Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carloszarzar_@hotmail.com

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carloszarzar_@hotmail.com

Apresenta: Modelos Hierárquicos

- Ilustração dos modelos Hierárquicos;
- Conceito e definição;
- Modelos Hierárquicos Bayesianos.

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

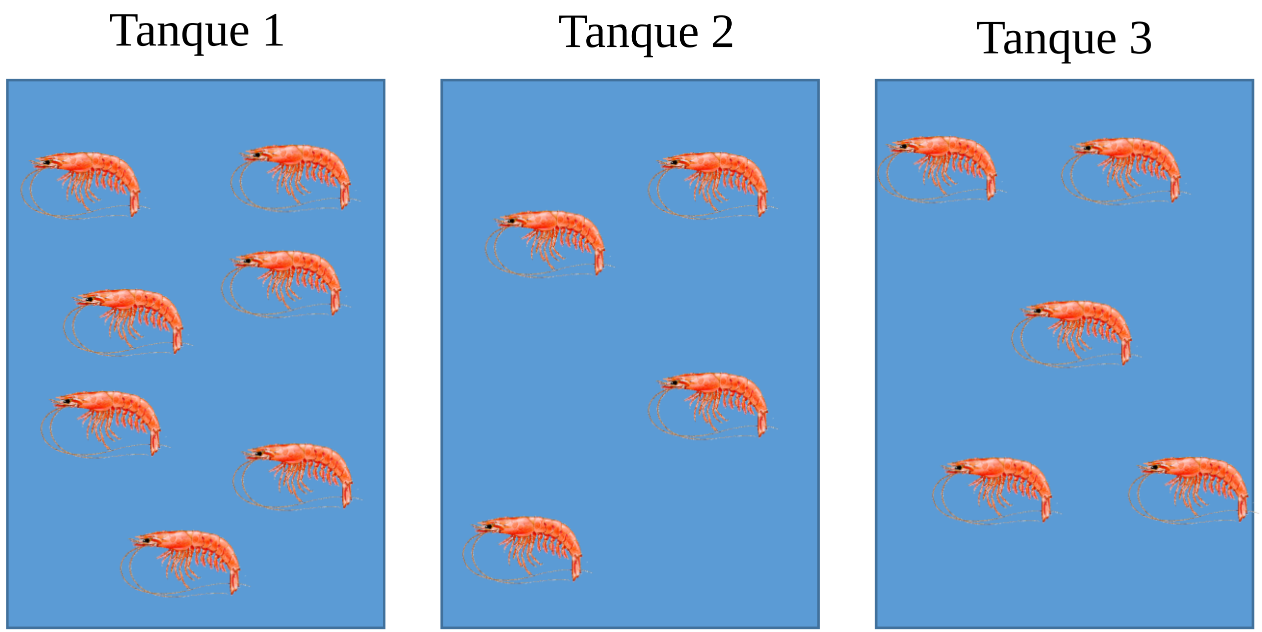
carloszarzar_@hotmail.com

Apresenta: Modelos Hierárquicos

- Ilustração dos modelos Hierárquicos;
- Conceito e definição;
- Modelos Hierárquicos Bayesianos.

