

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carlos.zarzar@ufopa.edu.br

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carlos.zarzar@ufopa.edu.br

Apresenta: Métodos computacionais



- Método de Monte Carlo;
- Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov;
- Algoritmo de amostragem;
 - Gibbs;
 - Metropolis-Hasting;



Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

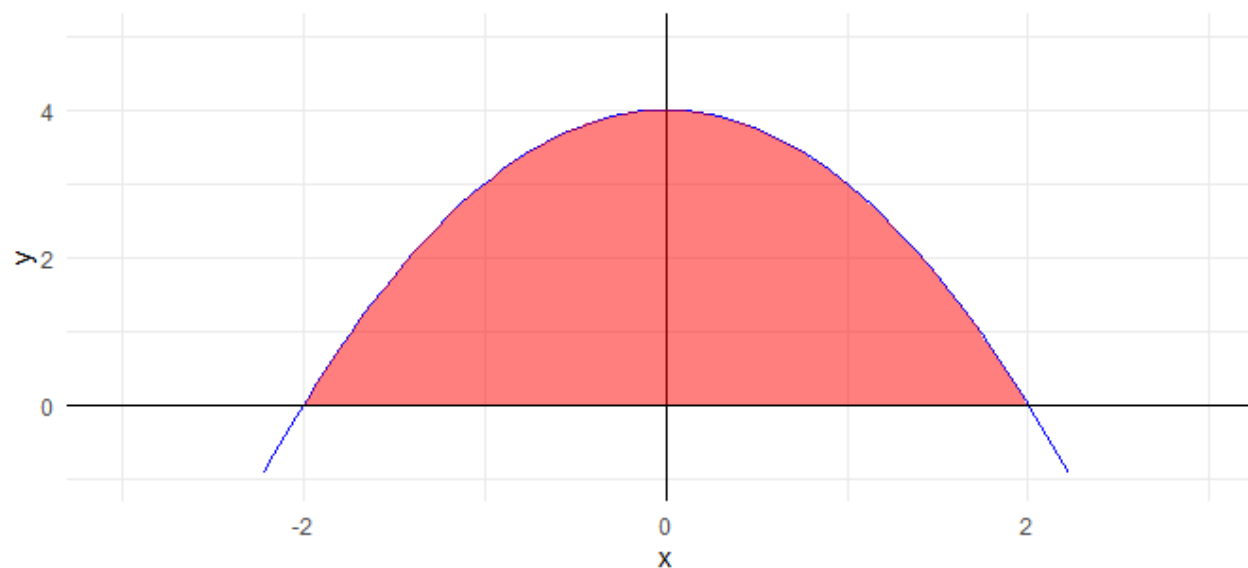
Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição



Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

$$\int_0^h f(x) dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$$

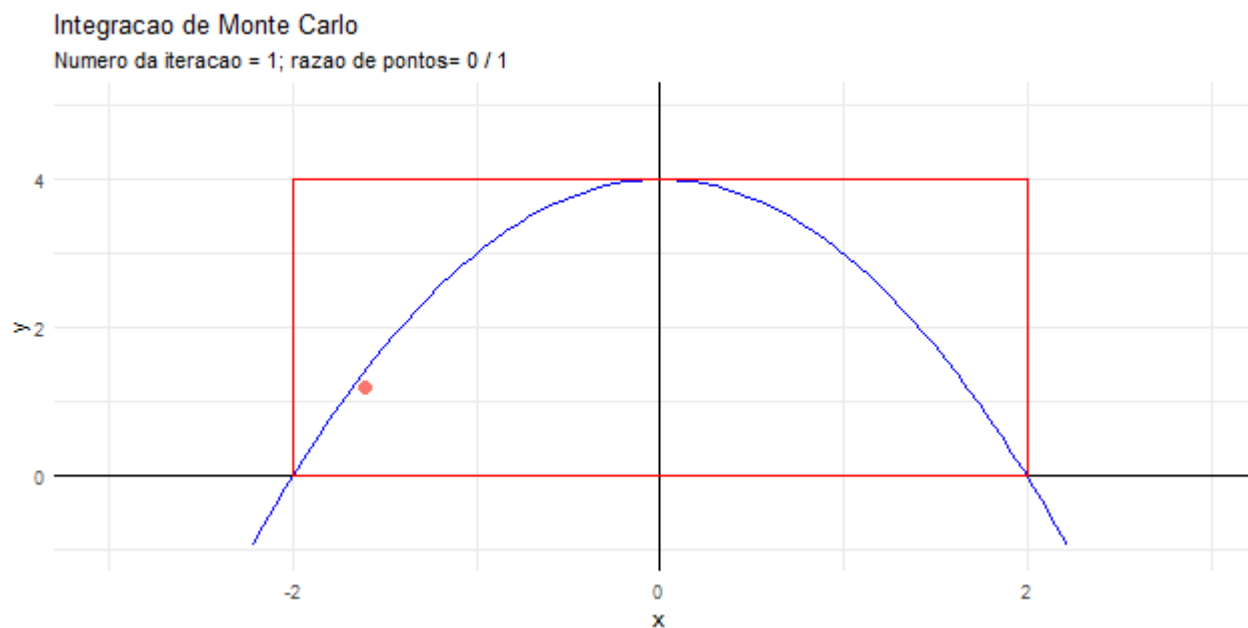


Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

$$\int_0^h f(x) dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

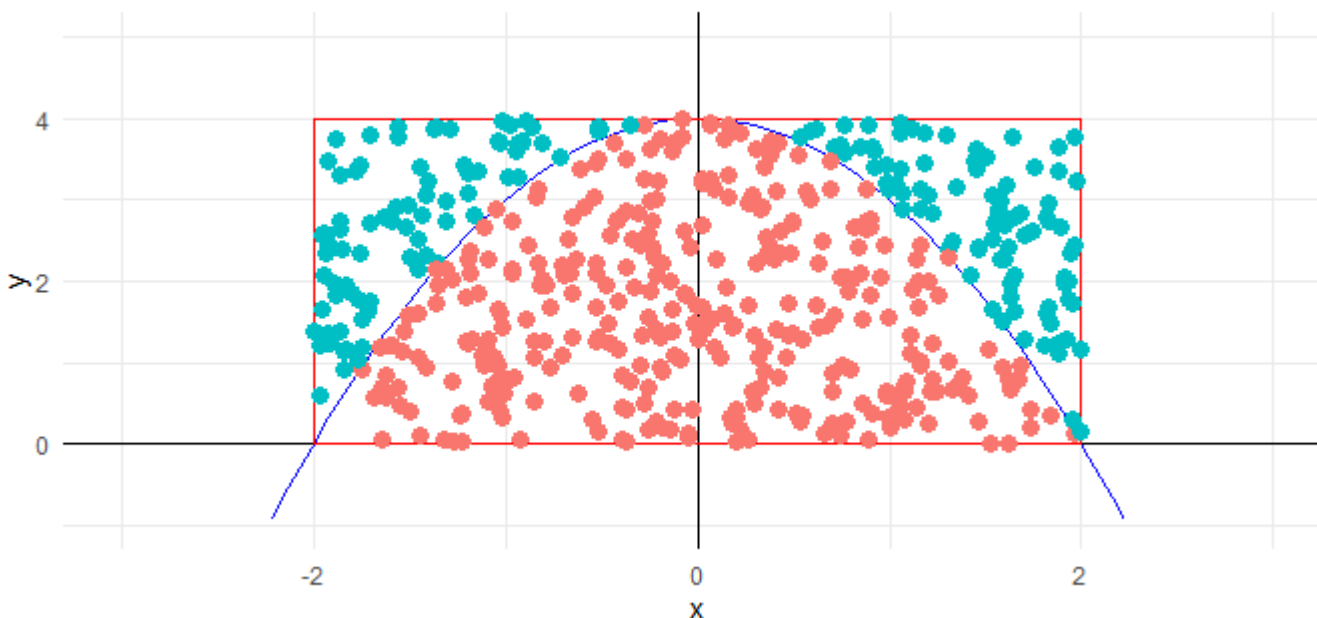
- Número de pontos **fora** da curva = 172;
- Número de pontos **abaixo** da curva = 328;
- Número de pontos **Totais** = 500;

$$\text{Área } f(x) = \frac{\text{Número } \bullet}{\text{Número } \bullet} \cdot \begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{4} \end{array} \cdot 4$$

$$\int_0^h f(x) dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx$$

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

- Número de pontos **fora** da curva = 172;
- Número de pontos **abaixo** da curva = 328;
- Número de pontos **Totais** = 500;

$$\text{Área } f(x) = \frac{\text{Número } \bullet}{\text{Número } \bullet} \cdot \begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{4} \end{array} \cdot 4$$

➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

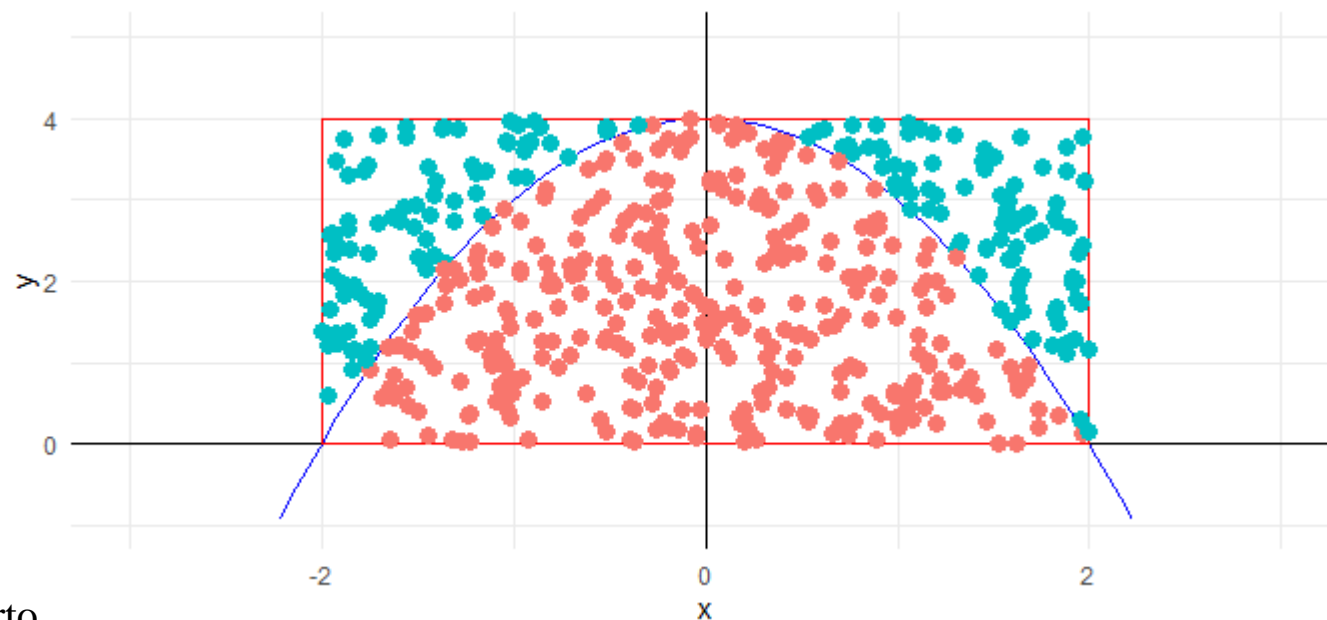
$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \begin{array}{l} \text{Convergindo quase certo} \\ n \rightarrow \infty \end{array}$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

- Número de pontos **fora** da curva = 172;
- Número de pontos **abaixo** da curva = 328;
- Número de pontos **Totais** = 500;

$$\text{Área } f(x) = \frac{\text{Número } \bullet}{\text{Número } \bullet} \cdot \begin{array}{c} \boxed{} \\ \text{4} \end{array} \cdot 4$$

➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

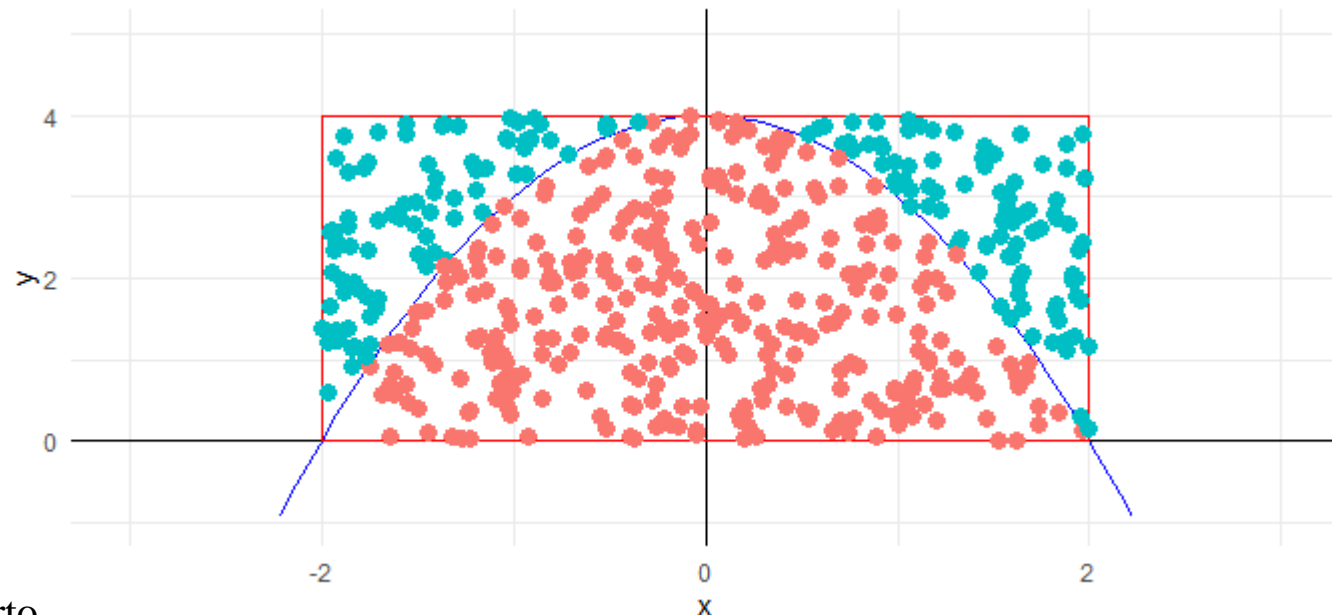
$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
- ou
- **Método de Monte Carlo.**



$$\text{Área } f(x) = \frac{172}{500} * (4 \times 4) = 10,496$$

$$\int_0^h f(x) dx = \int_{-2}^2 -x^2 + 4 dx = 10,667$$

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

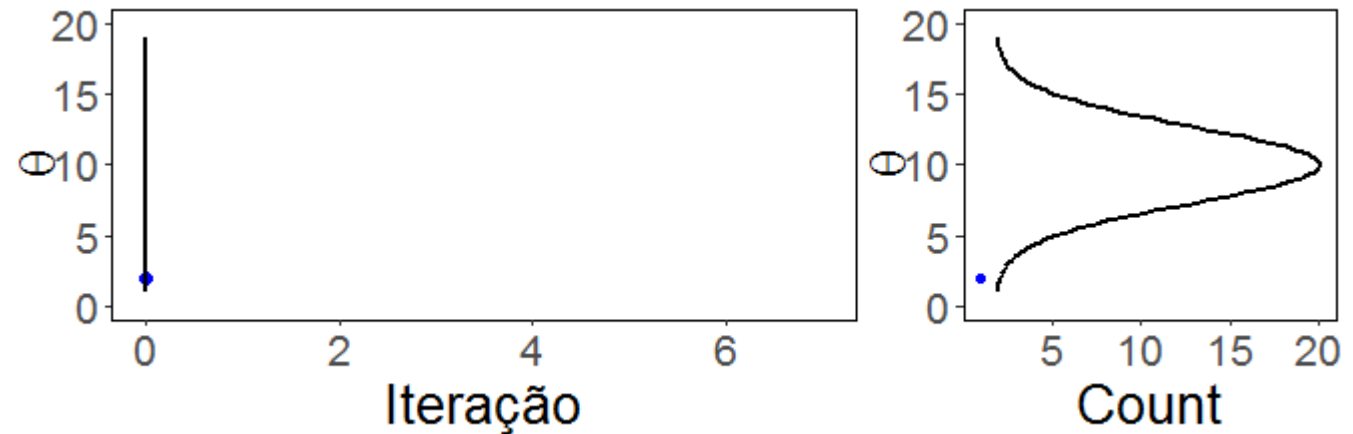
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
- ou
- **Método de Monte Carlo.**

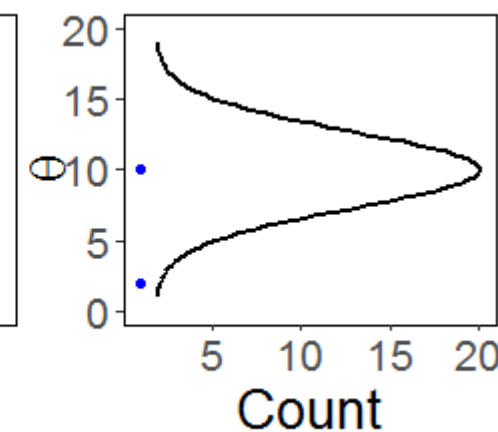
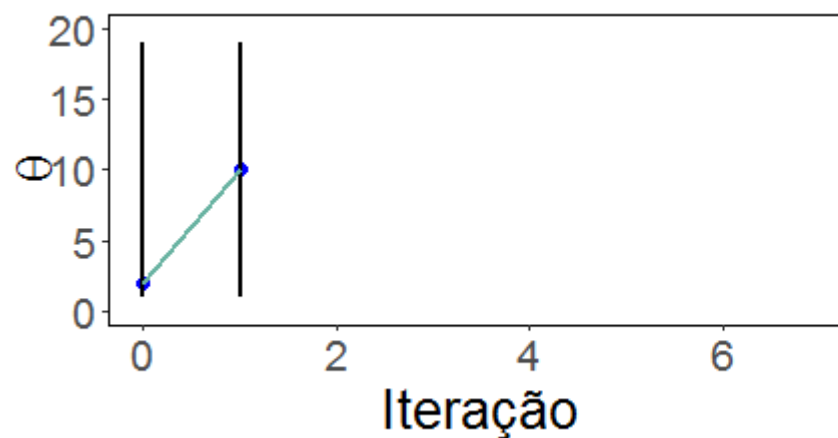
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

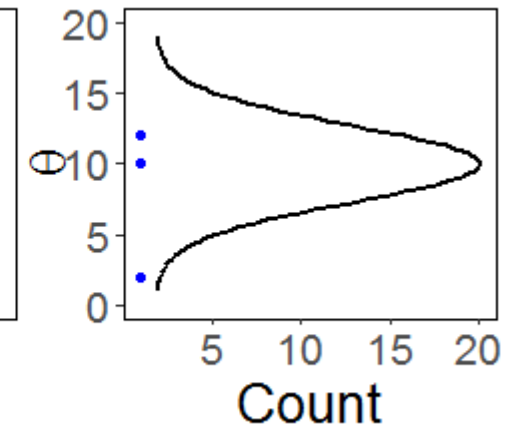
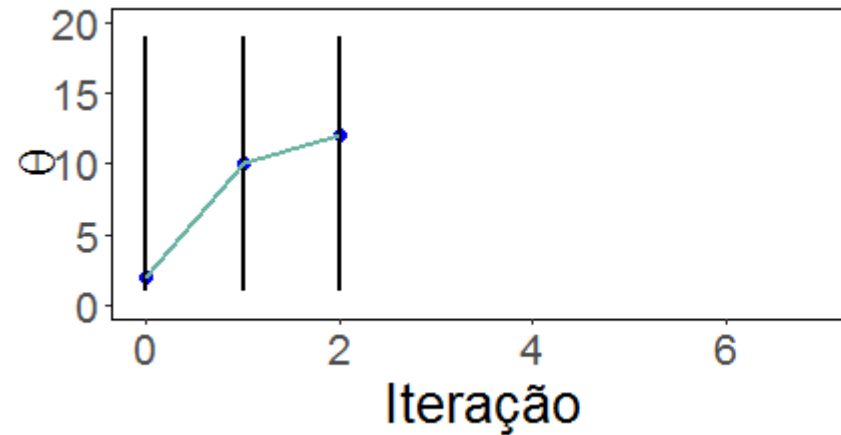
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

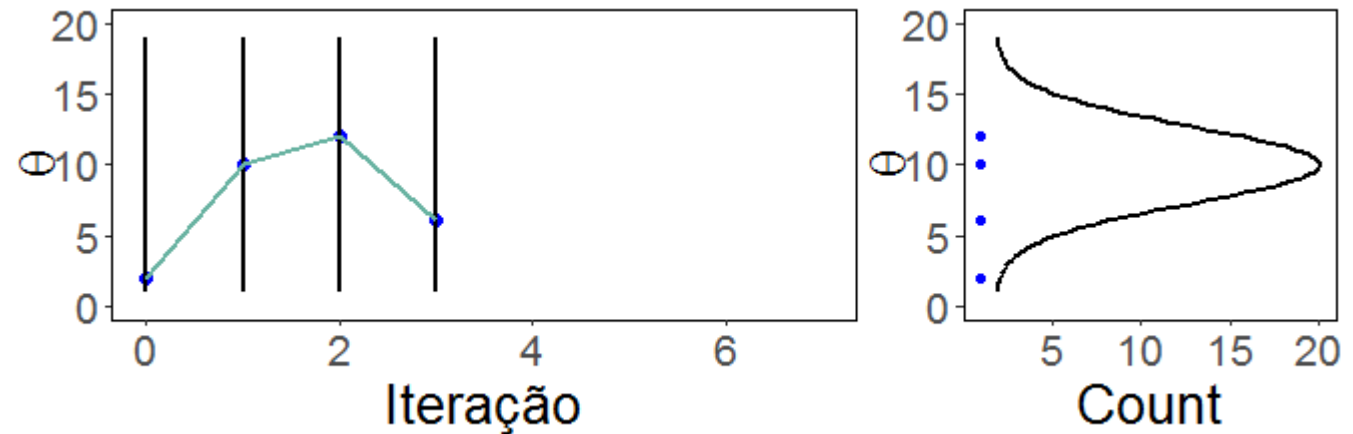
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

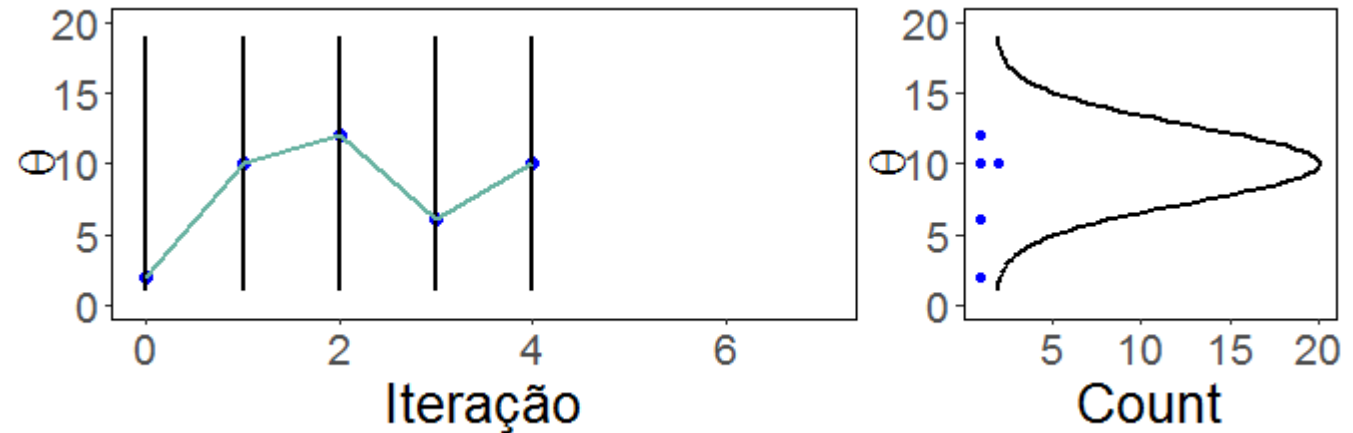
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

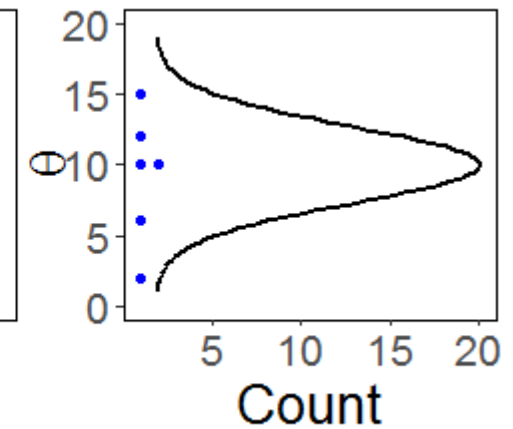
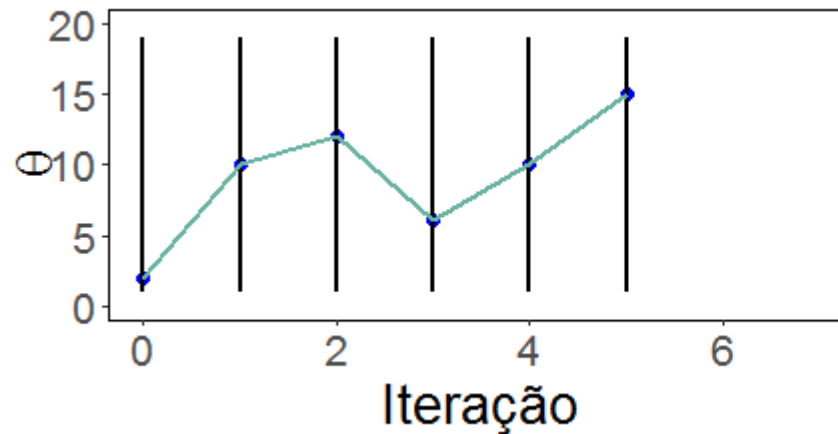
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \text{Convergindo quase certo} \quad n \rightarrow \infty$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
- ou
- **Método de Monte Carlo.**

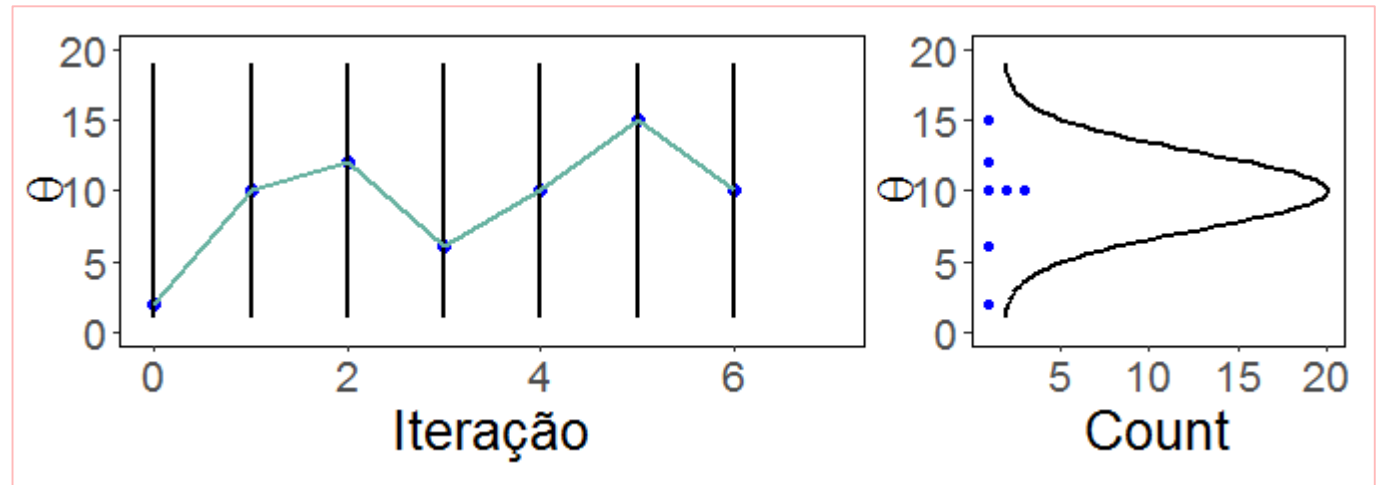
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \begin{array}{l} \text{Convergindo quase certo} \\ n \rightarrow \infty \end{array}$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo é um método de integração numérico conhecido:

- **Integração de Monte Carlo;**
ou
- **Método de Monte Carlo.**

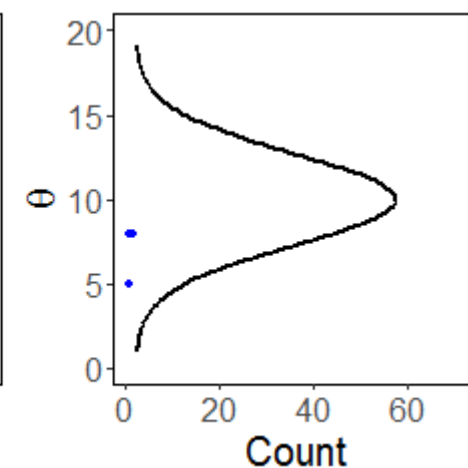
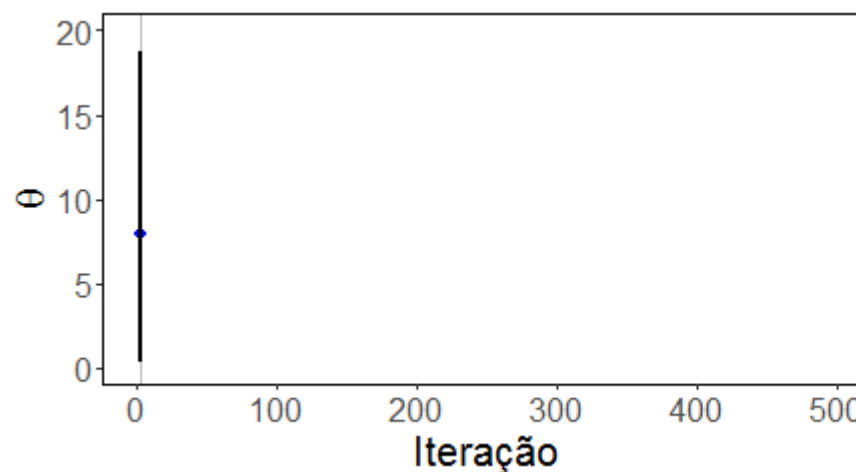
➤ Lei Forte dos Grandes Números

Seja Y_1, Y_2, \dots, Y_n variáveis *i.i.d.*

$$\mu = E[Y] < \infty$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \rightarrow \mu \quad \begin{array}{l} \text{Convergindo quase certo} \\ n \rightarrow \infty \end{array}$$

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \mu\right) = 1$$



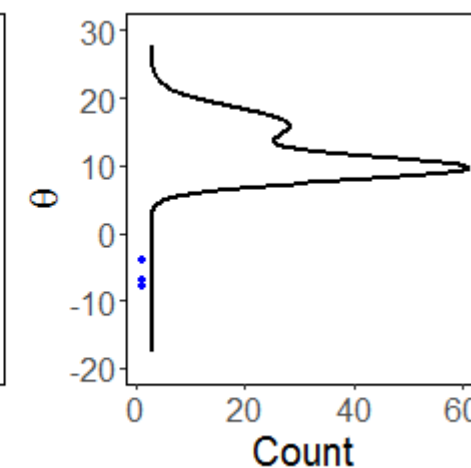
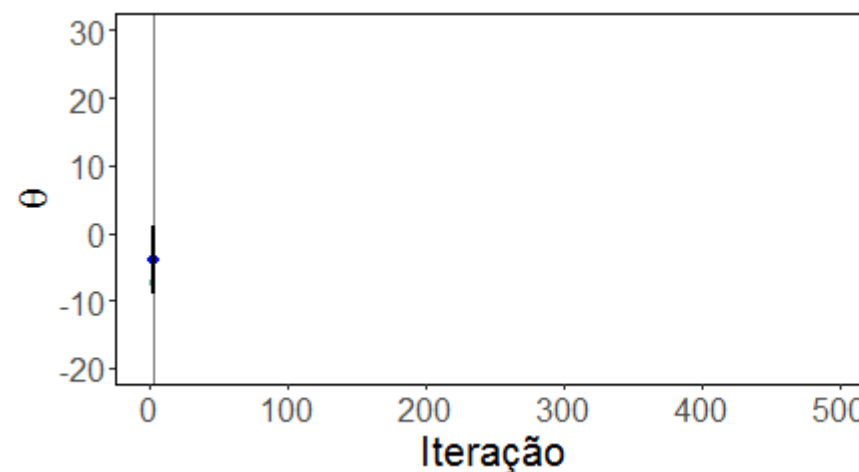
Geração de variáveis aleatórias
independentes com mesma
distribuição

Monte Carlo Via Cadeia de Markov:

A posteriori: Bimodal

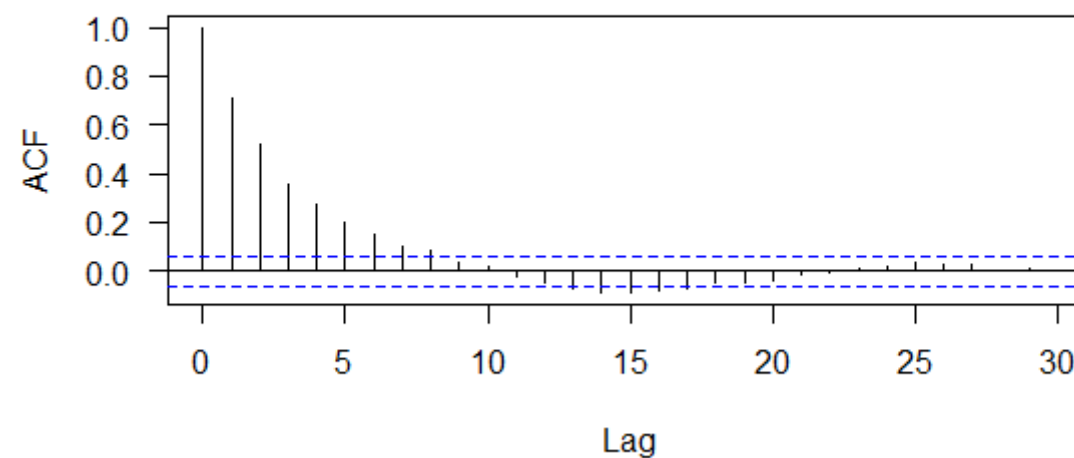
Distribuição Normal mista

$$f(x) = 0,4 * N(17; 3) + 0,6 * N(3; 2)$$



$$\theta_t \sim N(\theta_{t-1}; \sigma)$$

Geração de variáveis aleatórias
independentes dependentes com
 mesma distribuição

Monte Carlo Via Cadeia de Markov:**Intermediate**

A posteriori: Bimodal

Distribuição Normal mista

$$f(x) = 0,4 * N(17; 3) + 0,6 * N(3; 2)$$

$$\theta_t \sim N(\theta_{t-1}; \sigma)$$

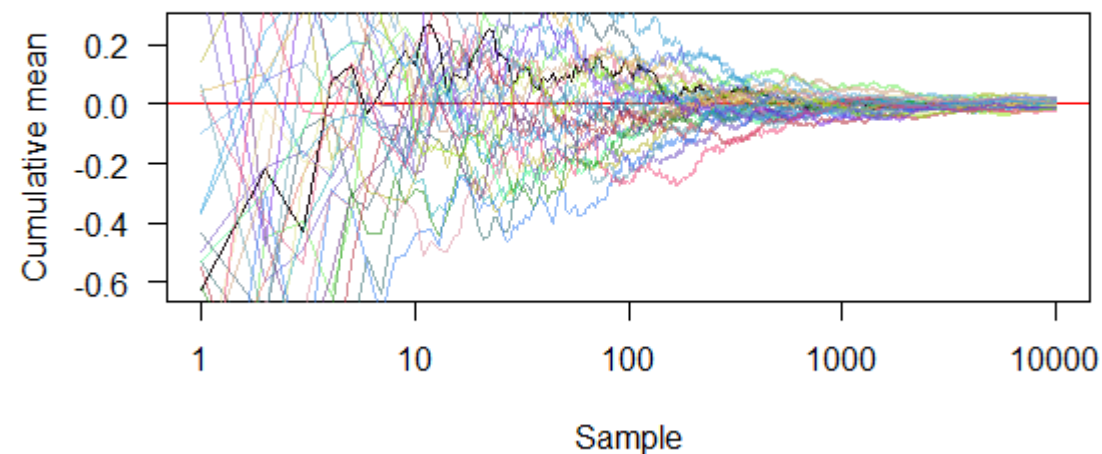
Geração de variáveis aleatórias
independentes dependentes com
mesma distribuição

Monte Carlo Via Cadeia de Markov:

A posteriori: Bimodal

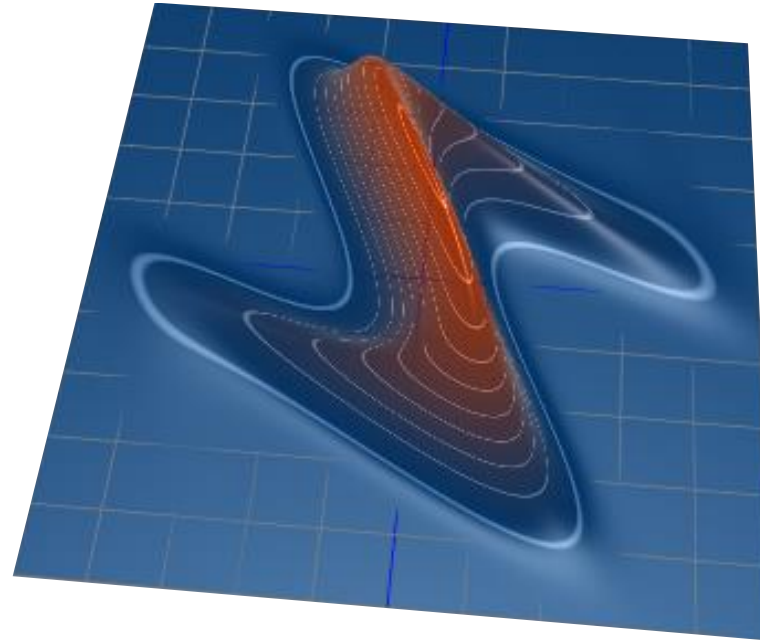
Distribuição Normal mista

$$f(x) = 0,4 * N(17; 3) + 0,6 * N(3; 2)$$



Geração de variáveis aleatórias
independentes dependentes com
mesma distribuição

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*

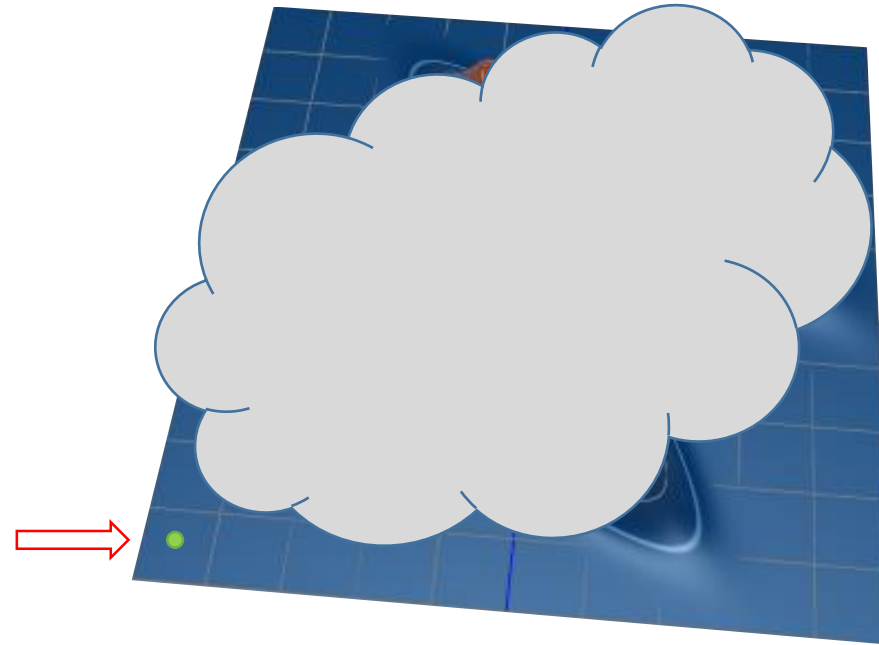


Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori* 

Desconhecido

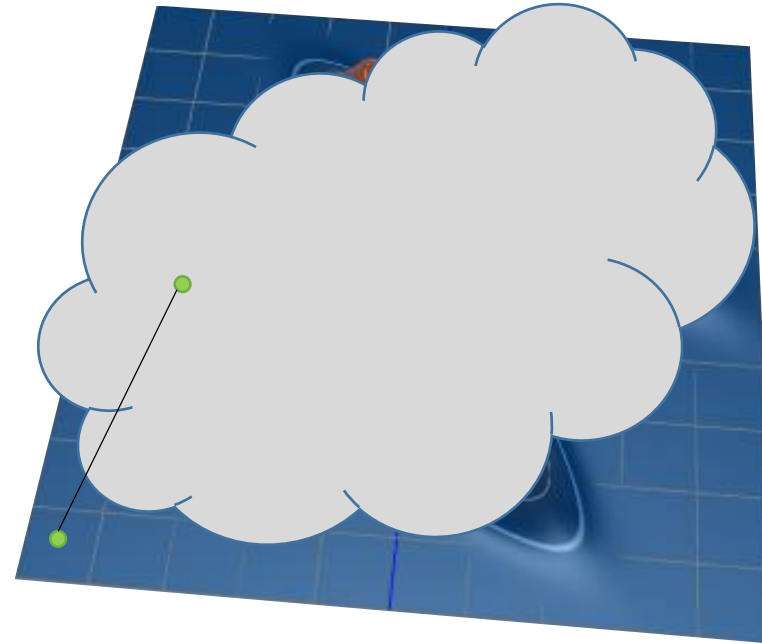


Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



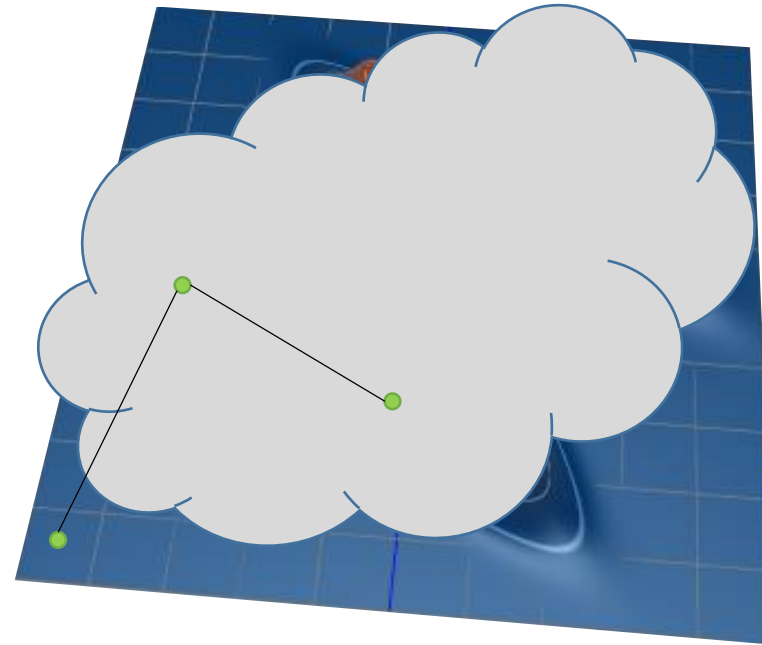
- *Random walk MCMC*

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



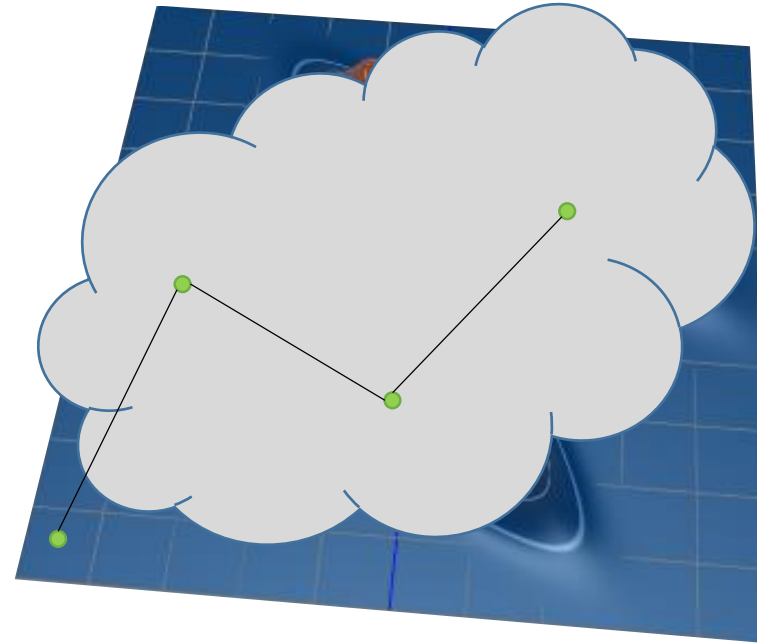
- *Random walk MCMC*

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



- *Random walk MCMC*

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



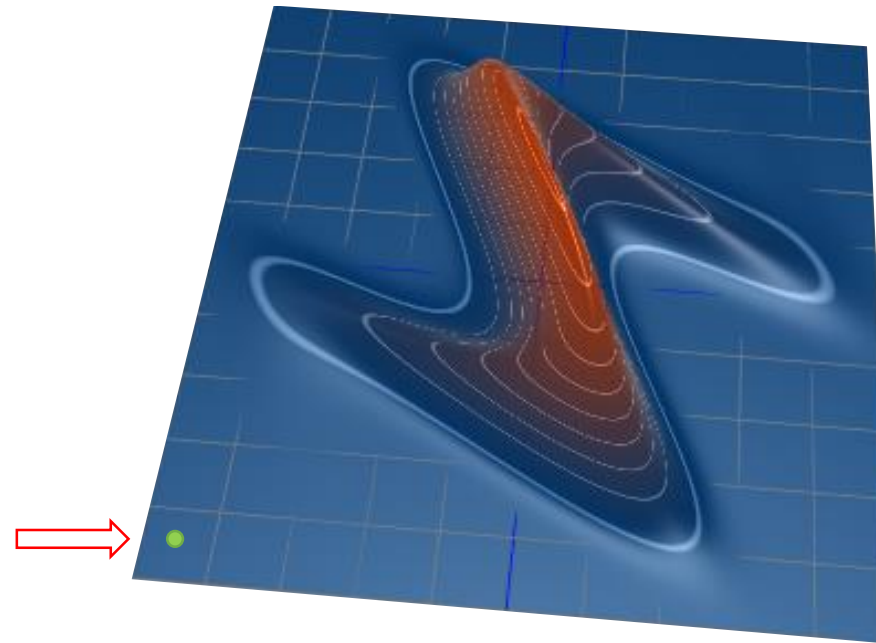
- *Random walk MCMC*

Custo computacional muito grande
para amostrar todo o espaço
paramétrico.



Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*

- *Random walk MCMC*



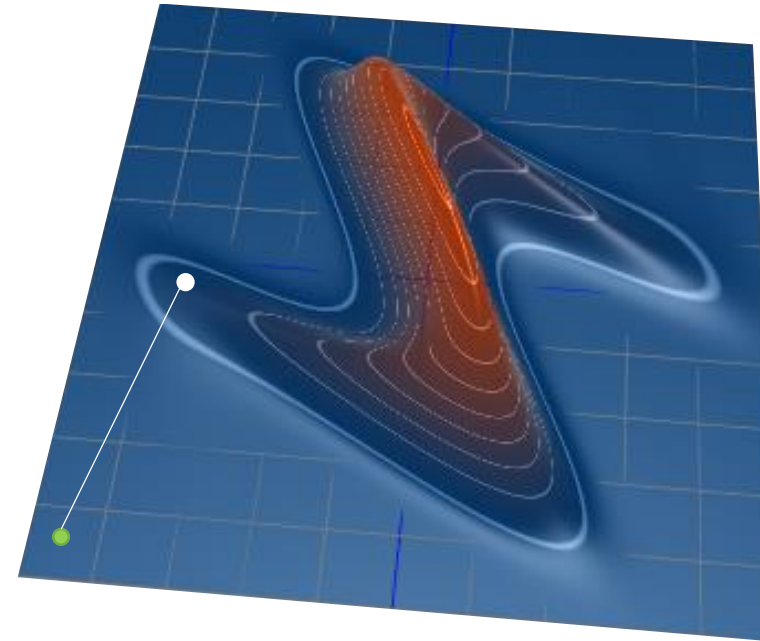
- Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



● *Random walk MCMC*

● Amostrador em avaliação;

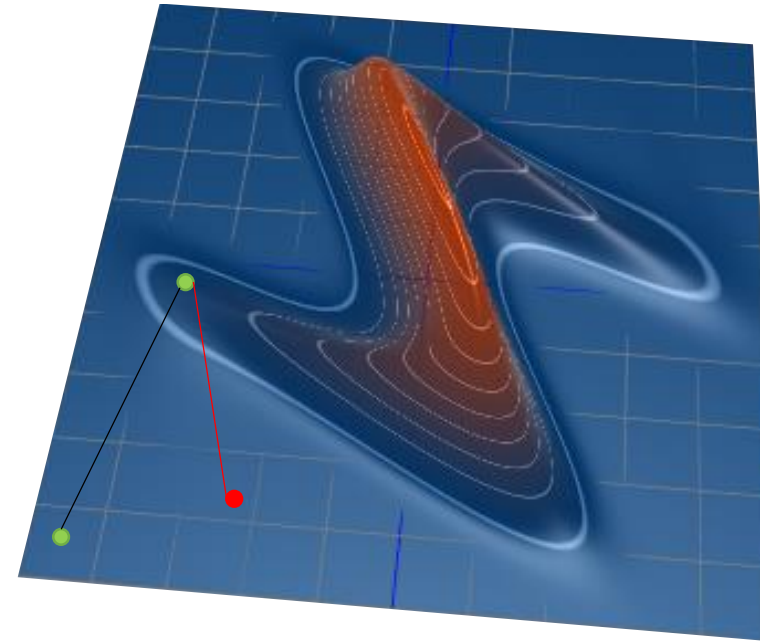
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



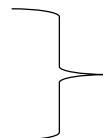
● *Random walk MCMC*

■ Amostrador em avaliação;

● Amostrador rejeitado;

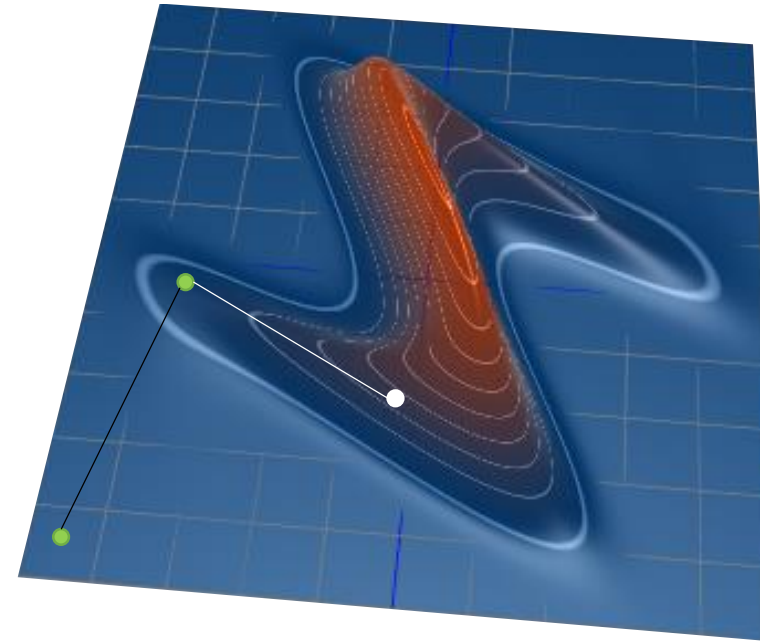
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



● *Random walk MCMC*

■ Amostrador em avaliação;

● Amostrador rejeitado;

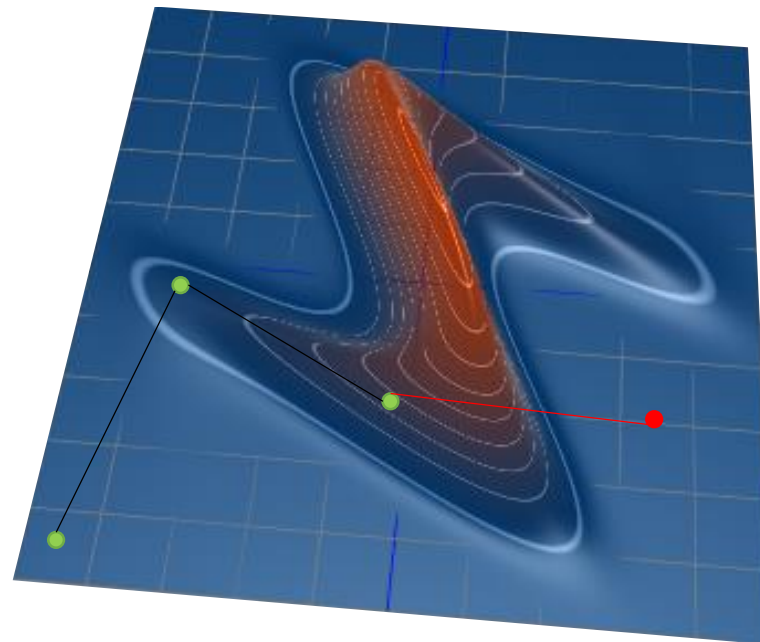
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



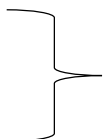
● *Random walk MCMC*

■ Amostrador em avaliação;

● Amostrador rejeitado;

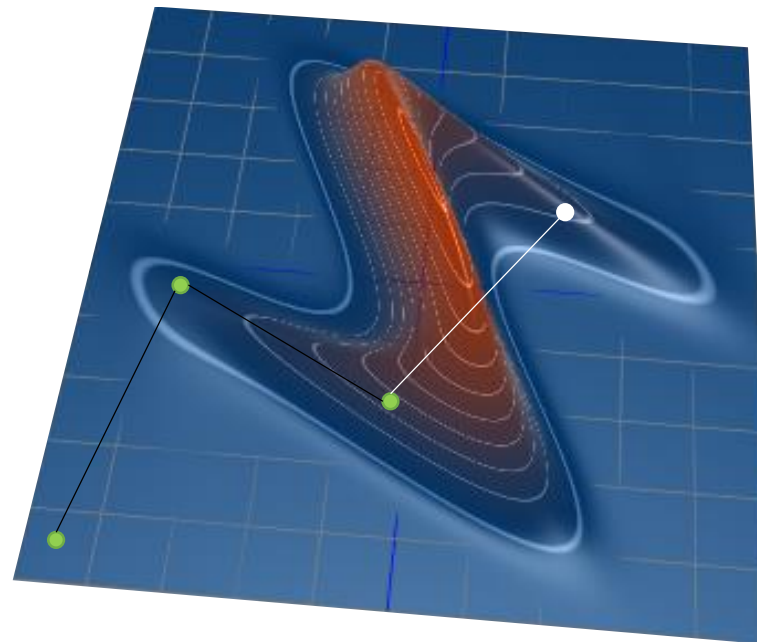
- Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



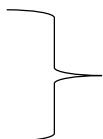
● *Random walk MCMC*

■ Amostrador em avaliação;

● Amostrador rejeitado;

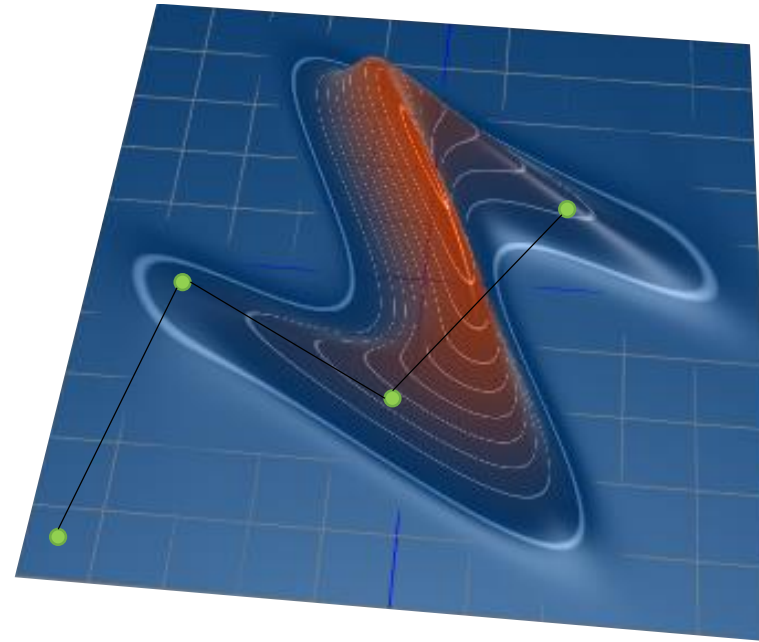
- Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



Etapa de **aceitação** ou
rejeição de cada iteração do
passeio aleatório.

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



● *Random walk MCMC*

■ Amostrador em avaliação;

● Amostrador rejeitado;

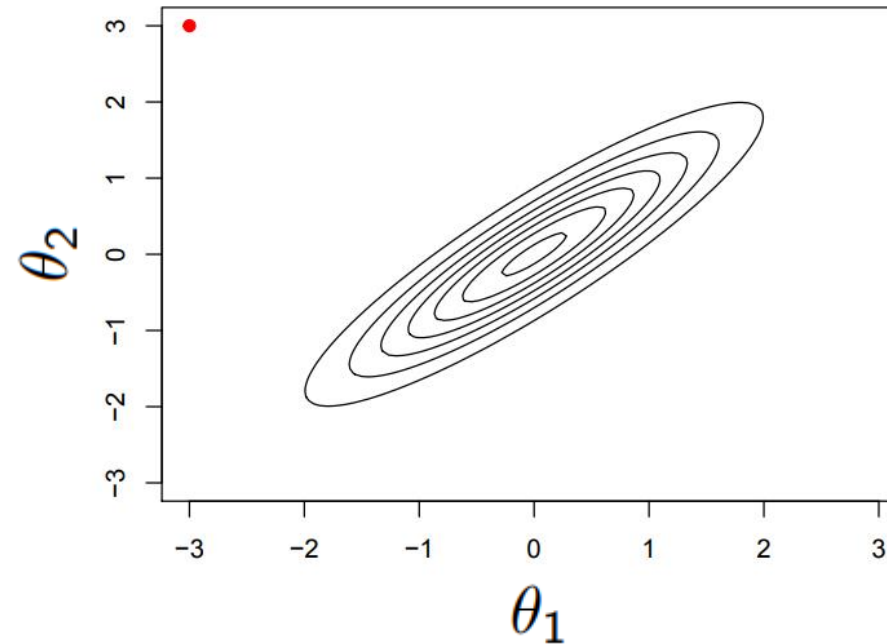
- Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;
- Lenta convergência;
(Principalmente espaços
paramétricos de alta
dimensão).

