadas, terão uma penetração menor devido à expressão de δ , inversamente proporcional a \sqrt{f} . Assim, a formulação é válida para a maior parte de casos. Para situações que não se enquadrem nas hipóteses feitas, abordagens particulares devem ser elaboradas.

A dependência da profundidade de penetração $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ em função de f , μ e σ pode ser vista nas Figs. 5.8, 5.9 e 5.10.

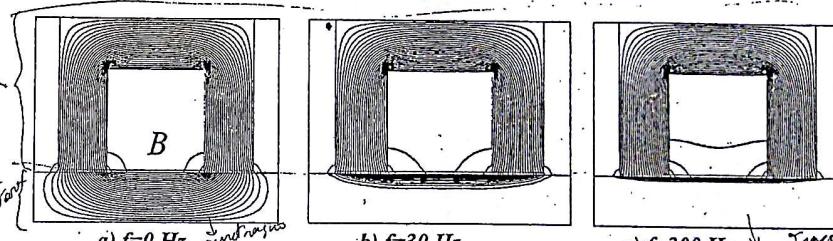


Figura 5.8 – Penetração p/ dif. freqüências; $\mu = 1000\mu_0$ e $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$ fixos

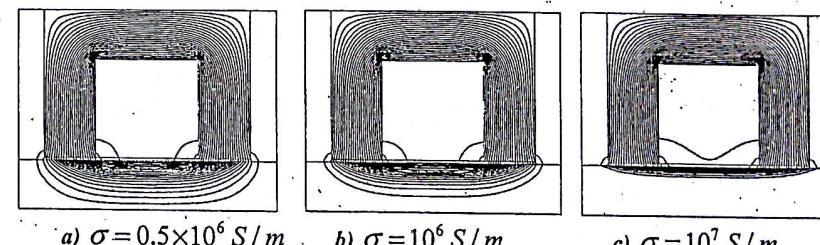


Figura 5.9 – Penetração p/ dif. condutividades; $f=60 \text{ Hz}$ e $\mu = 1000\mu_0$ fixos

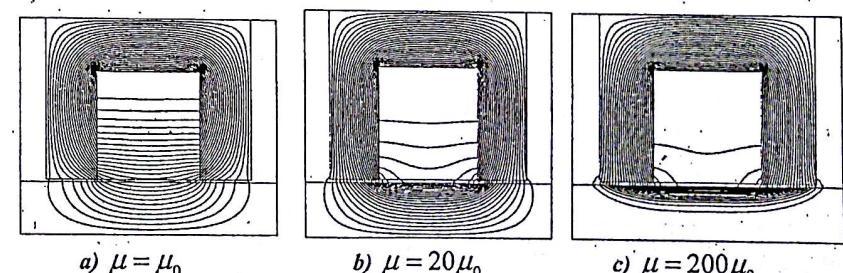


Figura 5.10 – Penetração p/ dif. permeabilidades; $f=60 \text{ Hz}$ e $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$ fixos

Por exemplo, nas Figs. 5.8 mantemos μ e σ constantes e variamos a freqüência f . Nesta figura, temos um circuito magnético excitado senoidalmente por uma bobina B ; a parte superior, em forma de U, é

constituída por um material ferromagnético isolante e, portanto, correntes induzidas não se estabelecem na mesma. Na parte inferior, sendo condutora, haverá a formação de correntes induzidas e, assim, dependendo dos parâmetros físicos (indicados nas legendas respectivas), a penetração de campo será maior ou menor. Os cálculos foram efetuados pelo método de Elementos Finitos com o sistema EFCAD.

Podemos ver claramente que a profundidade de penetração diminui com o aumento das características físicas f , μ e σ dos dispositivos. Nas Figs. 5.10 seria oportuno destacar um ponto peculiar: à medida que a permeabilidade aumenta, a peça inferior atrai mais o fluxo magnético, porém, impede que ele penetre mais profundamente na mesma. De fato, na Fig. 5.10a percebe-se que uma parte considerável do fluxo atravessa a bobina, pois a peça inferior possui baixa permeabilidade; nas outras duas figuras (5.10b e 5.10c) a peça atrai mais o fluxo, mas, simultaneamente, bloqueia mais a sua penetração.

5.4 A BLINDAGEM

O tópico acima tem forte correlação com a questão da blindagem eletromagnética. Atualmente, o problema da "poluição" eletromagnética, ou seja, a imensa quantidade de ondas eletromagnéticas existentes constitui um assunto de preocupação tanto técnica quanto biológica. Este problema é tratado extensivamente em obras relativas à Compatibilidade Eletromagnética, área que engloba o Eletromagnetismo, teorias circuitais, efeitos biológicos e outras. Vamos aqui fazer uma apresentação de cunho predominantemente qualitativo, mas que evidencia métodos para proteger uma determinada área de campos eletromagnéticos.

Suponhamos que uma certa área deva ser protegida de campos magnéticos externos, os quais supostamente poderiam perturbar, por exemplo, alguma experiência. Deve-se então proceder a uma proteção com o objetivo de impedir a penetração desses campos nessa região, ou seja, vamos proceder com uma "blindagem" eletromagnética. Pela equação da profundidade de penetração

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$$

é óbvio que campos contínuos não serão bloqueados por um meio condutor, visto que δ tende ao infinito para $f = 0 \text{ Hz}$. Neste caso, somente um meio

de alta permeabilidade (mesmo que não condutor) pode constituir uma blindagem por um efeito de "drenagem" de fluxo, tendo em vista que este passará preferencialmente pelo meio de alta permeabilidade.

Para campos alternados, a confecção de uma blindagem utiliza a expressão de δ acima. Como já visto, o campo sofre forte atenuação baseada nos conceitos apresentados no parágrafo precedente. Para o cobre ($\mu = \mu_0$ e $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$) a equação acima assume a forma

$$\delta = 0.0661 / \sqrt{f} \quad (5.31)$$

onde f é a freqüência do campo. Assim, percebe-se que a espessura de uma placa de cobre, usada como blindagem, deve ser calculada em função da freqüência.

Para que se tenha uma idéia de comportamento de blindagem, consideremos as Figs. 5.11. A região que desejamos proteger se encontra na zona do entreferro, que na Fig. 5.11a apresenta um campo relativamente homogêneo. Este campo é gerado pelo par de bobinas B da figura.

A Fig. 5.11b mostra a blindagem para um campo contínuo através de um material com alta permeabilidade. Como a caixa constituída por esse material forma um caminho de baixa retulância, o fluxo magnético "prefere" passar pelo mesmo. Desta forma, a zona no interior da caixa fica protegida do campo magnético contínuo. Existem materiais de altíssima permeabilidade (e caros) fabricados para esse fim.

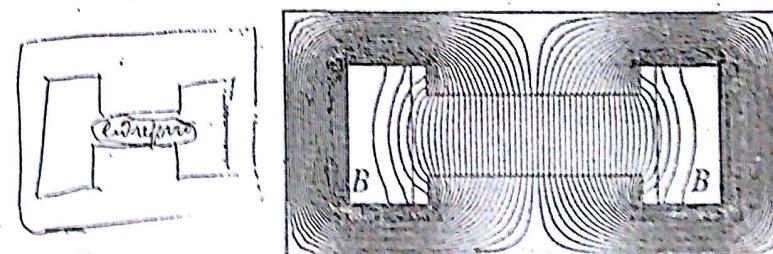


Figura 5.11a - Campo uniforme no entreferro

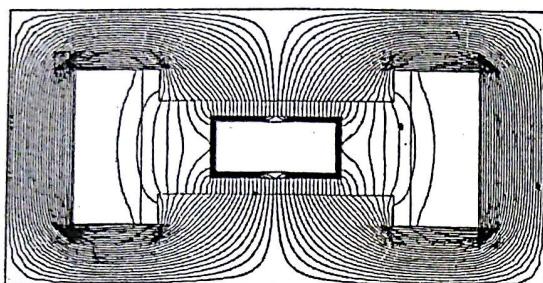


Figura 5.11b – Blindagem para campos contínuos com material de alta permeabilidade

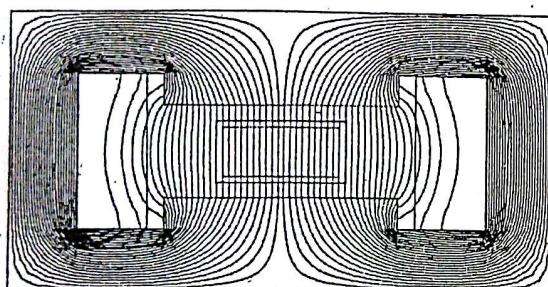


Figura 5.11c – Blindagem com cobre para campo senoidal; caso particular $f = 0 \text{ Hz}$

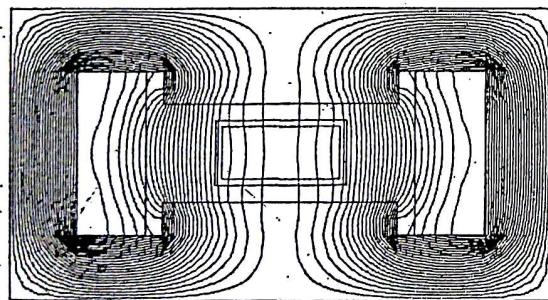


Figura 5.11d – Blindagem com cobre para campo senoidal; $f = 250 \text{ Hz}$

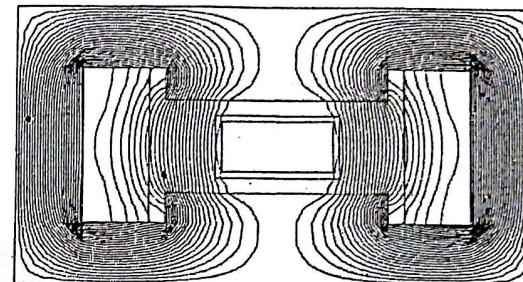


Figura 5.11e – Blindagem com cobre para campo senoidal; $f = 1500 \text{ Hz}$

As Figs. 5.11c, d, e mostram os efeitos de uma blindagem de cobre para campos senoidais. Na Fig. 5.11c a freqüência do campo magnético é 0 Hz e, portanto, com δ que tende a infinito, a blindagem não tem nenhuma eficiência, pois como sua permeabilidade é igual à do ar, o fluxo se comporta como se a caixa de cobre não existisse e a configuração de campo é idêntica à apresentada na Fig. 5.11a. Na Fig. 5.11d, a freqüência do campo é de 250 Hz . A profundidade de penetração para esta freqüência é $\delta = 4.18 \text{ mm}$, mas como a espessura da placa é de 2 mm , o campo penetra parcialmente na zona do interior da caixa. Na Fig. 5.11e temos um campo de 1500 Hz ($\delta = 1.71 \text{ mm}$) e, como esperado, a penetração na zona a ser protegida é praticamente nula. É importante frisar novamente que nesses dois últimos casos, a blindagem é possível, pois, temos correntes induzidas na própria caixa de cobre. Essas correntes, segundo a lei de Lenz, estabelecem-se no sentido de criar um fluxo contrário ao fluxo imposto pelas bobinas.

