This is a Very Important Title!

Person McSomething
(Dated: December 12, 2021)

This abstract is abstract.

If you want to learn more about using LaTeX, you should check UiO's official tutorials: https://www.mn.uio.no/ifi/tjenester/it/hjelp/latex/

If you are familiar with LaTeX and you want to learn more about the REVTeX4-1 document class, check: http://www.physics.csbsju.edu/370/papers/Journal_Style_Manuals/auguide4-1.pdf

I. INTRODUKSON

II. TEORI

A. Vet ikke om denne kan være med

I dette eksperimentet skal vi bruke Crank-Nicolson tilnærmingen. Denne kombinerer to andre tilnærminger: forrover differanse og bakover differanse. Forover differanse baserer seg på å at man kan finne stigningen mellom et punkt u_i^n og neste punkt u_i^{n+1} ved ligningen

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\delta x)^2}$$

Vi ser her på kun i én dimensjon. Vi har også antatt at tidstegene er så små at punktet u_i^n kun kan bli påvirket av nabopunktene. Da får vi at

$$u_i^{n+1} = u_i^n + (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

Hvis vi nå definerer $\alpha \equiv \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ får vi at

$$u_i^{n+1} = (1-2\alpha)u_i^n + \alpha(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

Så har vi bakover differanse som baserer seg på å finne stigningen mellom forrige tidspunkt u_i^{n-1} og det nåværende tidpunktet u_i^n.

$$\frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

og på samme måte som med forover får vi nå

$$u_i^{n-1} = (1+2\alpha)u_i^n - \alpha(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)$$

B. Numerisk tillnærming

V har da fra Schrödingerlikningen at

$$i\frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + v(x,y)$$

eller

$$\frac{\delta u}{\delta t} = i\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - iv(x,y)$$

Vi skal så bruke Crank-Nicolson tilnærming så vi starter med å approksimere den venstre-siden

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Hvor n er tidstegt vi er i. Crank-Nicolson baser seg på forover og bakover tilnærminger. For forover har vi at

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^n$$

mens bakover har vi

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^{n+1}$$

Så kombinerer vi disse forover og bakover

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \theta F_{i,j}^{n+1} - (1-\theta)F_{i,j}^n$$

slik at for $\theta = 1$ har vi bakovertilnærmingen og for $\theta = 0$ har vi forovertilnærmingen. For Crank-Nicolson setter vi $\theta = \frac{1}{2}$ slik at vi får

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

III. METODE

A. Initialtilstand

Vi trenger en initialtilstand, altså tilstanden $u(x,y,t=0) = u_{i,j}^0$. Vi skal bruke en Gaussisk initialtilstand på formen

$$u(x,y,t=0) = \frac{1}{C}e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x-x_c) + ip_y(y-y_c)}$$

Siden dette er Gaussisk så vil x_c og y_c være toppunktet til $p_{i,j}$ og der det vil være mest sannsynlig at partikkelen er. p_x og p_y er bevegelsesmengden til partikkelen. σ_x og σ_y er bredden til funksjonen. C er normaliseringskonstanten. Siden vi skal gjøre dette over et gitter får vi heller

$$u_{i,j}^0 = \frac{1}{C}e^{-\frac{(x_i-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i-x_c) + ip_y(y_j-y_c)}$$

Vi må også normalisere dette, altså at $\sum_{i,j} u^n_{i,j} * u^n_{i,j} = \sum_{i,j} p^n_{i,j} = 1$, og så det vi da må gjøre er å la

$$C = \sum_{i,j} |e^{-\frac{(x_i-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i-x_c) + ip_y(y_j-y_c)}|^2$$

Å normalisere slikt gjør vi kun i initialtilstanden, men dersom systemet er nøyaktig nok, vil $\sum_{i,j} p$ holde seg ganske nærme 1.

B. Bruke Crank-Nicolson

Vi hadde fra Crank-Nicolson at

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F^{n+1}_{i,j} - F^n_{i,j})$$

I vårt tilfelle er

$$F_{i,j} = i\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i\frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - iv(x,y)u$$

så

$$F^n_{i,j} = i\frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} + i\frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} - iv(x,y)u^n$$

Vi bruker deretter at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} \approx \frac{u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

Siden i er den eneste som varierer i med hensyn på x, er det denne vi vil bruke her. Tilsvarende får vi at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} =\approx \frac{u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

Så vi får da at

$$F^n = i\begin{pmatrix} \frac{u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}}{\Delta x^2} \\ + \frac{u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}}{\Delta y^2} - v_{i,j}u_{i,j} \end{pmatrix}$$

Vi går igjen tilbake til

$$\frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F^{n+1}_{i,j} - F^n_{i,j})$$

og flytter over slik at vi får

$$u^{n+1}_{i,j} - \frac{\Delta t}{2}F^{n+1}_{i,j} = u^n_{i,j} + \frac{\Delta t}{2}F^n_{i,j}$$