Espaço paramétrico da
distribuição *a posteriori*



• Método a amostragem:

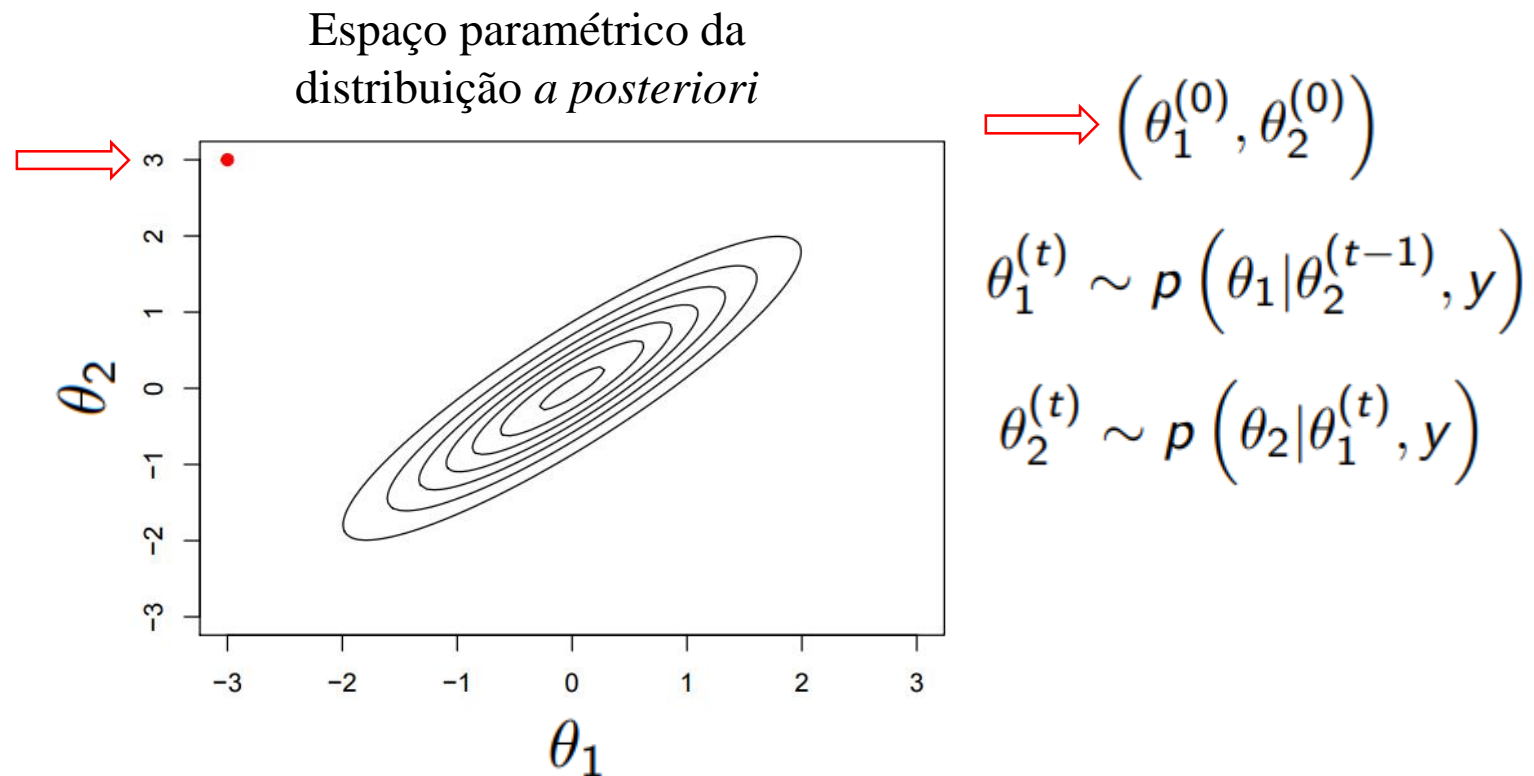
- Gibbs
- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1|\theta_2, y) \\ p(\theta_2|\theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

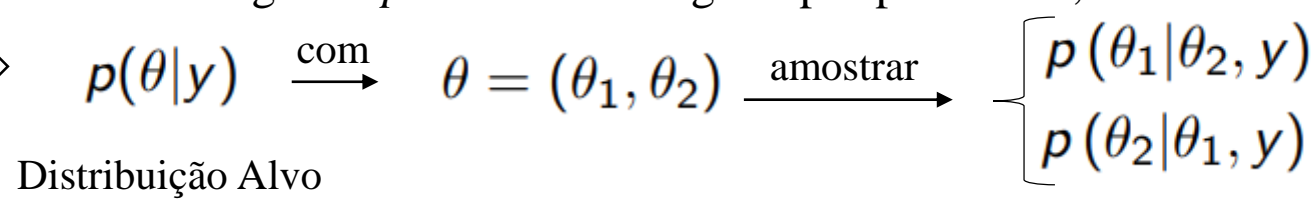


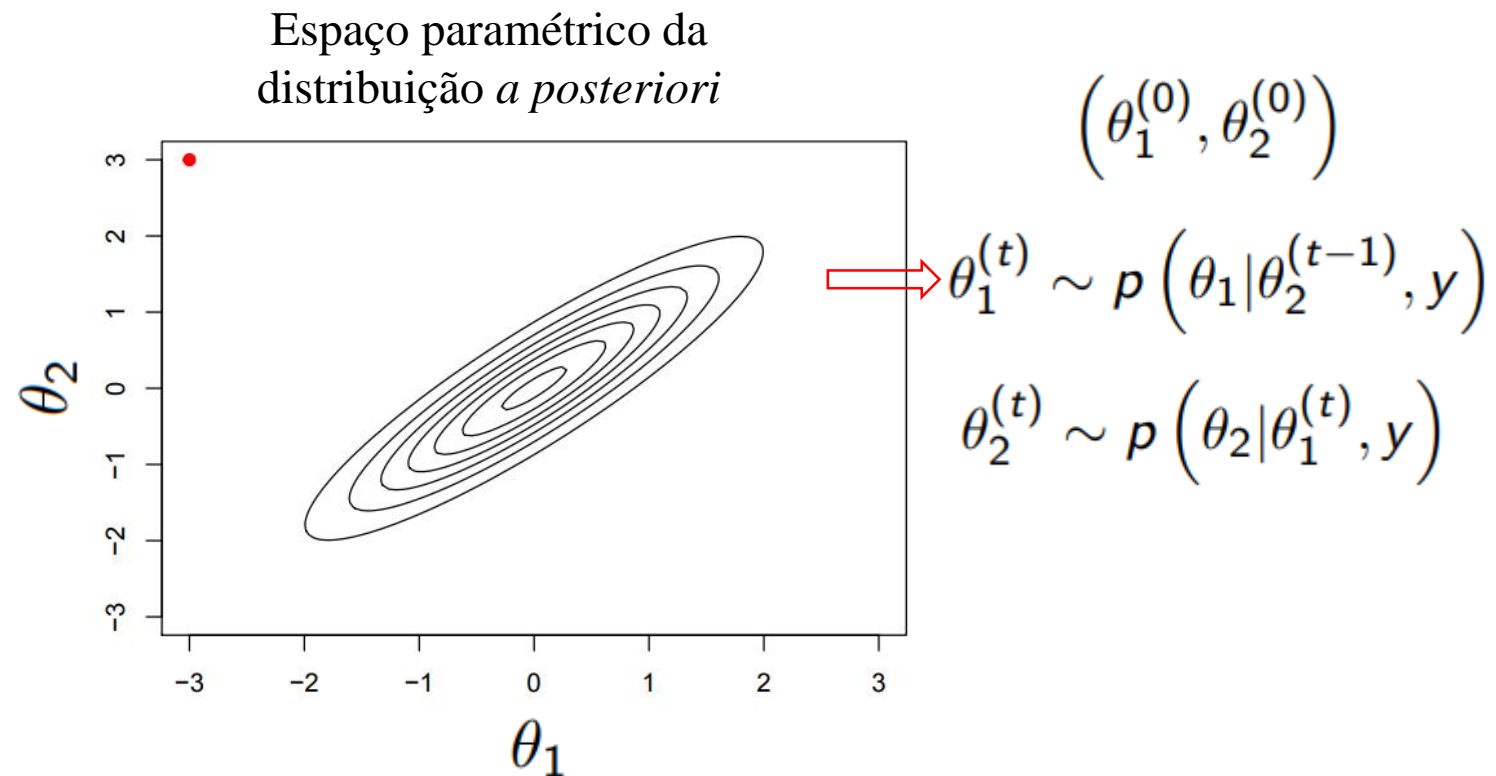
• Método de amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hastings

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;





• Método a amostragem:

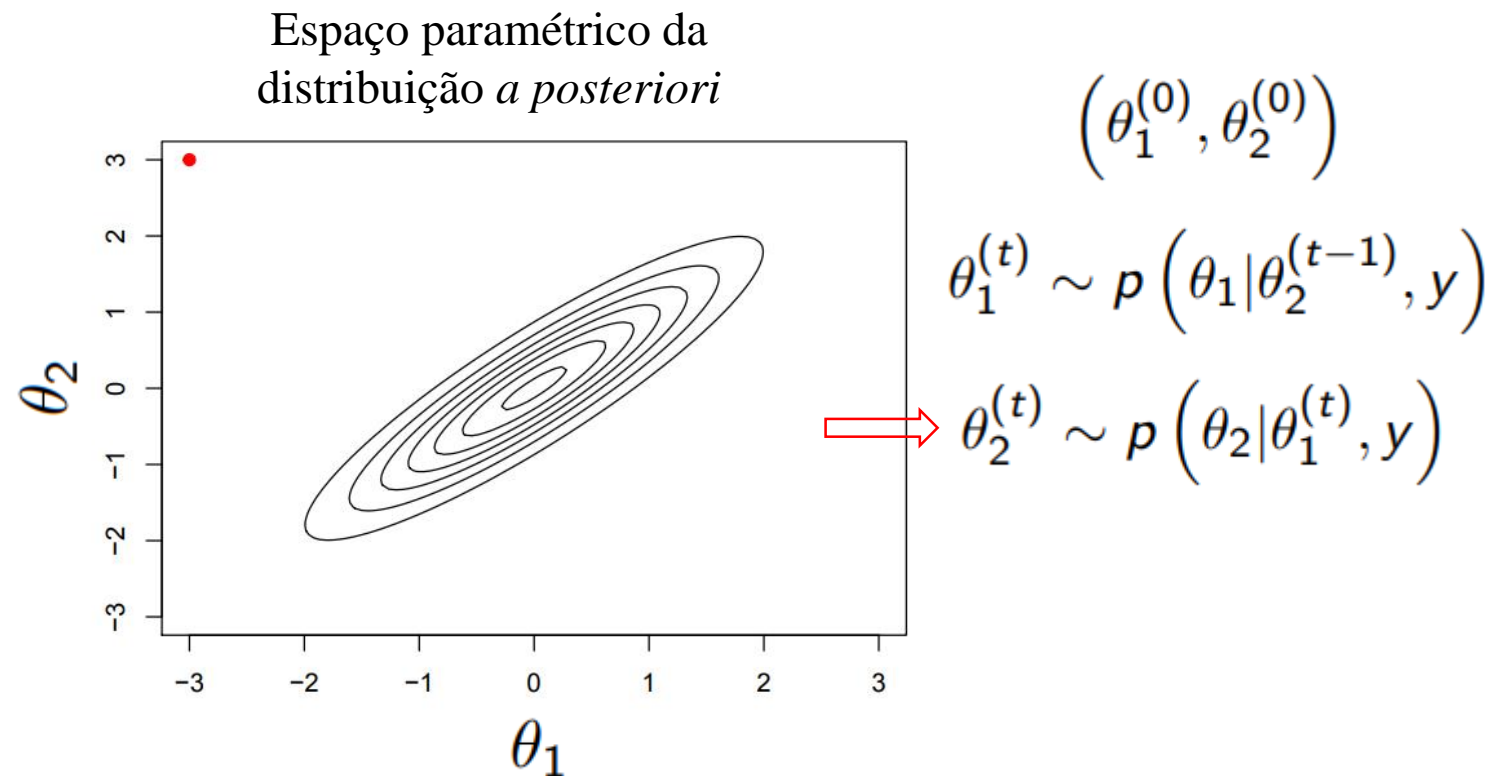
- Gibbs
- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1 | \theta_2, y) \\ p(\theta_2 | \theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo



• Método a amostragem:

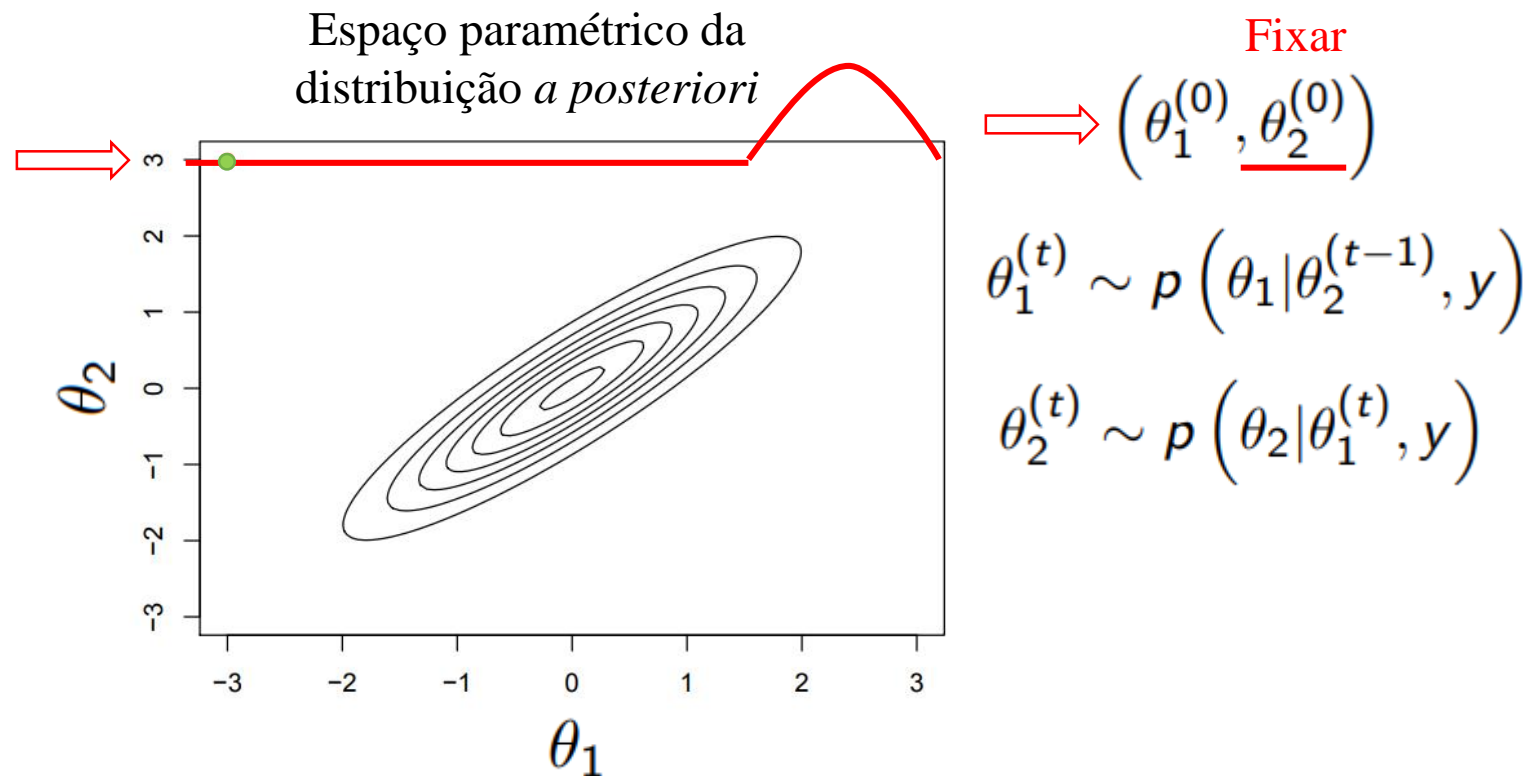
- Gibbs
- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;

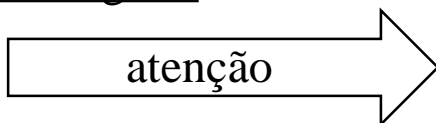
$$p(\theta|y) \xrightarrow{\text{com}} \theta = (\theta_1, \theta_2) \xrightarrow{\text{amostrar}} \begin{cases} p(\theta_1 | \theta_2, y) \\ p(\theta_2 | \theta_1, y) \end{cases}$$

Distribuição Alvo

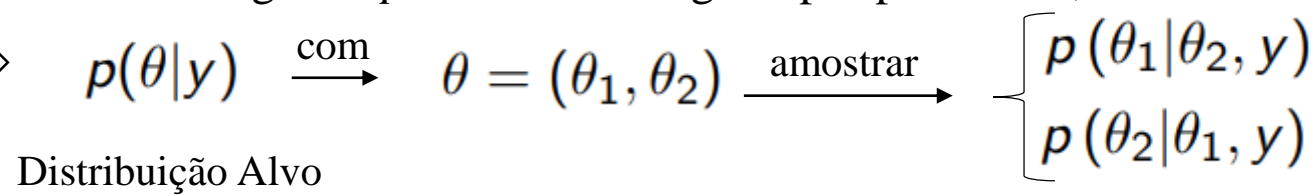


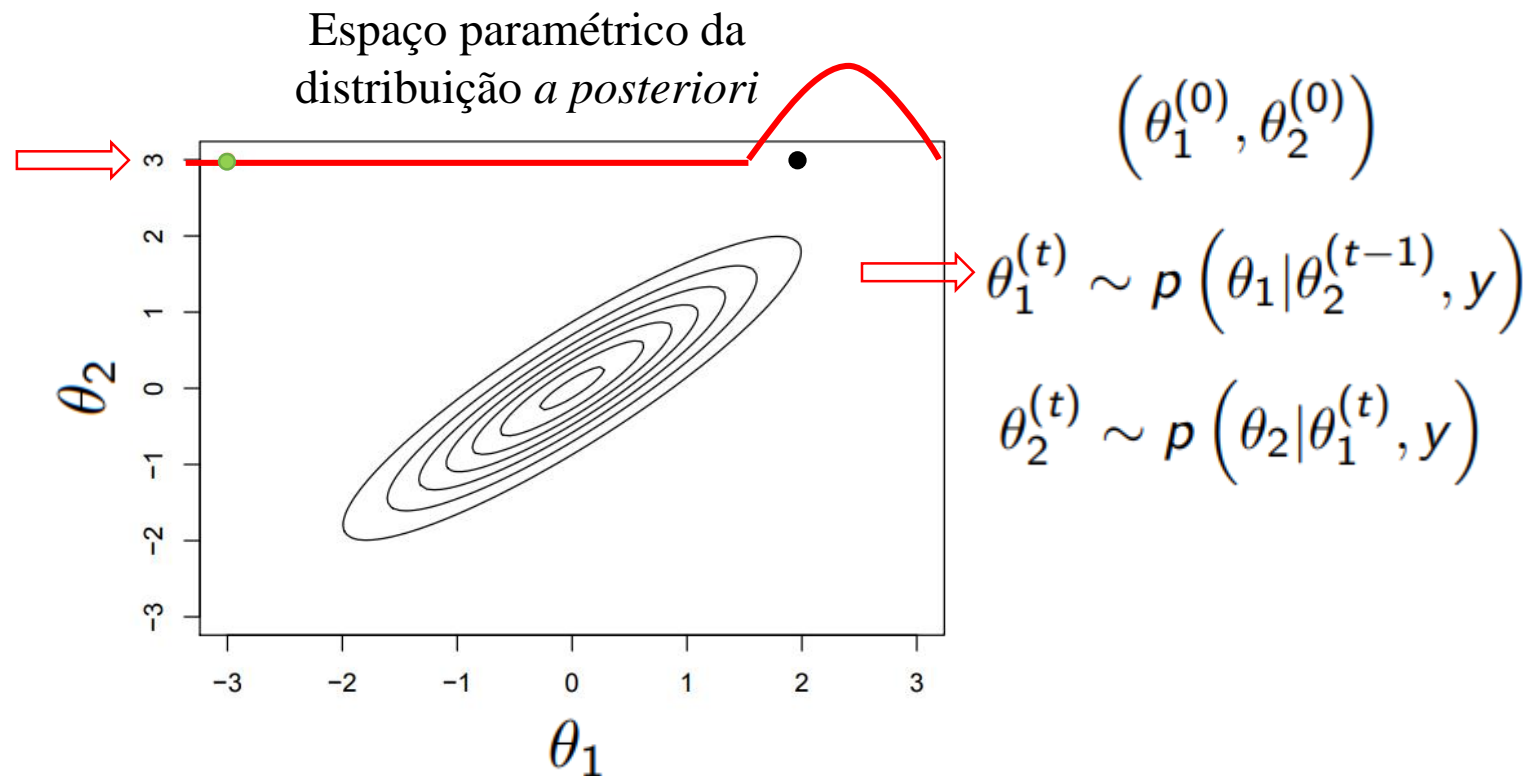
• Método de amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



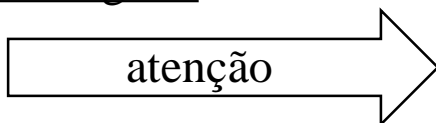
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



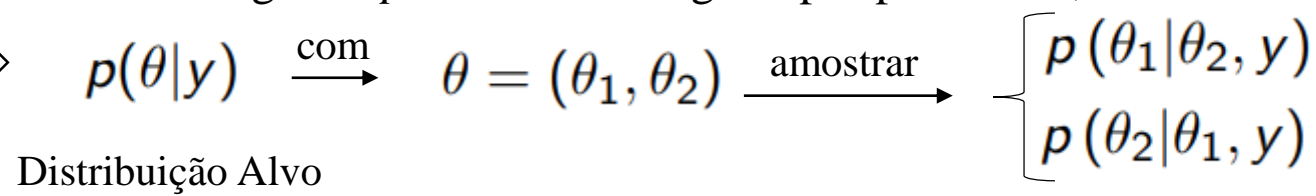


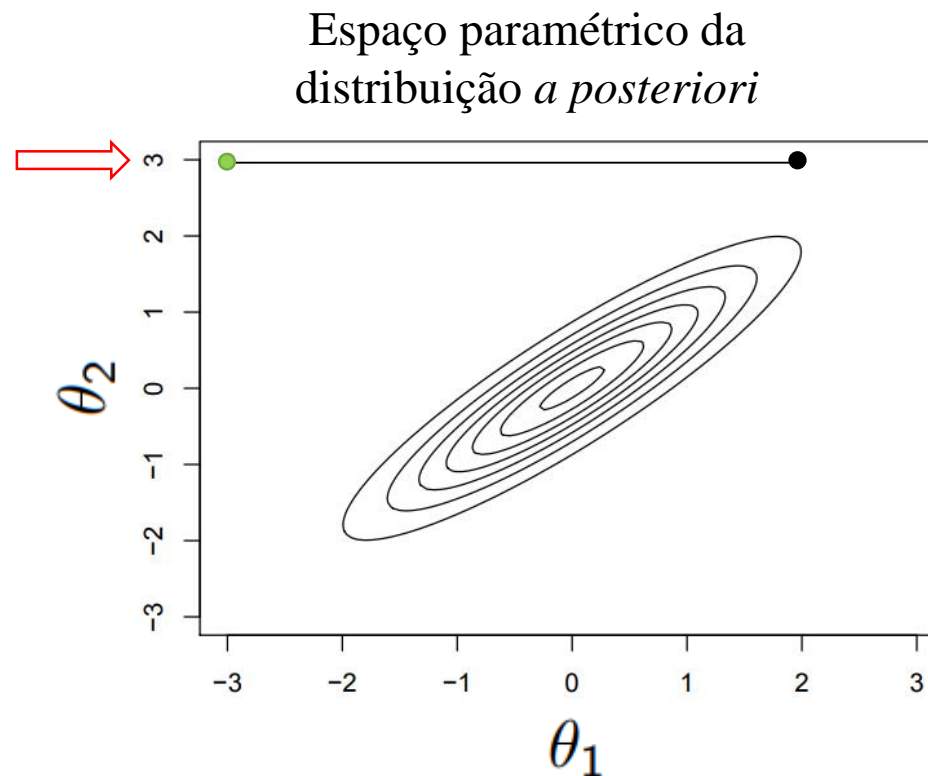
• Método de amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;





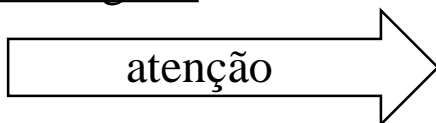
$$(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$$

$$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$$

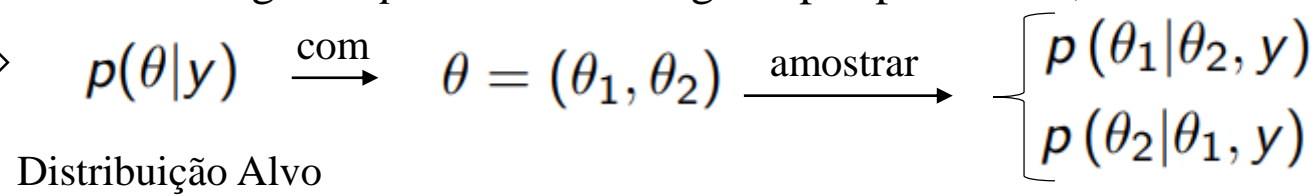
$$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$$

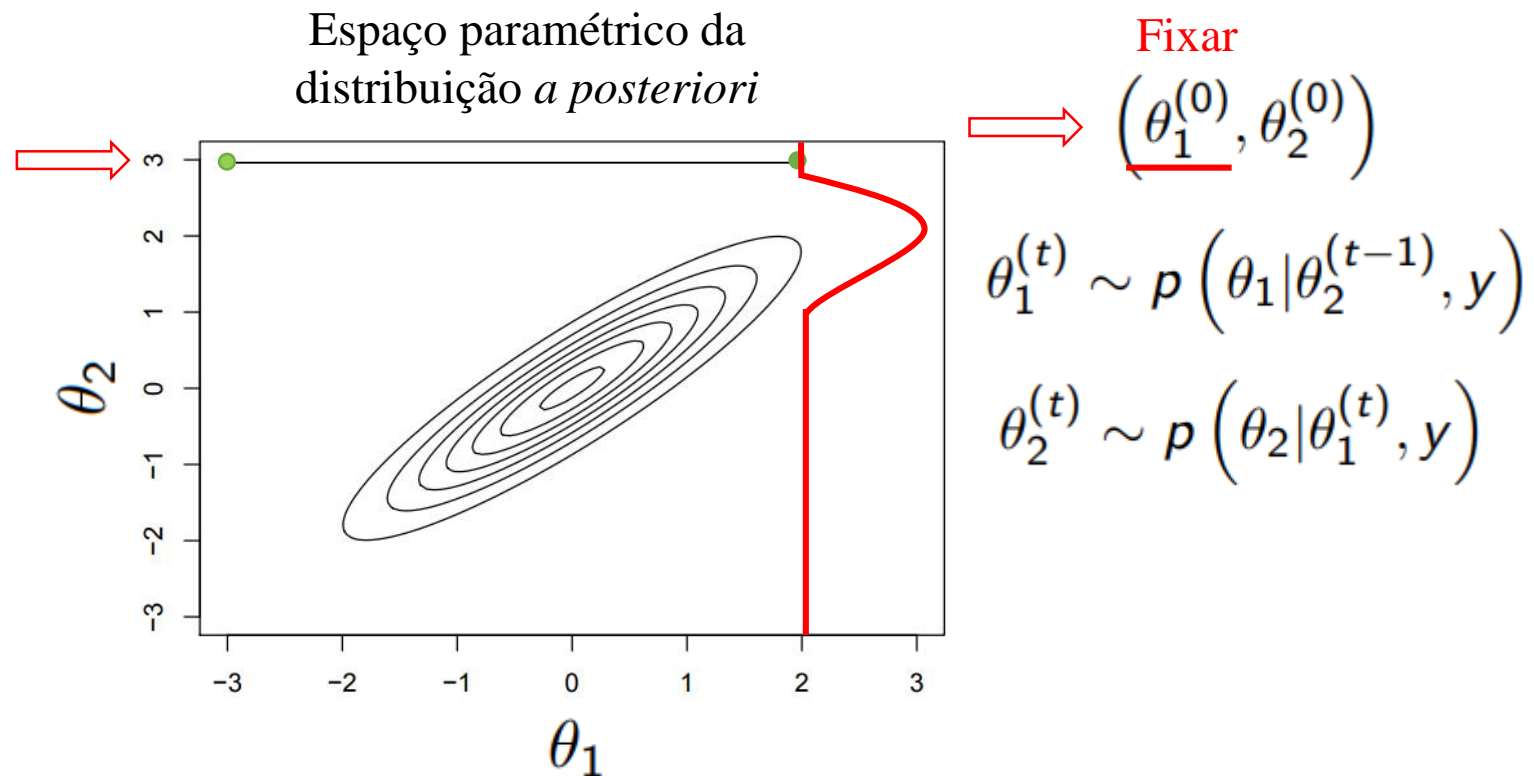
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



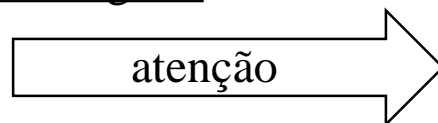
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



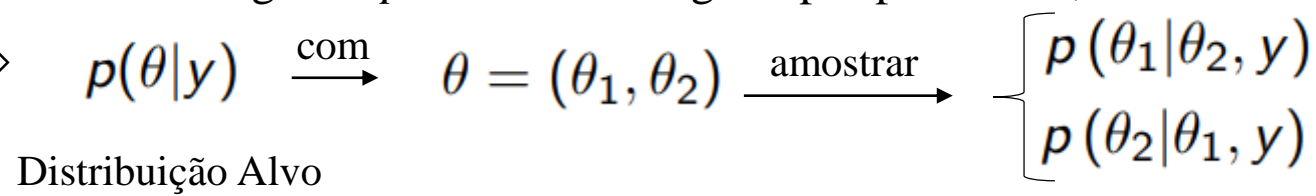


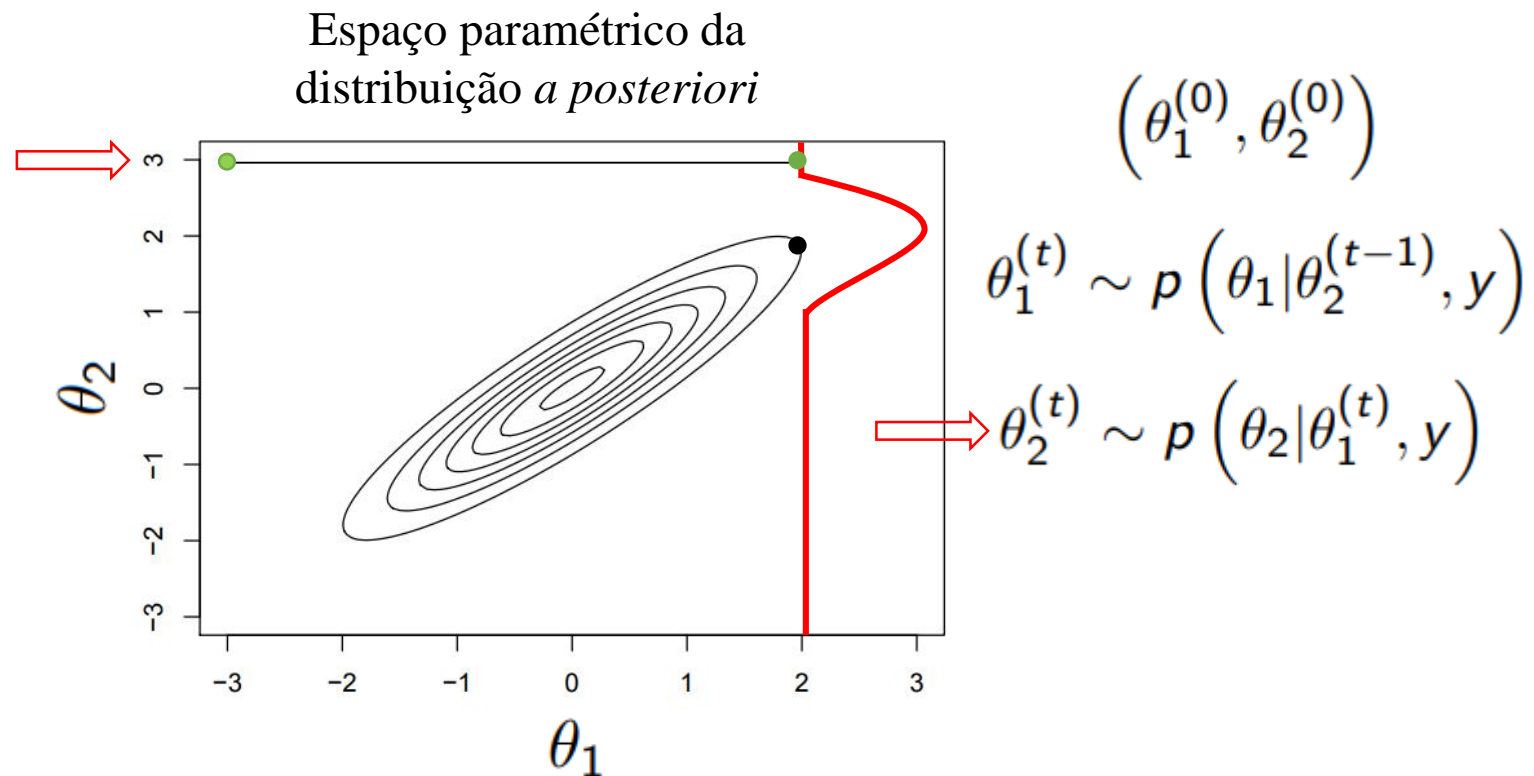
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



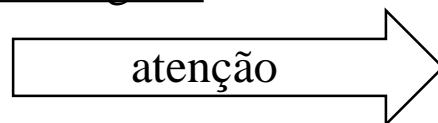
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



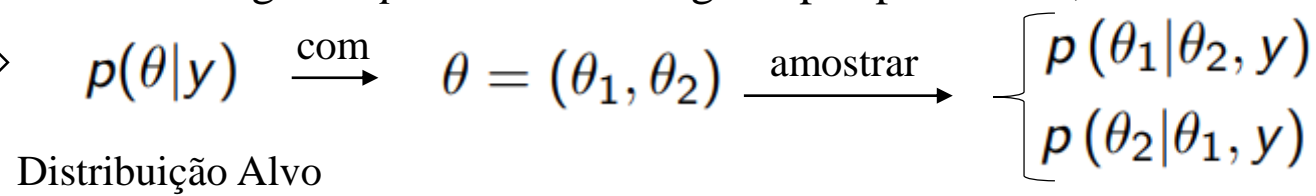


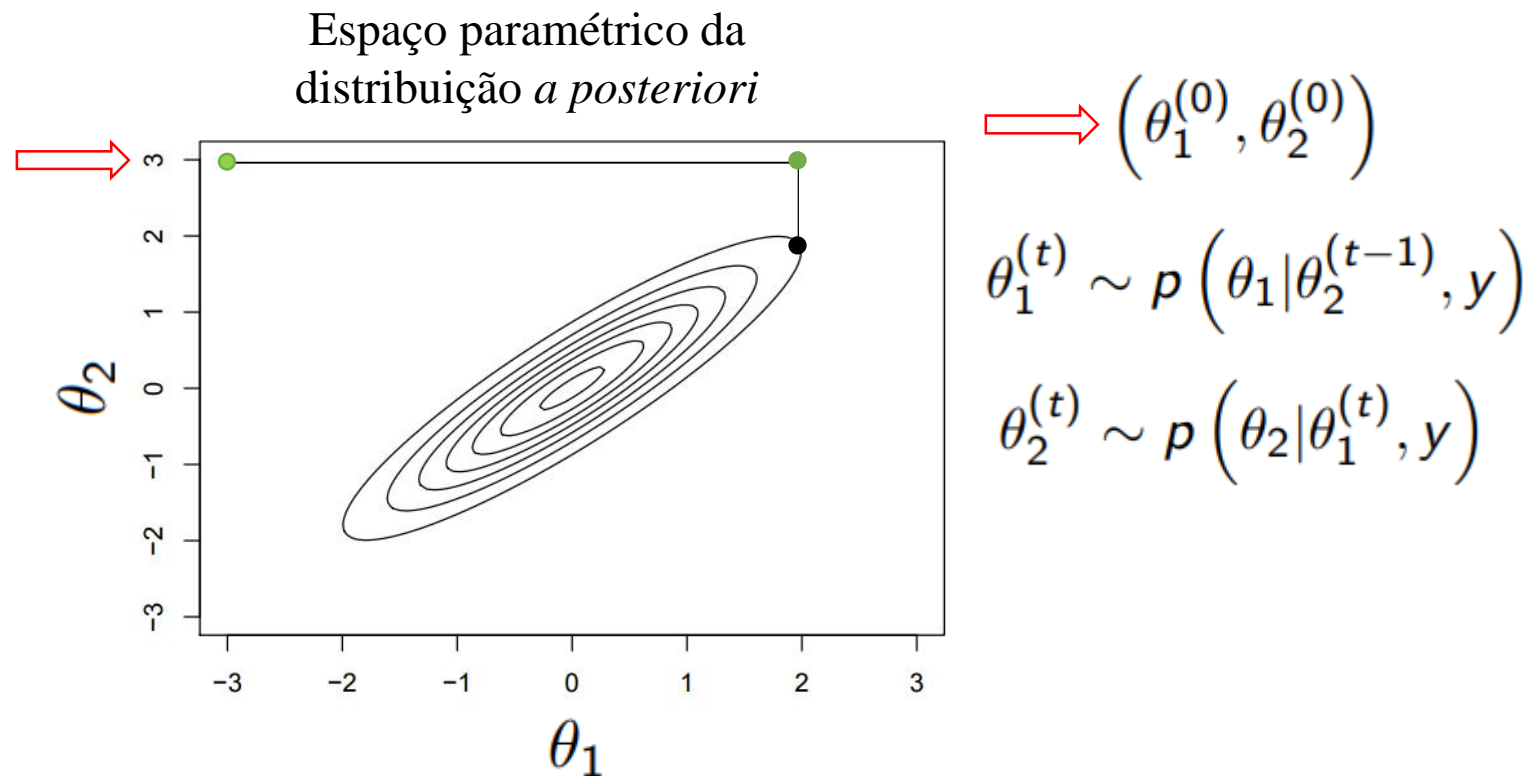
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



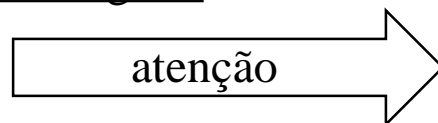
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



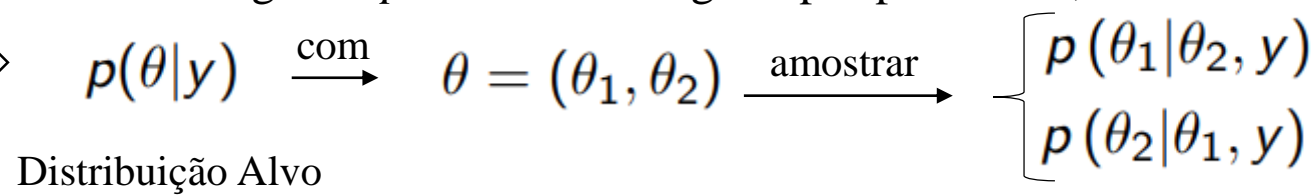


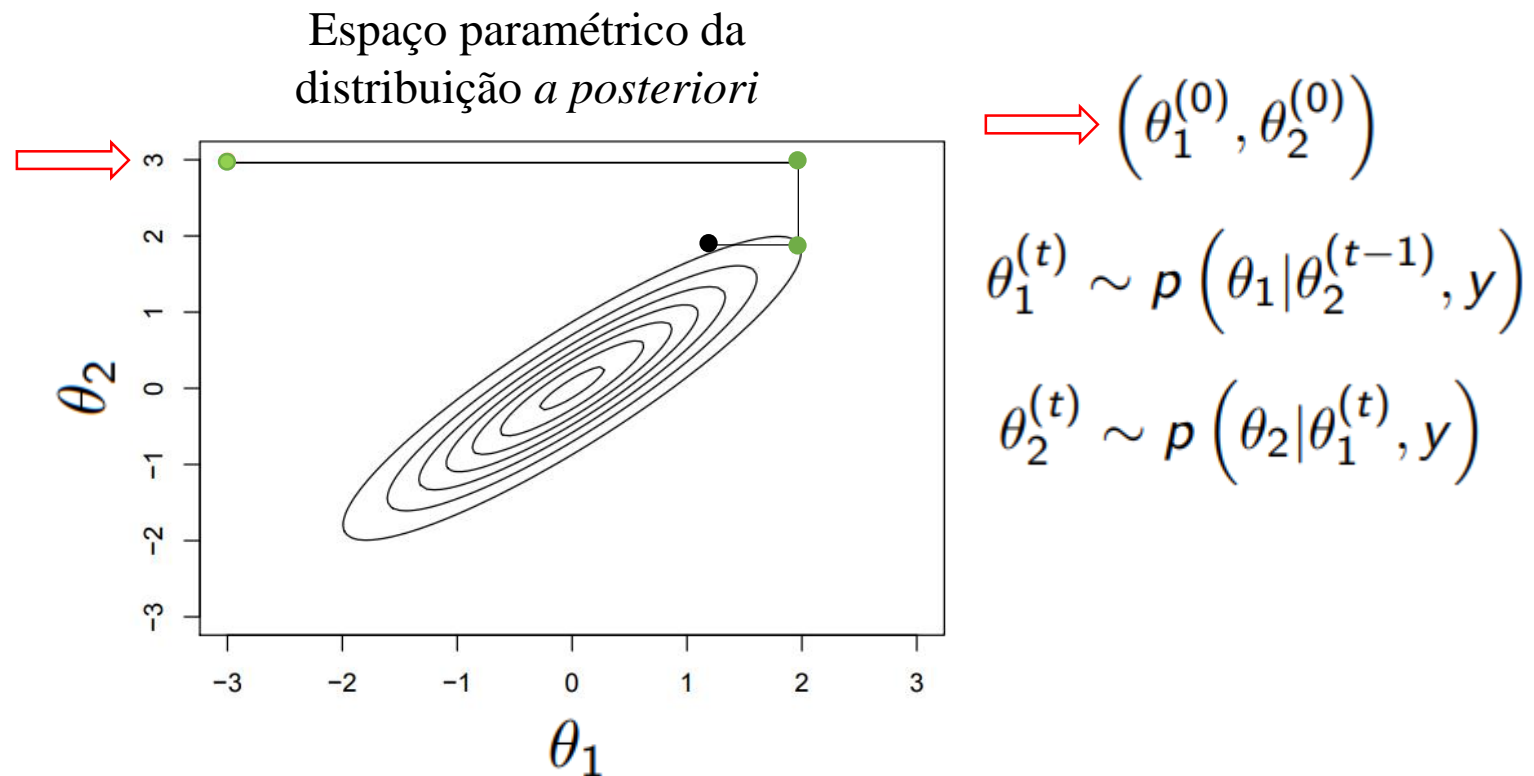
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



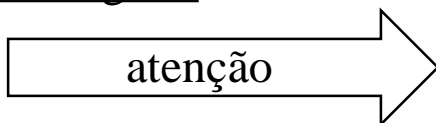
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