Notamos, portanto, que esses dois tipos de blindagem são fundamentalmente diferentes, pois o primeiro (Fig. 5.11b) funciona baseado na atração do campo magnético (devido à alta permeabilidade), enquanto que nos casos de campos alternados (Figs. 5.11d, e) o princípio é justamente o contrário, ou seja, a repulsão do fluxo pela corrente induzida.

Fica uma questão: por que não utilizar sempre um material condutor de alta permeabilidade, que iria conjugar os dois tipos de blindagem? Na realidade, a blindagem deve ser bem calculada e dependerá do caso tratado. Um meio condutor com alto valor de μ terá uma profundidade de penetração pequena e, se o campo incidente tiver grande intensidade, as correntes induzidas na fina camada de condutor (δ é pequeno) podem ter densidades J muito elevadas e causarem forte aquecimento e mesmo

provocar a fusão da blindagem. Se não for este o caso, uma técnica que pode ser utilizada é combinar os dois tipos de material (cobre com ferro, por exemplo) que trará uma boa proteção para campos contínuos e variáveis. Novamente, para cada caso, um estudo específico deverá ser feito.

5.5 AS PERDAS NO COBRE E NO FERRO

Sabe-se que em qualquer tipo de dispositivo, seja ele mecânico ou elétrico, existem perdas, que, em geral, convertem-se em aquecimento. O estudo de perdas em dispositivos elétricos, embora em alguns casos seja bastante simples, em geral é complexo e deve ser analisado com cuidado. Na realidade, a simplicidade de avaliação depende muito do grau de precisão desejado. As maiores perdas de origem elétrica são divididas em dois grupos: as perdas no cobre e as perdas no ferro, que serão analisadas a seguir.

No entanto, outros tipos de perdas, dependendo do dispositivo podem (e às vezes devem) ser levadas em conta. Citemos, entre outras, o atrito mecânico (em rolamentos de motores, por exemplo), vibrações, ventilação, ruídos acústicos e as chamadas perdas "anômalas", que serão comentadas abaixo. Ademais, assinalemos que a repartição de perdas depende do tipo de estrutura, o que deve ser, portanto, estudado caso a caso. Mas de maneira geral, na maior parte de dispositivos bem dimensionados, a repartição de perdas se faz de forma igualitária, ou seja, temos 50% de perdas no cobre e 50% de perdas no ferro.

5.5.1 Perdas no cobre

A perda no cobre é assim chamada, pois, em geral, as bobinas de excitação de dispositivos são feitas com fios de cobre. Porém, o que veremos aqui, é relativo às perdas nos fios, sejam eles de cobre ou outro material, como o alumínio, também um excelente condutor. O estudo deste tipo de perda não é difícil e se limita ao cálculo de perdas Joule nos condutores, assumindo que não há perdas por corrente induzida nos mesmos. Sobre este último ponto, cabe salientar que em geral se utilizam condutores finos de tal forma que não haja efeitos de profundidade de penetração (atenuação de correntes na seção transversal do condutor), lembrando que, para 60 Hz, δ no cobre é da ordem de 9 mm (geralmente muito superior à espessura dos fios) e que para o alumínio este valor é ainda

um pouco mais elevado. Desta forma, procede-se à clássica medida de resistência R das bobinas e calcula-se

$$P(t) = RI(t)^2 \Rightarrow \text{perda instantânea} \quad (5.32)$$

obtendo-se assim a perda instantânea em Watts. Caso a corrente de excitação seja senoidal, da forma $I(t) = I_0 \operatorname{sen} \omega t$ (sendo I_0 sua amplitude a ω a pulsação) o valor médio da perda seria $P_m = RI_0^2/2$ observando que o valor médio de sen^2 é $\frac{1}{2}$. No caso particular onde $I(t)$ é variável no tempo, porém não senoidal, deve-se fazer uma integração de $P(t)$ no tempo e dividir o resultado pelo tempo de duração T de $I(t)$, tal que

$$\Rightarrow P_m = \frac{1}{T} \int T R I(t)^2 dt \Rightarrow \text{média} \quad (5.33)$$

Salientemos também um outro aspecto: embora apresentado neste Cap. 5, a perda no cobre existe, obviamente, para excitação em corrente contínua, sendo que neste caso sua expressão passa a ser, simplesmente, $P = RI^2$.

5.5.2 Perdas no ferro: correntes de Foucault em lâminas

Já vimos que, num núcleo de material ferromagnético submetido a campos variáveis, há formação de anéis de correntes induzidas. Normalmente, o núcleo é laminado com o objetivo de impedir a circulação totalmente livre dessas correntes. Veremos abaixo, que mesmo utilizando esta técnica, existirão correntes induzidas e perdas por efeito Joule. Examinemos o caso da Fig. 5.12, onde temos uma fina chapa ou lâmina de material ferromagnético na qual existe uma indução variável B , paralela à chapa na direção Ox .

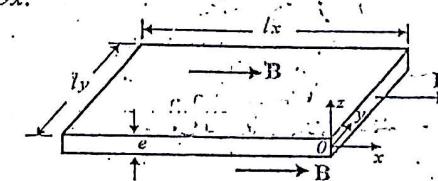


Figura 5.12 – lâmina de material ferromagnético com indução magnética variável

Será feita a suposição que l_x e l_y são muito superiores a e , portanto, sendo as chapas finas, as (relativamente pequenas) correntes induzidas não afetarão globalmente o fluxo magnético que flui na direção de B imposto por meios externos, como, por exemplo, uma bobina de excitação. Nestas condições, podemos assumir que a densidade de corrente J induzida não depende das coordenadas x e y , conforme pode ser notado na Fig. 5.13a e b, onde o componente predominante de J está na direção Oy . Pela equação $J = \sigma E$, o mesmo ocorre com E .

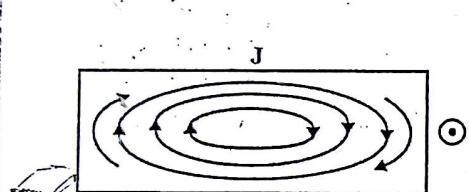
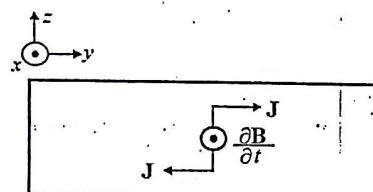


Figura 5.13a - Lâmina em vista frontal

5.13b - Direção adotada para J

Podemos então aplicar a equação $\text{rot } E = -\partial B / \partial t$ que neste caso assume a forma

$$\det \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\partial B_x}{\partial t}$$

cujas soluções é

$$E_y(z) = \frac{\partial B_x}{\partial t} z + K$$

Observando na Fig. 5.13b que não pode haver descontinuidade de J (ou E) é necessário que para $z = 0$ (localizado no meio da lâmina) tenhamos $E_y = 0$ o que faz com que a constante K seja nula, resultando assim

$$E_y(z) = \frac{\partial B_x}{\partial t} z \quad (5.34)$$

A potência dissipada na placa por efeito Joule é (ver observação no final deste parágrafo) dada por

pag 252.

$$P_f = \int_V \sigma E_y^2 dv \quad (5.35)$$

onde V é o volume da lâmina ($V = l_x l_y e$). Aplicando a expressão de $E_y(t)$ na equação acima temos

$$P_f(t) = \sigma \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} \right)^2 \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_{-e/2}^{+e/2} z^2 dz dx dy$$

$$P_f(t) = \frac{\sigma}{12} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} \right)^2 l_x l_y e^3 = \frac{\sigma}{12} \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} \right)^2 e^2 V \quad (5.36)$$

Supondo que B_x varie senoidalmente segundo $B_x(t) = B_m \cos \omega t$ temos $\partial B_x / \partial t = -\omega B_m \sin \omega t$ e a Eq. (5.36) fica

$$P_f(t) = \frac{\sigma}{12} \omega^2 B_m^2 (\sin \omega t)^2 e^2 V$$

Calculemos agora a potência média, tendo em vista que no caso de perdas, em geral, o valor instantâneo não é o de maior interesse. Lembrando novamente que o valor médio de \sin^2 é $\frac{1}{2}$, obtemos a perda volumétrica $p_f = P_f/V$ (dada em W/m^3)

$$\text{Potência média } p_f = \frac{1}{24} \sigma \omega^2 e^2 B_m^2 \quad (5.37)$$

Desta expressão devemos observar alguns aspectos de suma importância no que diz respeito a este tipo de perda:

- p_f depende de e^2 , ou seja, a espessura da chapa modifica quadraticamente as perdas (utilizando chapas duas vezes mais finas, as perdas são divididas por 4);

- p_f depende de ω^2 , idem para a freqüência (por exemplo, ao dobrarmos a freqüência, as perdas são multiplicadas por 4);

- os materiais apresentando baixa condutividade possuem perdas menores; a propósito, a ferrite doce, sendo um material cerâmico e isolante, é seguidamente utilizada em dispositivos que trabalham em freqüências elevadas.

Como em geral a freqüência é imposta pelo funcionamento do dispositivo, devemos adaptar a espessura da chapa à pulsação de trabalho. Quanto maior a freqüência, menor deve ser a espessura da chapa, o que implica num aumento de preço do produto. Há, portanto, um compromisso financeiro a ser adotado. Como para as perdas não cobre, o valor médio de perdas, quando a variação de B não é senoidal, deve ser calculado através de uma integração temporal de $p_f(t)$. E, obviamente, quando a freqüência é nula, não existem perdas por correntes de Foucault.

Quanto à expressão de potência apresentada na Eq. (5.35), pode-se facilmente demonstrar que a mesma recai na conhecida lei $P = RI^2$, no caso de um bloco condutor de seção S , comprimento l e condutividade σ . Observando que $J = I/S$, e $E = J/\sigma$ a Eq. (5.35) pode ser escrita sob a forma

$$P = \int_V \sigma \left(\frac{J}{\sigma} \right)^2 ds dl = \frac{J^2}{\sigma} Sl \quad \text{e} \quad P = \frac{I^2}{S^2} \frac{1}{\sigma} Sl = \frac{I^2 l}{\sigma S}$$

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

Como a resistência é dada por $R = l/\sigma S$, a potência dissipada por efeito Joule se escreve $P = RI^2$.

5.5.3 Perdas no ferro: histerese

Suponhamos que um material ferromagnético esteja sob a ação de um campo magnético H , variável e periódico de freqüência f (e período $T=1/f$). Como já visto, este tipo de material possui uma curva $B(H)$ que, por sua vez, tem um ciclo de histerese mais ou menos pronunciado dependendo do material. Esta curva é mostrada na Fig. 5.14.

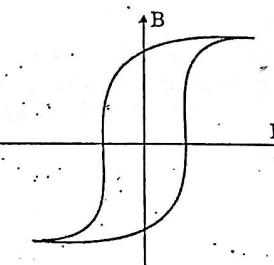


Figura 5.14 – Ciclo de histerese de uma lâmina de material ferromagnético

A curva possui uma área interna relativamente grande para materiais duros (imãs permanentes), enquanto materiais doces, como as chapas de ferro-silício, têm ciclos de pequena área. Sendo H variável (admitamos valores positivos e negativos), o material percorrerá o ciclo de histerese. Percorrer este ciclo significa fazer com que os domínios de Weiss (ver Cap. 4) troquem suas polaridades magnéticas, o que exige o dispêndio de uma certa quantidade de energia. Já vimos também no capítulo precedente que a área do ciclo representa a energia volumétrica que deve ser fornecida ao material. Isto nada mais é do que a perda por histerese, aqui dada em $Joules/m^3$ mas que devemos transformar em potência volumétrica, que caracteriza um dispositivo independentemente do fato de estar funcionando ou não.

Chamando de p_h a potência volumétrica associada a um ciclo de histerese, a energia volumétrica consumida num ciclo é dada por

$$w_h = p_h T \quad \text{ou} \quad w_h = p_h / f \quad \text{o que dá} \quad p_h = w_h f$$

A potência total é dada pelo produto $P_h = p_h V = w_h f V$, sendo V o volume de material ferromagnético, o que, em geral, corresponde ao volume de chapas de ferro. Observamos pela Fig. 5.15 que a perda por histerese depende fortemente do valor de campo magnético e, portanto, do nível de saturação da chapa.

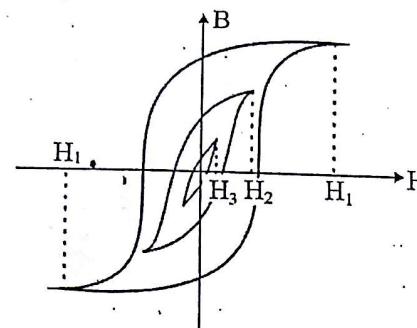


Figura 5.15 – Diferentes curvas de histerese para diferentes níveis de saturação

Se chamarmos A a área do ciclo de histerese, a expressão acima se torna

$$\text{Potência total: } P_h = w_h f V = \underset{\substack{\text{volume do material} \\ \text{pivô magnetico}}}{A f V} \quad (5.38)$$

Porém, uma questão reside: como avaliar a área do ciclo de histerese? Uma maneira recai no cálculo exato através de integradores gráficos de curvas, por exemplo. Existe também uma lei empírica obtida por Steinmetz que fornece com boa precisão essa área. Esta expressão, conhecida como equação de Steinmetz é válida para valores de indução magnética entre 0.2 e 1.8 Tesla. Ela fornece, de forma aproximada, a área do ciclo (em Joule/m³) e se escreve:

$$w_h = \eta B^{1.6} \quad (5.39)$$

onde η é uma constante que depende do material. Alguns valores típicos são:

- $\eta = 30$ para ligas de ferro-silício
- $\eta = 250 \sim 300$ para ligas ordinárias de ferro
- $\eta = 3.8 \sim 8.5 \times 10^3$ para materiais duros

Esta expressão continua sendo bastante utilizada por industriais e sempre que uma avaliação rápida deste tipo de perdas é necessária. Os fabricantes de chapas podem também fornecer o valor de η .

Como exemplo de cálculo de perdas no ferro, imaginemos um núcleo de transformador cuja liga de ferro possui a curva $B(H)$ da Fig. 5.16. Consideraremos que o volume de chapas de ferro é $V = 100 \text{ cm}^3$ e que os outros dados são: $f = 60 \text{ Hz}$; $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, $e = 1 \text{ mm}$, $B = 1.5 \text{ T}$.

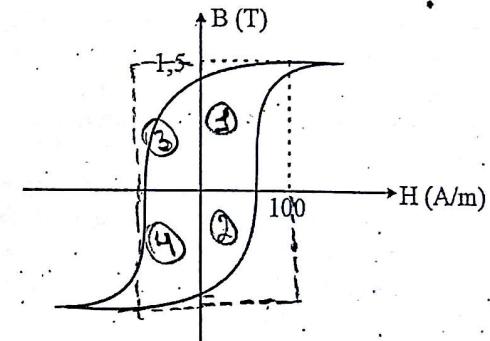


Figura 5.16 – Curva $B(H)$ do material do exemplo

As perdas por corrente de Foucault são dadas pela Eq. (5.37)

Pot. média dissipada com as correntes de Foucault $P_f = \frac{1}{24} \sigma \omega^2 e^2 B_{max}^2$

Aplicando os valores numéricos dados, chegamos a $P_f = 133240 \text{ W/m}^3$, que multiplicado pelo volume de ferro dá $P_f = 13.3 \text{ W}$. Para o cálculo de perdas por histerese, avaliamos a área da curva com um valor aproximado de

$$A = 4 \times 1.5 \times 100 = 600 \text{ J/m}^3$$

A potência é dada pela expressão

$$P_h = A V f = 600 \times 10^{-4} \times 60 = 3.6 \text{ W}$$

As perdas totais no ferro são $P_f + P_h = 16.9 \text{ W}$, significando que da potência injetada no transformador, 16.9 W serão consumidos em

aquecimento devido às perdas no ferro. Com o cálculo das perdas no cobre (que também geram aquecimento) poderíamos obter, com boa aproximação, o rendimento do dispositivo.

5.5.4 As perdas anômalas ou excedentes

Finalmente, cabe comentar as perdas “excedentes” ou “anômalas”. Seria imprudente adiantar, neste texto, formulações relativas a este tipo de perda, pois é assunto de pesquisa, e as formulações que se encontram em artigos técnicos e científicos não podem ainda ser consideradas como “universalmente aceitas”. Porém, vamos aqui adiantar o seguinte: quando são feitas medições de perdas no ferro, ao adicionarmos as perdas por correntes de Foucault e as perdas por histerese calculadas por meios tradicionais, como as fórmulas acima, verifica-se que as perdas medidas são em geral superiores às calculadas. Esta diferença chama-se “perdas excedentes” ou “anômalas”. A origem das mesmas, como já evocado, é assunto de pesquisa e mesmo de controvérsia. Existem pesquisadores que preconizam que tais perdas são originadas na rotação de fronteiras dos domínios de Weiss quando da mudança de polaridade do campo. Essas perdas representam, em geral, uma parcela relativamente pequena no somatório das diferentes perdas, porém, dependendo do dispositivo, elas podem ser consideráveis. Neste momento, onde se procura uma grande exatidão em estruturas elétricas e a preocupação com o rendimento das mesmas é cada vez maior (economia de energia), não se pode negligenciar nenhum tipo de perda.

5.6 EXEMPLOS

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

5.6.1 Correntes induzidas por variação de indução

A lei de Faraday é dada por $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$

$$fem = -d\Phi/dt = -d(BS)/dt$$

Podemos conceber as seguintes situações: a) quando B varia temporalmente e S é constante, tem-se $fem = -S dB/dt$; b) sendo B constante e S variável no tempo temos $fem = -B dS/dt$; c) nada impede que ainda as duas

grandezas variem e teríamos, neste caso, $fem = -S dB/dt - B dS/dt$. Neste exemplo e no próximo veremos as duas primeiras situações acima.

