

Kvantetilstand i et dobbelt-spalte system

Carl Petter Duedahl and Henrik Modahl Breitenstein

(Dated: December 14, 2021)

Vi har sett på hvordan en kvantetilstand vil oppføre seg i en boks med en, to og tre spalter ved å gjøre numeriske beregninger. Avviket til den totale sannsynligheten fikk vi til å være på størrelsesordenen 10^{-14} . Ved to spalter ser vi hvordan kvantetilstanden tidsutvikler seg, ved at noe reflekteres og noe går igjennom splatene. For en, to og tre spalter ser vi på sannsynlighetstettheten ved $x = 0.8$ og finner at sannsynlighetstettheten ligner mye på fordelingen til interferenslinjene til bølger igjennom splater.

I. INTRODUKSON

Et viktig eksperiment gjennom historien har vært dobbelt-spalte eksperimentet, først introdusert av Thomas Young på 1800-tallet (Referanse 1). Young sitt eksperiment gikk ut på hvordan lys oppfører seg som en bølge. Senere har det blitt vist hvordan partikler, som for eksempel elektroner også kan oppføre seg som bølger ved hjelp av det samme eksperimentet. Forståelsen på hvordan en partikkel interferer med seg selv er gitt av Schrödingerlikningen fra kvantefysikken:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle, \quad (1)$$

For å kunne se hvordan en kvantetilstand vil oppføre seg i et slikt eksperiment så skal vi bruke Schrödingers likning til å simulere et ett-spalte, to-spalte og tre-spalte system innad i en boks. Ved å gjøre dette kan vi finne sannsynlighetsfordelingen til en tenkt partikkel og sammenlikne med tidligere teoretiske og eksperimentelle resultater. I teori delen går igjennom Schrödingerlikningen og Crank-Nicolson likningen. I metode delen viser vi hvordan vi setter opp systemet og ser på hvordan vi tidsutvikler det. Vi representerer resultatene så i resultatskapittelet og diskuterer de separat i diskusjonsdelen. Til slutt summerer vi opp og kommer med en konklusjon.

II. TEORI

A. Om Schrödinger-likningen

Vi har altså at Schrödinger-likningen kan skrives som

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$

Vi skal imidlertid se på en partikkel i et todimensjonalt system med en vegg med et høyt tidsuavhengig potensial $V(x, y)$. Da blir Schrödinger-likningen heller slik

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x, y, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi(x, y, t) + V(x, y) \Psi(x, y, t)$$

I denne oppgaven vil vi være mest opptatt av hvordan sannsynligheten for å finne partikkelen på spesifikke posisjoner i systemet utvikler seg over tid. Av Borns regel

har vi at sannsynligheten for å finne partikkelen i en tilstand eller i vårt tilfelle posisjon på et gitt tidspunkt er

$$p(x, y, t) = |\Psi(x, y, t)|^2 = \Psi^*(x, y, t) \Psi(x, y, t)$$

I denne simuleringen skal vi forenkle denne modellen slik at vi nå har

$$i \frac{du}{dt} = -\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} + v(x, y)u$$

Her er u en normalisert og dimensjonsløs kvantetilstand. Siden den er normalisert og vi går over et gitter vil da

$$\sum p_{i,j} = \sum u_{i,j}^* u_{i,j} = 1$$

I tillegg er u i et dimensjonsløst plan så vi setter x og y til å gå fra 0 til 1. Selve likningens tilstand vil bli videre diskutert i [section II B](#). $v(x, y)$ er også innenfor det samme enhetsløse to-dimensjonale planet og vil bli videre diskutert i [section II C](#).

B. Initialtilstand

Vi trenger en initialtilstand, altså tilstanden $u(x, y, t = 0) = u_{i,j}^0$. Vi skal bruke en Gaussisk initialtilstand på formen

$$u(x, y, t = 0) = \frac{1}{C} e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x-x_c) + ip_y(y-y_c)}$$

Siden dette er Gaussisk så vil x_c og y_c være toppunktet til $p_{i,j}$ og der det vil være mest sannsynlig at partikkelen er. p_x og p_y er bevegelsesmengden til partikkelen. σ_x og σ_y er bredden til funksjonen. C er normaliseringskonstanten. Siden vi skal gjøre dette over et gitter får vi heller

$$u_{i,j}^0 = \frac{1}{C} e^{-\frac{(x_i-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i-x_c) + ip_y(y_j-y_c)}$$

Vi må også normalisere dette, altså at $\sum_{i,j} u_{i,j}^n * u_{i,j}^n = \sum_{i,j} p_{i,j}^n = 1$, og så det vi da må gjøre er å la

$$C = \sum_{i,j} \left| e^{-\frac{(x_i-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i-x_c) + ip_y(y_j-y_c)} \right|_2$$

Å normalisere slikt gjør vi kun i initialtilstanden, men dersom systemet er nøyaktig nok, vil $\sum_{i,j} p$ holde seg

ganske nærme 1. Imens vi tidsutvikler koden vår vil vi summere opp alle $p_{i,j}$ for å se om den totale sansynligheten holder seg jevnt rundt 1 og dermed også kontrollere at vi gjør riktig.

