

# Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

[carlos.zarzar@ufopa.edu.br](mailto:carlos.zarzar@ufopa.edu.br)

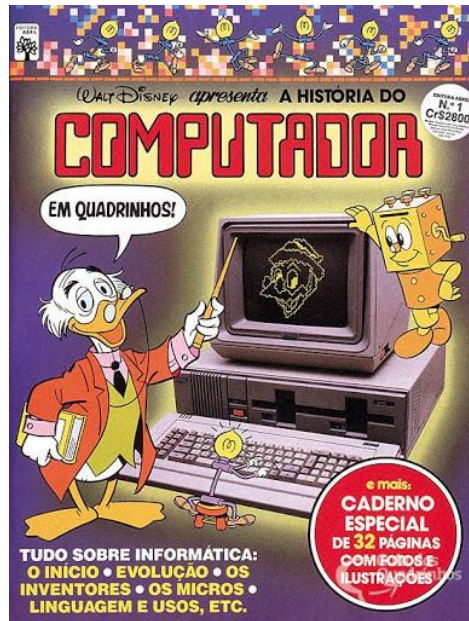
---

# Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carlos.zarzar@ufopa.edu.br

Apresenta: Métodos computacionais



- Método de Monte Carlo;
- Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov;
- Algoritmo de amostragem;
  - Gibbs;
  - Metropolis-Hasting;

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*



➤ Método a amostragem:

- Metropolis-Hasting;

➤ Resumo:

- É uma amostragem com etapas de **aceitação/rejeição** aplicada MC;

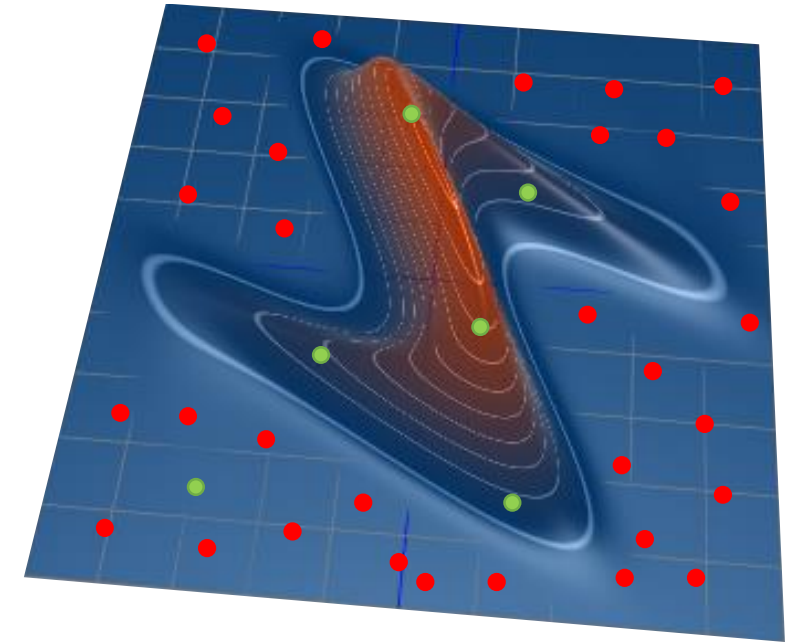
➤ Prós:

- Dentre a família do método MC, pode escolher a mais conveniente;
- Funciona para distribuições não normalizadas;
- Fácil implementar;
- Amostragem da *a posteriori* já é uma distribuição conjunta de todos os parâmetros;

➤ Contras:

- Amostras são correlacionadas;
- Lenta convergência.

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*



Taxa de aceitabilidade

$$T_{\bullet} = \frac{\text{green dots}}{\text{green dots} + \text{red dots}}$$

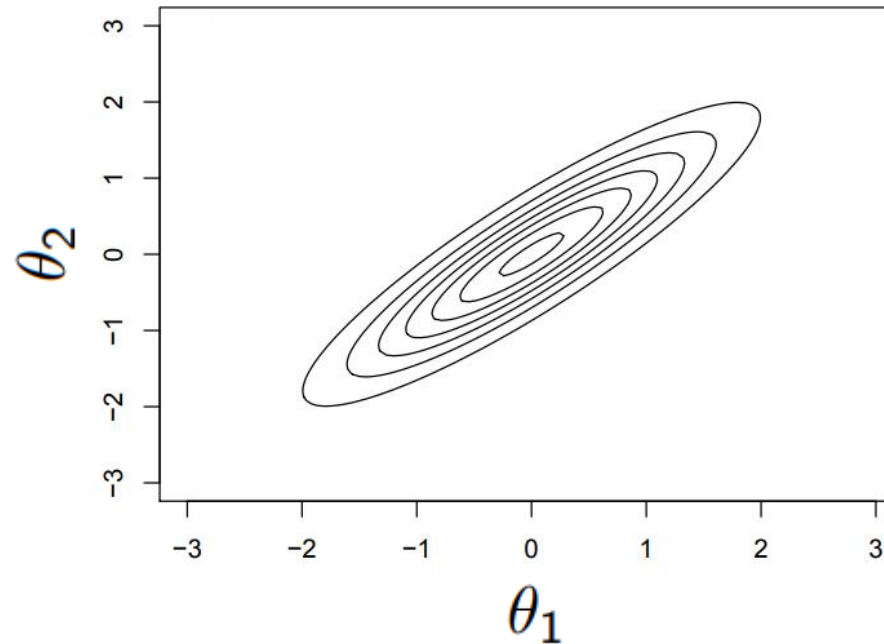
Taxa de rejeitabilidade

$$T_{\bullet} = \frac{\text{red dots}}{\text{green dots} + \text{red dots}}$$

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*



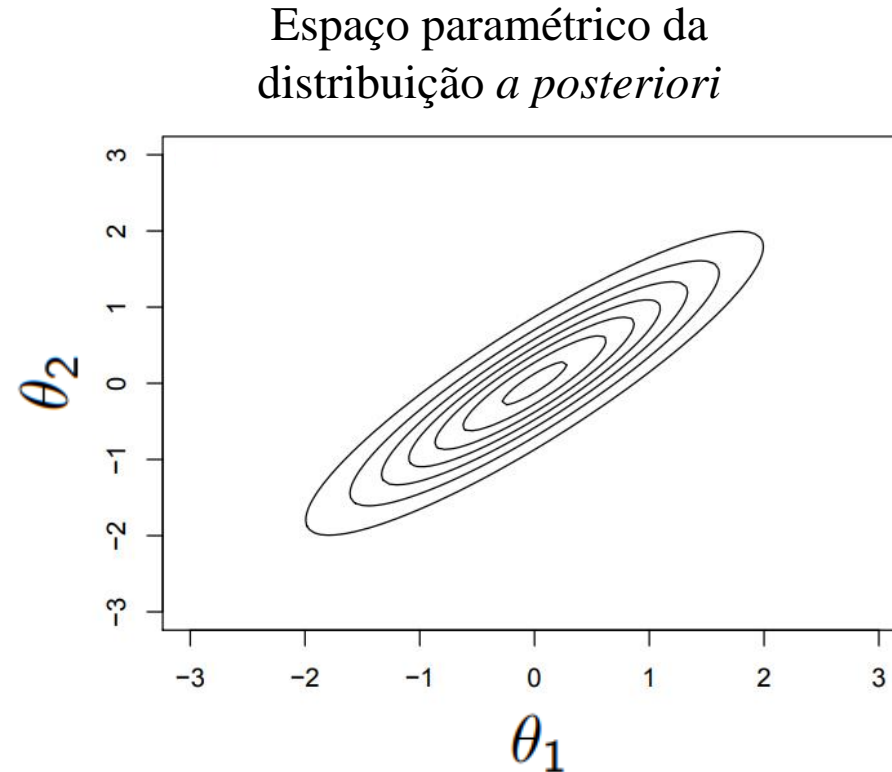
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $\left( \theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)} \right)$   $t - 1$  iteração (Iteração anterior)

II) Iteração:

$\theta_1^{(t)} \sim p \left( \theta_1 \mid \theta_2^{(t-1)}, y \right)$  Passo 1.

$\theta_2^{(t)} \sim p \left( \theta_2 \mid \theta_1^{(t)}, y \right)$  Passo 2.