Imaginemos que na superfície definida pelo anel condutor filiforme da Fig. 5.17a existe uma indução magnética vertical B_0 constante e uniforme. A partir do momento $t=0$ o campo $B(t)$, na mesma direção e sentido de B_0 , começa a variar segundo a lei $B(t) = B_0(1+Kt)$

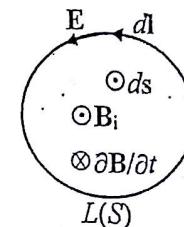
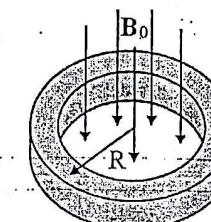


Figura 5.17a – Anel condutor e indução B

5.17b – Vista superior mostrando $L(S)$

Os dados numéricos são: S_f (seção do fio) = 2 mm^2 ; $R = 1 \text{ cm}$; $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$; $B_0 = 1 \text{ T}$; $K = 60 \text{ T/s}$.

Desejamos calcular a corrente induzida na espira circular. Assumindo que a indução externa $B(t)$ cresça no sentido indicado na Fig. 5.17b, pela equação $rot \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ notamos que E e B_i induzidos se estabelecem como indicado nesta figura. B_i é o módulo da indução magnética que tem direção vertical. Para solucionarmos este problema, admitiremos duas hipóteses:

- como o diâmetro do fio é pequeno em relação ao raio R , consideraremos que E (e em consequência $J = \sigma E$) é constante na sua seção;

- a indução B_i é muito menor que a indução imposta $B(t)$, ou seja, na equação $rot \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ apenas $B(t)$ será considerado.

Avaliemos E , J e I induzidos, aplicando a equação de Maxwell sob a sua forma integral

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \quad (5.40)$$

onde S é a superfície definida pela própria espira circular e $L(S)$ o caminho que envolve S , coincidindo com a própria espira. Notando que $B(t)$ só depende do tempo e que os pares de vetores E , dl e $-\partial B/\partial t$, ds são colineares e de mesmo sentido temos

$$\oint E \cdot dl = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dA$$

$$E 2\pi R = \frac{dB}{dt} \pi R^2 \Rightarrow E = \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial t} R$$

$$E = \frac{R}{2} \frac{d}{dt} (B_0 + B_0 Kt) = \frac{R}{2} B_0 K$$

Como $J = \sigma E$, temos

$$J = \sigma K B_0 \frac{R}{2}$$

$$I = J \cdot A \Rightarrow I = \sigma K B_0 \frac{R S_f}{2} \quad (5.41)$$

Vamos agora obter I de outra maneira. Avaliemos, inicialmente, a força eletromotriz *sem* criada na espira, notando que

$$sem = \iint_{L(S)} E \cdot dl$$

$$sem = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds = \pi R^2 B_0 K \quad (5.42)$$

Esta *sem* pode ser assimilada a uma fonte de tensão colocada em série com a espira conforme a Fig. 5.18. Sabemos, pela lei de Ohm, que $sem = R_e I$, sendo R_e a resistência da espira, dada simplesmente por

$$R_e = \frac{2\pi R}{\sigma S_f} = \rho \frac{L}{A} \quad e \quad \rho = \frac{L}{\sigma A} \quad (5.43)$$

Volume de carga
de resistividade
uniforme

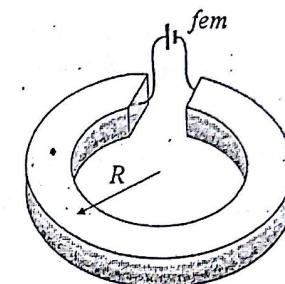


Figura 5.18 – *sem* devida à variação temporal de B em série com a espira

Utilizando as Eqs. (5.42) e (5.43), obtemos

$$\mu_m = \frac{R_e}{\rho} I \quad \text{e} \quad \pi R^2 B_0 K = \frac{2\pi R}{\sigma S_f} I \quad \text{e} \quad I = \sigma K B_0 S_f \frac{R}{2}$$

Este valor é idêntico ao obtido na Eq. (5.41) que, com os valores numéricos, fornece $I = 6 A$.

Resta agora calcular a indução B_t , induzida pela corrente I da espira. Utilizando o exemplo 4.8.2, o campo que se estabelece no centro de uma espira circular vale $H = I/(2R) = 300 A/m$. Como $B_t = \mu_0 H$, temos $B_t = 0.377 \times 10^{-3} T$. Embora a indução B_t varie dentro da espira, aumentando à medida que nos aproximamos do condutor, os valores são, mesmo assim, bastante inferiores a B_0 , o que valida a hipótese inicial, segundo a qual o campo induzido não iria afetar o campo imposto.

5.6.2 Correntes induzidas por variação geométrica

Consideremos a estrutura da Fig. 5.19, onde temos um conjunto composto por uma barra condutora que, conforme indicado, é movida sem atrito sobre um conjunto de trilhos, também condutor. Imaginemos que uma indução uniforme de módulo B na direção vertical seja imposta na região desta barra ao mesmo tempo em que a barra se move com a velocidade v na direção horizontal.

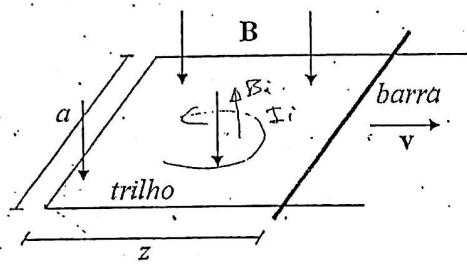


Figura 5.19 – Barra condutora movendo-se sobre trilhos sob ação de uma indução B

Uma *fem* será criada neste circuito elétrico, composto pela barra e trilhos, tendo em vista a presença de uma variação-de-fluxo enlaçado pelo circuito. A corrente oriunda desta *fem* será tal que o fluxo gerado por ela irá se opor a esta variação de fluxo (lei de Lenz), conforme indicado na Fig. 5.20.

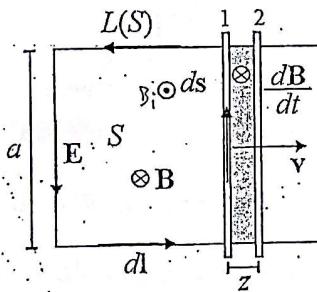


Figura 5.20 – Vista superior, mostrando a seção onde a variação de fluxo é criada

Temos que

$$fem = \int_{L(S)} E \cdot dl = - \int_S \frac{\partial B}{\partial t} \cdot ds$$

onde S é a seção variável da espira e $L(S)$ o caminho que a limita, coincidente com o circuito elétrico. Esta variação de fluxo corresponde ao fluxo que atravessa a seção mostrada na Fig. 5.20, quando a barra se move da posição 1 para a posição 2 com a velocidade $v = dz/dt$. Como B não depende do tempo neste caso, e como ds e $-\partial B/\partial t$ são colineares, temos, em módulo

$$\frac{d}{dt} \int_S B \cdot ds = \frac{d}{dt} (Baz)$$

pois $S = z \cdot a$. Sendo a e B constantes, chegamos a

$$fem = Ba \left(\frac{dz}{dt} \right) = Bav \quad (5.44)$$

O valor da corrente I que circulará no conjunto condutor pode ser obtido por $fem = R I$, sendo R sua resistência elétrica. No entanto, cabe notar que esta resistência R varia, pois depende da condutividade (constante), da seção transversal dos condutores (considerada também constante) e do comprimento l do circuito, que aumenta à medida que a barra se move. Desta forma, a corrente I irá diminuir pois, pela Eq. (5.44), notamos que a *fem* é constante; com o aumento de R , I sofrerá uma diminuição.

5.6.3 Corrente induzida e dissipação num disco maciço

Um caso semelhante ao primeiro exemplo será aqui analisado. Trata-se de um disco maciço de um material condutor, como, por exemplo, o cobre submetido à ação de um campo de indução geometricamente uniforme e perpendicular ao plano do disco, dado por $B(t) = B_0 \sin \omega t$. Os dados geométricos do problema são mostrados nas Figs. 5.21a e b. Assumiremos que a espessura $e \ll \delta$, o que permite considerar que a densidade de corrente induzida é constante ao longo da espessura do disco (coordenada axial z).

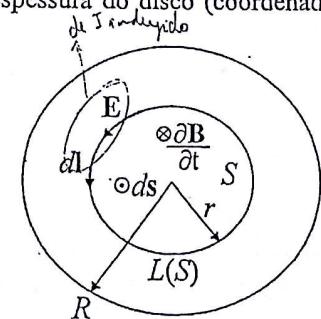
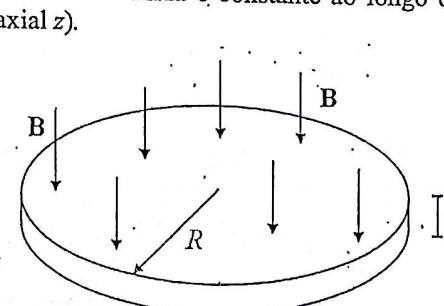


Figura 5.21a – Disco condutor sob a ação de $B(t)$

5.21b – Vista superior

Para o cálculo de $J(r,t)$ vamos considerar uma seção S (e seu respectivo $L(S)$) definida por um raio genérico $r \leq R$. A equação de Maxwell $\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ sob forma integral é aqui

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$



$$S = \pi r^2 \Rightarrow dS = r dr$$

que, já levando em consideração os produtos escalares, pode ser escrita como

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (B_0 \cos(\omega t)) = B_0 \omega \hat{z} \quad \text{e} \quad \iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^R \int_0^{2\pi} B_0 \omega \cos(\omega t) r d\theta dr \quad (5.45)$$

Note-se aqui que a derivação temporal de $B(t)$ já foi feita e, sobretudo, que o limite de integração no lado direito é r , pois a superfície S onde o fluxo deve ser calculado é limitada por esse raio genérico. Fazendo-se as integrações temos

$$E 2\pi r = B_0 \omega \cos(\omega t) r^2 \pi \quad \text{ou} \quad E(r) = B_0 \omega r \cos(\omega t) / 2 \quad (5.46)$$

o que dá, observando $J = \sigma E$

$$J(r) = \sigma B_0 \omega r \cos(\omega t) / 2 \quad (5.47)$$

Com $J(r)$, e observando à Fig. 5.22, podemos avaliar a corrente induzida total circulando no disco, através da integração