Vi utvider F og får

$$\begin{matrix} u^{n+1}_{i,j} \\ -\frac{i\Delta t}{2\Delta x^2}(u^{n+1}_{i+1,j} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i-1,j}) \\ -\frac{i\Delta t}{2\Delta y^2}(u^{n+1}_{i,j+1} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i,j-1}) \\ \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u^{n+1}_{i,j} \end{matrix} = \begin{matrix} u^n_{i,j} \\ +\frac{i\Delta t}{2\Delta x^2}(u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}) \\ +\frac{i\Delta t}{2\Delta y^2}(u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}) \\ -\frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u^n_{i,j} \end{matrix}$$

Vi skal gå over samme steglengde på x og y aksen så vi setter $\Delta x = \Delta y = h$. Så definerer vi $r \equiv \frac{i\Delta t}{2h^2}$ slik at vi har

$$\begin{matrix} u^{n+1}_{i,j} \\ -\frac{i\Delta t}{2\Delta x^2}(u^{n+1}_{i+1,j} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i-1,j}) \\ -r(u^{n+1}_{i,j+1} - 2u^{n+1}_{i,j} + u^{n+1}_{i,j-1}) \\ \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u^{n+1}_{i,j} \end{matrix} = \begin{matrix} u^n_{i,j} \\ +r(u^n_{i+1,j} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i-1,j}) \\ +r(u^n_{i,j+1} - 2u^n_{i,j} + u^n_{i,j-1}) \\ -\frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u^n_{i,j} \end{matrix}$$

C. Matriseform

FOr å gjøre det litt raskere skal vi konvertere om til matriseform som i Kilde 1. Denne gangen har vi imedlertid to dimensjoner så det blir litt annerledes. Første forskjellen er at vi har en todimensjonal matrise med elementer $u_{i,j}$ hvor radene er y-aksen og kollonnene y-aksen, mens vi trenger en vektor for å tidsuvikle ved hjelp av matriser. Vi vil derfor lage en vektor $\vec{u}$ som organiserer matrisen slik

$$\vec{u} = (u_{0,0}, u_{1,0}, u_{2,0}(...)u_{M-2,0}u_{0,1}, (...)u_{0,M-2}, (...)u_{M-2,M-2})$$

Så $k = i + j \cdot (M-2)$. Det betyr at $\vec{u}$ er $(M-2)^2$ stor. Vi skal så lage matrisene A og B slik at

$$B\vec{u}^n = \vec{c}$$

og

$$A\vec{c} = \vec{u}^{n+1}$$

La oss ta et eksempel i $(M-2) = 3$. Da vil matrisen A og B være

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & a_1 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & a_2 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & a_3 & -r & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -r & a_4 & & -r & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_5 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & a_6 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_7 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_8 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & b_1 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & b_2 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & b_3 & r & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r & b_4 & & r & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & r & b_5 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & b_6 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_7 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_8 \end{pmatrix}$$

Hvor diagonalene er satt sammen av vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ hvor elementene er gitt som

$$a_k = 1 + 4r + \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

og

$$b_k = 1 - 4r - \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

Av disse matrisene kan vi se to ting. Foruten om diagonalen er $A = -B$. I tillegg foruten om diagonalene er matrisene satt sammen av to $M-2 \times M-2$ matriser.

Diagonalen til B består av matrisen P med som har sidediagonalene r. For $M-2=3$ får vi da at

$$P = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$

Denne matrisen vil gå diagonalt ned over B. Som sidediagonaler til denne matrisen, altså under og til venstre for P vil vi har matrisen R som har diagonalen bestående av r. Så for $M-2=3$ har vi da

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Så da har vi uten å ta hensyn til diagonalen at

$$-A = B = \begin{pmatrix} P & R & 0 \\ R & P & 0 \\ 0 & R & P \end{pmatrix}$$

Legger vi så til vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ langs diagonalene har vi matrisene A og B.

IV. RESULTATER

V. DISKUSJON

VI. CONKLUSJON

ACKNOWLEDGMENTS

I would like thank myself for writing this beautiful document.

REFERENCES

- Reference 1

- Reference 2

Appendix A: Name of appendix

This will be the body of the appendix.

Appendix B: This is another appendix

Tada.

Note that this document is written in the two-column format. If you want to display a large equation, a large figure, or whatever, in one-column format, you can do this like so:

This text and this equation are both in one-column format.
[?]

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \tag{B1}$$

Note that the equation numbering (this: B1) follows the appendix as this text is technically inside Appendix B. If you want a detailed listing of (almost) every available math command, check: https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics.

And now we're back to two-column format. It's really easy to switch between the two. It's recommended to keep the two-column format, because it is easier to read, it's not very cluttered, etc. Pro Tip: You should also get used to working with REVTeX because it is really helpful in FYS2150.

One last thing, this is a code listing:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can add extra arguments using optional parameters:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can also list code from a file using `lstinputlisting`. If you're interested, check https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Source_Code_Listings.

This is a basic table:

Table I. This is a nice table

Hey	Hey	Hey
Hello	Hello	Hello
Bye	Bye	Bye

You can a detailed description of tables here: https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tables.

I'm not going to delve into Tikz in any level detail, but here's a quick picture:

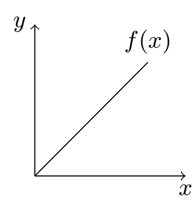

Figure 1. This is great caption

If you want to know more, check: https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ.