

This is a Very Important Title!

Person McSomething
(Dated: October 17, 2021)

This abstract is abstract.

If you want to learn more about using L^AT_EX, you should check UiO's official tutorials: <https://www.mn.uio.no/ifi/tjenester/it/hjelp/latex/>
If you are familiar with L^AT_EX and you want to learn more about the REVTeX4-1 document class, check: http://www.physics.csbsju.edu/370/papers/Journal_Style_Manuals/auguide4-1.pdf

I. INTRODUKSON

Alt materiale består av små partikler. For å kunne teste teorier eksperimentelt og kunne finne nye egenskaper ved partikler, så vil man måtte kunne kontrollere bevegelsen til en partikkel.

Gauss' lov forteller oss at divergensen til det elektriske feltet \mathbf{E} i et lukket volum, i vakuum, er definert av ladingene i volumet. For en ladningstetthet ρ og permitiviteten i vakuum, ε_0 , så har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (1)$$

Så for å fange en partikkel innenfor et lukket område, vil det ikke være mulig å ha et eksternt felt som peker inn mot en partikkel fra alle kanter, siden partikkelen da må være positiv for å gjøre den totale divergensen null. En løsning ble gitt av Hans George Dehmel, som tok inspirasjon fra F. M. Penning, og har navngitt instrumentet for en Penning felle¹. Fellen går ut på å bruke både et elektrisk og magnetisk felt for å få ladde partikler til å gå i sirkulærliknende baner. Penning fellen er spesielt nyttig til presisjonsmåling, og den brukes for eksempel ved CERN for å holde antiprotoner. Diagrammet i figur 1 viser skjemtisk hvordan en Penning felle er konstruert².

For å kunne gjøre beregninger så trenger man å vite hvordan partikler med forskjellige egenskaper vil oppføre seg i en Penning felle. I teorikapitlet ser vi på hvordan vi kan finne den analytiske løsningen for én partikkel. Vi skal videre se i metode delen hvordan vi kan numerisk regne ut banene til et flerpartikkel system. I resultat og

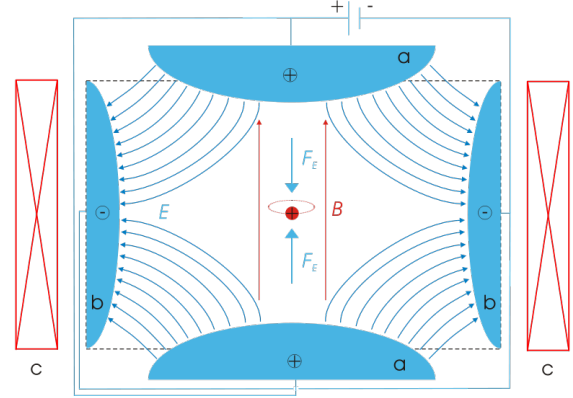


Figure 1. En skjemtisk illustrasjon av en Penning felle. Diagrammet er et snitt av fellen hvor den nedre og øvre elektrodene, a , er positive, og den tredje elektroden, b er en sirkulær negativt ladd elektrode. I midten er det en positiv ladd partikkel. Bildet er hentet fra Wikipedia Commons

diskusjonsdelen så ser vi på hva vi kom fram til og hva resultatene betyr, som oppsummeres og konkluderes i konklusjonsdelen.

II. TEORI

Det elektriske feltet \mathbf{E} og det elektriske potensialet \mathbf{B} relaterer til hverandre som følgende:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2)$$

Om vi har et elektrisk felt E og et magnetisk felt \mathbf{B} så vil kraften på en ladd partikkel, \mathbf{F} , være gitt ved Lorentz kraften:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

hvor q er ladningen til partikkelen.

En ladd partikkel danner sitt eget elektriske felt. For flere ladde partikler så vil hver partikkel bidra til det totale elektriske feltet:

$$\mathbf{E} = k_e \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (4)$$

¹ https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/ion-trapping/public/PwTCP_chap1.pdf

² https://en.wikipedia.org/wiki/Penning_trap#/media/File:Penning_Trap.svg

Partikkene vil også bidra til det totale magnetfeltet, men siden $|\vec{E}_p| \approx \left| \frac{\vec{E}_p}{c} \right|$, hvor c er lyshastigheten, ignorer vi bidragene til magnetfeltet fra partikkene.

En Penning felle kan bli vist skjematisk som vist i 1

For en ideel Penning felle så er det elektriske feltet definert:

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) , \quad (5)$$

hvor V_0 er størrelsen til det elektriske potensialet påført elektrodene. d er den karakteristiske dimensjonen og er definert:

$$d = \sqrt{z_0^2 + r_0^2/2} \quad (6)$$

I figur 1 så kan man se at kraften i y-retningen vil kansellere hverandre. Siden det elektriske feltet kurver ut mot ringen, så kan man se at feltet kun har xy-komponent i midtlinjen av penningfellen. Siden vi da kun trenger å videre begrense bevegelsen i xy-retning, så bruker vi et magnetfelt:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z = (0, 0, B_0) \quad (7)$$

Via newtons andre lov så kan vi vise at bevegelsen for en enkelt partikkel vil være gitt av differensiallikningene 8, 9 og 10, refer til appendix ?? for utregning.

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2} \omega_z^2 x = 0 , \quad (8)$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2} \omega_z^2 y = 0 , \quad (9)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 , \quad (10)$$

hvor

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

De to første likningene, 8 og 9, er avhengig av hverandre, så vi kombinerer de i

$$f(t) = x(t) + iy(t) ,$$

Hvor vi da får

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2} \omega_z^2 f = 0 . \quad (11)$$

Se appendix B for utregning. Den generelle løsningen er da:

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} , \quad (12)$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Siden

$$\omega_{\pm}$$

skal være reelle tall, så har vi restriksjonen

$$\omega_0^2 - 2\omega_z^2 \geq 0$$

$$\frac{|q|^2 B_0^2}{m^2} \geq \frac{2|q|V_0}{md^2}$$

Som gir oss

$$\frac{|q|B_0^2 d^2}{2mV_0^2} \geq 1 . \quad (13)$$

Og vi kan vise at maksimumet til $f(t)$ er gitt ved

$$R_+ = A_+ + A_- , \quad (14)$$

og at minimumet er gitt ved

$$R_- = |A_+ - A_-| . \quad (15)$$

Se appendix B for forklaring. Vi tenker oss initialverdiene

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Da får vi at

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+} , \quad (16)$$

og

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+} \quad (17)$$

Videre så kan vi finne den analytiske løsningen for den tredje differensiallikningen Eq:10. Ved å sette

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t) ,$$

med initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

så har vi at

$$z(t) = \frac{z_0}{2} e^{-i\omega_z t} + \frac{z_0}{2} e^{i\omega_z t} .$$

Referer til appendix app:?? for utregning.

III. METODE

IV. RESULTATER

V. DISKUSJON

VI. KONKLUSJON

ACKNOWLEDGMENTS

I would like thank myself for writing this beautiful document.

REFERENCES

- Reference 1
- Reference 2

Appendix A: Utregning av enkeltspartikkelens bevegelseslikning

Vi har posisjonsvektoren \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Newtons andre lov git oss at endringen i posisjonen er gitt ved

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{F}_i .$$

Kreftene på partikkelen er Lorentz kraften.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Bruker at $\mathbf{E} = -\nabla V$ og setter inn

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\nabla V + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Finner gradienten

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) .$$

Hvor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d^2} x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{V_0}{d^2} y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2V_0}{d^2} z$$

Løser kryssproduktet

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (B_0 \dot{y}) \hat{i} - (B_0 \dot{x}) \hat{j} = B_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = q \frac{V_0}{d^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + qB_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{qV_0}{md^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \frac{qB_0}{m} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innfører

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

Som gir oss

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som tilsvarer likningene

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 .$$

Appendix B: Utregning av $f(t)$ fra differensiallikningene og dens egenskaper

Vi har

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 .$$

Ved å skalere den ene likningen med i så får vi

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$i\ddot{y} + i\omega_0 \dot{x} - i\frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 ,$$

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x - i\ddot{y} - i\omega_0 \dot{x} + i\frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 .$$

Vi setter de sammen og får

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + i\omega_0(\dot{x} + \dot{y}) - \frac{1}{2}\omega_z^2(x + iy) = 0 .$$

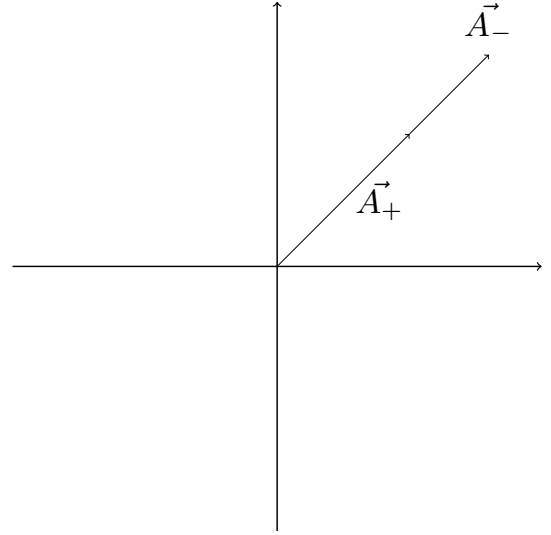


Figure 2. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Som er det samme som

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2}\omega_z^2 f = 0 .$$

Den generelle løsningen av f er

$$f(t) = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} ,$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Funksjonen f vil ha et maksimum når begge leddene går i samme retning, som man kan se i 2.

Vi kan da skrive at maksimumet R_+ er

$$R_+ = |A_+ + A_-| = A_+ + A_- .$$

På samme måte så vil minimumet være når leddene til f går i motsatte retninger, som vist i 3.

som vil si at

$$R_- = |A_+ - A_-|$$

Appendix C: Utregning av analytiske løsninger til differensiallikningene

Vi starter med

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t}$$

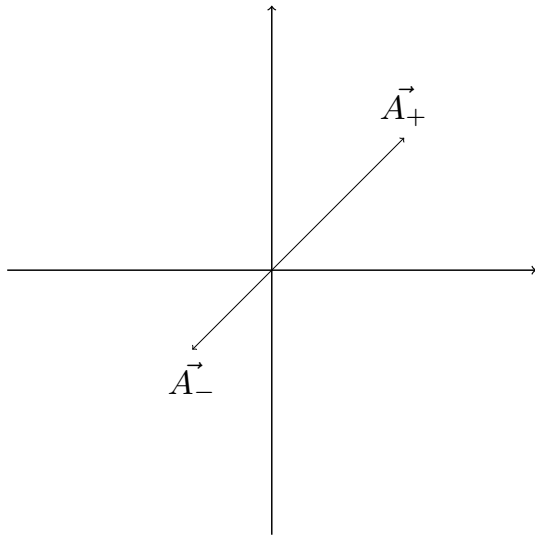


Figure 3. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Og har at

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

Det vil si

$$\operatorname{Re}(f(0)) = x_0$$

$$x_0 = A_+ + A_-$$

Og vi har

$$\dot{f}(0) = -i\omega_+ A_+ - i\omega_- A_-$$

$$\operatorname{Im}(\dot{f}(0)) = v_0$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- A_-$$

Stokker om

$$A_- = x_0 - A_+$$

Og setter inn

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- (x_0 - A_+)$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- x_0 + \omega_- A_+$$

$$v_0 = (\omega_- - \omega_+) A_+ - \omega_- x_0$$

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Og vi har

$$A_- = x_0 - A_+$$

$$A_- = x_0 - \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = \frac{x_0(\omega_- - \omega_+) - v_0 - \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Videre så har vi initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Vi starter da med

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t)$$

Som har den generelle løsningen

$$z(t) = c_1 e^{-i\omega_z t} + c_2 e^{i\omega_z t}$$

Bruker så initialverdiene

$$z(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow z_0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{z}(0) = -ic_1 \omega_z + i\omega_z c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

Som gir at

$$c_1 = \frac{z_0}{2}$$

$$c_2 = \frac{z_0}{2}$$

Og vi får løsningen

$$z(t) = \frac{z_0}{2} e^{-i\omega_z t} + \frac{z_0}{2} e^{i\omega_z t}$$

Note that this document is written in the two-column format. If you want to display a large equation, a large

figure, or whatever, in one-column format, you can do this like so:

This text and this equation are both in one-column format.

³

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (\text{C1})$$

Note that the equation numbering (this: C1) follows the appendix as this text is technically inside Appendix ???. If you want a detailed listing of (almost) every available math command, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics>.

And now we're back to two-column format. It's really easy to switch between the two. It's recommended to keep the two-column format, because it is easier to read, it's not very cluttered, etc. Pro Tip: You should also get used to working with REVTeX because it is really helpful in FYS2150.

One last thing, this is a code listing:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can add extra arguments using optional parameters:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can also list code from a file using `\lstinputlisting`. If you're interested, check https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Source_Code_Listings.

This is a basic table:

Table I. This is a nice table

Hey	Hey	Hey
Hello	Hello	Hello
Bye	Bye	Bye

You can a detailed description of tables here: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tables>.

I'm not going to delve into Tikz in any level detail, but here's a quick picture:

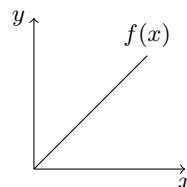


Figure 4. This is great caption

If you want to know more, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ>.

³ This equation is actually from quantum mechanics. “It’s called Schrödinger’s Time-Dependent Wave Equation”, named after the awesome Austrian physicist Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger. Yep, the “Schrödinger’s cat” guy. Pretty cool dude actually, check his wiki page: https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrodinger.

Erwin_Schrodinger. He was physics’ no. 1 Ladies’ man if there ever was one. Anyway, you will learn more about this equation in FYS2140. You can also find it printed on a glass wall in the UiO Physics Building (it really is that important).