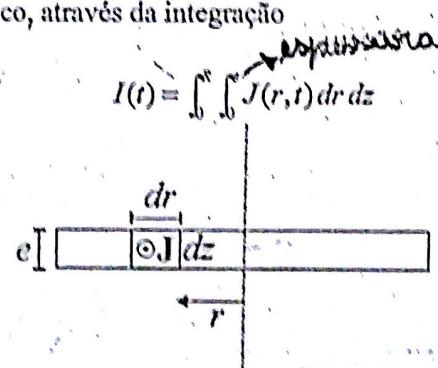


Figura 5.22 – Seção sobre a qual $J(r)$ deve ser integrado para cálculo de $I(t)$

Substituindo $J(r,t)$ da Eq. (5.47) na integração acima, obtemos

$$I(t) = \sigma B_0 \omega r R^2 \cos(\omega t) / 4 \quad (5.48)$$

Finalmente, podemos calcular a potência Joule dissipada em aquecimento devido à corrente induzida no disco. Para tanto, vamos utilizar a expressão de potência, conforme Eq. (5.35)

$$P(t) = \int_S \sigma E^2 dv$$

Aplicando a Eq. (5.46) nesta integração, temos

$$P(t) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\delta} \sigma (B_0 \omega r \cos(\omega t) / 2)^2 dr r d\theta dz$$

o que dá

$$P(t) = \pi \sigma B_0^2 \omega^2 R^4 e \cos^2(\omega t) / 8$$

Em geral, para perdas, nos interessamos no valor médio de perdas P_m , ao invés do valor instantâneo. O valor médio de \cos^2 é $\frac{1}{2}$, e obtemos então

$$P_m = \pi \sigma B_0^2 \omega^2 R^4 e / 16 \quad (5.49)$$

5.6.4 Campo perpendicular a um bloco condutor

Na seção 5.3 foi mostrado que a solução da Eq. (5.29) envolvendo os campos tangenciais H , B , E e J é tal que estas grandezas decrescem exponencialmente à medida que nos aprofundamos na peça. Para a penetração $z = \delta$, as amplitudes dos campos decaem a 37% do valor na superfície, onde $z = 0$. Qual seria o comportamento das grandezas se a incidência de B , por exemplo, fosse perpendicular? Assumiremos aqui as mesmas hipóteses: bloco semi-infinito homogêneo e excitação senoidal.

Analogamente, temos apenas um componente de $B_z = B_0$ (perpendicular ao plano Oxy) dependendo apenas da coordenada z . Levando em conta a conservação normal de B , teríamos também $B_z = B_0$ na superfície interna do bloco e a equação equivalente a Eq. (5.29) seria

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2j}{\delta^2} \right) B_z(z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 B_z(z)}{\partial z^2} - \frac{2j}{\delta^2} B_z(z) = 0 \quad (5.50)$$

cuja solução é similarmente

campo perpendicular a um bloco condutor

$$B_z(z,t) = B_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad (5.51)$$

que preserva, portanto, as mesmas características físicas do campo tangencial e, em particular, a mesma profundidade de penetração δ . Obviamente J e E se estabelecem no plano perpendicular a B (ou H), ou seja, paralelos ao plano Oxy .

5.6.5 Cabo-condutor-cilíndrico

Num cabo cilíndrico condutor (que aqui será considerado infinito) flui uma corrente alternada I através de sua seção transversal, como mostrado na Fig. 5.23. Faremos uma análise qualitativa para evidenciar que a corrente se estabelece principalmente na parte externa do cabo.

Inicialmente, já foi visto no Cap. 4 (exemplo 4.8.5), no centro do condutor o campo magnético é nulo. Na parte externa ao condutor, pela mesma lei, sabemos que o campo existe.

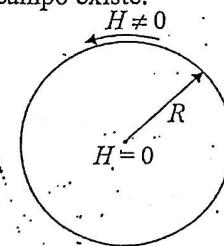


Figura 5.23 – Campo produzido por um cabo percorrido por corrente alternada

A equação que evidencia este fenômeno é, segundo a seção 5.3,

$$\Delta H = \sigma \mu \frac{\partial H}{\partial t} \quad (5.52)$$

onde temos o valor de $H_0 = I(t)/(2\pi R)$ como sendo o campo na periferia do condutor de raio R . Observemos que este problema deve ser tratado em

coordenadas cilíndricas e que somente o componente H_θ na direção θ existe e que o mesmo só depende de r . A equação acima, neste sistema de coordenadas, torna-se então

$$\frac{\partial^2 H_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r \cdot dr} \frac{\partial H_\theta}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial H_\theta}{\partial t} = 0 \quad (5.53)$$

Quando a pulsação é senoidal, esta equação assume a forma de uma “equação de Bessel”, cuja solução, embora diferente da equação análoga em coordenadas cilíndricas, possui também uma atenuação.

Para a densidade de corrente que flui pelo cabo, objeto deste exemplo, observamos que J só possui o componente J_z , fluindo na direção do cabo. A equação para J_z é então:

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r \cdot dr} \frac{\partial J_z}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial J_z}{\partial t} = 0 \quad (5.54)$$

que é semelhante a Eq. (5.53) e possui, portanto, a mesma atenuação à medida que penetrarmos no cabo. De forma precisa, utilizando a solução exata da Eq. (5.54), a atenuação dependerá da relação R/δ , sendo que δ é a profundidade de penetração conforme estabelecido para coordenadas cartesianas. Para termos uma idéia, se $R/\delta = 4$ (o raio do cabo é 4 vezes superior à δ), a atenuação é tal que $J_z(0.7R) = 0.37 J_0$ (sendo J_0 a densidade superficial de corrente na superfície do condutor). Ou seja, quando nos encontramos a um $r = 0.7R$, o valor de J_0 decai a 37% do seu valor na periferia. Adicionalmente, para $r=0$ (centro do cabo), a atenuação é tal que $J_z(0) = 0.11 J_0$.

5.6.6 Movimento de um ímã em relação à placa condutora

Analisaremos qualitativamente duas situações relativas ao movimento de um ímã permanente face a uma placa condutora. O primeiro caso é indicado na Fig. 5.24, onde um ímã se aproxima perpendicularmente da placa.

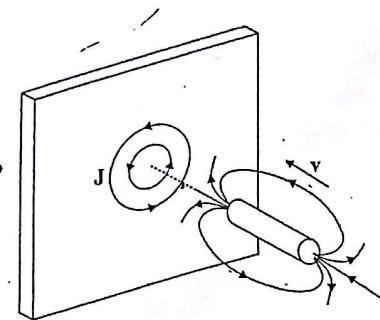


Figura 5.24 – Ímã permanente aproxima-se de uma placa condutora

No referencial da placa, o fluxo magnético aumenta à medida que o ímã se aproxima. Criar-se-ão anéis de corrente induzida na placa de tal forma que o fluxo produzido por estas correntes estará em oposição ao fluxo oriundo do ímã. Assim, o fluxo, inicialmente desprezível (ímã longe da placa), tende a se manter num valor baixo através da soma dos fluxos criados pelas correntes induzidas na placa e pelo fluxo do próprio ímã. A magnitude das grandezas dependerá das características gerais do problema, como, por exemplo, a velocidade do ímã e a própria condutividade da placa.

A segunda situação que vamos analisar é relativa à Fig. 5.25, quando o ímã se move paralelamente à placa.

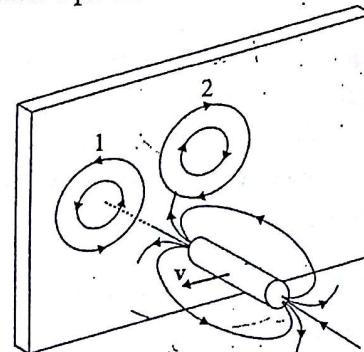


Figura 5.25 – Ímã permanente movimenta-se paralelamente à placa condutora

Examinemos o conjunto de anéis de correntes induzidas 1. Nesta região, as correntes se estabelecerão no sentido de anular o fluxo associado ao ímã, ou seja, tenderão a minimizar o fluxo que “aparece” com o ímã e

seu movimento. Porém, na região 2, as correntes induzidas fluem no sentido de impedir o “desaparecimento” do fluxo do ímã, que se afasta. Estes anéis deslocam-se acompanhando o movimento do ímã. Ambos os casos acima são exemplos típicos da lei de Lenz.

5.6.7 O transformador de tensão em vazio

Vamos aqui analisar, sob o aspecto puramente eletromagnético, o transformador de tensão em vazio. O estudo deste dispositivo sob carga necessita uma análise de cunho também circuitual e é tratado com mais profundidade nos livros de Conversão Eletromecânica de Energia. Na Fig. 5.26 temos um circuito magnético no qual o circuito elétrico C_1 possui N_1 espiras e alimentação senoidal. Calculemos o fluxo gerado por este circuito elétrico admitindo que a permeabilidade magnética μ do circuito magnético é muito alta em relação à do ar e que no circuito C_2 não há corrente.

