

This is a Very Important Title!

Person McSomething
(Dated: October 25, 2021)

This abstract is abstract.

If you want to learn more about using L^AT_EX, you should check UiO's official tutorials: <https://www.mn.uio.no/ifi/tjenester/it/hjelp/latex/>
If you are familiar with L^AT_EX and you want to learn more about the REVTeX4-1 document class, check: http://www.physics.csbsju.edu/370/papers/Journal_Style_Manuals/auguide4-1.pdf

I. INTRODUKSON

Alt materiale består av små partikler. For å kunne teste teorier eksperimentelt og kunne finne nye egenskaper ved partikler, så vil man måtte kunne kontrollere bevegelsen til en partikkel.

Gauss' lov forteller oss at divergensen til det elektriske feltet \mathbf{E} i et lukket volum, i vakuum, er definert av ladingene i volumet. For en ladningstetthet ρ og permitiviteten i vakuum, ε_0 , så har vi

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \quad (1)$$

Så for å fange en partikkel innenfor et lukket område, vil det ikke være mulig å ha et eksternt felt som peker inn mot en partikkel fra alle kanter, siden partikkelen da må være positiv for å gjøre den totale divergensen null. En løsning ble gitt av Hans George Dehmel, som tok inspirasjon fra F. M. Penning, og har navngitt instrumentet for en Penning felle ¹. Fellen går ut på å bruke både et elektrisk og magnetisk felt for å få ladde partikler til å gå i sirkulærliknende baner. Penning fellen er spesielt nyttig til presisjonsmåling, og den brukes for eksempel ved CERN for å holde antiprotoner. Diagrammet i figur [Figure 1](#) viser skjemtatisk hvordan en Penning felle er konstruert ².

For å kunne gjøre beregninger så trenger man å vite hvordan partikler med forskjellige egenegenskaper vil oppføre seg i en Penning felle. I teorikapittelet ser vi på hvordan vi kan finne den analytiske løsningen for én partikkel. Vi skal videre se i metode delen hvordan vi kan numerisk regne ut banene til et flerpartikkel system. I resultat og diskusjonsdelen så ser vi på hva vi kom fram til og hva resultatene betyr, som oppsummeres og konkluderes i konklusjonsdelen.

¹ https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/ion-trapping/public/PwTCP_chap1.pdf

² https://en.wikipedia.org/wiki/Penning_trap#/media/File:Penning_Trap.svg

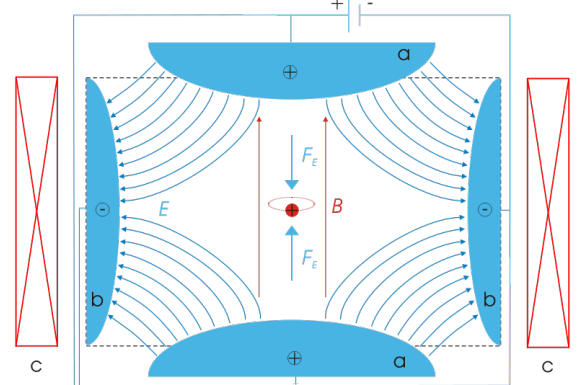


Figure 1. En skjemtatisk illustrasjon av en Penning felle. Diagrammet er et snitt av fellen hvor den nedre og øvre elektrodene, a , er positive, og den tredje elektrodene, b er en sirkulær negativt ladd elektrode. I midten er det en positiv ladd partikkel. Bildet er hentet fra Wikipedia Commons

II. TEORI

Det elektriske feltet \mathbf{E} og det elektriske potensialet \mathbf{B} relaterer til hverandre som følgende:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2)$$

Om vi har et elektrisk felt E og et magnetisk felt \mathbf{B} så vil kraften på en ladd partikkel, \mathbf{F} , være gitt ved Lorentz kraften:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

hvor q er ladningen til partikkelen.

En ladd partikkel danner sitt eget elektriske felt. For flere ladde partikler så vil hver partikkel bidra til det totale elektriske feltet:

$$\mathbf{E} = k_e \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (4)$$

Partikkelene vil også bidra til det totale magnetfeltet, men siden $|\vec{B}_p| \approx \left| \frac{E_p}{c} \right|$, hvor c er lyshastigheten, ignorer vi bidragene til magnetfeltet fra partikkelene.

En Penning felle kan bli vist skjemtatisk som vist i [Figure 1](#)

For en ideel Penning felle så er det elektriske feltet definert:

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) , \quad (5)$$

hvor V_0 er størrelsen til det elektriske potensialet påført elektrodene. d er den karakteristiske dimensjonen og er definert:

$$d = \sqrt{z_0^2 + r_0^2/2} \quad (6)$$

I figur **Figure 1** så kan man se at kraften i y-retningen vil kanselere hverandre. Siden det elektriske feltet kurver ut mot ringen, så kan man se at feltet kun har xy-komponent i midtlinjen av penningfellen. Siden vi da kun trenger å videre begrense bevegelsen i xy-retning, så bruker vi et magnetfelt:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z = (0, 0, B_0) \quad (7)$$

Via newtons andre lov så kan vi vise at bevegelsen for en enekelt partikkel vil være gitt av differensiallikningene (8), (9) og (10), refer til appendix **A** for utregning.

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2} \omega_z^2 x = 0 , \quad (8)$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2} \omega_z^2 y = 0 , \quad (9)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 , \quad (10)$$

hvor

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

De to første likningene, (8) og (9), er avhengig av hverandre, så vi kombinerer de i

$$f(t) = x(t) + iy(t) ,$$

Hvor vi da får

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2} \omega_z^2 f = 0 . \quad (11)$$

Se appendix **B** for utregning. Den generelle løsningen er da:

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} , \quad (12)$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Siden

$$\omega_{\pm}$$

skal være relle tall, så har vi restriksjonen

$$\omega_0^2 - 2\omega_z^2 \geq 0$$

$$\frac{|q|^2 B_0^2}{m^2} \geq \frac{2|q|V_0}{md^2}$$

Som gir oss

$$\frac{|q|B_0^2 d^2}{2mV_0^2} \geq 1 . \quad (13)$$

Og vi kan vise at maksimumet til $f(t)$ er gitt ved

$$R_+ = A_+ + A_- , \quad (14)$$

og at minimumet er gitt ved

$$R_- = |A_+ - A_-| . \quad (15)$$

Se appendix **B** for forklaring. Vi tenker oss initialverdiene

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Da får vi at

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+} , \quad (16)$$

og

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+} \quad (17)$$

Videre så kan vi finne den analytiske løsningen for den tredje differensiallikningen (10). Ved å sette

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t) ,$$

med initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

så har vi at

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t) .$$

Referer til appendix C for utregning.

III. METODE

Analytisk

Først så definerer vi initialverdiene

$$x_0 = 1 , y_0 = 0 , z_0 =$$

$$\dot{x}_0 = 0 , \dot{y}_0 = v_0 = 1 , \dot{z}_0 = 0$$

Og verdiene

$$m = 20 , B_0 = 9.65 \cdot 10^1 , V_0 = 9.65 \cdot 10^8$$

For å ha noe å sammenlikne de numeriske resultatene med så trenger vi å skissere de analytiske løsningene. Vi setter inn verdiene vi har satt og ser på bevegelsen i xy-retning.

Numerisk

Videre så ser vi på hvordan en tidsvarierende elektrisk felt vil påvirke partikkene. Vi definerer feltet som følgende:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0(1 + f \cos(\omega_v t)) , \quad (18)$$

hvor f er amplituden og ω_v er frekvensen. Med den oscillerende spenningen, så ser vi på hvor mange partikler som fortsatt er fanget i penningfellen etter $500 \mu s$. Vi bruker amplitudene $f = 0.1, 0.4, 0.7$ og frekvensene i området $\omega_v = [0.2 \text{ MHz}, 2.5 \text{ MHz}]$ med et mellomrom på 0.02 MHz . Vi ser så på om Coloumb kreftene mellom partikkene påvirker hvor mange partikler som er igjen i fellen.

IV. RESULTATER

Analytisk

Vi tegner bevegelsen angitt av den analytiske løsningen i Figure 2.

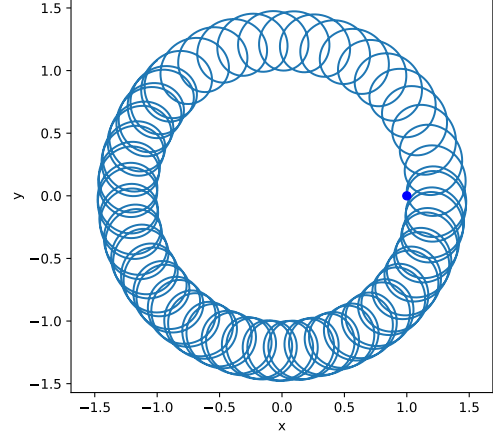


Figure 2. Illustrasjon av den analytiske banen til én enkelt partikkel i systemet.

Numerisk

I Figure 4, Figure 5 og Figure 6 så har vi tegnet grafene for hvor mange partikler som er igjen i fellen etter 500 mikrosekunder.

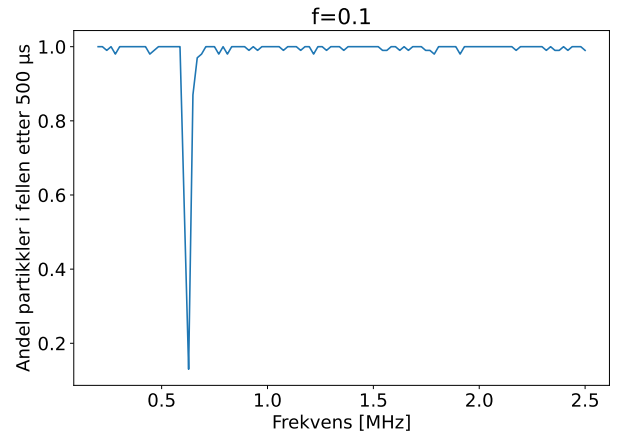


Figure 3. Antall partikler som er fanget etter 500 mikrosekunder for frekvenser mellom 0.2 MHz og 2.5 MHz . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0.1 . Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

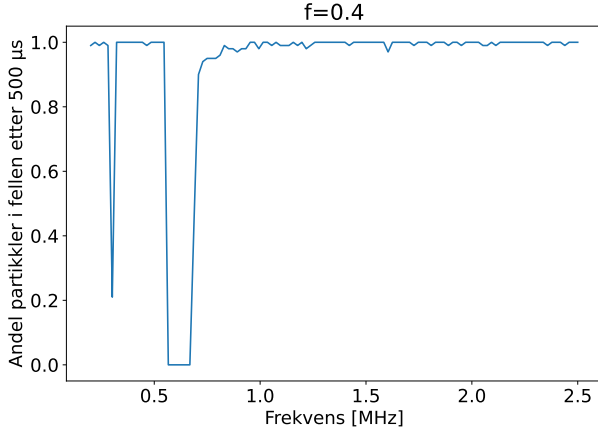


Figure 4. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0.2 MHz og 2.5 MHz . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0.4 . Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

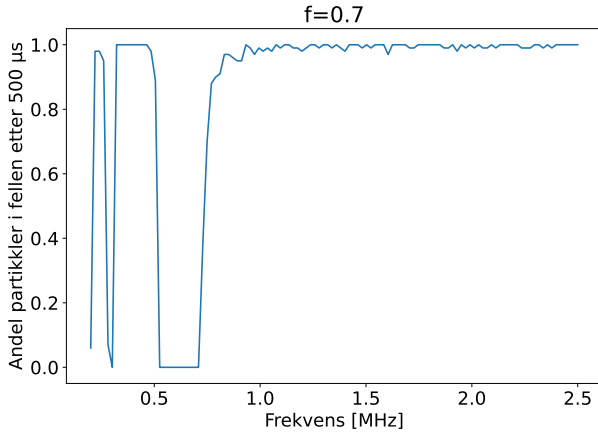


Figure 5. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0.2 MHz og 2.5 MHz . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0.7 . Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

Vi ser at for amplitudene $f = 0.1$, $f = 0.4$ og $f = 0.7$ så faller antall partikler igjen etter 500 mikrosekunder rundt frekvensen 0.6 MHz . Ved mer nøyaktig avlesning så får vi at bunnen til grafen er på $\omega_v \approx 0.627 \text{ MHz}$. For amplitudene $f = 0.4$ og $f = 0.7$ så ser vi at frekvensområdet hvor partikler slipper løs blir større, og at det dannes seg nye områder: rundt frekvensen $\omega_v = 0.3$ for $f = 0.4$ og $\omega_v = 0.3$ og $\omega_v = 0.2$ for $f = 0.7$. I [Figure 7](#) så er grafen for amplituden $f = 0.4$ tegnet opp i frekvensområdet $\omega_v = [0.5, 0.9]$, hvor interaksjoner mellom partikkene fortsatt er ignorert. I [Figure 8](#) så har vi tegnet opp det samme området, men tatt med Coloumb kreftene mellom partikkene.

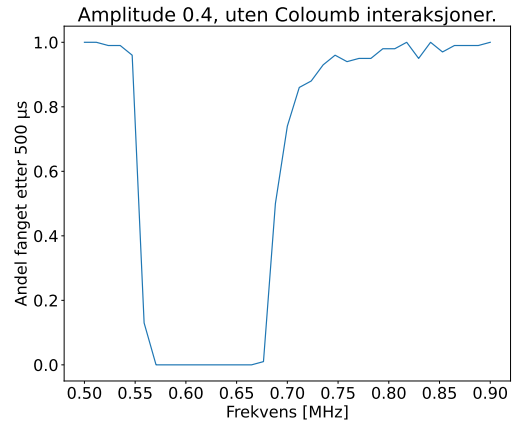


Figure 6. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0.5 MHz og 0.9 MHz . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0.4 . Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Interaksjoner mellom partikkene er ikke tatt med i bergningene.

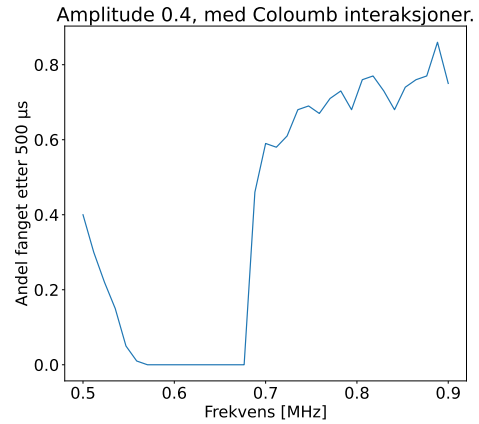


Figure 7. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0.5 MHz og 0.9 MHz . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0.4 . Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Coloumb kreftene mellom partikkene er tatt med i bergningene.

Vi ser at frekvensområdet som gjør at partikler slipper fri er større når coloumb kreftene er tatt med, i [Figure 8](#), enn med uten interaksjoner mellom partikkene, som sett i [Figure 7](#).

V. DISKUSJON

Grunnen til at partikkene flykter fra fellen ved noen frekvenser og ikke andre er at det dannes seg en resonans i bevegelsen. Det vil si at partikkene får en større og større amplitude i bevegelsesbanen, som til slutt gjør at partikkelen kommer seg ut av fellen. Om vi ser på hvor-

dan resonansfrekvensene endrer seg med amplituden så lister vi de opp på nytt:

$$\omega_{R1} = 0.6 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R2} = 0.3 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R3} = 0.2 \text{ MHz}$$

Og våre basisfrekvenser for systemet:

$$\omega_z \approx 0.0155 \text{ MHz}$$

$$\omega_- \approx 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ MHz}$$

$$\omega_+ \approx 4.8 \text{ MHz}$$

Vi kan da se at vi kan bygge opp resonansfrekvensen ω_{R1} ved at

$$\omega_{R1} = 0.6 \approx 40 \cdot \omega_z$$

Med Coloumb kreftene så er det tydelig at de gjør det lettere for partikkene å flykte. Grunnen til dette kan være at om en partikkel kommer seg mot kanten av fellen så vil de andre partikkene påføre en kraft utover. Det kan da føre til at det er flere tilfeller hvor en partikkel klarer å gå over kanten.

VI. KONKLUSJON

ACKNOWLEDGMENTS

I would like thank myself for writing this beautiful document.

REFERENCES

- Reference 1
- Reference 2

Appendix A: Utregning av enkeltspartikkelens bevegelseslikning

Vi har posisjonsvektoren \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Newtons andre lov git oss at endringen i posisjonen er gitt ved

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{F}_i .$$

Kreftene på partikkelen er Lorentz kraften.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Bruker at $\mathbf{E} = -\nabla V$ og setter inn

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\nabla V + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Finner gradienten

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) .$$

Hvor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d^2}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{V_0}{d^2}y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2V_0}{d^2}z$$

Løser kryssproduktet

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (B_0\dot{y})\hat{i} - (B_0\dot{x})\hat{j} = B_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = q \frac{V_0}{d^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + qB_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{qV_0}{md^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \frac{qB_0}{m} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innfører

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

Som gir oss

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som tilsvarer likningene

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 .$$

Appendix B: Utregning av $f(t)$ fra differensiallikningene og dens egenskaper

Vi har

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 .$$

Ved å skalere den ene likningen med i så får vi

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x = 0 ,$$

$$i\ddot{y} + i\omega_0 \dot{x} - i\frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 ,$$

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2 x - i\ddot{y} - i\omega_0 \dot{x} + i\frac{1}{2}\omega_z^2 y = 0 .$$

Vi setter de sammen og får

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + i\omega_0(\dot{x} + \dot{y}) - \frac{1}{2}\omega_z^2(x + iy) = 0 .$$

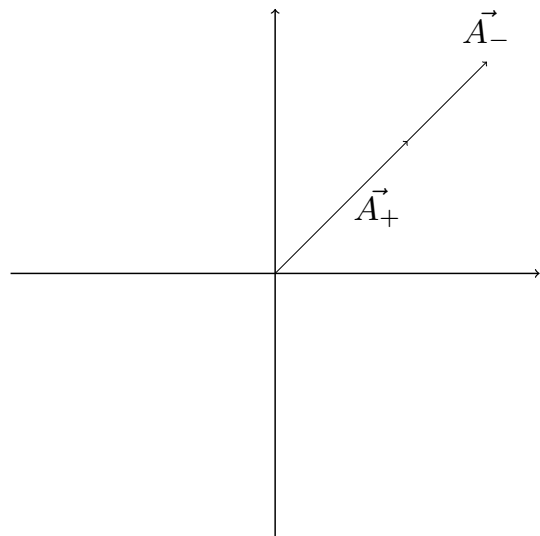


Figure 8. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Som er det samme som

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2}\omega_z^2 f = 0 .$$

Den generelle løsningen av f er

$$f(t) = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} ,$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Funksjonen f vil ha et maksimum når begge leddene går i samme retning, som man kan se i **Figure 9**.

Vi kan da skrive at maksimumet R_+ er

$$R_+ = |A_+ + A_-| = A_+ + A_- .$$

På samme måte så vil minimumet være når leddene til f går i motsatte retninger, som vist i **Figure 10**. som vil si at

$$R_- = |A_+ - A_-|$$

Appendix C: Utregning av analytiske løsninger til differensiallikningene

Vi starter med

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t}$$

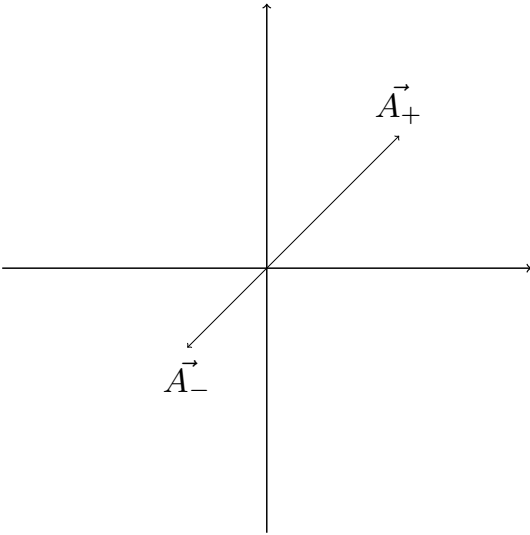


Figure 9. Ledd A_+ og A_- som vektorer for å se logikken bak f sine grenser.

Og har at

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

Det vil si

$$\operatorname{Re}(f(0)) = x_0$$

$$x_0 = A_+ + A_-$$

Og vi har

$$\dot{f}(0) = -i\omega_+ A_+ - i\omega_- A_-$$

$$\operatorname{Im}(\dot{f}(0)) = v_0$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- A_-$$

Stokker om

$$A_- = x_0 - A_+$$

Og setter inn

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- (x_0 - A_+)$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- x_0 + \omega_- A_+$$

$$v_0 = (\omega_- - \omega_+) A_+ - \omega_- x_0$$

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Og vi har

$$A_- = x_0 - A_+$$

$$A_- = x_0 - \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = \frac{x_0(\omega_- - \omega_+) - v_0 - \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Videre så har vi initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Vi starter da med

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t)$$

Som har den generelle løsningen

$$z(t) = c_1 e^{-i\omega_z t} + c_2 e^{i\omega_z t}$$

Bruker så initialverdiene

$$z(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow z_0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{z}(0) = -ic_1 \omega_z + i\omega_z c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

Som gir at

$$c_1 = \frac{z_0}{2}$$

$$c_2 = \frac{z_0}{2}$$

Og vi får løsningen

$$z(t) = \frac{z_0}{2} e^{-i\omega_z t} + \frac{z_0}{2} e^{i\omega_z t}$$

Som vi kan skrive som

$$z(t) = \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) - i \sin(\omega_z t)) + \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) + i \sin(\omega_z t))$$

Som til slutt blir

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t)$$

Note that this document is written in the two-column format. If you want to display a large equation, a large

figure, or whatever, in one-column format, you can do this like so:

This text and this equation are both in one-column format.

³

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (\text{C1})$$

Note that the equation numbering (this: [Equation C1](#)) follows the appendix as this text is technically inside Appendix ???. If you want a detailed listing of (almost) every available math command, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics>.

And now we're back to two-column format. It's really easy to switch between the two. It's recommended to keep the two-column format, because it is easier to read, it's not very cluttered, etc. Pro Tip: You should also get used to working with REVTeX because it is really helpful in FYS2150.

One last thing, this is a code listing:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can add extra arguments using optional parameters:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can also list code from a file using `\lstinputlisting`. If you're interested, check https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Source_Code_Listings.

This is a basic table:

Table I. This is a nice table

Hey	Hey	Hey
Hello	Hello	Hello
Bye	Bye	Bye

You can a detailed description of tables here: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tables>.

I'm not going to delve into Tikz in any level detail, but here's a quick picture:

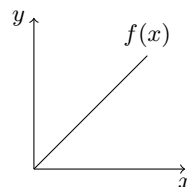


Figure 10. This is great caption

If you want to know more, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ>.

³ This equation is actually from quantum mechanics. “It’s called Schrödinger’s Time-Dependent Wave Equation”, named after the awesome Austrian physicist Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger. Yep, the “Schrödinger’s cat” guy. Pretty cool dude actually, check his wiki page: https://en.wikipedia.org/wiki/Erwin_Schrodinger.

[Erwin_Schrodinger](#). He was physics’ no. 1 Ladies’ man if there ever was one. Anyway, you will learn more about this equation in FYS2140. You can also find it printed on a glass wall in the UiO Physics Building (it really is that important).