$\left( \theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)} \right)$  Valores  $t$  iteração;

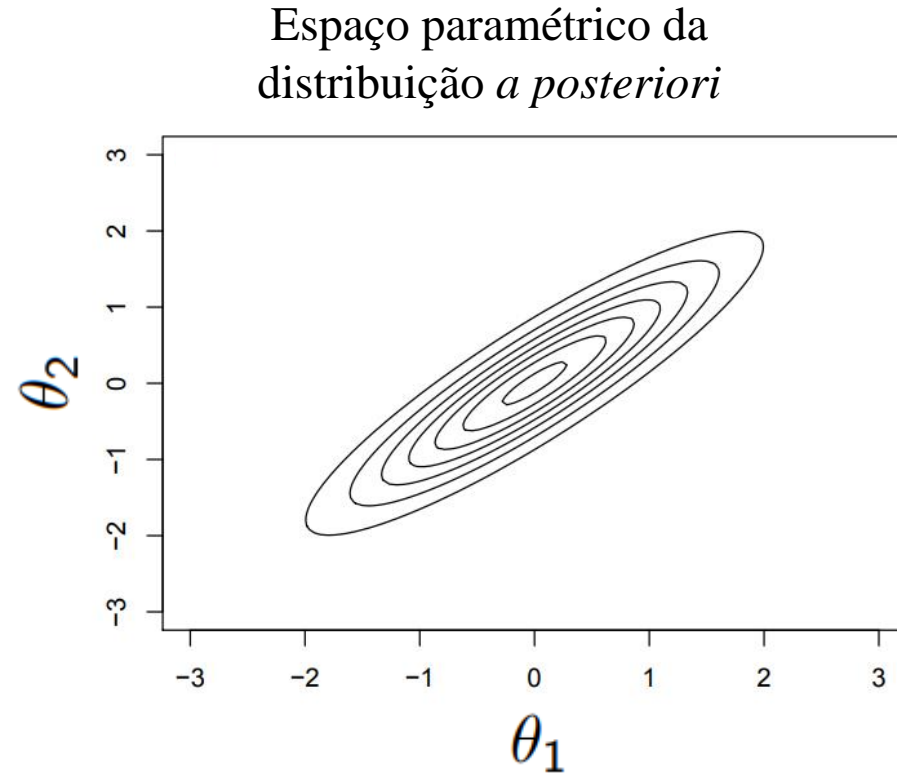
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$   $t - 1$  iteração  
(Iteração anterior)

II) Iteração:

⇒  $\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)})$  Valores  $t$  iteração;

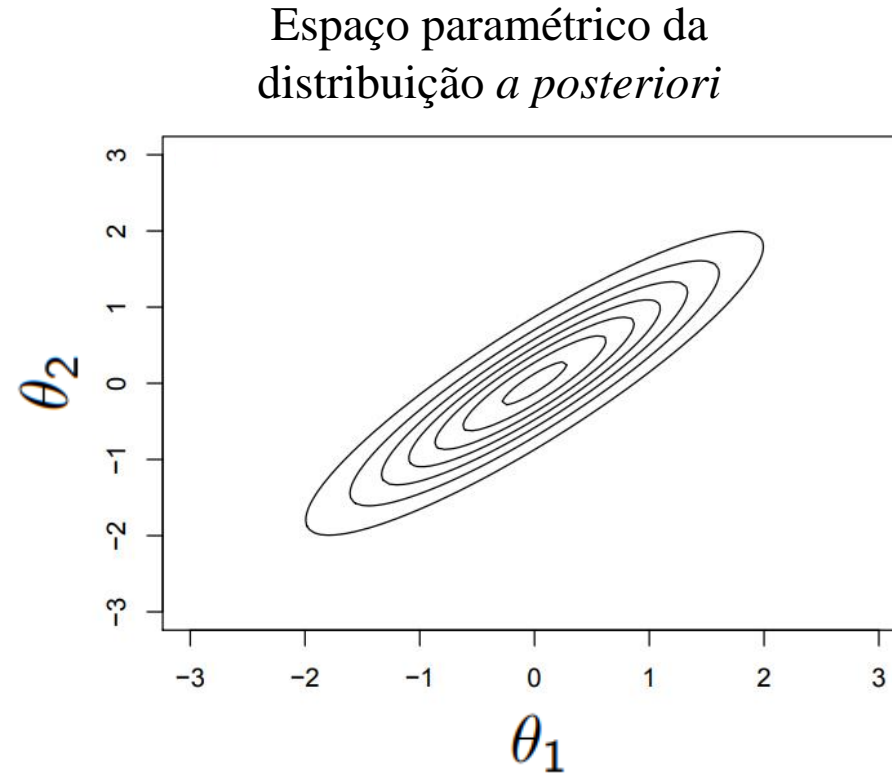
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$   $t - 1$  iteração  
(Iteração anterior)

II) Iteração:

$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$  Passo 1.

⇒  $\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)})$  Valores  $t$  iteração;

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

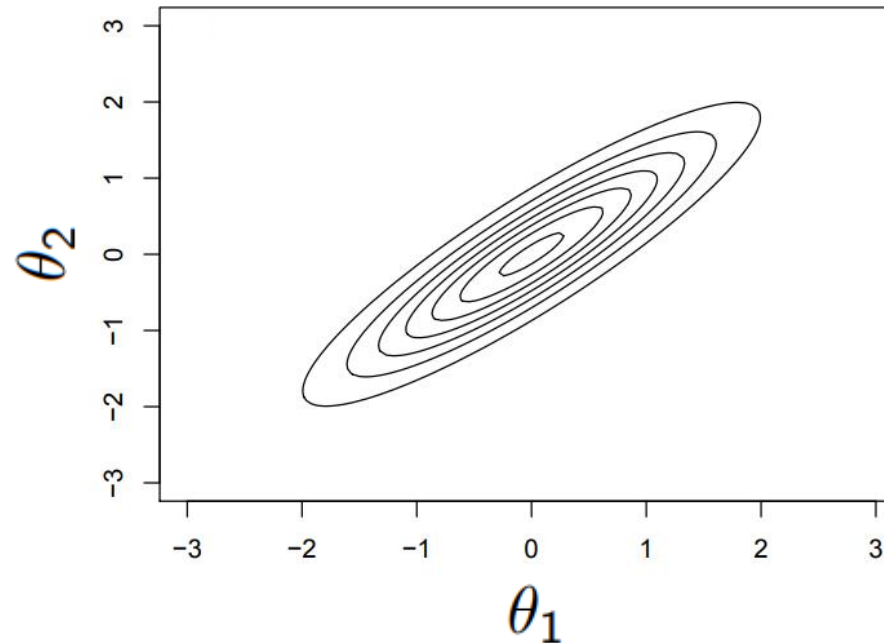
Distribuição Alvo



➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$   $t - 1$  iteração  
(Iteração anterior)

II) Iteração:

$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)})$  Valores  $t$  iteração;

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

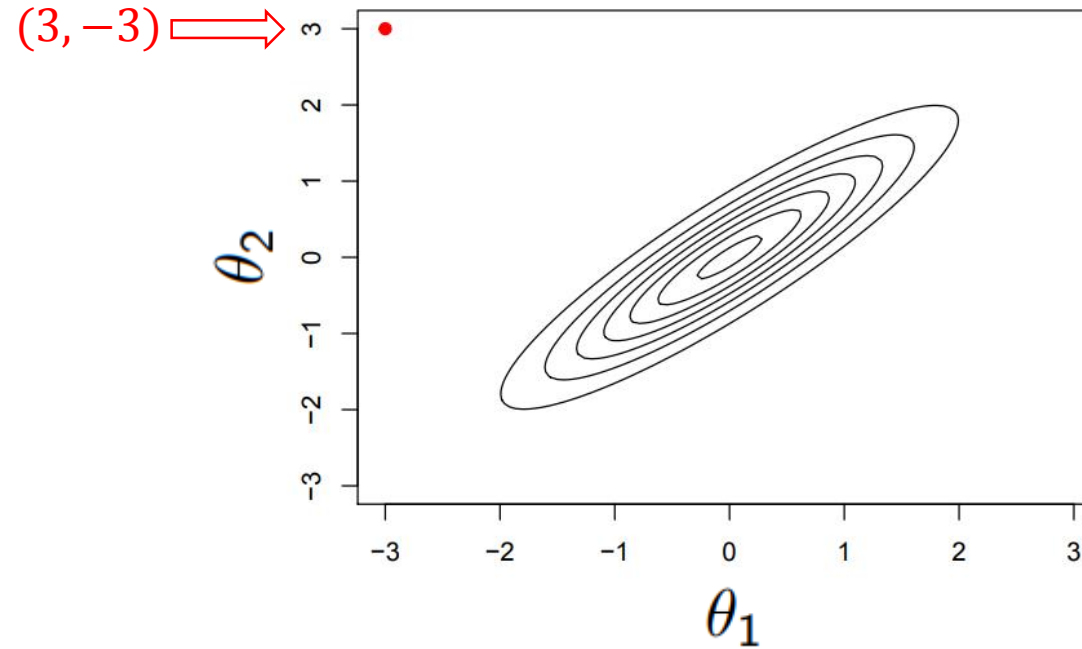
$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

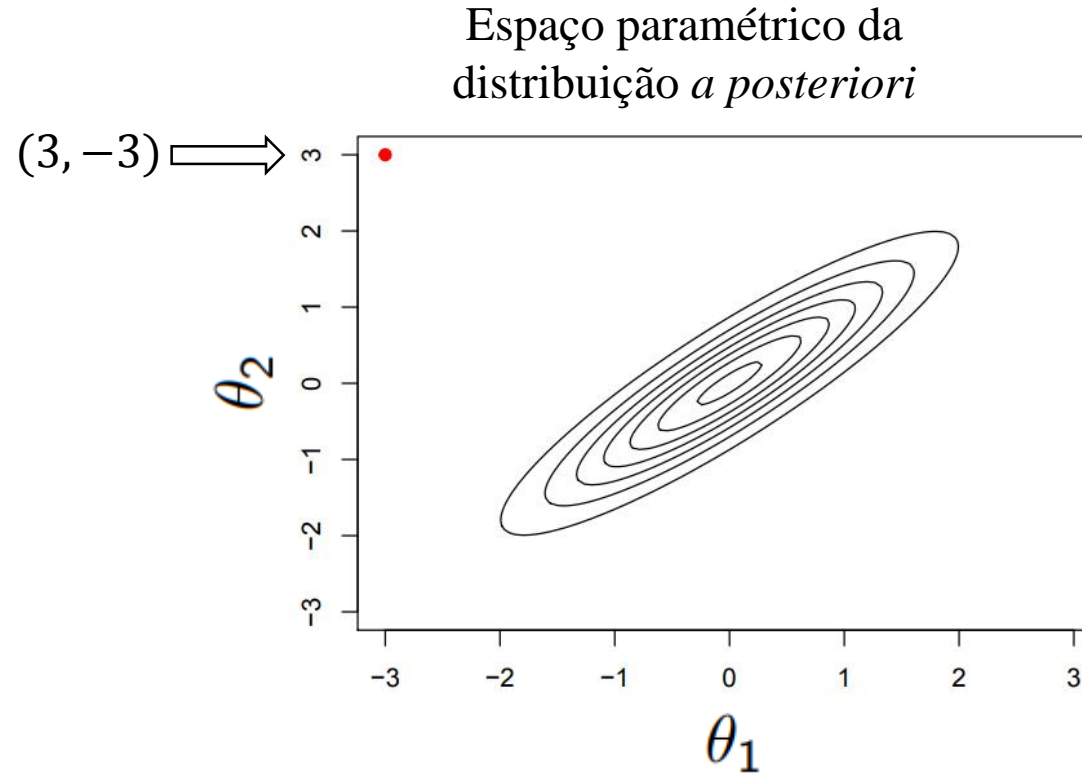
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

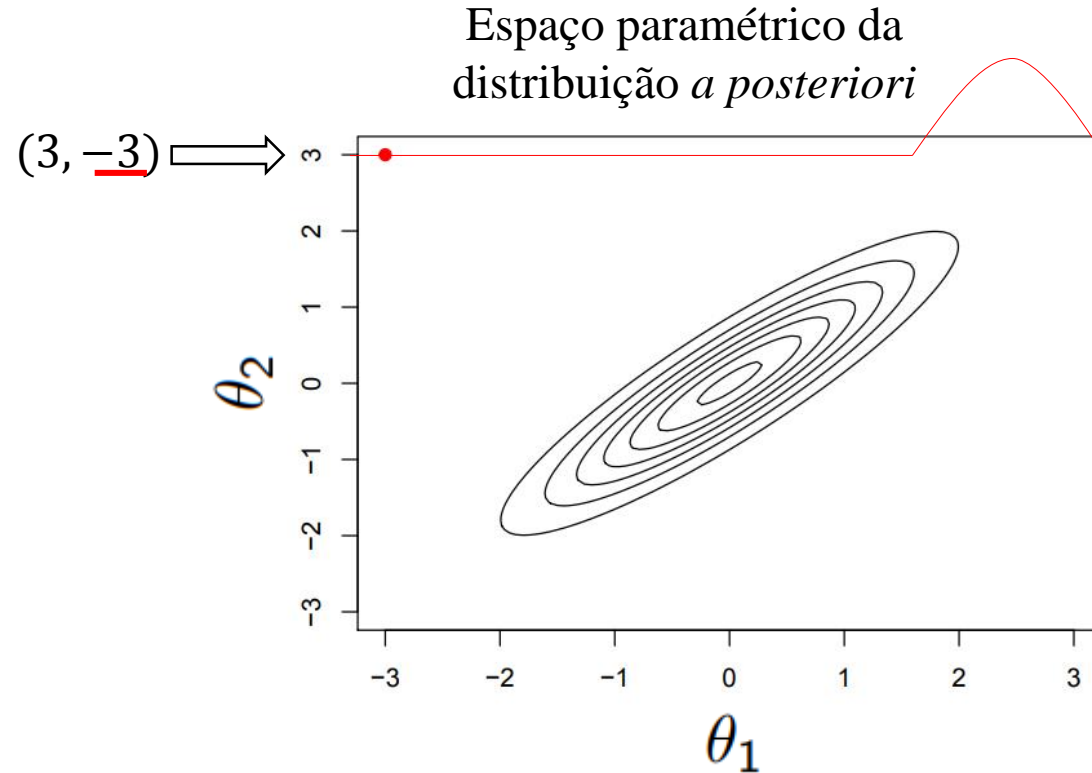
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração: **Fixar**  
 $\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \underline{\theta_2^{(0)}} , y)$  Passo 1.

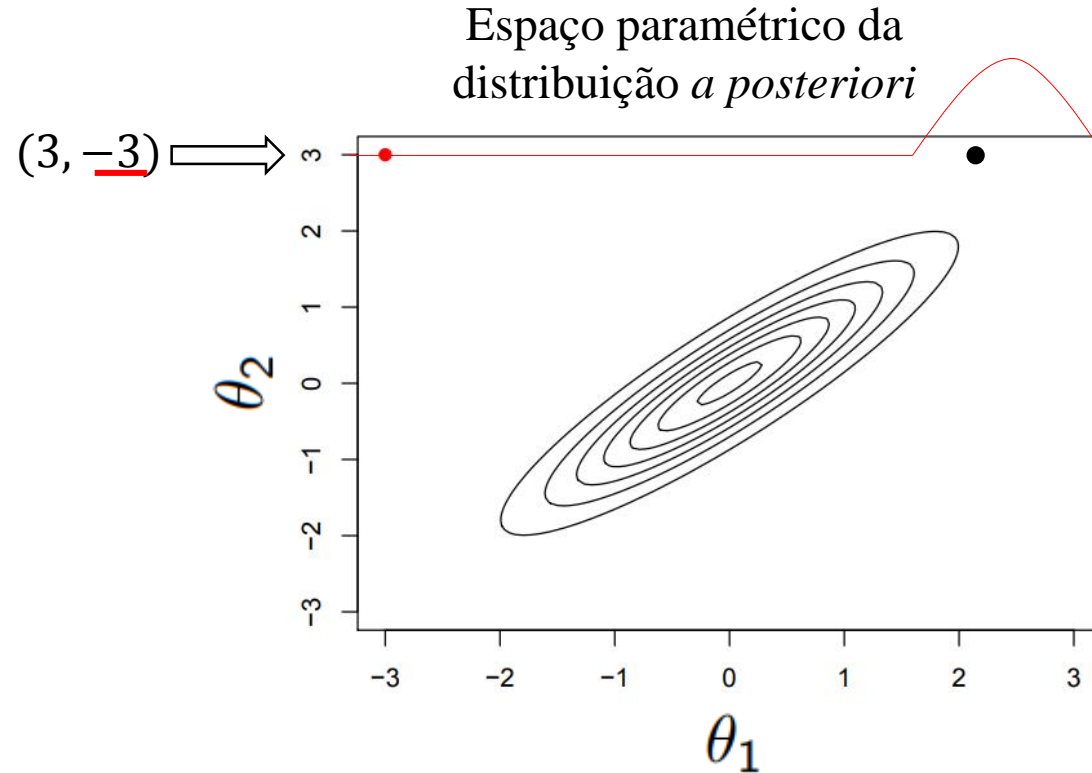
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração: **Fixar**  
 $\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \underline{\theta_2^{(0)}}, y)$  Passo 1.

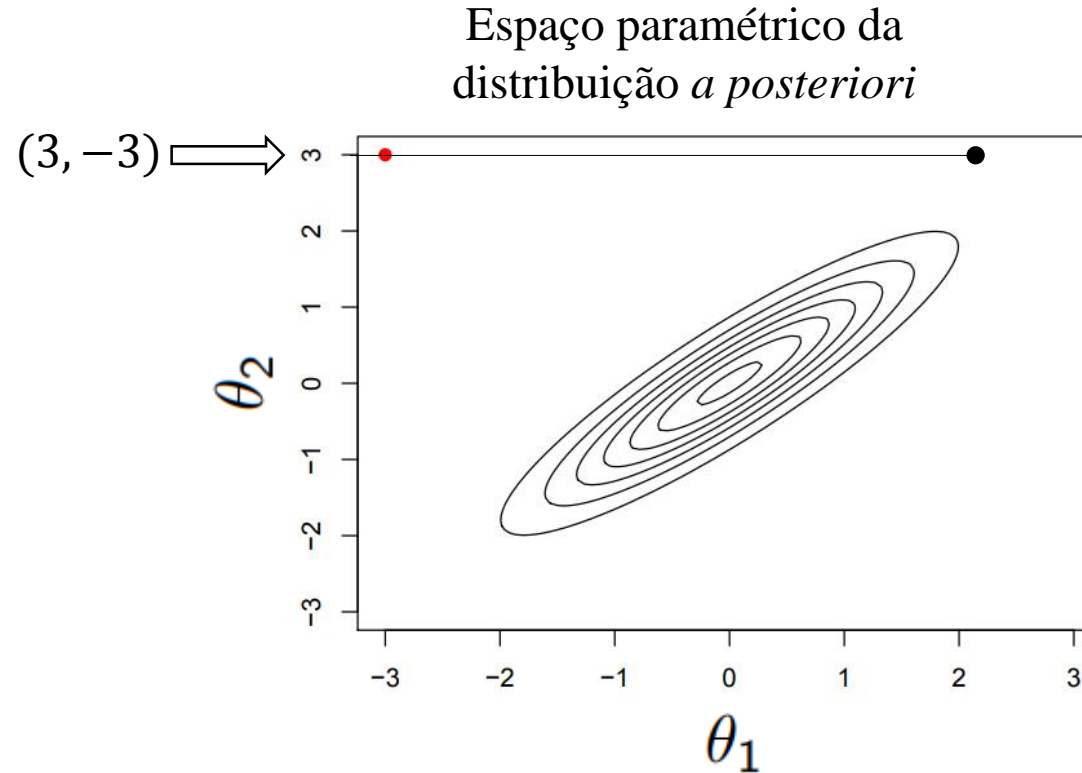
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

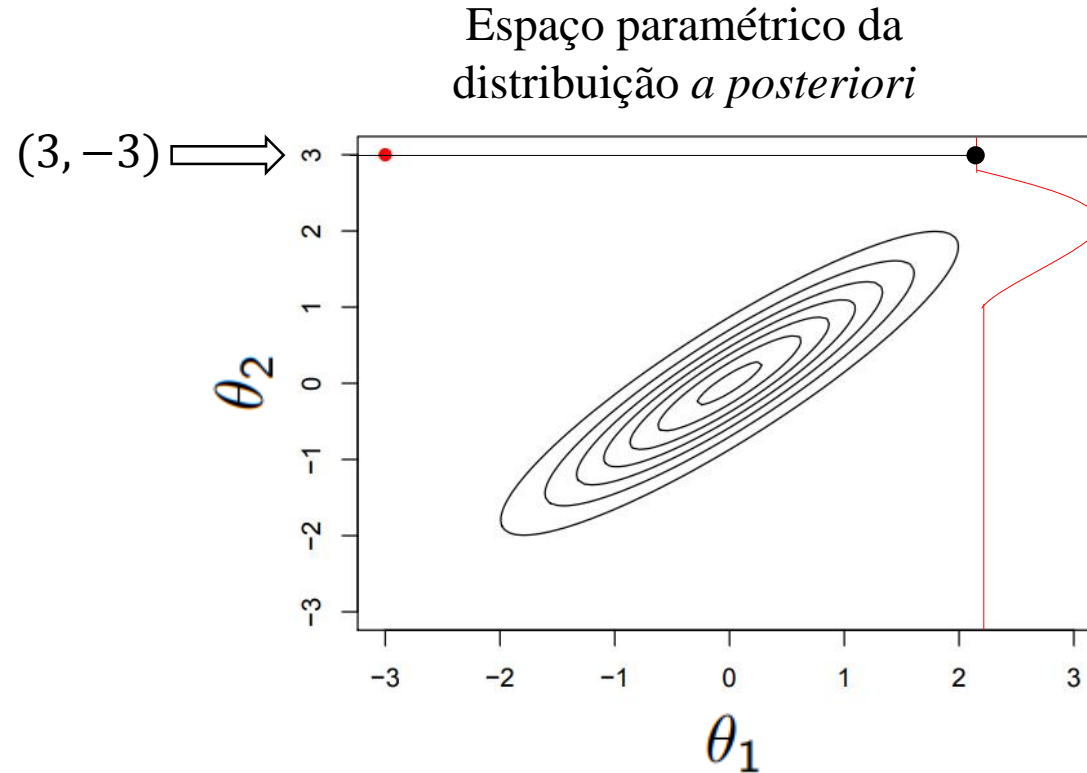
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(1)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, y)$  Passo 2.  
**Fixar**

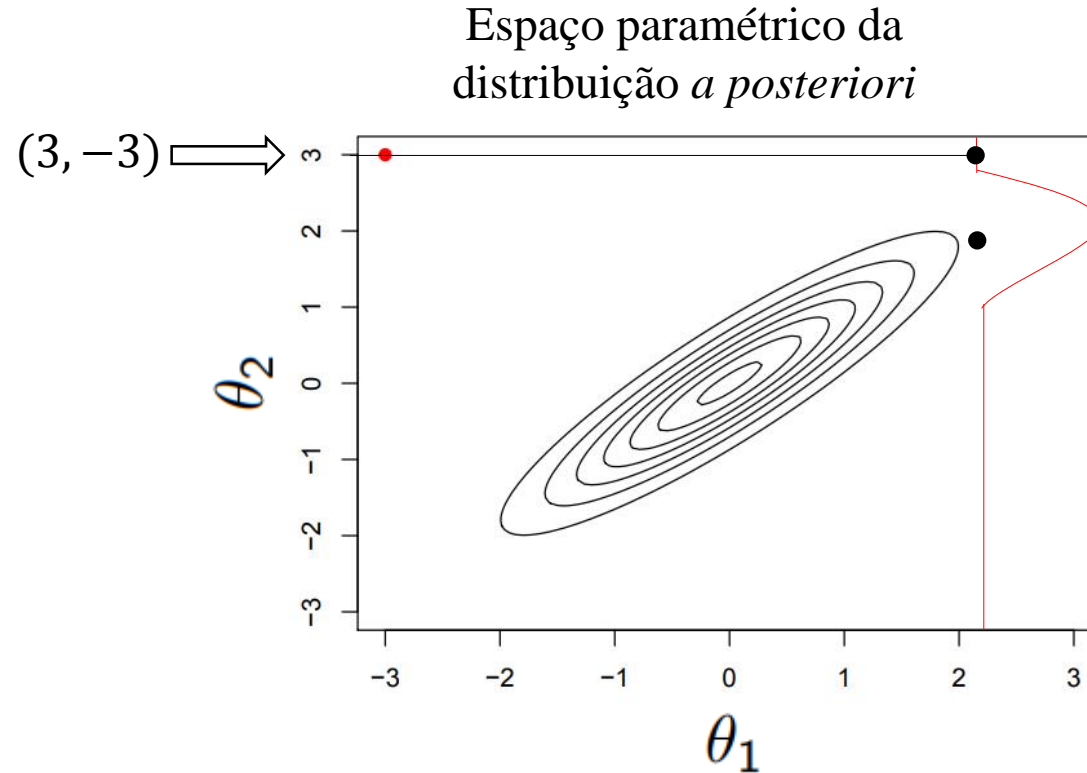
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(1)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, y)$  Passo 2.  
Fixar

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

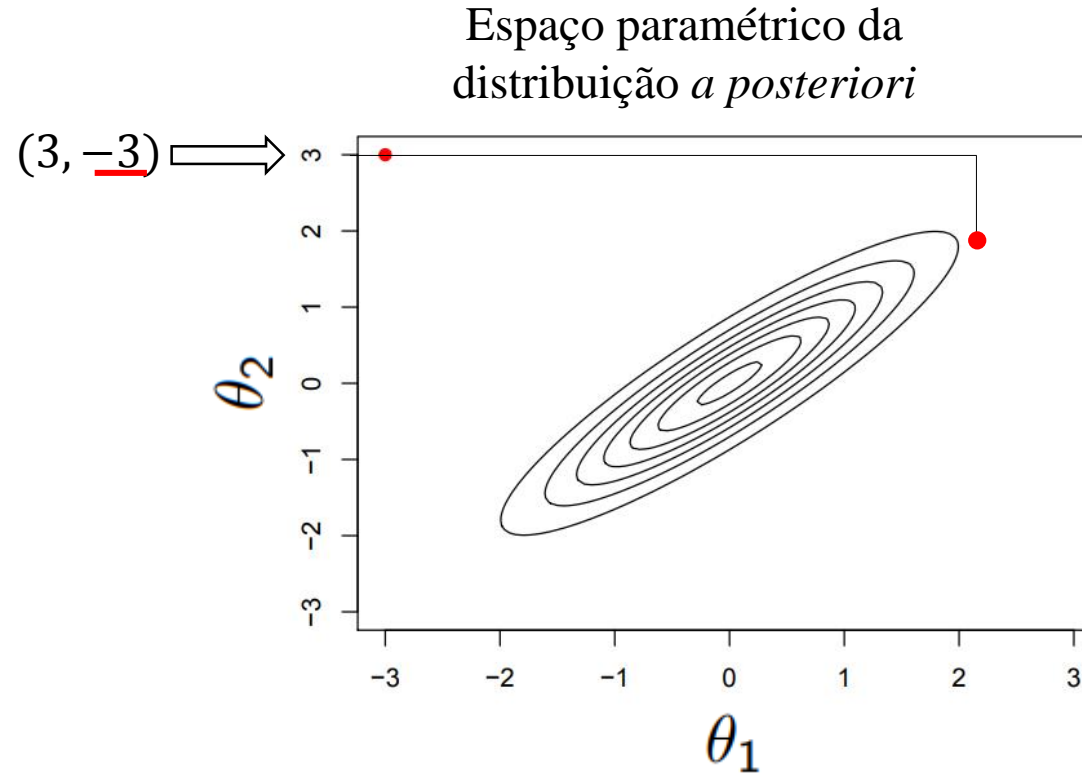
$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo



➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(1)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, y)$  Passo 2.