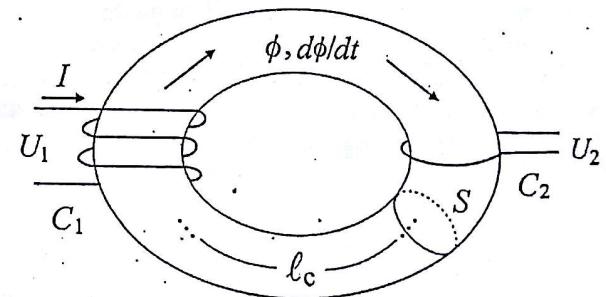


Figura 5.26 – Esquema de circuitos magnético e elétrico de um transformador de tensão

Partindo de $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$, a lei de Ampère aplicada aqui dá

$$\int_{l_c} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = N_1 I$$

onde l_c é o comprimento médio do circuito magnético. A corrente total envolvida por l_c é a corrente I multiplicada por N_1 espiras. Admitindo que H (módulo de \mathbf{H}) é constante no circuito magnético, temos

$$H = \frac{N_1 I}{l_c}$$

O fluxo é

$$\Phi = \mu \frac{N_1 I}{l_c} S \quad (5.55)$$

onde S é a seção transversal do circuito magnético. Como I é a única grandeza variável no tempo, podemos escrever

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu N_1 S}{l_c} \frac{dI}{dt}$$

e

$$\frac{dI}{dt} = \frac{l_c}{\mu N_1 S} \frac{d\Phi}{dt}$$

Desprezando os efeitos resistivos, a tensão U_1 é dada por

$$U_1 = L \frac{dI}{dt} = L \frac{l_c}{\mu N_1 S} \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.56)$$

L , a indutância de C_1 , pode ser expressa pela Eq. (4.35) e vale

pag 185

$$L = \frac{\mu N_1^2 S}{l_c} \quad (5.57)$$

Aplicando Eq. (5.57) na Eq. (5.56) temos

$$U_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.58)$$

Calculemos agora a tensão U_2 , detectada, por exemplo, por um voltímetro colocado no circuito elétrico C_2 . Caso este circuito só possua uma espira, já vimos que utilizando a equação $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ sob a forma integral temos

$$\int_{l_m} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.59)$$

onde l_m é o comprimento da espira de C_2 . Como admitimos que o circuito magnético possui alta permeabilidade, o $d\Phi/dt$ enlaçado pela espira de C_2 é idêntico ao gerado por C_1 . Imaginemos então que C_2 possua N_2 espiras, e multipliquemos ambos os lados da Eq. (5.59) por N_2 , o que dá

$$N_2 \int_{l_m} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

O lado esquerdo da expressão acima representa a circulação total do campo elétrico \mathbf{E} nas N_2 espiras, supondo que l_m seja o comprimento médio de uma espira. Assim sendo, esta integral representa a tensão U_2 detectada no voltímetro e vale, em módulo

$$U_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.60)$$

Se dividirmos a Eq. (5.60) por (5.58), obtemos

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (5.61)$$

Chegamos assim à expressão segundo a qual a relação entre as tensões de primário e secundário de um transformador é diretamente proporcional à relação entre o número de espiras dos circuitos primário e secundário.

5.6.8 A bobina de Rogowski-Chattock

A bobina de Rogowski-Chattock é um toróide constituído de um enrolamento uniforme envolvendo um material não ferromagnético que serve de suporte físico para a bobina. Seu surgimento data de 1887, quando o Prof. Chattock da Bristol University usou uma bobina semelhante para medida de relutância magnética em circuitos de ferro para aplicações em dinâmos. Em 1912, W. Rogowski e W. Steinhaus usaram as técnicas de Chattock para medir potenciais magnéticos. Atualmente esse dispositivo

voltou a ser amplamente utilizado para medição de corrente alternada e, em especial, quando a forma do condutor é irregular e não se adapta aos medidores convencionais de corrente.

Essa bobina é um excelente exemplo de aplicação da lei de Ampère e da lei de Faraday. Vejamos a Fig. 5.27a onde temos um condutor com a corrente I variável no tempo. Envolvendo o mesmo temos uma bobina cujos terminais se encontram em circuito aberto, porém conectados a um integrador que possui alta impedância de entrada. É interessante observar na Fig. 5.27b que a forma da bobina de Rogowski-Chattock não precisa ser obrigatoriamente regular, o que aumenta sobremaneira sua gama de aplicações. De fato, ela pode envolver formas irregulares de condutor, o que nem sempre é possível com aparelhos convencionais. Cabe aqui relembrar as Figs. 4.1 e 4.2 onde mostramos que a escolha do caminho $L(S)$ para a aplicação da lei de Ampère não interfere no valor da circulação de campo magnético, ou seja, esta circulação é sempre idêntica ao valor da corrente que atravessa a seção S envolta por $L(S)$.

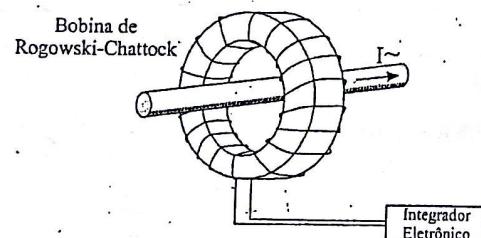


Figura 5.27a – Bobina de Rogowski-Chattock envolvendo um condutor

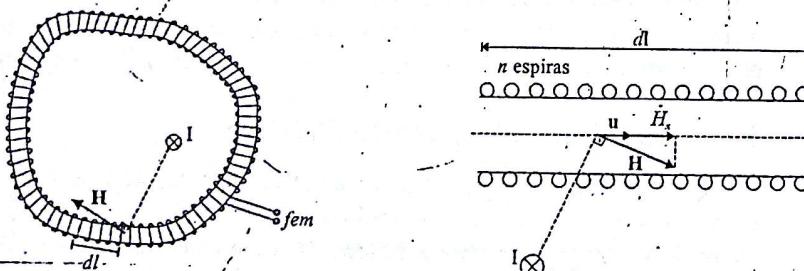


Figura 5.27b – Bobina com forma qualquer

5.27c – parcela da bobina

Examinemos agora a parcela da bobina mostrada na Fig. 5.27c. Imaginemos que a bobina completa possua comprimento médio L e seja dividida em M parcelas de comprimento igual a $dl = L/M$; cada parcela possui n espiras. Sendo N o número total de espiras temos

$$n = \frac{N}{L} dl$$

Para calcularmos a *fem* induzida na parcela dl da bobina, vamos avaliar o fluxo magnético atravessando sua seção transversal. O fluxo concatenado pelas n espiras é dado por

$$\Phi = n \mu_0 H_x S_b$$

onde S_b é a área transversal da bobina e H_x é o componente de campo magnético efetivo para a geração de fluxo magnético. Este campo pode ser escrito como sendo o produto escalar entre o campo \mathbf{H} e o vetor unitário \mathbf{u} na direção da bobina. Sendo dl o vetor relativo à parcela dl da espira e na direção da mesma, temos $dl = dl \mathbf{u}$ e $H_x = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{H} \cdot (dl/dl)$. Assim a expressão acima pode ser escrita sob a forma

$$\Phi = n \mu_0 H_x S_b = n \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{dl}{dl} S_b$$

Para o cálculo da *fem* induzida na bobina, deve-se levar em conta todas as espiras da mesma, o que nos conduz à seguinte expressão de fluxo concatenado total

$$\Phi_t = \sum_{m=1,M} n \mu_0 \mathbf{H}_m \cdot \frac{dl_m}{dl} S_b = \sum_{m=1,M} n \mu_0 \mathbf{H}_m \cdot dl_m S_b / dl$$

$$\Phi_t = \frac{n \mu_0 S_b}{dl} \sum_{m=1,M} \mathbf{H}_m \cdot dl_m$$

O somatório acima, colocado sob forma infinitesimal, nos conduz à

$$\Phi_t = \frac{n\mu_0 S_b}{dl} \int_L H \cdot dl$$

que pela lei de Ampère é

$$\Phi_t = \frac{n\mu_0 S_b}{dl} I$$

Substituindo $n = \frac{N}{L} dl$ temos

$$\Phi_t = \frac{N\mu_0 S_b}{L} I$$

Sabendo que a $fem = -d\Phi_t/dt$ obtemos, em módulo

$$fem = \frac{d\Phi_t}{dt} = \frac{N\mu_0 S_b}{L} \frac{dI}{dt}$$

Chamando $U = fem$

$$U = \frac{N\mu_0 S_b}{L} \frac{dI}{dt}$$

Finalmente, utilizando um integrador nos terminais da bobina para avaliar $\int U dt$, podemos obter a corrente procurada I por

$$I = \frac{L}{N\mu_0 S_b} \int U dt$$

Uma bobina de Rogowski-Chattcock foi efetivamente constituída no nosso laboratório (GRUCAD/UFSC) e pudemos verificar a eficácia desse dispositivo. Em particular quando a mesma adquire diferentes formas em torno do condutor, os valores medidos não se modificam, conforme já comentado acima.

5.7 EXERCÍCIOS

5.1) Calcule a profundidade de penetração δ no cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1$) e no permalloy ($\sigma = 6.0 \times 10^6 \text{ S/m}$, $\mu_r = 10^6$) para as freqüências de 10, 60, 250 e 1000 Hz.

$$\mu_n = \frac{\mu}{\mu_0} / 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs/A}$$

5.2) A indução magnética incidindo numa chapa de cobre vale 1 T com a freqüência de 60 Hz. Se a chapa tem uma espessura de 12 mm, calcule a indução no outro lado da mesma. Calcule também a defasagem em relação ao campo incidente.

5.3) Um campo magnético de freqüência de 10 Hz incide numa blindagem de ferro ($\sigma = 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 2000$). Calcule a espessura desta chapa para que, no outro lado da mesma, o campo não exceda 2% do campo incidente.

5.4) Uma máquina elétrica tem 200 cm^3 de ferro laminado e opera numa freqüência de 60 Hz. A indução máxima nas lâminas de ferro é de 1.5 T. Calcule a potência média dissipada pela histerese magnética utilizando a curva $B(H)$ da Fig. 5.16. Refaça o cálculo aplicando a equação de Steinmetz com $\eta = 315$.

5.5) Na mesma máquina do problema precedente, consideremos que as lâminas formando o circuito magnético têm espessura de 0.3 mm e condutividade $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$. Calcule, para $f = 60 \text{ Hz}$, a potência média dissipada com as correntes de Foucault nas chapas.

5.6) Com os dados dos dois problemas acima, calcule as perdas por histerese e correntes de Foucault para a freqüência de 120 Hz. Comente o resultado.

5.7) Ainda com os mesmos dados, calcule a freqüência para a qual as perdas por histerese e correntes de Foucault são idênticas. Refaça os cálculos para uma espessura de lâmina de 0.5 mm. Comente o resultado.

5.8) A espira circular da Fig. 5.28 é filiforme, sendo que a seção transversal do fio é S_f . Ela se encontra numa região onde existe uma indução magnética $B(t) = B_0 \sin \omega t$ perpendicular ao plano da espira. Admita que a corrente induzida na espira não é suficientemente grande para modificar a indução externa $B(t)$.

- Calcule a corrente induzida na espira para $B_0 = 0.5 \text{ T}$, $S_f = 1 \text{ mm}^2$, $R = 2 \text{ cm}$, $f = 60 \text{ Hz}$ e $\sigma = 10^7 \text{ S/m}$;
- calcule a potência média dissipada na espira por efeito Joule;
- calcule a indução magnética criada no centro da espira pela corrente induzida na mesma e verifique se esta grandeza é realmente pequena em relação ao $B(t)$ imposto, validando a hipótese inicialmente feita.

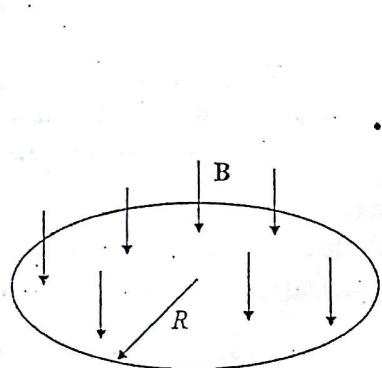


Figura 5.28

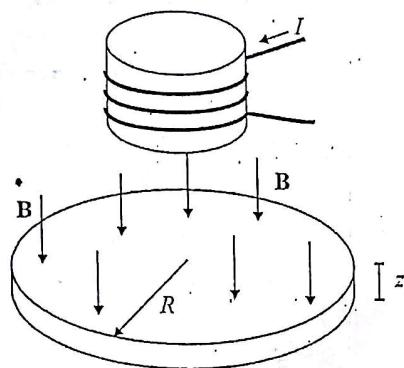


Figura 5.29

5.9) O solenoide da Fig. 5.29 cria uma indução de módulo B perpendicular ao plano do disco de condutividade σ que é aproximado pela equação $B(r,t) = B_0(1-r/R)\sin\omega t$, onde r é um raio genérico tal que $0 < r \leq R$. Considere que a corrente induzida não modifique o campo externo imposto $B(r,t)$, que a espessura $z \ll R$ e $z \ll \delta$.

- Calcule $J(r,t)$ induzida no disco;
- calcule a potência média dissipada pela corrente induzida por efeito Joule;
- calcule a indução de reação criada pela corrente induzida no centro do disco.

5.10) A arruela condutora de condutividade σ da Fig. 5.30 é submetida a uma indução magnética perpendicular ao plano da mesma que é dada por $B(r,t) = B_0(1+r/R)\sin\omega t$. Consideremos que $p \ll \delta$, $p \ll R$ e que a corrente induzida não modifica o campo externo $B(r,t)$.

- Calcule a densidade de corrente induzida na arruela;
- calcule a corrente total $I(t)$ nesta peça.

$$\text{E.m.g.} = S_p \cdot \frac{dB}{dt}$$

$$\text{E.m.g.} = S_p \cdot [B_0(1+r/R)\sin\omega t] \cdot \frac{d}{dt}(1+\frac{r}{R})$$

$$E.m.g. = -\cos\theta \cdot B_0 \omega \sin\theta \cdot (\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2}) \cdot \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow E.m.g. = B_0 \omega \cos\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial R^2} \right) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

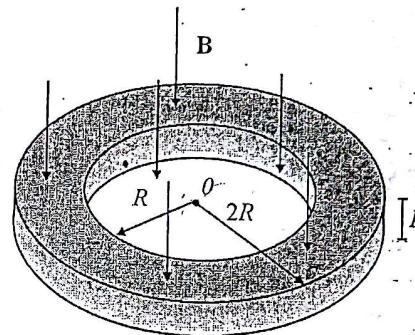


Figura 5.30

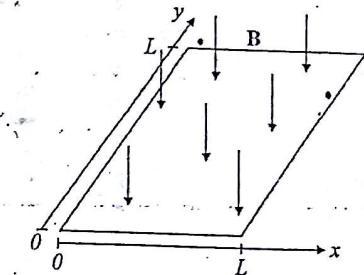


Figura 5.31

5.11) A espira quadrada de condutividade σ da Fig. 5.31 é submetida a uma indução magnética perpendicular ao seu plano, dada por $B(x,t) = B_0 x \sin\omega t$, sendo que B_0 é dado em T/m . Calcule a corrente induzida no fio, sabendo que sua seção é S_f .

5.12) No circuito magnético da Fig. 5.32 temos uma espira de cobre ($\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\mu_r = 1$) circular de raio $R = 10 \text{ mm}$. Ela gira com uma rotação imposta de 100 rotações por segundo. Considere: que a permeabilidade magnética do circuito é infinita; que a superfície circular da espira é idêntica à seção transversal do circuito magnético (e ao entreferro); que a indução magnética é constante no entreferro e que não há dispersão de campo nessa zona.

- Calcule o campo magnético criado no entreferro pela bobina ($I = 10 \text{ A}$, $n = 100$ espiras e $l = 20 \text{ mm}$);
- calcule o fluxo criado no entreferro;
- determine a lei $\Phi(t)$ relativa ao fluxo magnético que atravessa a espira levando em conta sua rotação;
- com a Lei de Faraday, calcule $J(t)$ que se estabelece na espira;
- sabendo que a seção transversal do fio é de $S_f = 1 \text{ mm}^2$, determine $I(t)$ na espira.

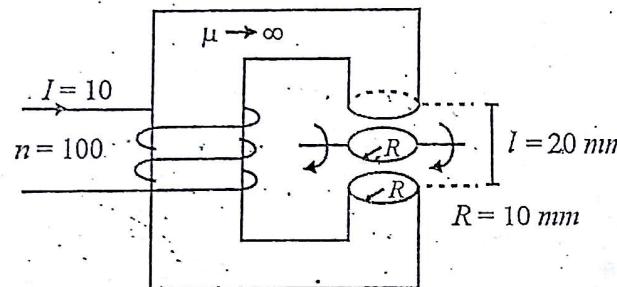


Figura 5.32

5.13) Pela lei de Faraday, a *fem* é estabelecida por uma variação temporal de fluxo. Considerando B perpendicular e constante numá seção S , temos $\Phi = BS$, portanto podemos ter $d\Phi/dt = B dS/dt$ ou $d\Phi/dt = S dB/dt$. O intuito deste exercício é calcular a corrente induzida numá espira pelos dois métodos e para tal vamos considerar o circuito magnético das Figs. 5.33a e 5.33b. Temos aqui uma espira quadrada de 2 cm de lado constituída por um fio de condutividade $\sigma = 0.5 \times 10^8 \text{ S/m}$ e seção de fio $S_f = 1 \text{ mm}^2$.

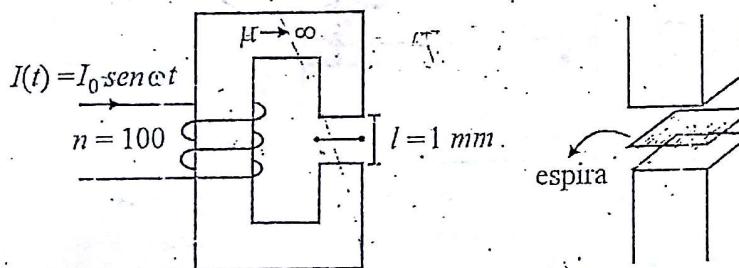
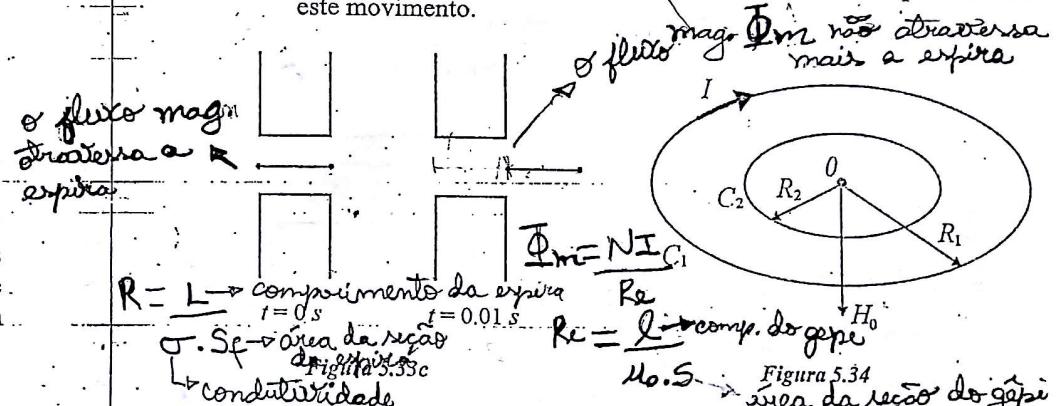


Figura 5.33a

Figura 5.33b

- a) No primeiro caso (B variável e S constante), a espira é estática e a variação de B é dada pela corrente $I(t) = I_0 \sen \omega t$; calcule a corrente induzida na espira para $I_0 = 0.1 \text{ A}$ e freqüência igual a 60 Hz;

- b) no segundo caso, com uma corrente constante $I_0 = 0.1 \text{ A}$ na bobina, imaginemos que a espira é bruscamente retirada da zona do entreferro, conforme a Fig. 5.33c. Sabendo que a variação da área sob a ação do campo varia linearmente como $S(t) = at + b$, determine as constantes a e b da lei, levando em conta os dados da Fig. 5.33c; determine então a corrente induzida na espira durante este movimento.



- 5.14) Na Fig. 5.34 corrente $I(t) = I_0 \sen \omega t$ circula pela espira externa C_1 de raio R_1 . Um campo magnético H_0 , perpendicular ao plano da espira, é criado por esta corrente no ponto central O .

- Calcular o campo H_0 ; *Biots-Savart*
- uma espira C_2 de raio R_2 é colocada concentricamente à espira C_1 , conforme a figura. Sabendo que o campo magnético varia segundo a lei $h(r, t) = H_0(t)[1 + r/R_2]$, calcule a corrente induzida em C_2 ; a seção transversal do fio de C_2 é S_f e sua condutividade é σ ;
- calcule esta corrente para os seguintes dados: $S_f = 1 \text{ mm}^2$, $R_1 = 2 \text{ cm}$, $R_2 = 1 \text{ cm}$, $f = 400 \text{ Hz}$, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ e $I_0 = 1 \text{ A}$.

- 5.15) Pela lei de Faraday, uma variação brusca de B numa seção envolvida por um condutor cria uma corrente induzida. Quando B se estabiliza, a corrente induzida deve se anular. O problema aqui proposto deve corroborar estes princípios. Na Fig. 5.35 temos uma espira circular filiforme cuja seção

transversal do fio é S_f e condutividade σ . A indução B , perpendicular ao plano da espira é dada por $B(r,t) = \frac{B_0 r^2}{R^2} (1 - e^{-\frac{t}{T}})$.

- Calcule $J(t)$ e $I(t)$ na espira e verifique que estas grandezas decaem em concordância com a estabilização de B ;
- calcule a potência dissipada na espira por efeito Joule;
- calcule a energia para um tempo infinito e mostre que a mesma possui um valor finito; obtenha seu valor numérico para $S_f = 1 \text{ mm}^2$, $R = 2 \text{ cm}$, $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $T = 0.01 \text{ s}$ e $B_0 = 0.2 \text{ T}$.

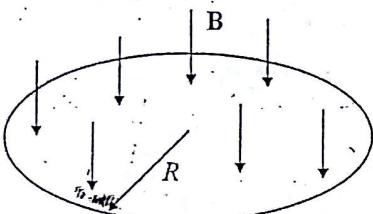


Figura 5.35

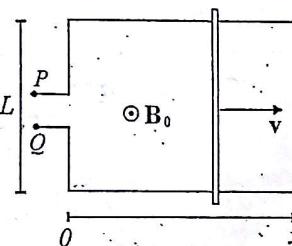


Figura 5.36

5.16) Na Fig. 5.36 temos uma barra condutora que se move com a velocidade de módulo v sobre um circuito condutor. Perpendicular ao plano deste conjunto a indução magnética B_0 é imposta. Calcule a fem induzida no circuito e medida entre os pontos P e Q . Obtenha o valor numérico para $B_0 = 1 \text{ T}$, $L = 2 \text{ cm}$ e $v = 5 \text{ m/s}$.

5.17) Refaça o cálculo do problema anterior considerando que a barra, partindo do repouso, tenha uma aceleração de 2 m/s^2 .

5.18) Com os mesmos dados do Exercício 5.16, considere que a indução constante B_0 seja substituída por $B(t) = B_0 \operatorname{sen} \omega t$. Recalcule a fem e obtenha a expressão numérica para $f = 60 \text{ Hz}$.

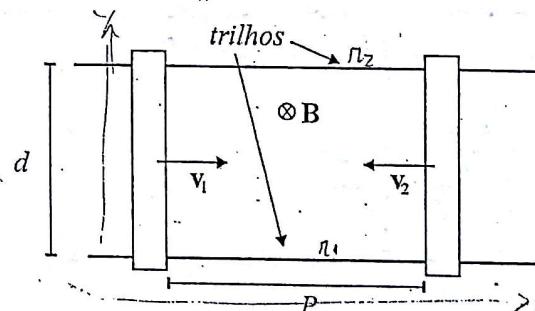
5.19) Utilizando ainda os dados do Exercício 5.16, iremos agora levar em conta a resistência elétrica do circuito, considerando que o circuito condutor e a barra possuem condutividade σ e seção transversal S_f .



- À medida que a barra se movimenta, aumentando o comprimento linear do circuito, a resistência ôhmica varia. Calcule a expressão da resistência R_c do circuito em função de x , σ e S_f , bem como em função de v e t ; considere que a barra parte de $x=0$;
- imagine que entre os pontos P e Q coloquemos uma lâmpada de resistência R_l . Obtenha a expressão da corrente $I(x)$ (em função de x) e $I(t)$ (em função de t).

5.20) Dois trens se aproximam conforme a Fig. 5.37, com velocidades $v_1 = 100 \text{ km/h}$ e $v_2 = 120 \text{ km/h}$ sobre o mesmo par de trilhos. Num dado momento, a distância P entre eles é de 10 km ; d vale 2 m . A resistência dos trilhos é definida por $r = 0.1 \Omega/\text{km}$ (por trilho). O componente transversal de indução terrestre é $B = 0.05 \text{ mT}$.

- Calcule a corrente produzida pelo movimento dos trens;
- calcule a corrente nos trilhos em função do tempo, considerando $t=0$ o momento em que $P = 10 \text{ km}$.



considere um fuso
 $v_1 = 100 \text{ km/h}$ { 77,78
 $v_2 = 120 \text{ km/h}$ { 33,33
 reosta as duas vel
 $V = 61,17 \text{ m/s}$

Figura 5.37

a) $fem = R \cdot I_{ind}$

$I_{ind} = \frac{fem}{R} =$

$\int EdL = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot dS$

$fem = - \frac{d}{dt} \int B ds = - \frac{d}{dt} \left[B \int \frac{x}{d} dx \right] = - \frac{d}{dt} [B \cdot x \cdot \frac{d}{2}] = B \cdot \frac{dx}{dt}$

$fem = B \cdot d \cdot V$

$I_{ind} = \frac{B \cdot d \cdot V}{R}$, onde $R = (\eta_1 + \eta_2) \cdot 10 \text{ km}$ é a resistência de $\eta_2 = (0,2) \cdot 10 \text{ km} = 2 \text{ km}$ como é o caso da linha.
 $= 0,05 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 111,11$

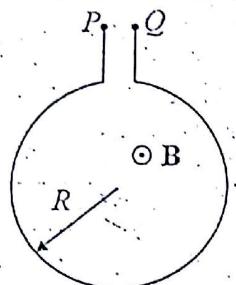


Figura 5.38a

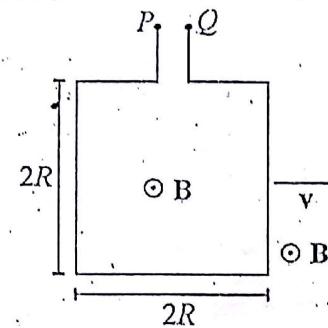


Figura 5.38b

5.21) Duas espiras, uma quadrada e outra circular, conforme Fig. 5.38a e 5.38b, estão se movendo com velocidade v , num campo de indução $B(t) = B_0 \cos \omega t$, perpendicular a v . Calcule a relação entre as *sem* induzidas entre os pontos P e Q nas duas espiras.

5.22) Um fio, cuja forma é mostrada na Fig. 5.39, é submetido a uma rotação de f rotações por segundo numa região onde temos um campo uniforme B , como mostrado. Calcule a *sem* induzida entre os pontos a e b .

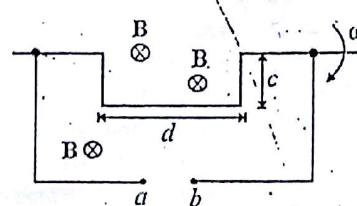


Figura 5.39

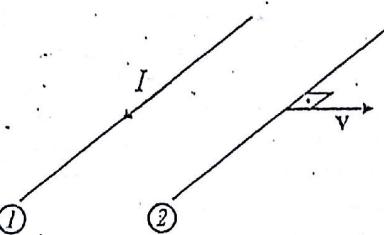


Figura 5.40

5.23) Pelo fio infinito 1 da Fig. 5.40 flui uma corrente I constante. O fio 2, também infinito, é paralelo ao fio 1 e é deslocado com a velocidade v . Calcule a *sem* induzida no fio 2 por unidade de comprimento. Determine a direção da corrente.

5.24) Desejamos construir um gerador baseado no movimento de um ímã permanente no interior de um solenóide que possui n espiras. O esquema é mostrado na Fig. 5.41. Nos terminais do solenóide podemos medir a *sem* induzida pelo movimento do ímã. Admitamos que a roda que gera o

PICAXE

movimento linear do ímã gira com a freqüência de 60 Hz e que o raio externo R do ímã seja idêntico ao do solenóide. Consideremos que, “visto” pelo solenóide, a indução do ímã varie senoidalmente entre 0.1 T para as posições a e c e 0.3 T para a posição b , onde o ímã se encontra totalmente no interior do solenóide.

- Obtenha a curva $B(t)$ no interior do solenóide;
- para $R = 2\text{ cm}$ e $n = 100$ espiras, calcule a expressão da *sem* induzida.

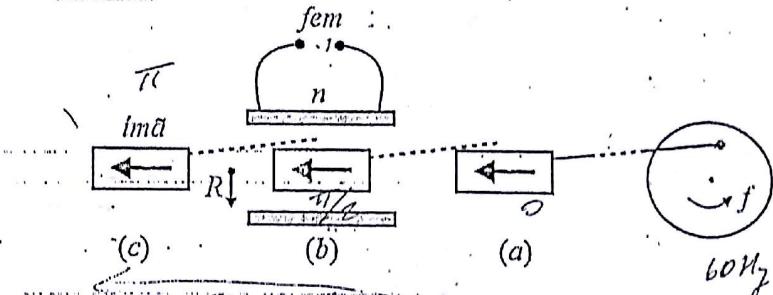


Figura 5.41