Atenção:
Pausa para reflexão

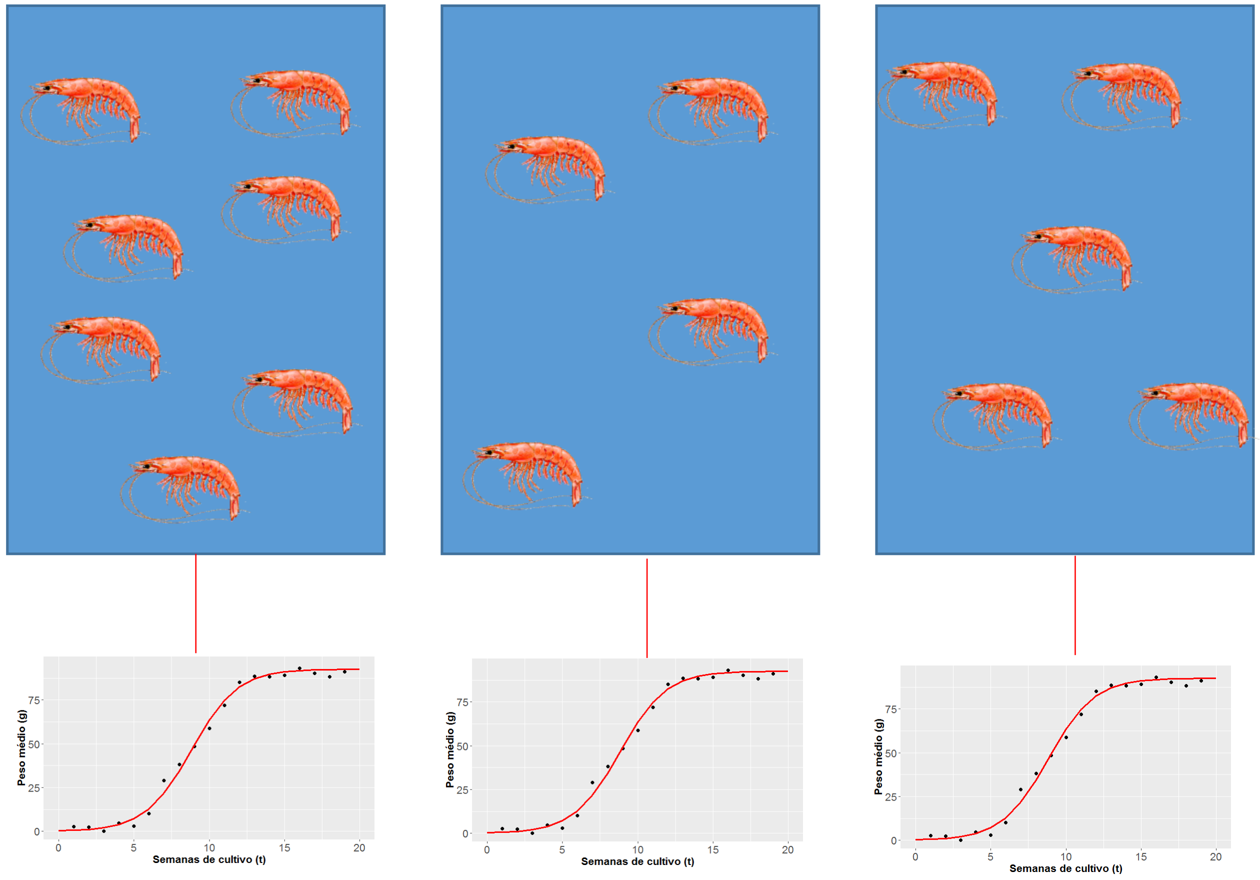
- Modelo Hierárquica



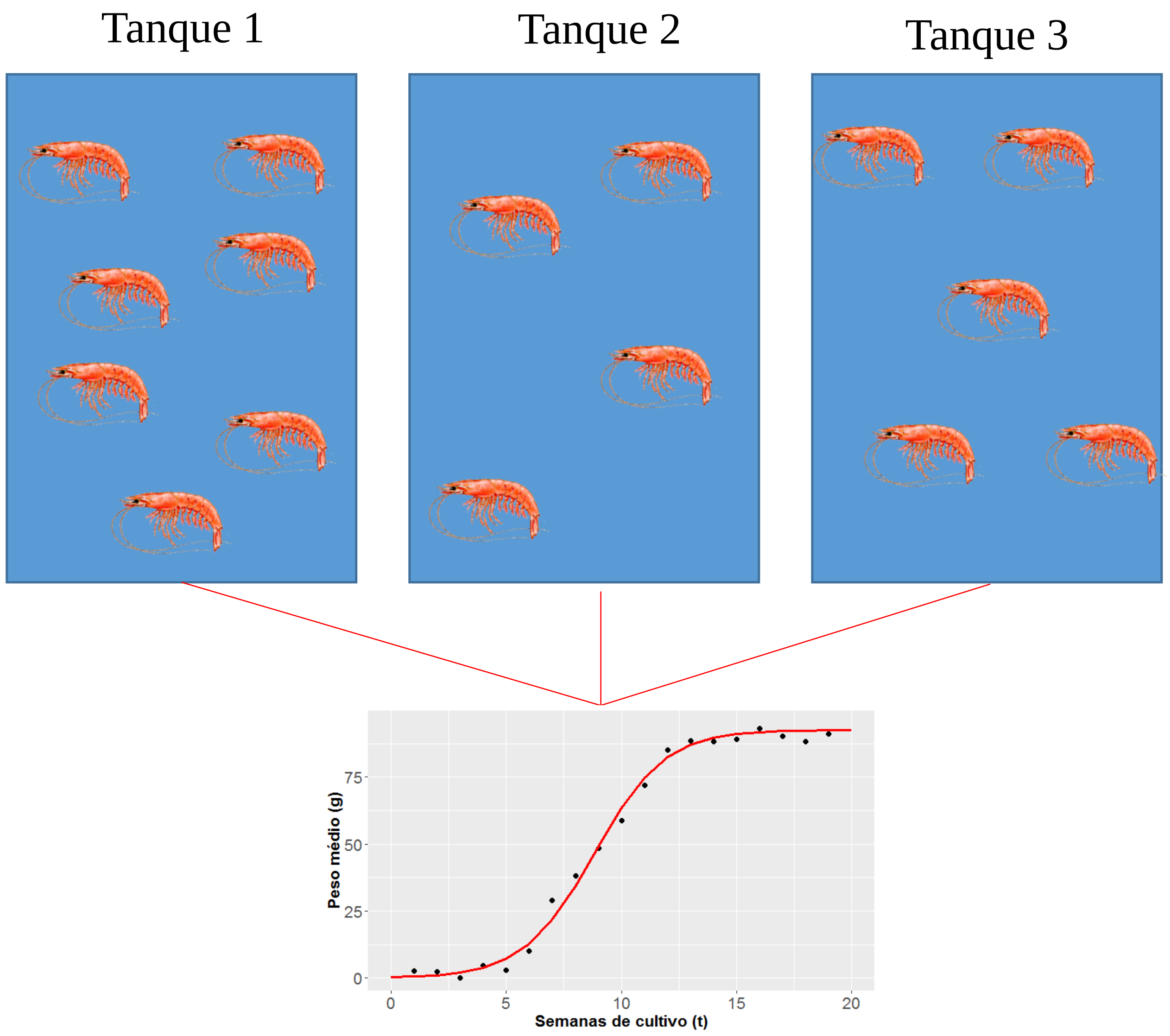
carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

Tanque 1 Tanque 2 Tanque 3



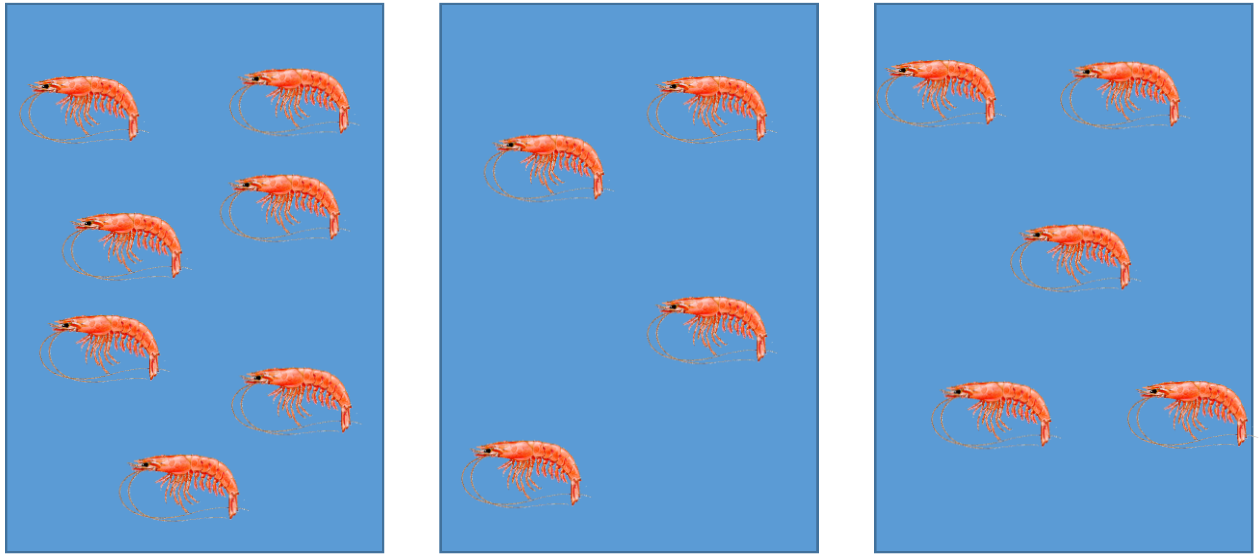
- Modelo Hierárquica



carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

Tanque 1 | Tanque 2 | Tanque 3



Tanque 1	Tanque 2	Tanque 3
<u>Ano:</u>	<u>Ano:</u>	<u>Ano:</u>
Ciclo 1	Ciclo 1	Ciclo 1
Ciclo 2	Ciclo 2	Ciclo 2
Ciclo 3	Ciclo 3	Ciclo 3

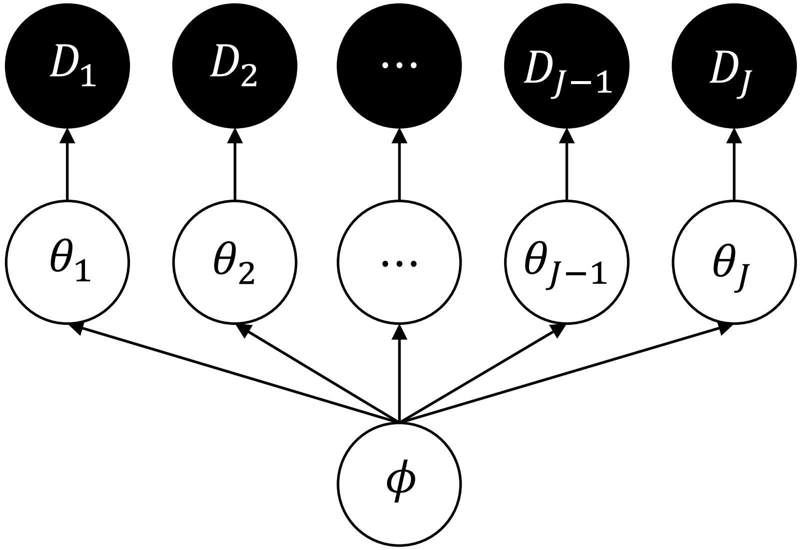
 carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{ para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{ para todo } j = 1, \ldots, J$$



carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

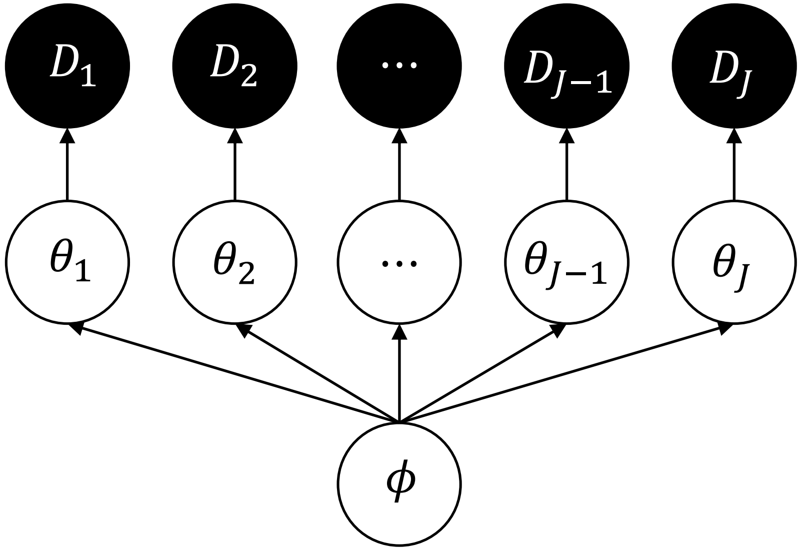
J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$Y_{11}, \ldots, Y_{n_1 1}, \ldots, Y_{1J}, \ldots, Y_{n_J J} \perp\!\!\!\perp \mid \theta$$

$$\theta_1, \ldots, \theta_J \perp\!\!\!\perp \mid \phi,$$



- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \dots, n_J$ observações

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim \boxed{p(y_{ij} \mid \theta_j)} \text{ para todo } i = 1, \dots, n_j$$

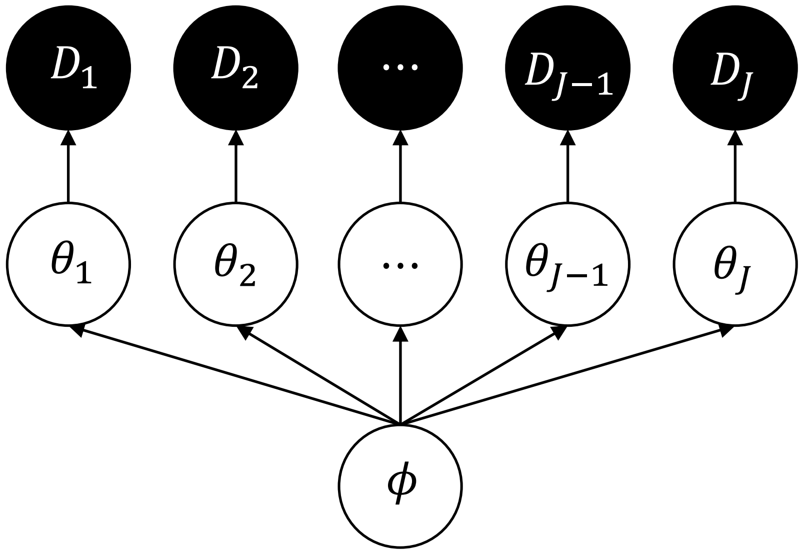
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim \boxed{p(\theta_j \mid \phi)} \text{ para todo } j = 1, \dots, J$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$Y_{11}, \dots, Y_{n_1 1}, \dots, Y_{1J}, \dots, Y_{n_J J} \perp\!\!\!\perp \mid \theta$$

$$\theta_1, \dots, \theta_J \perp\!\!\!\perp \mid \phi,$$



carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

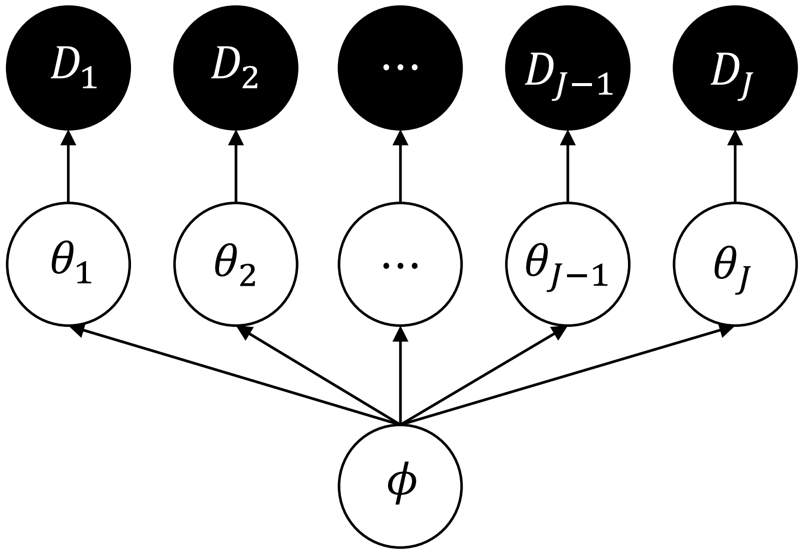
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$



- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \dots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

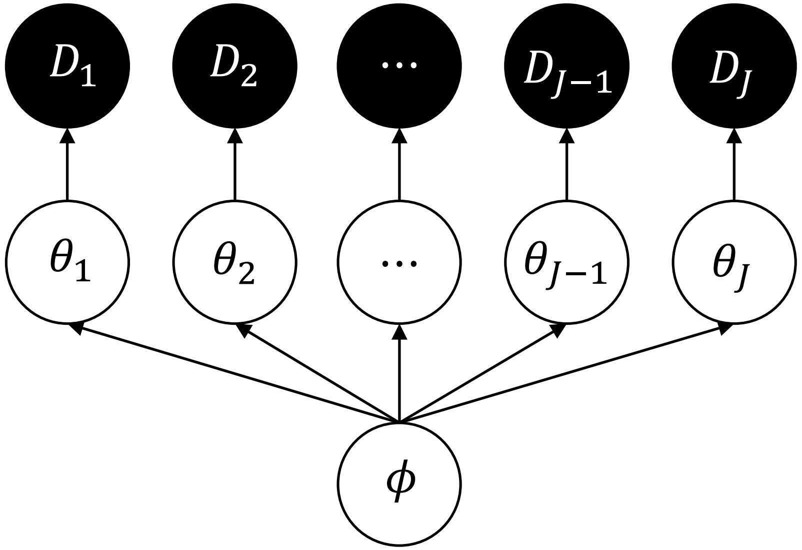
$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \dots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \dots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

1. Fixa-los a alguns valores constantes;



- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

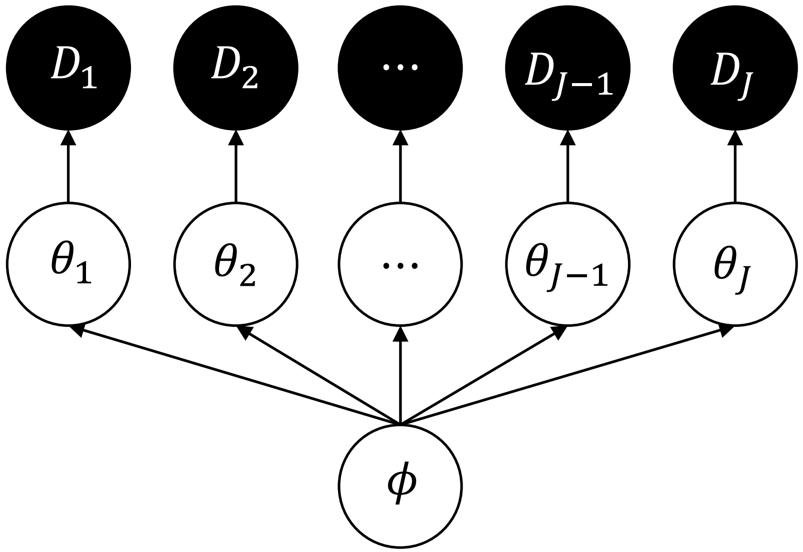
$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{ para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{ para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

1. Fixa-los a alguns valores constantes;
2. Usar estimativas pontuais estimadas a partir dos dados;



- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

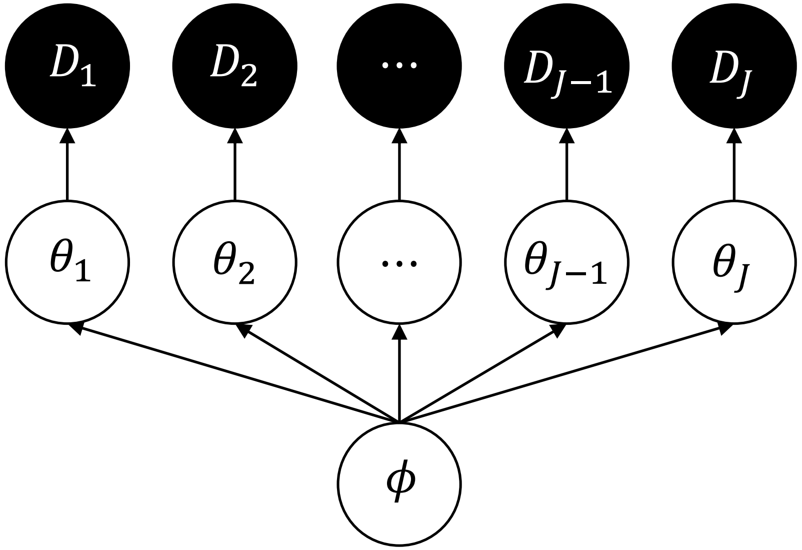
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$



1. Fixa-los a alguns valores constantes;
2. Usar estimativas pontuais estimadas a partir dos dados;
3. Definir uma distribuição de probabilidade sobre eles.

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

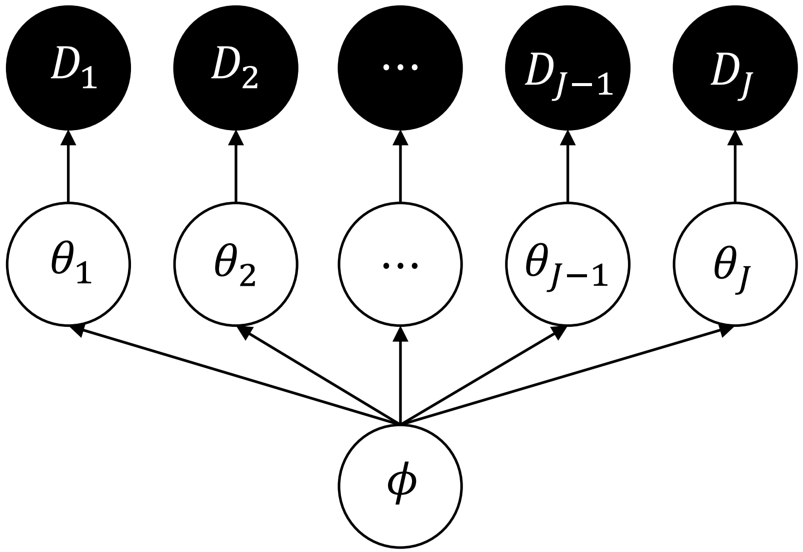
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$



1. Fixa-los a alguns valores constantes;
2. Usar estimativas pontuais estimadas a partir dos dados;
3. Definir uma distribuição de probabilidade sobre eles.

Modelo Hierárquico totalmente Bayesiano

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

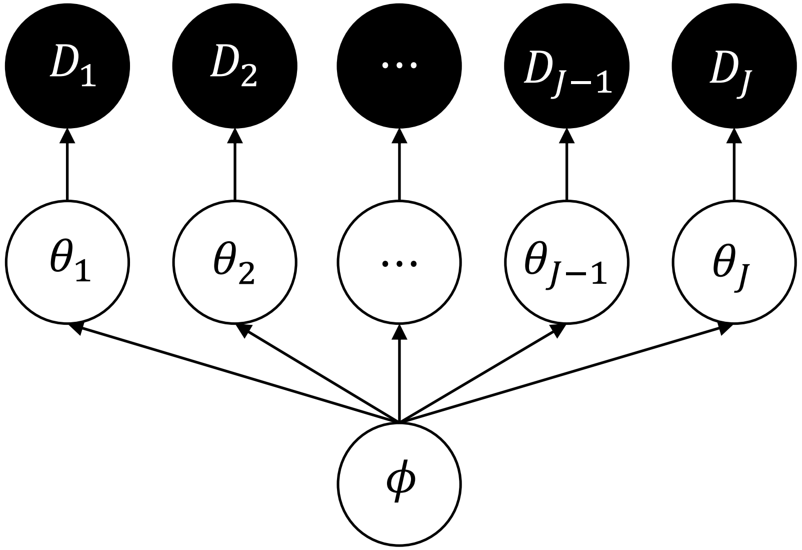
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$



Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\boxed{\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta}$$

 carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

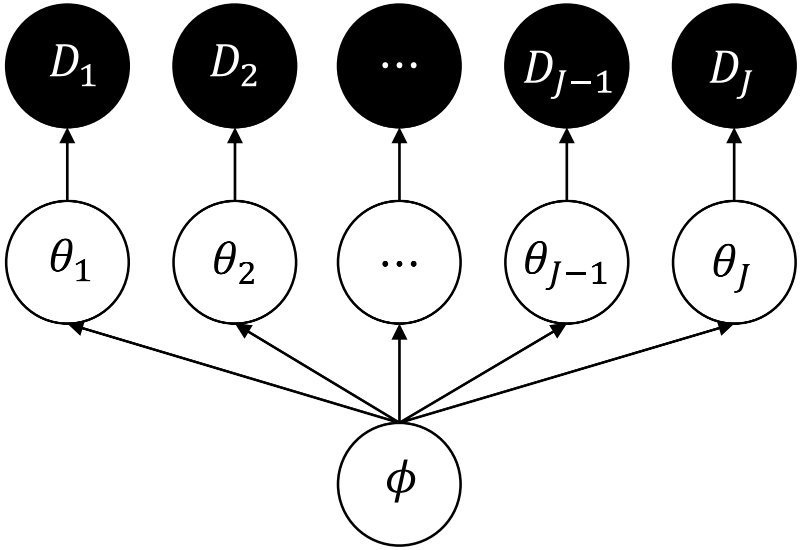
$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$



Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow \boxed{p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),}$$

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi)\ p(\boldsymbol{\theta}, \phi)$$

Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),$$

carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

$\mathbf{J}$ grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \text{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \text{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

Distribuição condicional

Verossimilhança

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto \boxed{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi)}\ p(\boldsymbol{\theta}, \phi)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto \underline{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}\ p(\boldsymbol{\theta}|\phi)\ p(\phi)$$

Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow \underline{p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),}$$

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \text{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \text{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

Distribuição conjunta

A priori

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi) \boxed{p(\boldsymbol{\theta}, \phi)}$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \underline{p(\boldsymbol{\theta}|\phi)\ p(\phi)}$$

Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),$$

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi)\ p(\boldsymbol{\theta}, \phi)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto \underline{p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}\ \underline{p(\boldsymbol{\theta}|\phi)}\ p(\phi)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\phi) \prod_{j=1}^{J} \underline{p(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\theta}_j)\ p(\boldsymbol{\theta}_j|\phi)}.$$

carloszarzar_@hotmail.com

- Modelo Hierárquica

J grupos diferentes e $n_1, \ldots, n_J$ observações

$$p(\mathbf{y}_j \mid \theta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} p(y_{ij} \mid \theta_j).$$

$$Y_{ij} \mid \theta_j \sim p(y_{ij} \mid \theta_j) \textbf{para todo } i = 1, \ldots, n_j$$

$$p(\theta \mid \phi) = \prod_{j=1}^{J} p(\theta_j \mid \phi).$$

$$\theta_j \mid \phi \sim p(\theta_j \mid \phi) \textbf{para todo } j = 1, \ldots, J$$

$$\phi \sim p(\phi)$$

Dados dependem do hiperparâmetro apenas através dos parâmetros a nível do seu grupo.

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto \; p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi) \; p(\boldsymbol{\theta}, \phi)$$

$$\mathbf{Y} \perp\!\!\!\perp \phi \mid \theta \longrightarrow p(\mathbf{y} \mid \theta, \phi) = p(\mathbf{y} \mid \theta),$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \; p(\boldsymbol{\theta}|\phi) \; p(\phi)$$

$$\boxed{p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\phi) \prod_{j=1}^{J} p(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\theta}_j) \; p(\boldsymbol{\theta}_j|\phi).} \longrightarrow$$

A posteriori

Modelos Hierárquicos Bayesianos;

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \int p(\boldsymbol{\theta}, \phi|\mathbf{y})\ \mathrm{d}\phi = \int p(\boldsymbol{\theta}|\phi, \mathbf{y})\ p(\phi|\mathbf{y})\ \mathrm{d}\phi$$

Distribuição marginal
a posteriori dos $\boldsymbol{\theta}$
a nível de grupo

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto\ p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}, \phi)\ p(\boldsymbol{\theta}, \phi)$$

$$p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})\ p(\boldsymbol{\theta}|\phi)\ p(\phi)$$

$$\boxed{p(\boldsymbol{\theta}, \phi, |\mathbf{y}) \propto p(\phi) \prod_{j=1}^{J} p(\mathbf{y}_j|\boldsymbol{\theta}_j)\ p(\boldsymbol{\theta}_j|\phi).}$$

A posteriori
Modelos Hierárquicos Bayesianos;

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carloszarzar_@hotmail.com

Obrigado!
Bons estudos!

“Hierarquia, as vezes é necessário, entretanto nem sempre é preciso.”