

Felle for ladede partikler

Henrik Modahl Breitenstein and Carl Petter Duedahl

(Dated: October 25, 2021)

Vi ser på analytiske og numeriske løsninger av bevegelsesbanene til en- og flerpartikkelsystem i en penningfelle, med og uten Coloumb krefter mellom partikkelene. Vi ser på presisjonen til Forward-Euler og Runge Kutta 4 i situasjonen. I tillegg ser vi på hvordan systemet oppfører seg når man påfører et tidsvarierende elektrisk felt. Vi finner stabile baner når det ikke er interaksjoner partikler, og kaotiske baner med Coloumb krefter. Vi fant at RK4 har divergerende feil for $h < 1$ og Forward-Euler hadde divergerende feil for $h < 10^{-3}$. For tidsvarierende elektrisk felt så finner vi at systemet har resonansfrekvenser rundt $\omega_v = 0,2 \text{ MHz}$, $\omega_v = 0,3 \text{ MHz}$ og $\omega_v = 0,6 \text{ MHz}$, hvor en stor andel av partikkelene har sluppet ut etter $500 \mu\text{s}$.

I. INTRODUKSON

Alt materiale består av små partikler. For å kunne teste teorier eksperimentelt og kunne finne nye egenskaper ved partikler, så vil man måtte kunne kontrollere bevegelsen til en partikkel.

Gauss' lov forteller oss at divergensen til det elektriske feltet \mathbf{E} i et lukket volum, i vakuum, er definert av ladingene i volumet. For en ladningstetthet ρ og permitiviteten i vakuum, ε_0 , så har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (1)$$

Så for å fange en partikkel innenfor et lukket området, vil det ikke være mulig å ha et eksternt felt som peker inn mot en partikkel fra alle kanter, siden partikkelen da må være positiv for å gjøre den totale divergensen null. En løsning ble gitt av Hans George Dehemelt, som tok inspirasjon fra F. M. Penning, og har navngitt instrumentet for en Penning felle ¹. Fellen går ut på å bruke både et elektrisk og magnetisk felt for å få ladde partikler til å gå i baner inne i et lukket området. Penning fellen er spesielt nyttig til presisjonsmåling, og den brukes for eksempel ved CERN for å holde antiprotoner vekk fra normal materie. Diagrammet i figur [Figure 1](#) viser skjemtatisk hvordan en Penning felle er konstruert ². For å kunne gjøre beregninger så trenger man å vite hvordan partikler vil oppføre seg i en Penning felle. I teorikapittelet ser vi på hvordan vi kan finne den analytiske løsningen for én partikkel. Vi skal videre se i metode delen hvordan vi skal numerisk regne ut banene til et flerpartikkel system. I resultat og diskusjonsdelen så ser vi på hva vi kom fram til og hva resultatene betyr, som oppsummeres og konkretiseres i konklusjonsdelen.

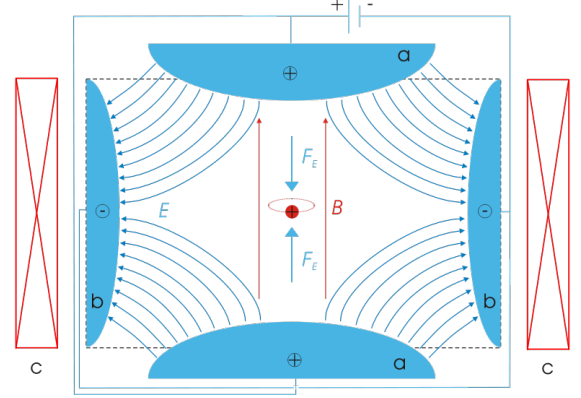


Figure 1. En skjemtatisk illustrasjon av en Penning felle. Diagrammet er et snitt av fellen hvor den nedre og øvre elektrodene, a , er positive, og den tredje elektroden, b er en sirkulær negativt ladd elektrode. I midten er det en positiv ladd partikkel. Bildet er hentet fra Wikipedia Commons

II. TEORI

Det elektriske feltet \mathbf{E} og det elektriske potensialet \mathbf{B} relaterer til hverandre som følgende:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2)$$

Om vi har et elektrisk felt E og et magnetisk felt \mathbf{B} så vil kraften på en ladd partikkel, \mathbf{F} , være gitt ved Lorentz kraften:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

hvor q er ladningen til partikkelen.