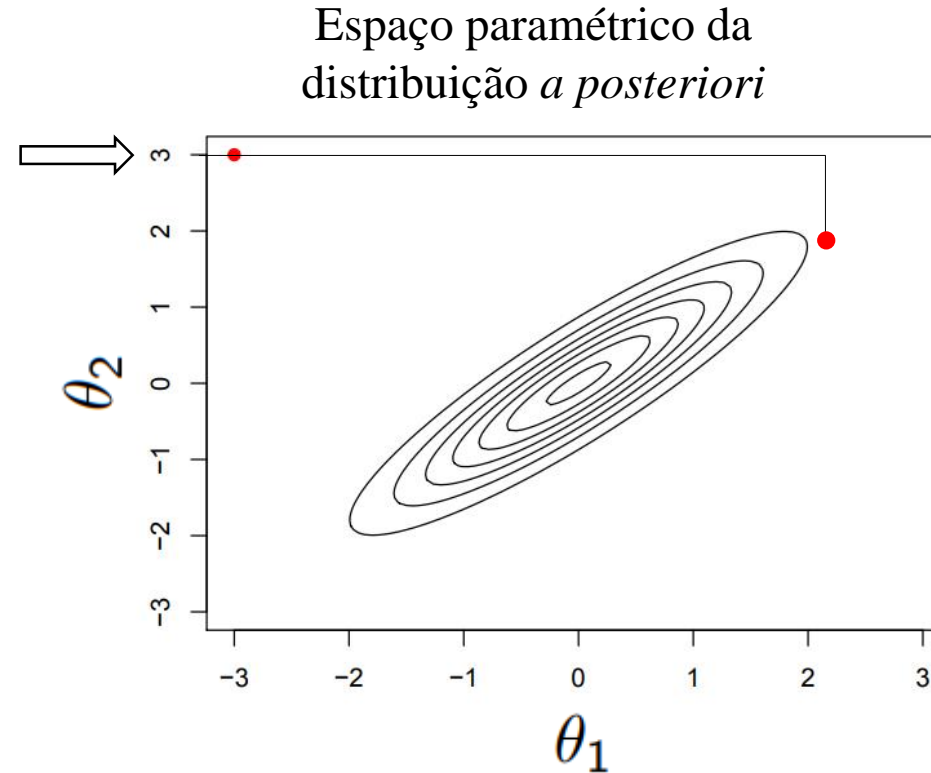
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$  Valor inicial (aleatório);

II) Iteração:

$\theta_1^{(1)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(0)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(1)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(1)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

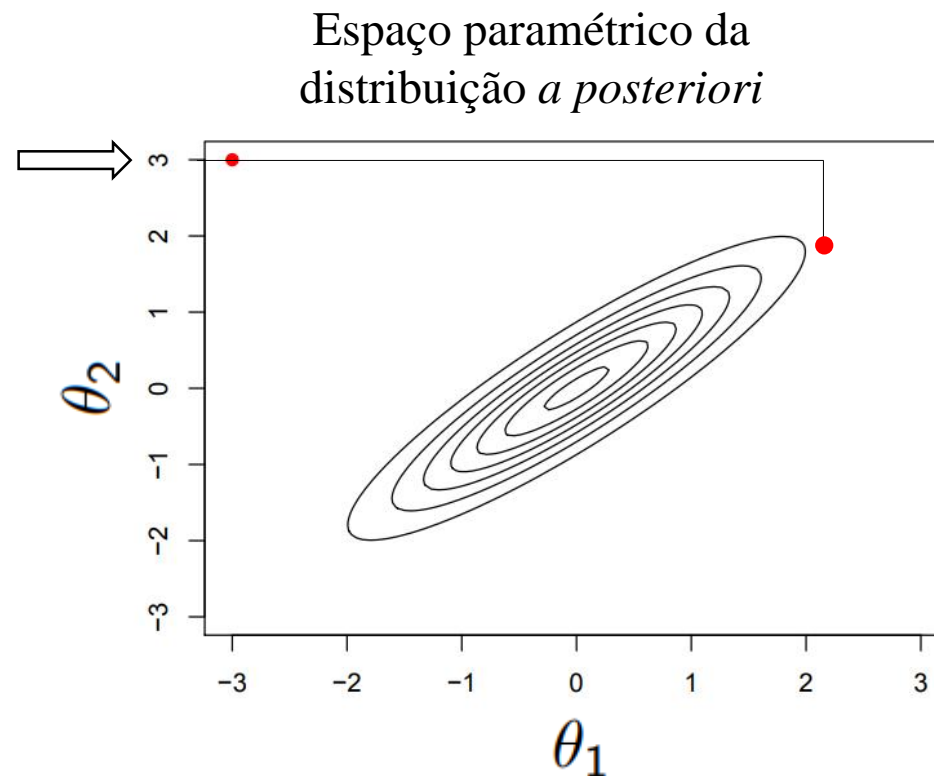
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

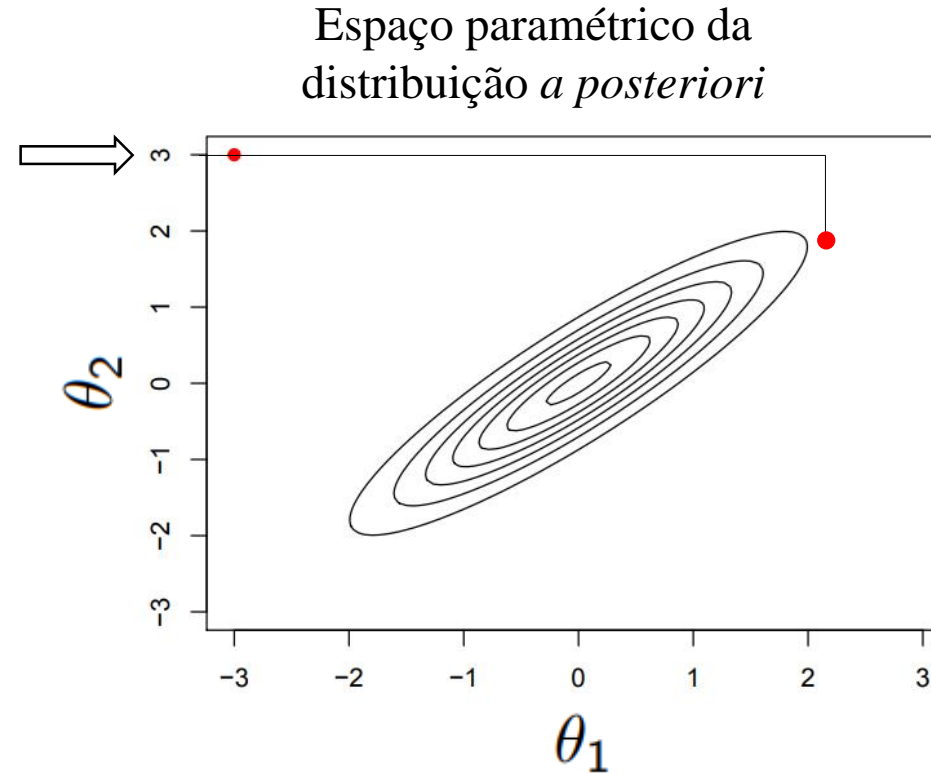
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

Fixar

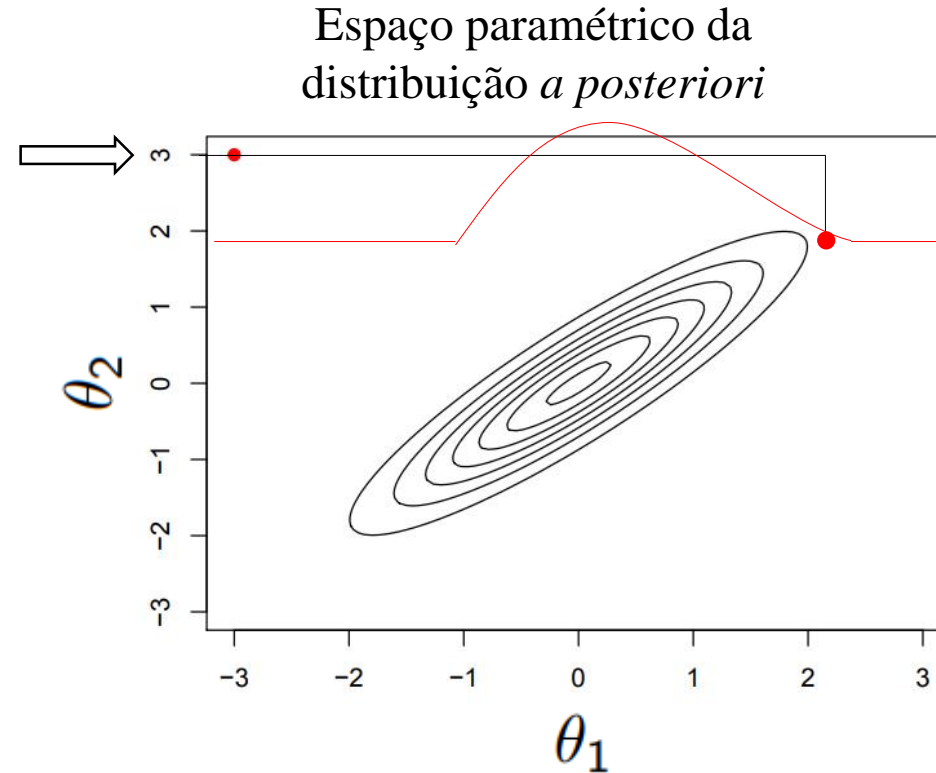
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

Fixar

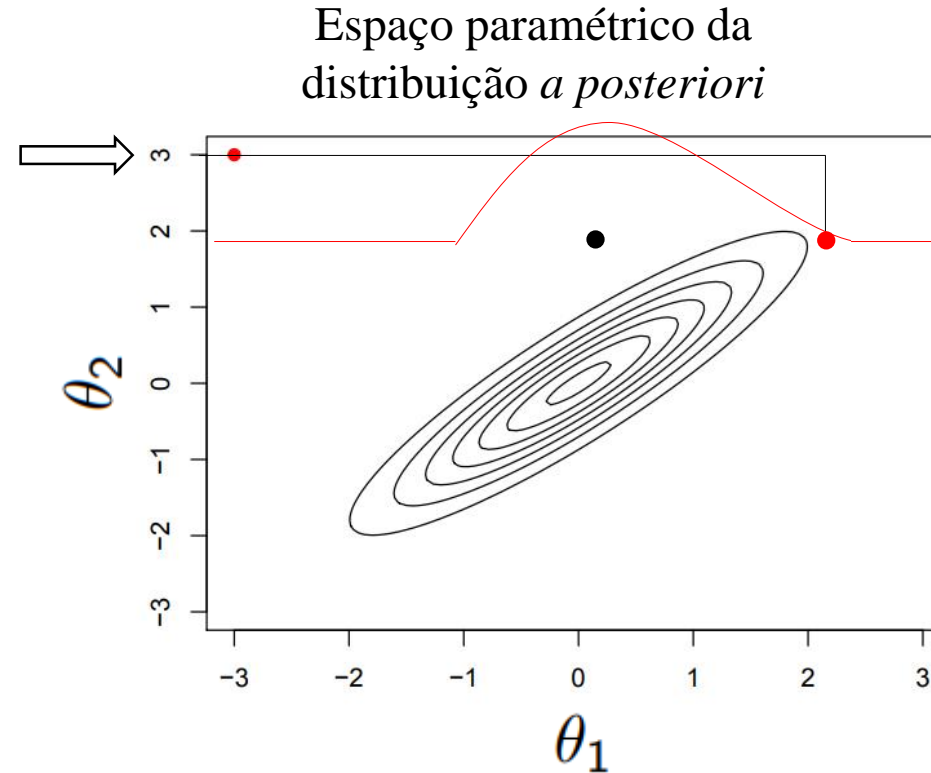
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

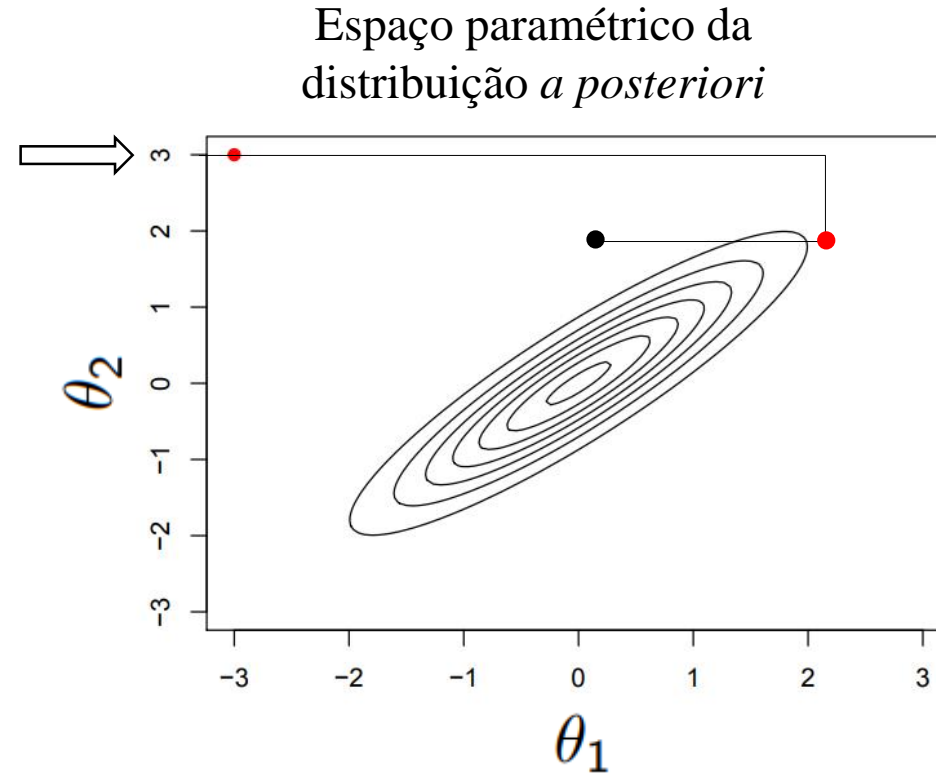
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

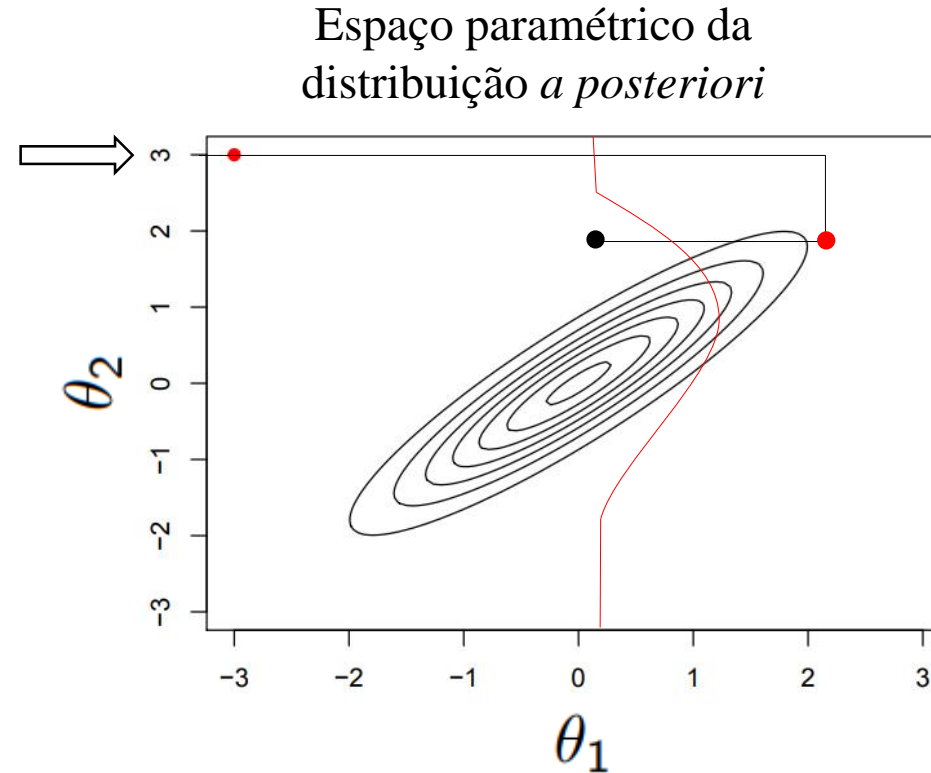
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

$$\theta_2^{(2)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(2)}, y) \quad \text{Passo 2.}$$