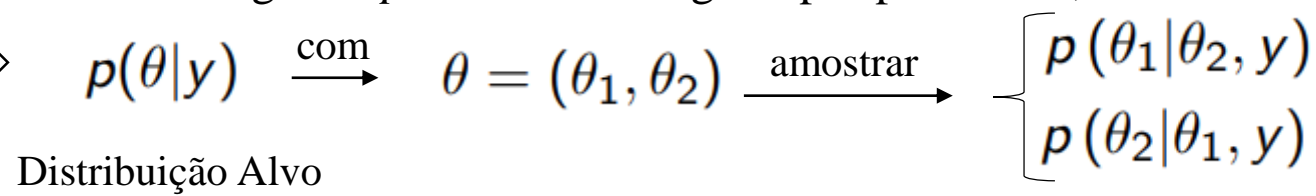


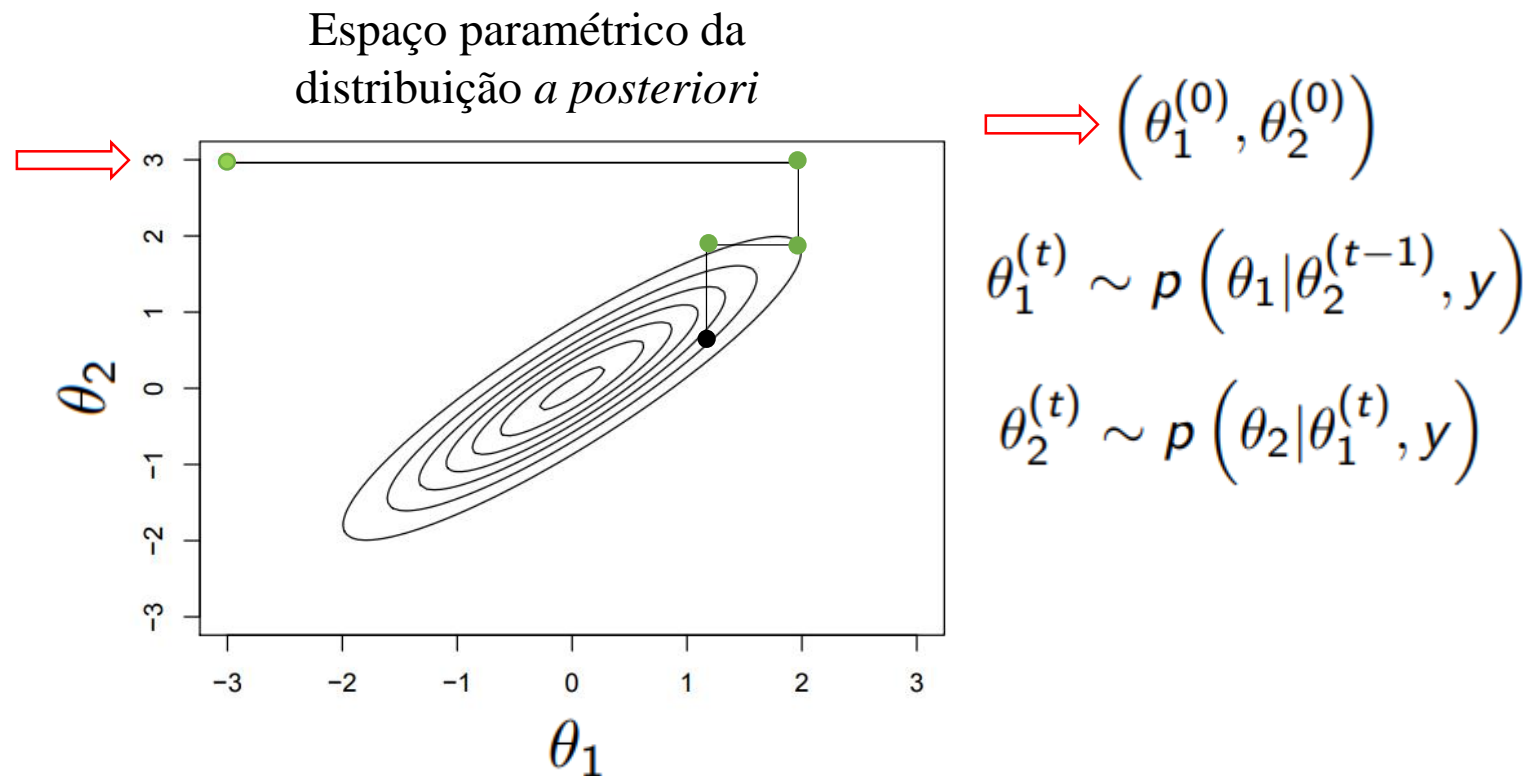
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



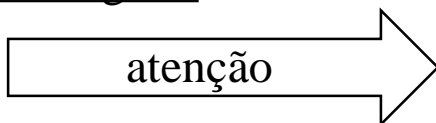
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



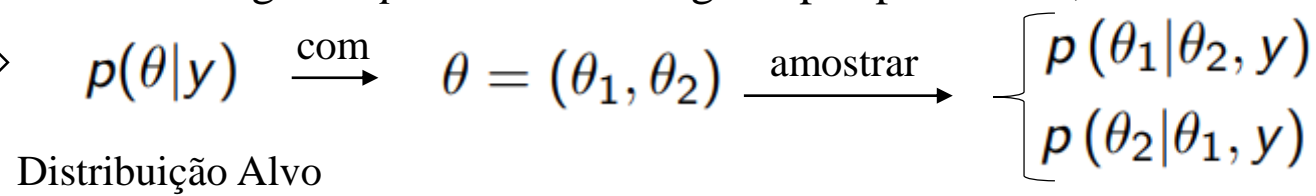


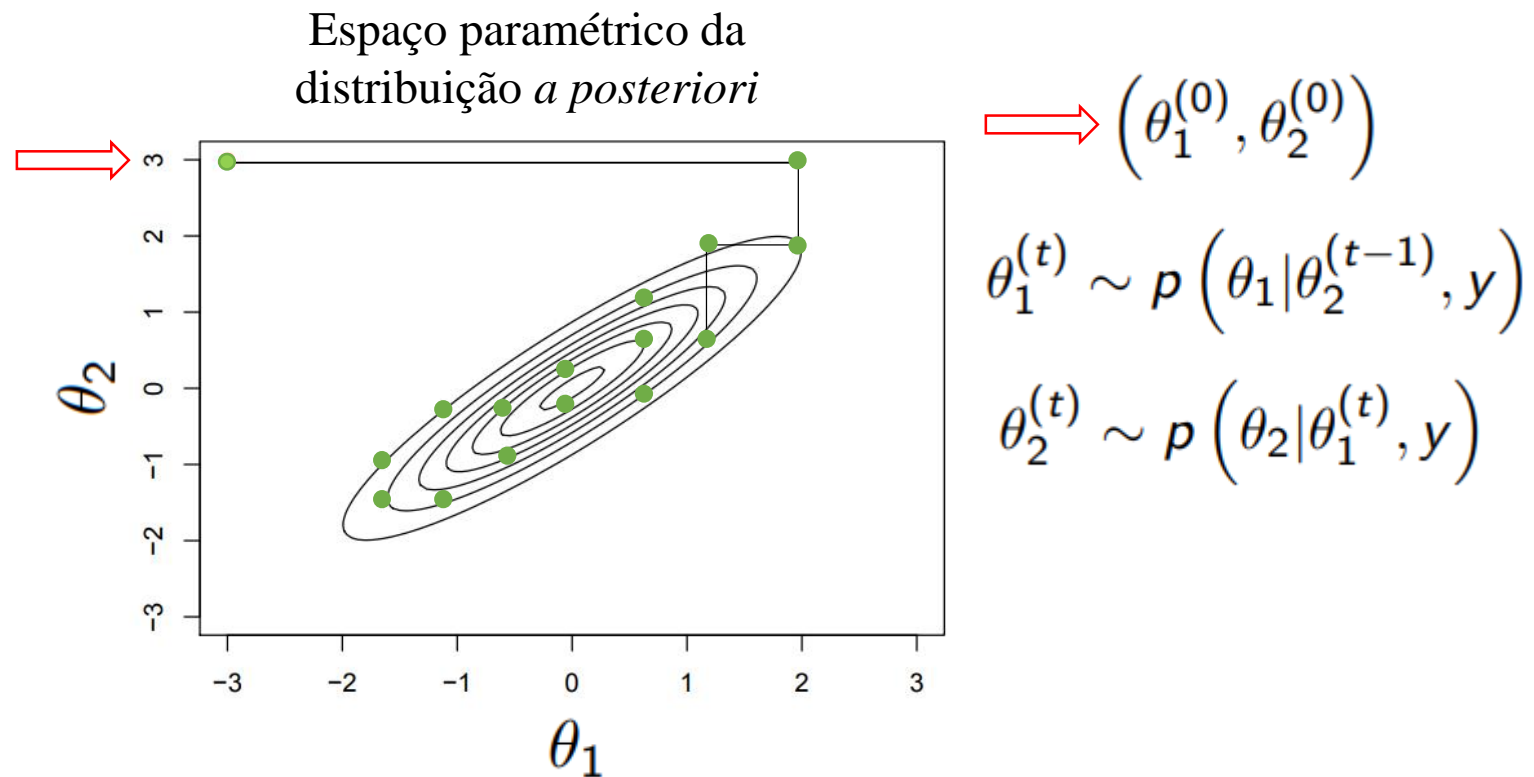
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



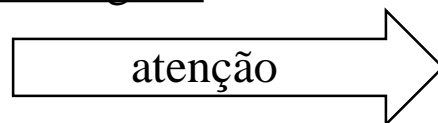
- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;



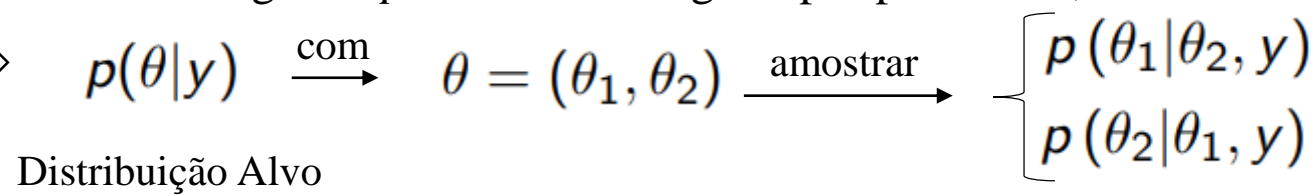


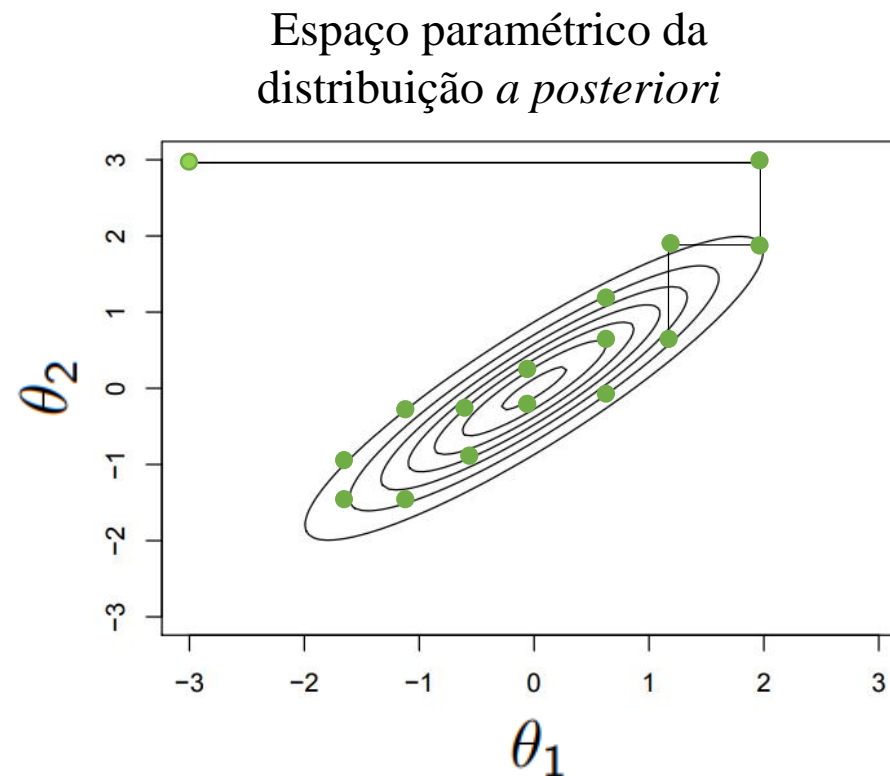
• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting



- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;





$$(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$$

$$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$$

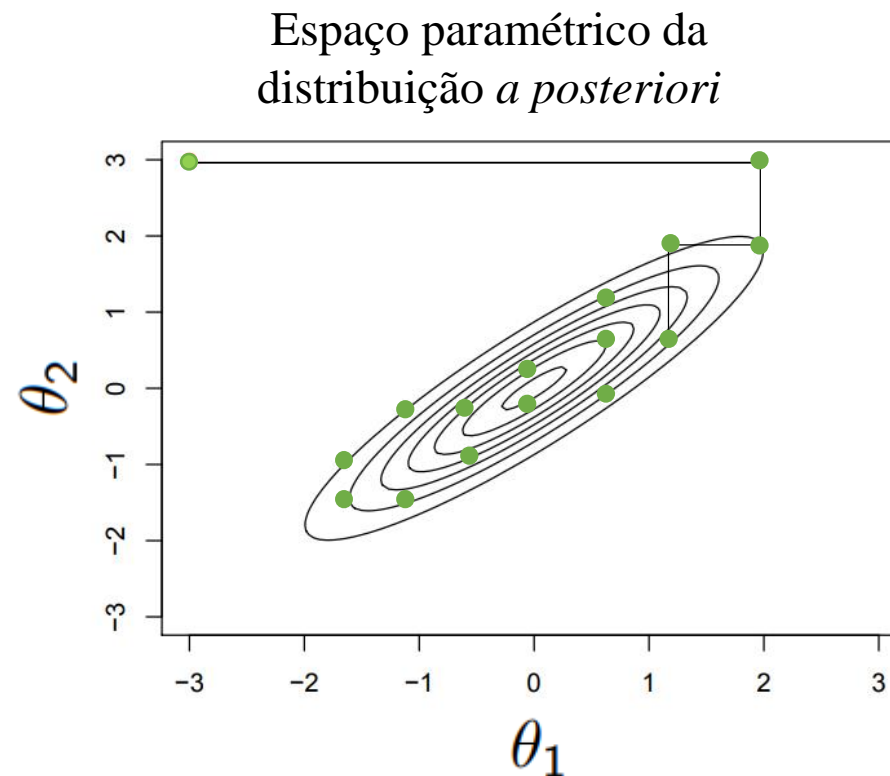
$$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$$

• Método a amostragem:

- Gibbs
- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* é marginal por parâmetro;
- Lenta convergência;
(Principalmente espaços paramétricos de alta dimensão).



$$(\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)})$$

$$\theta_1^{(t)} \sim p(\theta_1 | \theta_2^{(t-1)}, y)$$

$$\theta_2^{(t)} \sim p(\theta_2 | \theta_1^{(t)}, y)$$

- Método a amostragem:

- Gibbs

- Metropolis-Hasting

atenção

- Amostragem *a posteriori* conjunta;

- Lenta convergência;

Proporção de teste

(aceitação/rejeição) por

iteração ainda é muito alta.

Estatísticas & Aquicultura.

Com: Carlos Antônio Zarzar

carloszarzar_@hotmail.com

Obrigado!
Bons estudos!

“Hierarquia, as vezes é necessário, entretanto nem sempre é preciso.”