En ladd partikkel danner sitt eget elektriske felt. For flere ladde partikler så vil hver partikkel bidra til det totale elektriske feltet:

$$\mathbf{E} = k_e \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (4)$$

¹ https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/ion-trapping/public/PwTCP_chap1.pdf

² https://en.wikipedia.org/wiki/Penning_trap#/media/File:Penning_Trap.svg

Partikkene vil også bidra til det totale magnetfeltet, men siden $|\vec{E}_p| \approx \left| \frac{E_p}{c} \right|$, hvor c er lyshastigheten, ignorer vi bidragene til magnetfeltet fra partikkene.

En Penning felle kan bli vist skjematisk som vist i **Figure 1**

For en ideel Penning felle så er det elektriske feltet definert:

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) , \quad (5)$$

hvor V_0 er størrelsen til det elektriske potensialet påført elektrodene. d er den karakteristiske dimensjonen og er definert:

$$d = \sqrt{z_0^2 + r_0^2/2} \quad (6)$$

I figur **Figure 1** så kan man se at kreftene i z -retningen vil kansellere hverandre. Siden det elektriske feltet kurver ut mot ringen, så kan man se at feltet kun har xy -komponent i midtlinjen av penningfellen. Siden vi da kun trenger å videre begrense bevegelsen i xy -retning, så bruker vi et magnetfelt definert ved:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z = (0, 0, B_0) \quad (7)$$

Via newtons andre lov så kan vi vise at bevegelsen for en enkelt partikkel vil være gitt av differensiallikningene (8), (9) og (10), refer til appendix A for utregning.

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2} \omega_z^2 x = 0 , \quad (8)$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2} \omega_z^2 y = 0 , \quad (9)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 , \quad (10)$$

hvor

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

De to første likningene, (8) og (9), er avhengig av hverandre, så vi kombinerer de i

$$f(t) = x(t) + iy(t) ,$$

Hvor vi da får

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2} \omega_z^2 f = 0 . \quad (11)$$

Se appendix B for utregning. Den generelle løsningen er da:

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} , \quad (12)$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Siden

$$\omega_{\pm}$$

skal være reelle tall, så har vi restriksjonen

$$\omega_0^2 - 2\omega_z^2 \geq 0$$

$$\frac{|q|^2 B_0^2}{m^2} \geq \frac{2|q|V_0}{md^2}$$

Som gir oss

$$\frac{|q|B_0^2 d^2}{2mV_0^2} \geq 1 . \quad (13)$$

Og vi kan vise at maksimumet til $f(t)$ er gitt ved

$$R_+ = A_+ + A_- , \quad (14)$$

og at minimumet er gitt ved

$$R_- = |A_+ - A_-| . \quad (15)$$

Se appendix B for forklaring. Vi tenker oss initialverdiene

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Da får vi at

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+} , \quad (16)$$

og

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+} \quad (17)$$

Videre så kan vi finne den analytiske løsningen for den tredje differensiallikningen (10). Ved å sette

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t) ,$$

med initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

så har vi at

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t) .$$

Referer til appendix C for utregning.

III. METODE

Analytisk

Først så definerer vi initialverdiene

$$x_0 = 1 , y_0 = 0 , z_0 =$$

$$\dot{x}_0 = 0 , \dot{y}_0 = v_0 = 1 , \dot{z}_0 = 0$$

Og verdiene

$$m = 20 , B_0 = 9.65 \cdot 10^1 , V_0 = 9.65 \cdot 10^8$$

For å ha noe å sammenlikne de numeriske resultatene med så trenger vi å skissere de analytiske løsningene. Vi setter inn verdiene vi har satt og ser på bevegelsen i xy-retning.

Tidsvarierende Spenning

Videre så ser vi på hvordan en tidsvarierende elektrisk felt vil påvirke partikkene. Vi definerer feltet som følgende:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0(1 + f \cos(\omega_v t)) , \quad (18)$$

hvor f er amplituden og ω_v er frekvensen. Med den oscilerende spenningen, så ser vi på hvor mange partikler som fortsatt er fanget i penningfellen etter $500\mu s$. Vi bruker amplitudene $f = 0.1, 0.4, 0.7$ og frekvensene i området $\omega_v = [0.2 MHz, 2.5 MHz]$ med et mellomrom på $0.02 MHz$. Vi ser så på om Coloumb kreftene mellom partikkene påvirker hvor mange partikler som er igjen i fellen.

IV. RESULTATER

Det analytiske

Vi tegner bevegelsen angitt av den analytiske løsningen i [Figure 2](#).

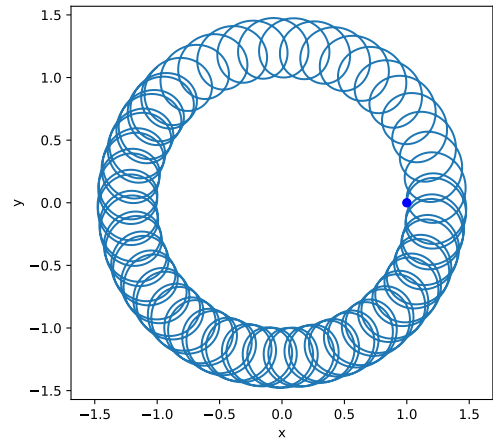


Figure 2. Illustrasjon av den analytiske banen til én enkelt partikkel i systemet.

Tidsvarierende spenning

I [Figure 3](#), [Figure 4](#) og [Figure 5](#) så har vi tegnet grafene for hvor mange partikler som er igjen i fellen etter 500 mikrosekunder.

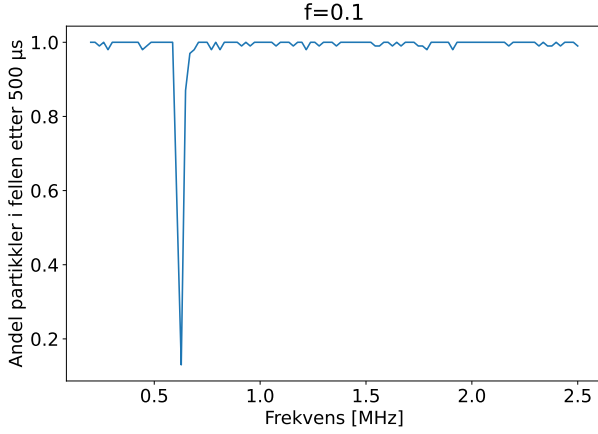


Figure 3. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2 MHz og 2,5 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,1. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

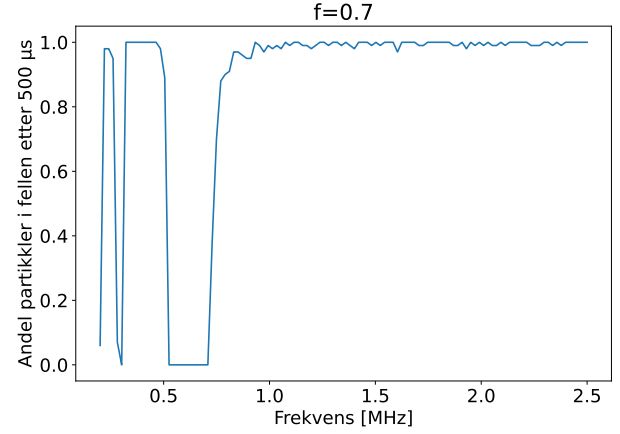


Figure 5. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2 MHz og 2,5 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,7. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

Vi ser at for amplitudene $f = 0,1$, $f = 0,4$ og $f = 0,7$ så faller antall partikler igjen etter 500 mikrosekunder rundt frekvensen 0,6 MHz. Ved mer nøyaktig avlesning så får vi at bunnen til grafen er på $\omega_v \approx 0,627 \text{ MHz}$. For amplitudene $f = 0,4$ og $f = 0,7$ så ser vi at frekvensrommet hvor partikler slipper løs blir større, og at det danner seg nye områder rundt frekvensen $\omega_v = 0,3$ for $f = 0,4$ og $\omega_v = 0,3$ og $\omega_v = 0,2$ for $f = 0,7$. I [Figure 6](#) så er grafen for amplituden $f = 0,4$ tegnet opp i frekvensområdet $\omega_v = [0.5, 0.9]$, hvor interaksjoner mellom partikkene fortsatt er ignorert. I [Figure 7](#) så har vi tegnet opp det samme området, men tatt med Coloumb kreftene mellom partikkene.

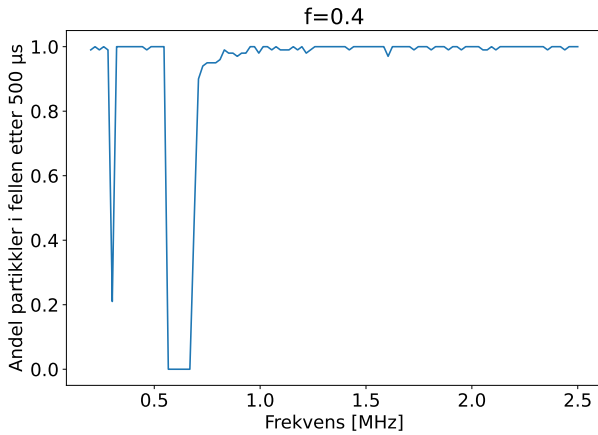


Figure 4. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2 MHz og 2,5 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

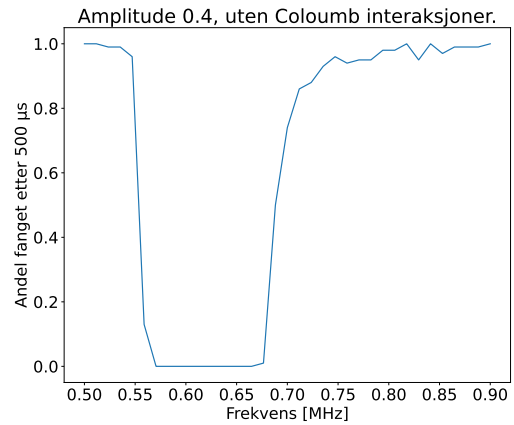


Figure 6. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,5 MHz og 0,9 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Interaksjoner mellom partikkene er ikke tatt med i bergningene.

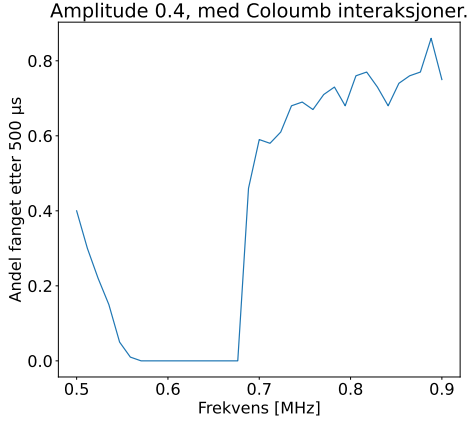


Figure 7. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,5 MHz og 0,9 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Coloumb kreftene mellom partikkene er tatt med i beregningene.

Vi ser at frekvensområdet som gjør at partikler slipper fri er større når coloumb kreftene er tatt med, i [Figure 7](#), enn med uten interaksjoner mellom partikkene, som sett i [Figure 6](#).

V. DISKUSJON

Forskjellen mellom FE og RK4

I den relative feilen ?? så ser vi den ikke er stabil for tidssteg høyere enn $h = 10^{-3} \mu s$. Den relative feilen for RK4 lar oss gå helt opp til $h = 10^{-1}$. Det vil si at Runge Kutta 4 er en mer stabil metode enn Forward-Euler i dette systemet, noe som var forventet ettersom Forward-Euler klarer seg dårlig i oscillerende systemer. Runge Kutta 4 skal ha en global feil som skalerer med $O(h^4)$ og Euler sin feil skalerer med $O(h^3)$, som stemmer overens med resultatene ved at Euler ender opp med å divergere ved lavere h enn ved Runge Kutta 4. Konvergensfaktoren for Runge Kutta 4 er også mindre enn for Euler. Begge har en konvergensfaktor større enn 1, trolig grunnet at vi har med tidssteg hvor begge har en divergerende feil. Fjerner vi det største tidssteget så får vi at $err_{Rate_{RK4}} < 1$, som passer med at den da kun har konvergerende relative feil.

Tidsvarierende Spenning

Grunnen til at partikkene flykter fra fellen ved noen frekvenser og ikke andre er at det dannes seg en resonans i bevegelsen. Det vil si at partikkene får en større og større amplitude i bevegelsesbanen, som til slutt gjør at partikkelen kommer seg ut av fellen. Om vi ser på hvor-

dan resonansfrekvensene endrer seg med amplituden så lister vi de opp på nytt:

$$\omega_{R1} = 0,6 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R2} = 0,3 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R3} = 0,2 \text{ MHz}$$

Og våre basisfrekvenser for systemet:

$$\omega_z \approx 0,0155 \text{ MHz}$$

$$\omega_- \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ MHz}$$

$$\omega_+ \approx 4,8 \text{ MHz}$$

Vi kan da se at vi kan bygge opp resonansfrekvensen ω_{R1} ved at

$$\omega_{R1} = 0,6 \approx 40 \cdot \omega_z$$

Med Coloumb kreftene så er det tydelig at de gjør det lettere for partikkene å flykte. Grunnen til dette kan være at om en partikkel kommer seg mot kanten av fellen så vil de andre partikkene påføre en kraft utover. Det kan da føre til at det er flere tilfeller hvor en partikkel klarer å gå over kanten.

VI. KONKLUSJON

Vi har sett på analytiske og numeriske beregninger av banen til partikler i en penningfelle. For én-partikkel system så har vi fått god overenstemmelse mellom analytisk og numeriske metoder. De numeriske metodene vi har brukt er Runge Kutta 4 og Forward Euler, og vi har funnet at i denne situasjonen så divergerer feilen raskere med Forward Euler enn med Runge Kutta 4, hvor RK4 sin konvergerings rate er ca. 13 og Forward Euler har en konvergerings rate på ca. 66, noe som stemmer bra med metodenes teoretiske globale feil. — Ved å sette på et elektrisk felt som varierer med tiden, så har vi funnet resonansfrekvensene $\omega_v = 0,2 \text{ MHz}$, $\omega_v = 0,3 \text{ MHz}$ og $\omega_v = 0,6 \text{ MHz}$, hvor en større andel av partikkelen slipper unna fellen.

Appendix A: Utregning av enkeltspartikkelens bevegelseslikning

Vi har posisjonsvektoren \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Newtons andre lov git oss at endringen i posisjonen er gitt ved

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{F}_i .$$

Kreftene på partikkelen er Lorentz kraften.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Bruker at $\mathbf{E} = -\nabla V$ og setter inn

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\nabla V + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Finner gradienten

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) .$$

Hvor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d^2}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{V_0}{d^2}y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2V_0}{d^2}z$$

Løser kryssproduktet

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (B_0\dot{y})\hat{i} - (B_0\dot{x})\hat{j} = B_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = q \frac{V_0}{d^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + qB_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{qV_0}{md^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \frac{qB_0}{m} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innfører

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

Som gir oss

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som tilsvarende likningene

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0\dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2z = 0 .$$

Appendix B: Utregning av $f(t)$ fra differensiallikningene og dens egenskaper

Vi har

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0\dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 .$$

Ved å skalere den ene likningen med i så får vi

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$i\ddot{y} + i\omega_0\dot{x} - i\frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 ,$$

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x - i\ddot{y} - i\omega_0\dot{x} + i\frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 .$$

Vi setter de sammen og får

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + i\omega_0(\dot{x} + \dot{y}) - \frac{1}{2}\omega_z^2(x + iy) = 0 .$$