**Fixar**

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

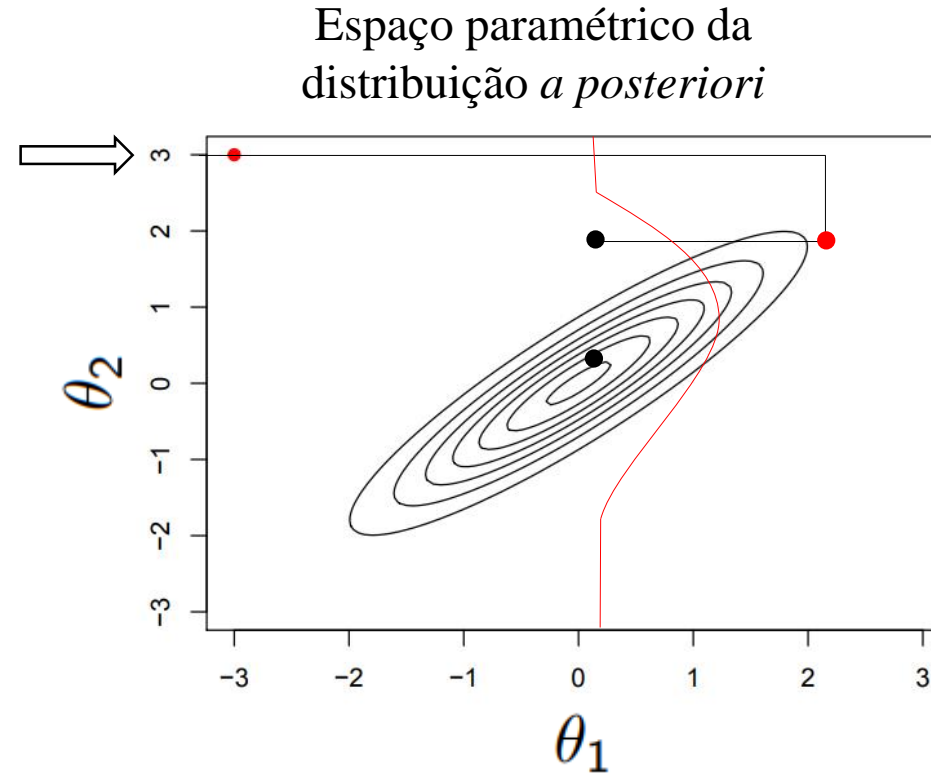
$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo



➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

$$\theta_2^{(2)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(2)}, y) \quad \text{Passo 2.}$$

**Fixar**

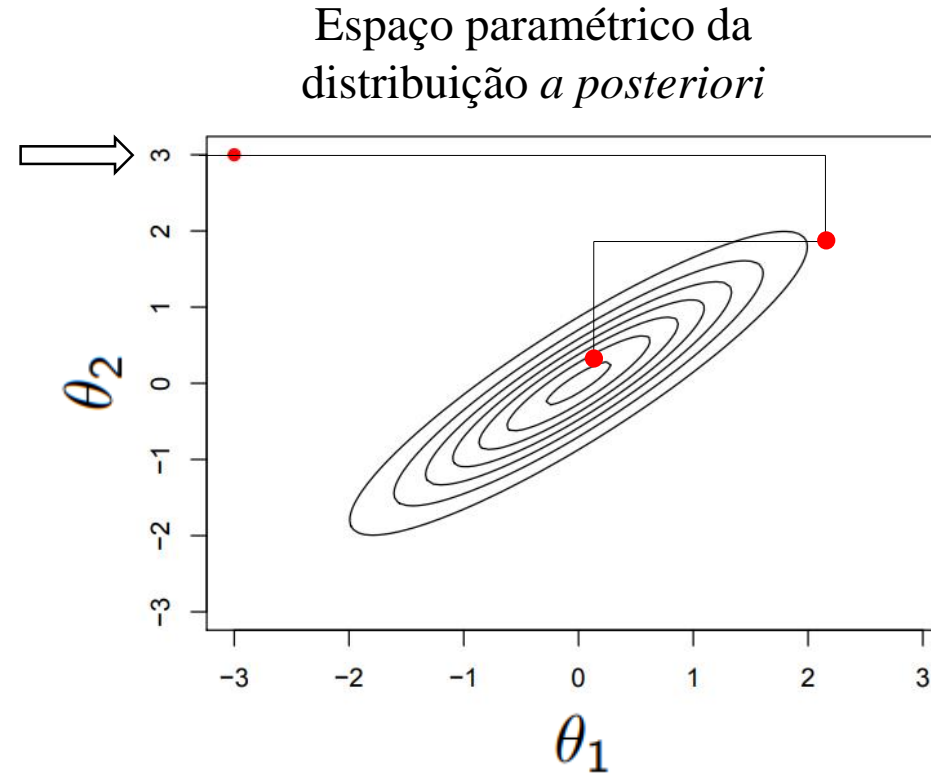
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

$$\theta_2^{(2)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(2)}, y) \quad \text{Passo 2.}$$

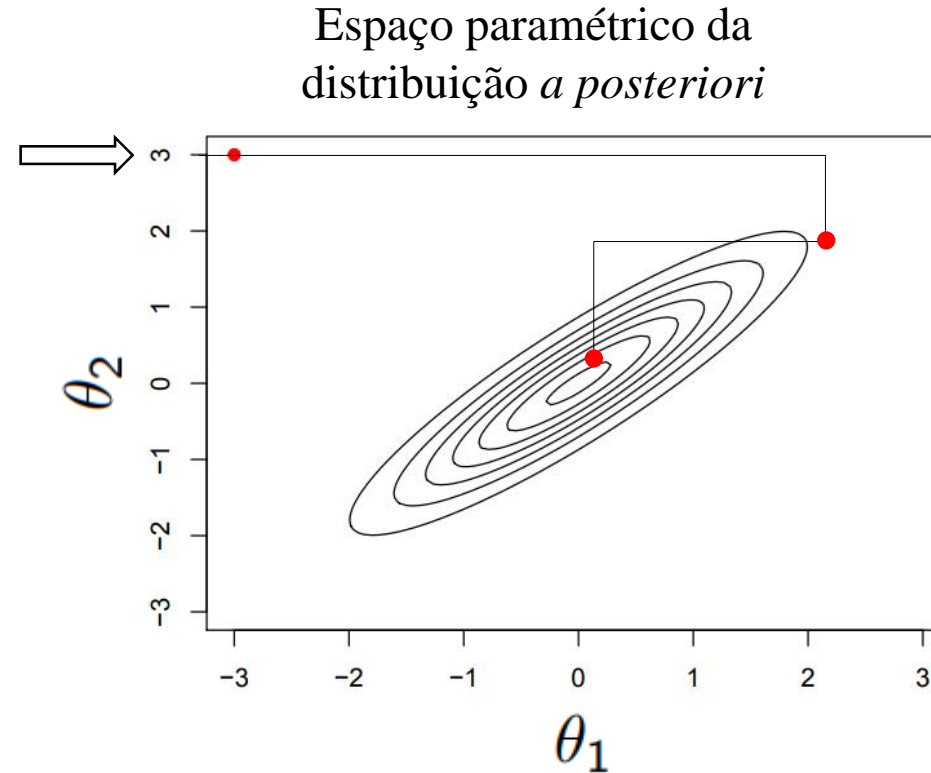
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)})$  Valores 1ª iteração;

II) Iteração:

$$\theta_1^{(2)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(1)}, y) \quad \text{Passo 1.}$$

$$\theta_2^{(2)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(2)}, y) \quad \text{Passo 2.}$$

$(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)})$  Valores 2ª iteração;

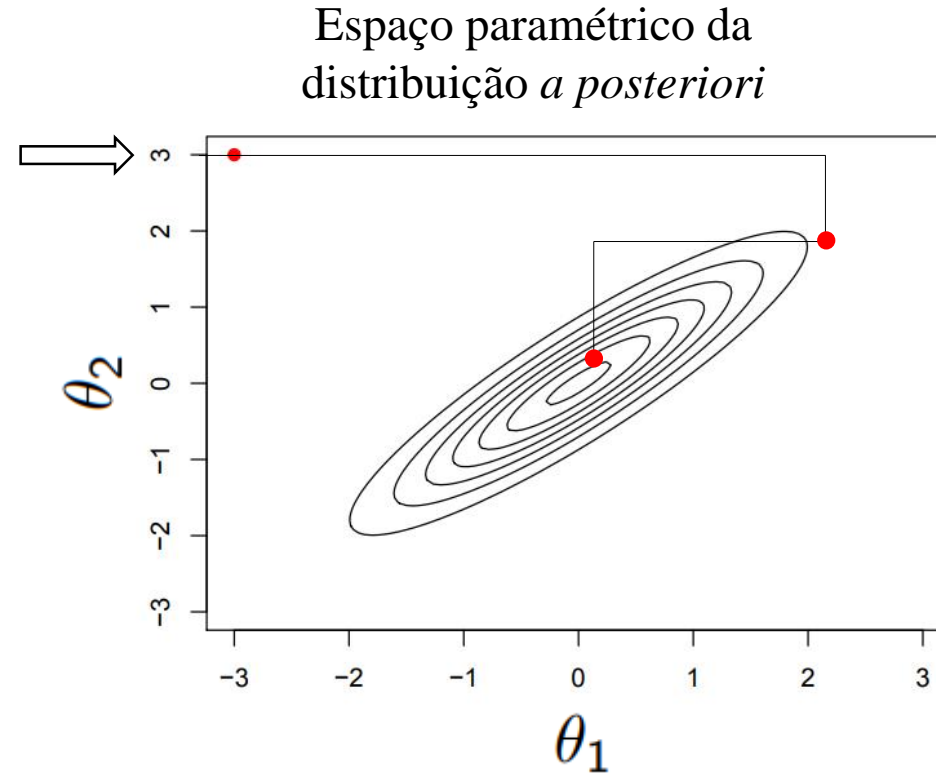
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

