Universidad Centroamericana "José Simeón Cañas"

Facultad de ingeniería y arquitectura

Técnicas de Simulación en Computadoras

Título:

Proyecto Final

"Documento del proceso del MEF para la ecuación brindada e Historia para el fenómeno descrito"

Grupo # 23

Integrantes:

JOSE MIGUEL ACOSTA VASQUEZ	-	00008020
DIEGO JOSE RIVAS FUENTES	-	00121520
CARLOS EDUARDO MERCADO GUTIERREZ	-	00058820
DANIEL VLADIMIR SOLIS MARROQUIN	-	00209020

Catedrático:

Enmanuel Araujo Amaya, Msc.

Fecha de entrega:

Martes 30 de Junio de 2023

Contenido

Modelo (Ecuación dada): $-\eta^2\nabla \cdot (\epsilon \nabla X) = \eta^3 + \eta^2$

Paso 1: Localización

Se utilizará la misma isoparametrización base. Es decir, se trabajará con base a un elemento ideal que represente a cada elemento del dominio mediante el uso de transformaciones lineales. Por tanto como primer paso pasaremos a ubicar dicho elemento ideal en el orígen:

$$N_1 = 1 - \epsilon - \eta - \phi$$
$$N_2 = \epsilon$$
$$N_3 = \eta$$
$$N_4 = \phi$$

Paso 2: Interpolación

El elemento isoparametrizado deberá aproximadamente describir el fenómeno ocurrido en un elemento real con base a la información en sus nodos, asumiendo que en cada uno de ellos se obtiene una respuesta concreta. Aunque de momento realmente desconocemos el valor en cada uno de los nodos, sabemos que su valor aproxima, mediante una interpolación lineal, la variable completa para el elemento.

$$X \simeq \boldsymbol{NX}$$

$$\mathrm{X} \simeq \begin{bmatrix} \mathrm{N}_1 & \mathrm{N}_2 & \mathrm{N}_3 & \mathrm{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{X}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{NX}$$

Paso 3: Aproximación del Modelo

Se toma en cuenta la nueva aproximación considerando que ahora la ecuación deja de ser una ecuación como tal al ya no cumplir con una igualdad.

$$-\eta^2\nabla \cdot \left(\epsilon^2 \nabla NX\right) \simeq \eta^3 + \eta^2$$

Definición del Residual

Por tanto para considerar dicho error se hace uso del cálculo del residual por medio de la técnica de residuos ponderados.

$$R = \eta^3 + \eta^2 + \eta^2 \bigtriangledown \cdot \left(\epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{NX}\right)$$

Paso 4: Método de Residuos Ponderados

Se sustituye la expresión del residual en nuestra expresión original para que ahora sí pueda resolverse una ecuación al ser una igualdad.

$$\int_V \boldsymbol{W} R dV = 0 \qquad \int_V \boldsymbol{W}(\eta^3 + \eta^2 + \eta^2 \nabla \cdot \left(\epsilon^2 \nabla \boldsymbol{N}\boldsymbol{X}\right))\ dV = 0$$

Paso 5: Método de Galerkin

En el método de Galerkin, se busca una solución aproximada al multiplicar los residuos ponderados por una función de prueba (***W***) y luego integrar sobre el dominio del problema. La función de prueba se elige para ser similar a las funciones de forma utilizadas para describir la geometría del elemento finito, por ello mediante dicho análisis se puede relacionar con la matriz de funciones de forma (***N***), con la diferencia que ***W*** es un vector columna y ***N*** un vector fila, definiendo así la igualdad:

$$\mathbf{W} = \mathbf{N}^{\mathbf{T}}$$

Sustituyendo este cambio tendríamos lo siguiente:

$$\int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}}\left(\eta^3 + \eta^2 + \eta^2 \nabla \cdot \left(\epsilon^2 \nabla \boldsymbol{N}\boldsymbol{X}\right)\right) dV = 0$$

Interludio (reordenación de la expresión):

$$\int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^3 dV + \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^2 dV + \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^2 \nabla \cdot \left(\epsilon^2 \nabla \boldsymbol{N}\boldsymbol{X}\right) dV = 0$$

$$-\int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^2 \nabla \cdot \left(\epsilon^2 \nabla \boldsymbol{N}\boldsymbol{X}\right) dV = \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^3 dV + \int_V \mathbf{N}^{\mathbf{T}} \eta^2 dV$$

Paso 6: Resolución de las Integrales

Para cada proceso de integración se estará aplicando la definición del Jacobiano de transformación para trabajar las integrales en función de ϵ, $\eta \wedge \phi$ en lugar de x, $y \wedge z$.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} dxdydz &= |\mathbf{J}| d\epsilon d\eta d\phi \\ dxdydz &= J d\epsilon d\eta d\phi \end{aligned}$$

Integrales del lado derecho :

Primer término completo:

$$\int_V \mathbf{N}^\mathbf{T}\eta^2 dV = \int_V \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \eta^2 \, dV = \int_V \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} \eta^2 \, dxdydz$$

$$= \mathrm{J} \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} \eta^2 \, d\epsilon d\eta d\phi$$

$$= J \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \begin{bmatrix} \eta^2-\epsilon\eta^2-\eta^3-\phi\eta^2 \\ \epsilon\eta^2 \\ \eta^3 \\ \phi\eta^2 \end{bmatrix} d\epsilon d\eta d\phi$$

Solucionando individualmente cada una de las 4 integrales triples generadas (una por cada elemento del vector).

- Para $\epsilon\eta^2$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^2 d\epsilon d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\frac{\epsilon^2\eta^2}{2} \right) \Big|_0^{1-\eta-\phi} \right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\frac{(1-\eta-\phi)^2}{2} \eta^2 \right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((1-\eta-\phi)^2 \eta^2 \right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((\eta^2 - 2\eta - 2\phi + 2\eta\phi + \phi^2 + 1)\eta^2 \right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\eta^4 - 2\eta^3 - 2\eta^2\phi + 2\eta^3\phi + \eta^2\phi^2 + \eta^2 \right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\left(\frac{\eta^5}{5} - \frac{\eta^4}{2} - \frac{2\eta^3\phi}{3} + \frac{\eta^4\phi}{2} + \frac{\eta^3\phi^2}{3} + \frac{\eta^3}{3} \right) \Big|_0^{1-\phi} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^5}{5} - \frac{(1-\phi)^4}{2} - \frac{2(1-\phi)^3\phi}{3} + \frac{(1-\phi)^4\phi}{2} + \frac{(1-\phi)^3\phi^2}{3} + \frac{(1-\phi)^3}{3} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1-5\phi+10\phi^2-10\phi^3+5\phi^4-\phi^5}{5} - \frac{1-4\phi+6\phi^2-4\phi^3+\phi^4}{2} - \frac{2\phi-6\phi^2+6\phi^3-2\phi^4}{3} + \frac{\phi-4\phi^2+6\phi^3-4\phi^4+\phi^5}{2} + \frac{\phi^2-3\phi^3+3\phi^4-\phi^5}{3} + \frac{1-3\phi+3\phi^2-\phi^3}{3} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{30} \cdot (6\phi - 15\phi^2 + 20\phi^3 - 15\phi^4 + 6\phi^5 - \phi^6) - \frac{\phi}{2} + \phi^2 - \phi^3 + \frac{\phi^4}{2} - \frac{\phi^5}{10} - \frac{\phi^2}{3} + \frac{2\phi^3}{3} - \frac{\phi^4}{2} + \frac{2\phi^5}{15} + \frac{1}{60} \cdot (15\phi^2 - 40\phi^3 + 45\phi^4 - 24\phi^5 + 5\phi^6) + \frac{\phi^3}{9} - \frac{\phi^4}{4} + \frac{\phi^5}{5} - \frac{\phi^6}{18} + \frac{\phi}{3} - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^3}{3} - \frac{\phi^4}{12} \right] \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{180} - 0 \right]$$
$$= \frac{1}{360}$$

- Para η^3 :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^3 d\epsilon d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\epsilon\eta^3\right) \Bigg| \begin{matrix} 1-\eta-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((1-\eta-\phi)\eta^3 \right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3 \right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\left(\frac{\eta^4}{4} - \frac{\eta^5}{5} - \frac{\phi\eta^4}{4} \right) \Bigg| \begin{matrix} 1-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^4}{4} - \frac{(1-\phi)^5}{5} - \frac{\phi(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)(1-\phi)^4}{4} - \frac{(1-\phi)^5}{5} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^5}{4} - \frac{(1-\phi)^5}{5} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5(1-\phi)^5 - 4(1-\phi)^5}{20} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^5}{20} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{20} \cdot \int_0^1 (1-\phi)^5 d\phi \\
&= \frac{1}{20} \cdot \int_0^1 \left(1 - 5\phi + 10\phi^2 - 10\phi^3 + 5\phi^4 - \phi^5 \right) d\phi \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left[\phi - \frac{5\phi^2}{2} + \frac{10\phi^3}{3} - \frac{5\phi^4}{2} + \phi^5 - \frac{\phi^6}{6} \right] \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left(1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{2} + 1 - \frac{1}{6} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{20} \cdot \left(\frac{1}{6} \right) \\
&= \frac{1}{120}
\end{aligned}
$$

- Para $\phi\eta^2$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \phi\eta^2 d\epsilon d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\epsilon\phi\eta^2\right) \Big|\begin{matrix} 1-\eta-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((1-\eta-\phi)\phi\eta^2\right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\phi\eta^2 - \phi\eta^3 - \phi^2\eta^2\right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\left(\frac{\phi\eta^3}{3} - \frac{\phi\eta^4}{4} - \frac{\phi^2\eta^3}{3} \right) \Big|\begin{matrix} 1-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\phi(1-\phi)^3}{3} - \frac{\phi(1-\phi)^4}{4} - \frac{\phi^2(1-\phi)^3}{3} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\phi(1-\phi)(1-\phi)^3}{3} - \frac{\phi(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\phi(1-\phi)^4}{3} - \frac{\phi(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{4\phi(1-\phi)^4 - 3\phi(1-\phi)^4}{12} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^4(4\phi-3\phi)}{12} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 \left(\phi(1-\phi)^4\right) d\phi \\
&= \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 \left(\phi - 4\phi^2 + 6\phi^3 - 4\phi^4 + \phi^5\right) d\phi \\
&= \frac{1}{12} \cdot \left[\frac{\phi^2}{2} - \frac{4\phi^3}{3} + \frac{3\phi^4}{2} - \frac{4\phi^5}{5} + \frac{\phi^6}{6} \right] \Big|\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} - 0 \right) \\
&= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{30} \right) \\
&= \frac{1}{360}
\end{aligned}
$$

- Finalmente para $\eta^2 - \epsilon\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2$ utilizamos las respuestas de las integrales anteriores ya que los términos calculados están incluidos en esta última expresión, por ende solo tendríamos que calcular la integral para η^2 y luego restarle los resultados anteriores.

- Para η^2 :

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2 d\epsilon d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((\epsilon\eta^2) \Big|_0^{1-\eta-\phi} \right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((1-\eta-\phi)\eta^2\right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2\right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\left(\frac{\eta^3}{3} - \frac{\eta^4}{4} - \frac{\phi\eta^3}{3} \right) \Big|_0^{1-\phi} \right) d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^3}{3} - \frac{(1-\phi)^4}{4} - \frac{\phi(1-\phi)^3}{3} \right) d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)(1-\phi)^3}{3} - \frac{(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^4}{3} - \frac{(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{4(1-\phi)^4 - 3(1-\phi)^4}{12} \right) d\phi$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^4(4-3)}{12} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 (1-\phi)^4 d\phi$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \int_0^1 \left(1 - 4\phi + 6\phi^2 - 4\phi^3 + \phi^4\right) d\phi$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \left[\phi - 2\phi^2 + 2\phi^3 - \phi^4 + \frac{\phi^5}{5} \right] \Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \left(1 - 2 + 2 - 1 + \frac{1}{5} - 0 \right)$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{5} \right)$$
$$= \frac{1}{60}$$

- Por tanto para $\eta^2 - \epsilon\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \left(\eta^2 - \epsilon\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2\right) d\epsilon d\eta d\phi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^2 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^3 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \phi\eta^2 d\epsilon d\eta d\phi$$

$$= \frac{1}{60} - \frac{1}{360} - \frac{1}{120} - \frac{1}{360}$$

$$= \frac{1}{360}$$

Como resumen del resultado de las integrales tendríamos que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^2 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{360}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^3 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{120}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \phi\eta^2 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{360}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{60}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} (\eta^2 - \epsilon\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2) \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{360}$$

Armando, con todo y el determinante del Jacobiano (*J*) nuestra solución para el primer término es la siguiente:

$$\int_V \mathbf{N^T} \eta^2 dV = J \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \begin{bmatrix} \eta^2 - \epsilon\eta^2 - \eta^3 - \phi\eta^2 \\ \epsilon\eta^2 \\ \eta^3 \\ \phi\eta^2 \end{bmatrix} d\epsilon d\eta d\phi = J \begin{bmatrix} \frac{1}{360} \\ \frac{1}{360} \\ \frac{1}{120} \\ \frac{1}{360} \end{bmatrix}$$

Siendo este término la solución simplificada para el primer término del lado derecho de la igualdad de nuestra ecuación original.

Segundo término completo:

- Para $\epsilon\eta^3$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^3 d\epsilon d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\frac{\epsilon^2}{2}\eta^3 \right) \Big| \begin{matrix} 1-\eta-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\frac{(1-\eta-\phi)^2}{2}\eta^3 \right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\phi} (\eta^2 - 2\eta - 2\phi + 2\eta\phi + \phi^2 + 1)\eta^3 d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \int_0^{1-\phi} (\eta^5 - 2\eta^4 - 2\eta^3\phi + 2\eta^4\phi + \eta^3\phi^2 + \eta^3) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{\eta^6}{6} - \frac{2\eta^5}{5} - \frac{\eta^4\phi}{2} + \frac{2\eta^5\phi}{5} + \frac{\eta^4\phi^2}{4} + \frac{\eta^4}{4} \right) \Big| \begin{matrix} 1-\phi \\ 0 \end{matrix} d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^6}{6} - \frac{2(1-\phi)^5}{5} - \frac{(1-\phi)^4\phi}{2} + \frac{2(1-\phi)^5\phi}{5} + \frac{(1-\phi)^4\phi^2}{4} + \frac{(1-\phi)^4}{4} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(-\phi+1)^6}{6} + \frac{2\phi(-\phi+1)^5 - 2(-\phi+1)^5}{5} - \frac{\phi(-\phi+1)^4}{2} + \frac{\phi^2(-\phi+1)^4 + (-\phi+1)^4}{4} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{\phi^6 - 6\phi^5 + 15\phi^4 - 20\phi^3 + 15\phi^2 - 6\phi + 1}{6} + \frac{-2\phi^6 + 12\phi^5 - 30\phi^4 + 40\phi^3 - 30\phi^2 + 12\phi - 2}{5} - \frac{\phi^5 - 4\phi^4 + 6\phi^3 - 4\phi^2 + \phi}{2} + \frac{\phi^6 - 4\phi^5 + 7\phi^4 - 8\phi^3 + 7\phi^2 - 4\phi + 1}{4} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(1 - 6\phi + 15\phi^2 - 20\phi^3 + 15\phi^4 - 6\phi^5 + \phi^6) \cdot 10}{60} + \frac{(-2\phi^6 + 12\phi^5 - 30\phi^4 + 40\phi^3 - 30\phi^2 + 12\phi - 2) \cdot 12}{60} - \frac{(\phi - 4\phi^2 + 6\phi^3 - 4\phi^4 + \phi^5) \cdot 30}{60} + \frac{(\phi^6 - 4\phi^5 + 7\phi^4 - 8\phi^3 + 7\phi^2 - 4\phi + 1) \cdot 15}{60} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{(1 - 6\phi + 15\phi^2 - 20\phi^3 + 15\phi^4 - 6\phi^5 + \phi^6) \cdot 10 + (-2\phi^6 + 12\phi^5 - 30\phi^4 + 40\phi^3 - 30\phi^2 + 12\phi - 2) \cdot 12 - (\phi - 4\phi^2 + 6\phi^3 - 4\phi^4 + \phi^5) \cdot 30 + (\phi^6 - 4\phi^5 + 7\phi^4 - 8\phi^3 + 7\phi^2 - 4\phi + 1) \cdot 15}{60} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(\frac{\phi^6 - 6\phi^5 + 15\phi^4 - 20\phi^3 + 15\phi^2 - 6\phi + 1}{60} \right) d\phi$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{60} \cdot \int_0^1 (\phi^6 - 6\phi^5 + 15\phi^4 - 20\phi^3 + 15\phi^2 - 6\phi + 1) d\phi$$
$$= \frac{1}{120} \cdot \left[\left(\frac{\phi^7}{7} - \phi^6 + 3\phi^5 - 5\phi^4 + 5\phi^3 - 3\phi^2 + \phi \right) \Big| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right]$$
$$= \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{7}$$
$$= \frac{1}{840}$$

- Para η^4 :

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^4 d\epsilon d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\epsilon\eta^4\right) \Bigg| \begin{matrix} 1-\eta-\phi \\ 0 \end{matrix} \right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left((1-\eta-\phi)\eta^4\right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\eta^4 - \eta^5 - \phi\eta^4\right) d\eta d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\eta^5}{5} - \frac{\eta^6}{6} - \frac{\phi\eta^5}{5} \right) \Bigg| \begin{matrix} 1-\phi \\ 0 \end{matrix} d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^5}{5} - \frac{(1-\phi)^6}{6} - \frac{\phi(1-\phi)^5}{5} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^5 - \phi(1-\phi)^5}{5} - \frac{(1-\phi)^6}{6} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^6}{5} - \frac{(1-\phi)^6}{6} \right) d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\frac{6(1-\phi)^6 - 5(1-\phi)^6}{30} \right) d\phi \\
&= \frac{1}{30} \cdot \int_0^1 (1-\phi)^6 d\phi \\
&= \frac{1}{30} \cdot \left[-\frac{(1-\phi)^7}{7} \right] \Bigg| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \\
&= \frac{1}{30} \cdot \left(-\frac{(1-1)^7}{7} - \left(-\frac{(1-0)^7}{7} \right) \right) \\
&= \frac{1}{30} \cdot \left(\frac{1}{7} \right) \\
&= \frac{1}{210}
\end{aligned}
$$

- Para $\phi\eta^3$:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^{1-\phi}\int_0^{1-\eta-\phi}\phi\eta^3 d\epsilon d\eta d\phi \\
&=\int_0^1\int_0^{1-\phi}\left(\left(\epsilon\phi\eta^3\right)\Big|\begin{matrix}1-\eta-\phi\\0\end{matrix}\right)d\eta d\phi \\
&=\int_0^1\int_0^{1-\phi}\left((1-\eta-\phi)\phi\eta^3\right)d\eta d\phi \\
&=\int_0^1\int_0^{1-\phi}\left(\phi\eta^3-\phi\eta^4-\phi^2\eta^3\right)d\eta d\phi \\
&=\int_0^1\left(\frac{\phi\eta^4}{4}-\frac{\phi\eta^5}{5}-\frac{\phi^2\eta^4}{4}\right)\Big|\begin{matrix}1-\phi\\0\end{matrix}d\phi \\
&=\int_0^1\left(\frac{\phi(1-\phi)^4}{4}-\frac{\phi(1-\phi)^5}{5}-\frac{\phi^2(1-\phi)^4}{4}\right)d\phi \\
&=\int_0^1\left(\frac{\phi(1-\phi)^4-\phi^2(1-\phi)^4}{4}-\frac{\phi(1-\phi)^5}{5}\right)d\phi \\
&=\int_0^1\left(\frac{\phi(1-\phi)^5}{4}-\frac{(1-\phi)^5}{5}\right)d\phi \\
&=\int_0^1\left(\frac{5\phi(1-\phi)^5-4\phi(1-\phi)^5}{20}\right)d\phi \\
&=\frac{1}{20}\cdot\int_0^1(5\phi-4\phi)(1-\phi)^5 d\phi \\
&=\frac{1}{20}\cdot\int_0^1(\phi)(1-\phi)^5 d\phi \\
&=\frac{1}{20}\cdot\left(\left[\frac{1}{2}\phi^2(1-\phi)^5\right]\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}-\int_0^1-\frac{5}{2}\phi^2(1-\phi)^4 d\phi\right) \\
&=\frac{1}{20}\cdot\left[\frac{1}{2}\phi^2(1-\phi)^5-\left(-\frac{1}{42}\left(35\phi^3-105\phi^4+126\phi^5-70\phi^6+15\phi^7\right)\right)\right]\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \\
&=\frac{1}{20}\cdot\left[\frac{1}{2}\phi^2(1-\phi)^5+\frac{1}{42}\left(35\phi^3-105\phi^4+126\phi^5-70\phi^6+15\phi^7\right)\right]\Big|\begin{matrix}1\\0\end{matrix} \\
&=\frac{1}{20}\cdot\left[\left(0+\frac{1}{42}\right)-(0+0)\right] \\
&=\frac{1}{20}\cdot\left(\frac{1}{42}\right) \\
&=\frac{1}{840}
\end{aligned}
$$

- Igual como ocurrió con las integrales del primer término a la derecha de la igualdad de la ecuación original $\eta^3 - \epsilon\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3$ utilizamos las respuestas de las integrales anteriores ya que los términos calculados están incluidos en esta última expresión, por ende solo tendríamos que calcular la integral para η^3 y luego restarle los resultados anteriores.
- Sin embargo es importante recordar que la integral asociada a η^3 ya fue calculada anteriormente, por lo tanto para agilizar procesos tomaremos su solución. *Véase aquí su solución*.
- Por tanto, ya tenemos todos los elementos necesarios para calcular la última integral para este término.

- Para $\eta^3 - \epsilon\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} (\eta^3 - \epsilon\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3) d\epsilon d\eta d\phi$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^3 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^3 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^4 d\epsilon d\eta d\phi - \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \phi\eta^3 d\epsilon d\eta d\phi$$

$$= \frac{1}{120} - \frac{1}{840} - \frac{1}{210} - \frac{1}{840}$$

$$= \frac{1}{840}$$

Como resumen del resultado de las integrales tendríamos que:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \epsilon\eta^3 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{840} \qquad \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \phi\eta^3 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{840}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^4 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{210} \qquad \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^3 \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{120}$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} (\eta^3 - \epsilon\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3) \, d\epsilon d\eta d\phi = \frac{1}{840}$$

Armando, con todo y el determinante del Jacobiano (*J*), la solución para el segundo término la siguiente:

$$\int_V \mathbf{N^T} \eta^3 dV = \int_V \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \eta^3 \, dV = \int_V \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} \eta^3 \, dxdydz$$

$$= \mathrm{J} \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi \\ \epsilon \\ \eta \\ \phi \end{bmatrix} \eta^3 \, d\epsilon d\eta d\phi = J \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \begin{bmatrix} \eta^3 - \epsilon\eta^3 - \eta^4 - \phi\eta^3 \\ \epsilon\eta^3 \\ \eta^4 \\ \phi\eta^3 \end{bmatrix} d\epsilon d\eta d\phi = J \begin{bmatrix} \frac{1}{840} \\ \frac{1}{840} \\ \frac{1}{210} \\ \frac{1}{840} \end{bmatrix}$$

Armando Matriz "b"

Siendo este término final la solución simplificada para el segundo término del lado derecho de la igualdad de nuestra ecuación original. Por tanto ya tendríamos realizado todos los cálculos para dicho lado de la igualdad, lo que en conjunto representaría nuestra **b** en el proceso del MEF para nuestra ecuación.

$$\mathrm{b} = J\begin{bmatrix} \frac{1}{840} \\ \frac{1}{840} \\ \frac{1}{210} \\ \frac{1}{840} \end{bmatrix} + J\begin{bmatrix} \frac{1}{360} \\ \frac{1}{360} \\ \frac{1}{120} \\ \frac{1}{360} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{b} = J\begin{bmatrix} \frac{1}{252} \\ \frac{1}{252} \\ \frac{11}{840} \\ \frac{1}{252} \end{bmatrix}$$

Integrales del lado izquierdo:

Para realizar esta integral se hará uso de la técnica de integración por partes. La integración por partes es una técnica utilizada para transformar la integral de un producto de funciones en una expresión equivalente que puede ser más fácil de evaluar.

- La forma de la integración por partes para el MEF es la siguiente:

$$\int_V U\, dV = [UV]|_V - \int_V dU\, V$$

En el contexto del Método de Elementos Finitos, la integración por partes se aplica para obtener términos adicionales que representan las condiciones de contorno de Neumann.
Además, la integración por partes es útil para descomponer la matriz de rigidez (matriz **K**) en términos que involucran derivadas y funciones de forma, facilitando así el cálculo numérico de la solución aproximada.
En resumen, la integración por partes permite incorporar las condiciones de contorno y simplificar el cálculo de la matriz **K** en el *MEF*.

$$-\int_V \boldsymbol{N^T}\eta^2 \bigtriangledown \cdot \left(\epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{NX}\right) dV = -\left(\int_V \boldsymbol{N^T}\eta^2 \bigtriangledown \cdot \left(\epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{N}\right) dV\right)\boldsymbol{X}$$

Esta es la expresión del lado izquierdo de la integral en la que nos encontramos actualmente en el paso 6 del MEF. Aquí se reorganiza para luego descomponer la expresión para el proceso de integración por partes.

- Elegimos nuestro *U* y *dV*, e inmediatamente calculamos *dU* y *V* para armar la descomposición por partes de la integral como se ilustró en la imagen anterior.

$$U = \boldsymbol{N^T} \qquad dV = \eta^2 \bigtriangledown \cdot \left(\epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{NX}\right)$$

$$dU = \bigtriangledown \boldsymbol{N^T} \qquad V = \eta^2\epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{NX}$$

Importante tomar en cuenta que para el cálculo de las derivadas e integrales para dU y V respectivamente se manejan operaciones espaciales y por ello se utiliza el gradiente como operador de cambio al realizar estas operaciones con la matriz de funciones de forma (**N**). Es decir, cuando se realiza la integración en el proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez (**K**), se considera la derivada de la matriz de funciones de forma. Esta derivada es el gradiente de la matriz de funciones de forma.
Al considerar el gradiente de la matriz de funciones de forma en la integración, se tiene en cuenta la variación espacial de la propiedad o variable en el cálculo de la matriz de rigidez. Esto es especialmente relevante en nuestro caso ya que trabajamos sobre tres dimensiones, donde existen componentes en tres direcciones espaciales.
De forma general, podemos decir que la incorporación del gradiente en la integración asegura una mayor precisión en la aproximación de la solución y garantiza una respuesta más adecuada en problemas multidimensionales para el MEF.

- Armando expresión implementando la integración por partes definida para el método:

$$= -\left[\boldsymbol{N^T}\eta^2\,\epsilon^2 \triangledown \boldsymbol{NX}\right]\Big|_V^{\cdot} + \int_V^{\cdot} \triangledown \boldsymbol{N^T}\eta^2\,\epsilon^2 \triangledown \boldsymbol{NX}\ dV$$

De esta expresión tenemos dos términos que nos serán útiles en distintas partes del método, ya que el primer término (término de la izquierda) será quien represente de forma matemática nuestras condiciones de contorno de Neumann. Por otro lado el término de la derecha será quien tras resolver dicha integral nos otorgue la expresión final para nuestra matriz de rigidez (**K**), por ello nos enfocaremos en este último, en cual sacaremos la matriz X de la integral ya que a pesar de desconocer su contenido, sabemos que son puras constantes y no variables que dependen de medidas espaciales.

- Integral a resolver para obtener la matriz de rigidez:

$$\int_V^{\cdot} \triangledown \boldsymbol{N^T}\eta^2\,\epsilon^2 \triangledown \boldsymbol{N}\ dV$$

Antes de empezar a integrar hay que asegurarse que toda la expresión se trabaja bajo las mismas variables espaciales. Y aquí observamos que las matrices de funciones de forma contienen expresiones en función de $\epsilon, \eta \wedge \phi$ además de que tenemos $\eta^2\epsilon^2$como producto dentro del argumento de la integral.
Sin embargo, el diferencial de la integral es un diferencial de volumen donde este está en función de $x, y \wedge z$. Igualmente el operador Nabla contiene derivadas en función de estas últimas.

$$\triangledown \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi & \epsilon & \eta & \phi \end{bmatrix}$$

Por ello, lo más recomendable será transformar las derivadas espaciales del operador Nabla de cada gradiente de la expresión y el diferencial a un diferencial con coordenadas espaciales en función de ϵ, $\eta \wedge \phi$ haciendo uso del Jacobiano inverso ($\mathbf{J}^{-1}$).

- Cambiando los diferenciales del gradiente de **N**

$$\bigtriangledown \boldsymbol{N} = \boldsymbol{J^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\epsilon-\eta-\phi & \epsilon & \eta & \phi \end{bmatrix}$$

- Resolviendo derivadas parciales

$$\bigtriangledown \boldsymbol{N} = \boldsymbol{J^{-1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \epsilon}(1-\epsilon-\eta-\phi) & \frac{\partial}{\partial \epsilon}(\epsilon) & \frac{\partial}{\partial \epsilon}(\eta) & \frac{\partial}{\partial \epsilon}(\phi) \\ \frac{\partial}{\partial \eta}(1-\epsilon-\eta-\phi) & \frac{\partial}{\partial \eta}(\epsilon) & \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta) & \frac{\partial}{\partial \eta}(\phi) \\ \frac{\partial}{\partial \phi}(1-\epsilon-\eta-\phi) & \frac{\partial}{\partial \phi}(\epsilon) & \frac{\partial}{\partial \phi}(\eta) & \frac{\partial}{\partial \phi}(\phi) \end{bmatrix}$$

$$\bigtriangledown \boldsymbol{N} = \boldsymbol{J^{-1}} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Renombrando expresión utilizando la Matriz A y la Matriz B

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{J^{-1}} = \frac{1}{J}\boldsymbol{A} \qquad \bigtriangledown \boldsymbol{N} = \frac{1}{J}\boldsymbol{AB}$$

- Por propiedades de matrices podemos obtener directamente el resultado para el caso del gradiente de la transpuesta de la matriz de funciones de forma

$$\bigtriangledown \boldsymbol{N^T} = (\frac{1}{J}\boldsymbol{AB})^T = \frac{1}{J}\boldsymbol{B^T A^T}$$

Por tanto, ahora ya tenemos todo el argumento de la integral expresable en términos de ϵ, $\eta \wedge \phi$, así que rearmando la integral se tendría:

$$= \int_V^{\cdot} \bigtriangledown \boldsymbol{N^T} \eta^2 \epsilon^2 \bigtriangledown \boldsymbol{N} \; dV$$

$$= \int_V^{\cdot} \frac{1}{J}\boldsymbol{B^T A^T} \eta^2 \epsilon^2 \frac{1}{J}\boldsymbol{AB} \, dV$$

$$= \frac{1}{J * J}\boldsymbol{B^T A^T AB} \int_V^{\cdot} \eta^2 \epsilon^2 \, dV$$

Así que procedemos a cambiar el diferencial, definir los límites según el elemento isoparametrizado y finalmente a realizar nuestra última integral.

$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2\,\epsilon^2\,dxdydz$$

$$= J \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2\,\epsilon^2\,d\epsilon d\eta d\phi$$

- Para $\eta^2\epsilon^2$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \int_0^{1-\eta-\phi} \eta^2\epsilon^2 d\epsilon d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\left(\eta^2\frac{\epsilon^3}{3}\right)\Big|_0^{1-\eta-\phi}\right) d\eta d\phi$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-\phi} \left(\eta^2\frac{(1-\eta-\phi)^3}{3}\right) d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \int_0^{1-\phi} \eta^2(-\eta^3-\phi^3+3\eta^2-3\eta^2\phi-3\eta+6\eta\phi+3\phi^2-3\phi-3\eta\phi^2+1)d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \int_0^{1-\phi} (-\eta^5-\eta^2\phi^3+3\eta^4-3\eta^4\phi-3\eta^3+6\eta^3\phi+3\eta^2\phi^2-3\eta^2\phi-3\eta^3\phi^2+\eta^2)d\eta d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \left(\frac{\eta^3}{3}-\frac{\eta^6}{6}-\frac{3\eta^4}{4}+\frac{3\eta^5}{5}-\frac{\phi^3\eta^3}{3}+\phi^2\eta^3-\frac{3\phi^2\eta^4}{4}-\phi\eta^3-\frac{3\phi\eta^5}{5}+\frac{3\phi\eta^4}{2}\right)\Big|_0^{1-\phi} d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \left(\frac{(1-\phi)^3}{3}-\frac{(1-\phi)^6}{6}-\frac{3(1-\phi)^4}{4}+\frac{3(1-\phi)^5}{5}-\frac{\phi^3(1-\phi)^3}{3}+\phi^2(1-\phi)^3-\frac{3\phi^2(1-\phi)^4}{4}-\phi(1-\phi)^3-\frac{3\phi(1-\phi)^5}{5}+\frac{3\phi(1-\phi)^4}{2}\right)d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \left(\phi^2(-\phi+1)^3-\phi(-\phi+1)^3+\frac{-\phi^3(-\phi+1)^3+(-\phi+1)^3}{3}+\frac{-3\phi^2(-\phi+1)^4-3(-\phi+1)^4}{4}+\frac{-3\phi(-\phi+1)^5+3(-\phi+1)^5}{5}+\frac{3\phi(-\phi+1)^4}{2}-\frac{(-\phi+1)^6}{6}\right)d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \left(\phi^2(-\phi+1)^3-\phi(-\phi+1)^3+\frac{\phi^6-3\phi^5+3\phi^4-2\phi^3+3\phi^2-3\phi+1}{3}+\frac{-3\phi^6+12\phi^5-21\phi^4+24\phi^3-21\phi^2+12\phi-3}{4}+\frac{-3\phi(-\phi+1)^5+3(-\phi+1)^5}{5}+\frac{3\phi(-\phi+1)^4}{2}-\frac{(-\phi+1)^6}{6}\right)d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \left(\phi^2(-\phi+1)^3-\phi(-\phi+1)^3+\frac{\phi^6-3\phi^5+3\phi^4-2\phi^3+3\phi^2-3\phi+1}{3}+\frac{-3\phi^6+12\phi^5-21\phi^4+24\phi^3-21\phi^2+12\phi-3}{4}+\frac{3\phi^6-18\phi^5+45\phi^4-60\phi^3+45\phi^2-18\phi+3}{5}+\frac{3\phi(-\phi+1)^4}{2}-\frac{(-\phi+1)^6}{6}\right)d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\int_0^1 \frac{\phi^6-6\phi^5+15\phi^4-20\phi^3+15\phi^2-6\phi+1}{60}d\phi$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{60}\cdot\int_0^1 (\phi^6-6\phi^5+15\phi^4-20\phi^3+15\phi^2-6\phi+1)d\phi$$
$$= \frac{1}{180}\cdot[\phi^6-6\phi^5+15\phi^4-20\phi^3+15\phi^2-6\phi+1]\Big|_0^1$$
$$= \frac{1}{180}\cdot\frac{1}{7}$$
$$= \frac{1}{1260}$$

Armando Matriz de Rigidez "K"

Ya teniendo todos los elementos solucionados para la integral, podemos escribir la expresión final para calcular la matriz de rigidez (**K**). Dicha matriz será igual a:

$$= \frac{1}{1260 * J} B^T A^T A B$$

Armando SEL que describe al modelo

SEL que se utilizará para describir el modelo (primeramente de manera local y luego global realizando el paso de de Ensamblaje).

- SEL representado con variables matriciales:

$$KX = b$$

- SEL utilizando las igualdades para las matrices **K** y **b**

$$\left[\frac{1}{1260 * J} B^T A^T A B\right] X = J \begin{bmatrix} \frac{1}{252} \\ \frac{1}{252} \\ \frac{11}{840} \\ \frac{1}{252} \end{bmatrix}$$

Historia para el fenómeno

Hace 34,527 años en Las Vegas, la ciudad del dinero y las bien vestidas, nos encontrábamos disfrutando de la emoción y el brillo de los casinos. En una noche particularmente afortunada, nuestro grupo de amigos decidió probar suerte en una mesa de apuestas de Pokémon.

Fue entonces cuando nuestros ojos se posaron en un Porygon. Su majestuosidad y versatilidad genética nos cautivó de inmediato, y se nos ocurrió desafiar al dueño del Porygon en una apuesta que consistía en ver quién comía más dumplings, y si ganábamos, obtendríamos al Porygon como recompensa.

Aunque éramos jugadores experimentados enfrentar al guerrero dragón no sería tarea fácil. Nos preparamos meticulosamente, estudiando sus movimientos y debilidades, buscando cualquier ventaja posible. Durante días, nos sumergimos en estrategias, tácticas y duras sesiones de entrenamiento fortaleciendo nuestro equipo para poder hacerle frente a la máquina devoradora de dumplings.

Finalmente, llegó el momento. El casino vibraba con la emoción del desafío mientras nos enfrentamos al Guerrero Dragón. Contratando a un Mandalorian conseguimos el chile picante picoso jalapeño de la galaxia muy muy lejana. El guerrero dragón no pudo contener su estómago y se retiró de la competencia antes de tiempo. El público estallaba en aplausos, presenciando una batalla épica.

Nuestro dinero rindió frutos, y la victoria se hizo nuestra. El dueño del Porygon, sorprendido y admirado por nuestra habilidad para comer, cumplió su palabra y nos entregó al Porygon. Pero nuestro viaje apenas comenzaba. Decidimos llevar al Porygon a la ciudad de Gotham City, porque tenían una empresa conocida por su avanzada tecnología y experimentos genéticos.

Aquí, junto a un grupo de científicos especializados, nos embarcamos en un proyecto único: alterar genéticamente al Porygon para que pudiera aprender un movimiento inusual, la patada ígnea.

Las semanas pasaron mientras los científicos trabajaban arduamente, aplicando su conocimiento y técnicas en el Porygon. De alguna manera encontraron una ecuación que describe a la perfección el ataque patada ígnea, dicha ecuación fue la siguiente: $-\eta^2\nabla\cdot(\epsilon\nabla X)=\eta^3+\eta^2$, donde cada variable es un atributo de pelea del Porygon.

Los experimentos genéticos dieron sus frutos, y finalmente, el Porygon pudo aprender la patada ígnea, un movimiento que antes le resultaba imposible. Con una sonrisa de satisfacción en nuestros rostros, utilizamos al Porygon en su nueva forma mejorada para lograr nuestros cometidos y traer de vuelta a la unión soviética.

Nuestra historia de triunfo en Las Vegas y la transformación del Porygon en un Pokémon modificado genéticamente con la patada ígnea se convirtió en una leyenda en el mundo. Ahora tenemos una estatua en el centro de lo que era Estados Unidos y Canadá, conocido mejor ahora como “Langui”, el país donde no existe la existencia.

Fin.