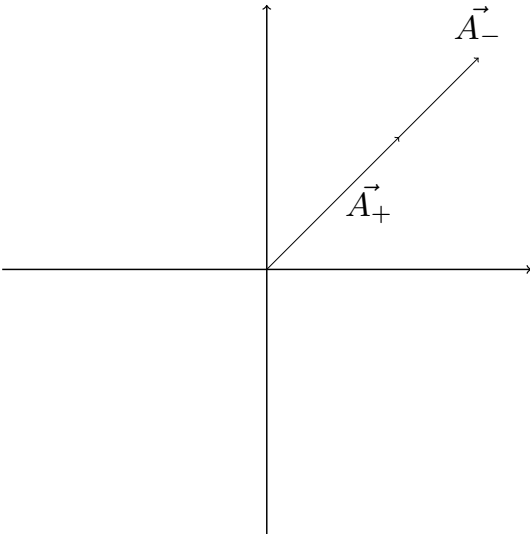


Figure 8. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Som er det samme som

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2}\omega_z^2 f = 0 .$$

Den generelle løsningen av f er

$$f(t) = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} ,$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Funksjonen f vil ha et maksimum når begge leddene går i samme retning, som man kan se i **Figure 8**.

Vi kan da skrive at maksimumet R_+ er

$$R_+ = |A_+ + A_-| = A_+ + A_- .$$

På samme måte så vil minimumet være når leddene til f går i motsatte retninger, som vist i **Figure 9**.
som vil si at

$$R_- = |A_+ - A_-|$$

Appendix C: Utregning av analytiske løsninger til differensiallikningene

Vi starter med

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t}$$

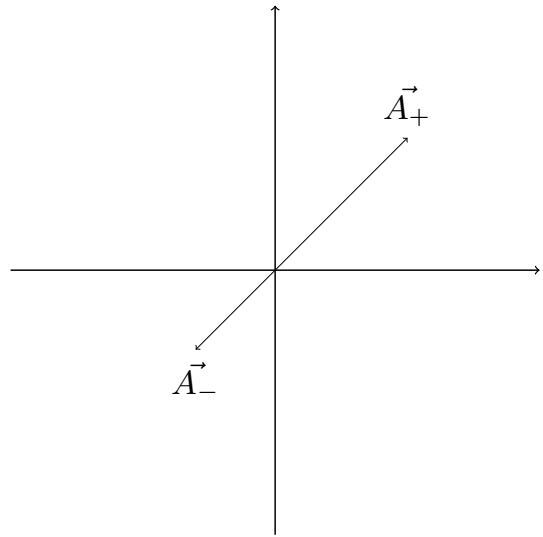


Figure 9. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Og har at

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

Det vil si

$$\text{Re}(f(0)) = x_0$$

$$x_0 = A_+ + A_-$$

Og vi har

$$\dot{f}(0) = -i\omega_+ A_+ - i\omega_- A_-$$

$$\text{Im}(\dot{f}(0)) = v_0$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- A_-$$

Stokker om

$$A_- = x_0 - A_+$$

Og setter inn

$$c_2 = \frac{z_0}{2}$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- (x_0 - A_+)$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- x_0 + \omega_- A_+$$

$$v_0 = (\omega_- - \omega_+) A_+ - \omega_- x_0$$

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Og vi har

$$A_- = x_0 - A_+$$

$$A_- = x_0 - \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = \frac{x_0(\omega_- - \omega_+) - v_0 - \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Videre så har vi initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Vi starter da med

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t)$$

Som har den generelle løsningen

$$z(t) = c_1 e^{-i\omega_z t} + c_2 e^{i\omega_z t}$$

Bruker så initialverdiene

$$z(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow z_0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{z}(0) = -ic_1 \omega_z + i\omega_z c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

Som gir at

$$c_1 = \frac{z_0}{2}$$

Og vi får løsningen

$$z(t) = \frac{z_0}{2} e^{-i\omega_z t} + \frac{z_0}{2} e^{i\omega_z t}$$

Som vi kan skrive som

$$z(t) = \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) - i \sin(\omega_z t)) + \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) + i \sin(\omega_z t))$$

Som til slutt blir

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t)$$