$(\theta_1^{(2)}, \theta_2^{(2)})$  Valores 2ª iteração;

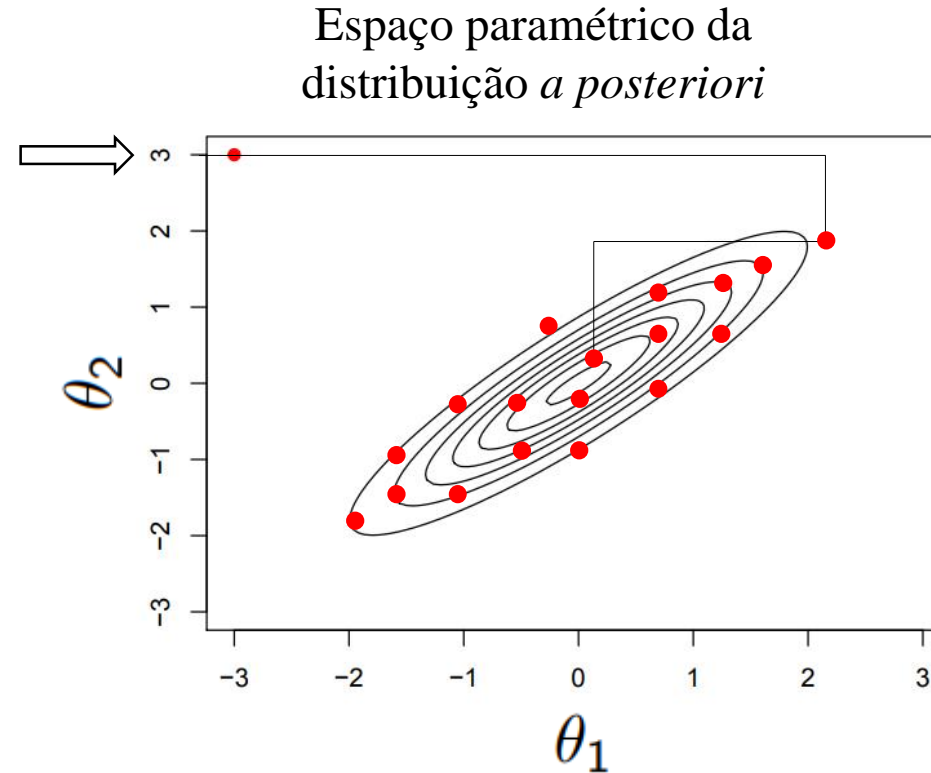
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$   $t - 1$  iteração  
(Iteração anterior)

II) Iteração:

$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)})$  Valores  $t$  iteração;

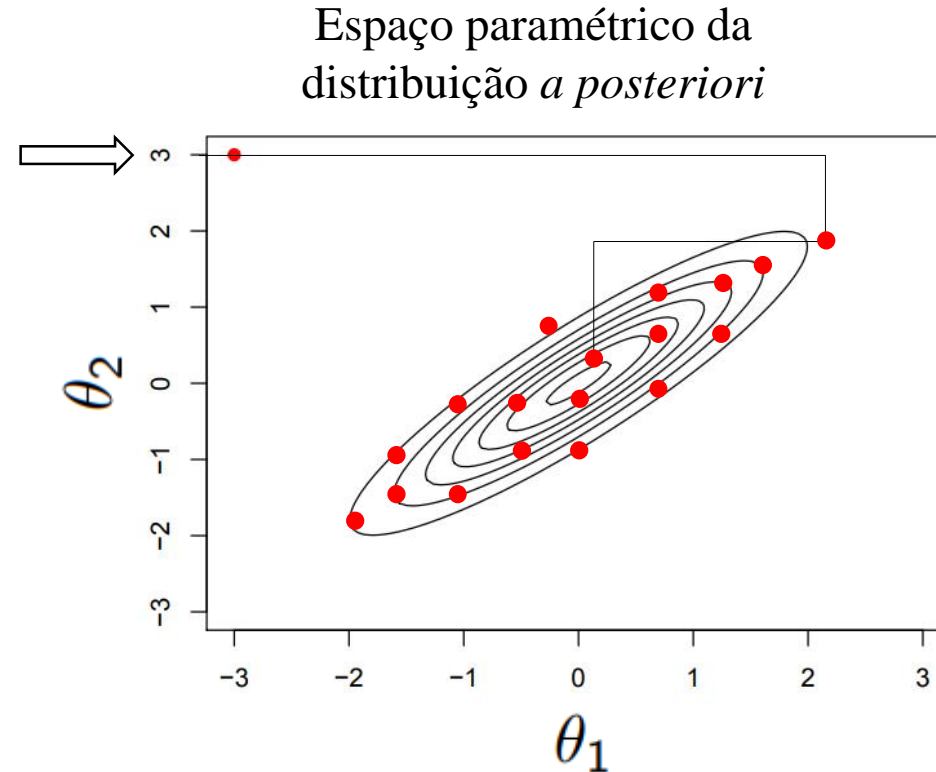
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Algoritmo:

I)  $(\theta_1^{(t-1)}, \theta_2^{(t-1)})$   $t - 1$  iteração  
(Iteração anterior)

II) Iteração:

$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$  Passo 1.

$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$  Passo 2.

$(\theta_1^{(t)}, \theta_2^{(t)})$  Valores  $t$  iteração;

- Amostragem *a posteriori* é marginal **por parâmetro**;

$p(\theta|y)$   $\xrightarrow{\text{com}}$   $\theta = (\theta_1, \theta_2)$   $\xrightarrow{\text{amostrar}}$   $\begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$

Distribuição Alvo

- Lenta convergência;**

(Principalmente espaços paramétricos de alta dimensão).

➤ Método a amostragem:

- Gibbs;

➤ Resumo:

- Amostragem a posteriori é marginal por parâmetro;

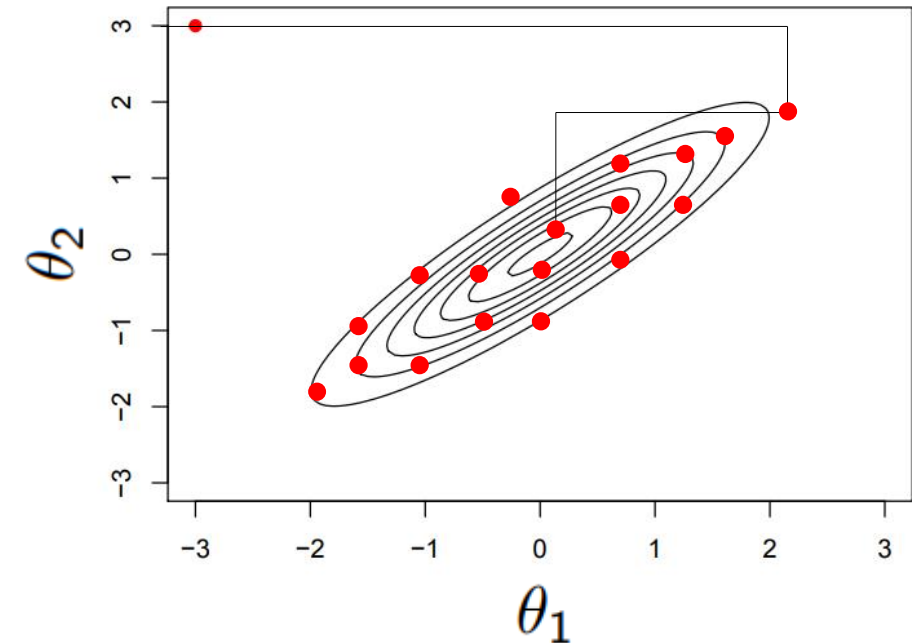
➤ Prós:

- Reduz complexas amostragem multidimensional para sequencias unidimensionais;
- Fácil implementação (linhas de código);

➤ Contras:

- Alta correlação nas amostras;
- Lenta convergência também (alta dimensão);
- Não permite programação paralela;

Espaço paramétrico da  
distribuição *a posteriori*



# Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carloszarzar\_@hotmail.com

---

Obrigado!  
Bons estudos!

*“Apesar de eu não poder me movimentar e ter que falar através de um computador, em minha mente sou livre.”*

*Stephen Hawking*