Vår matrise vil være på størrelsen $M \times M$ og dimensjonene vil være normalisert så laveste verdiene av x og y vil være 0 og høyeste 1. Vi vil fortsatt bruke Dirichlet grensebetingelser så vi setter $u(x = 0, y, t) = u(x = 1, y, t) = u(x, y = 0, t) = u(x, y = 1, t) = 0$ uansett tidssteg. Det gjør at vi egentlig ikke trenger å finne tidsutviklingen i grensene så for når begrenser vi U til å være en $(M - 2) \times (M - 2)$ -matrise, med $u_{0,0}^n = u(x = 0 + h, y = 0 + h, t)$ og $u_{M-3,M-3} = u(x = 1 - h, y = 1 - h)$. Hvor h da er steglengden.

C. Lage spalten

Så trenger vi å lage en vegg og en spalteåpning. Vi skal sette spalten i midten av systemet vårt, altså har den et midtpunkt i $x = 0,5$. Så skal tykkelsen på veggen være 0,02 i x-retning. I y-retning har vi da hullene og veggene. Vi vil i starten bruke to spalter, men vil også variere mellom å bruke én spalte, tre spalter og å ikke ha noen vegg i det hele tatt. Vi tar først eksempelet med to åpninger. Da har vi først en vegg, så en åpning på 0,05, deretter en vegg også på 0,05, så en ny åpning på 0,05 og til slutt en vegg som er like lang som den første veggen. Lengden på åpningene og veggene mellom åpningene vil ikke forandre seg når vi endrer antall åpninger, men veggene på sidene vil endre seg avhengig av antall åpninger vi har. For å finne lengden for endeveggene kan vi da bruke

$$l_{\text{endevegg}} = \frac{1 - (n_{\text{slits}} + n_{\text{mellomvegger}}) \cdot 0.05}{2}$$

Vi får da at

Antall åpninger	Endevegg
1	0,475
2	0,425
3	0,375

Table I. Lengden til endeveggen til barrieren basert på antall spalter.

Vi går da fra 0 opp til den tilhørende vegg lengden og finner høyden åpningen starter i, så går vi 0,05 opp for å finne hvor skilleveggen starter, så går vi enda 0,05 opp for å finne hvor neste åpning starter og fortsetter slik for å få til vi når endeveggen. Vi finner da y-verdiene vi trenger og får vegger som i [Figure 1](#), [Figure 2](#) og [Figure 3](#).

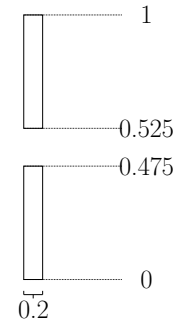


Figure 1. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her én åpning.

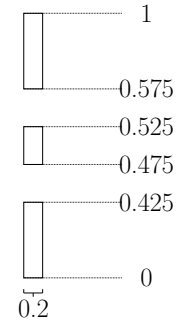


Figure 2. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her to åpninger

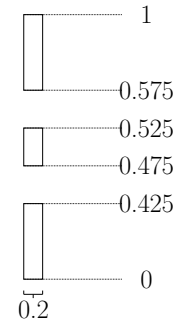


Figure 3. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her tre åpninger

Vi kan fortsatt ikke generelt anta at slike posisjoner ligger nøyaktig på et punkt på posisjonsgitteret vårt, så vi vil avrunde til det nærmeste punktet. Idéelt sett burde veggen hatt et uendelig stort potensial for at veggdelen skulle vært helt ugjennomtrengelig. Dessverre er uendelig et altfor stort tall for maskinen å regne med. Vi setter derfor potensialet der veggen er til å være 10^{10} , og over resten av systemet vil potensialet være 0.

D. Numerisk tillnærming

V har da fra Schrödingerlikningen at

$$i \frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + v(x, y)$$

eller

$$\frac{\delta u}{\delta t} = i \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - i v(x, y)$$

Vi skal så bruke Crank-Nicolson tilnærming så vi starter med å approksimere venstre-siden

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Hvor n er tidsteg vi er i. Crank-Nicolson baser seg på forover og bakover tilnærminger. For forover har vi at

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^n$$

mens bakover har vi

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^{n+1}$$

Så kombinerer vi disse forover og bakover

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \theta F_{i,j}^{n+1} - (1 - \theta) F_{i,j}^n$$

slik at for $\theta = 1$ har vi bakovertilnærmingen og for $\theta = 0$ har vi forovertilnærmingen. For Crank-Nicolson setter vi $\theta = \frac{1}{2}$ slik at vi får

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

E. Bruke Crank-Nicolson

Vi hadde fra Crank-Nicolson at

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

I vårt tilfelle er

$$F_{i,j} = i \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - i v(x, y) u$$

så

$$F_{i,j}^n = i \frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} - i v(x, y) u^n$$

Vi bruker deretter at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

Siden i er den eneste som varierer i med hensyn på x , er det denne vi vil bruke her. Tilsvarende får vi at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Så vi får da at

$$F^n = i \left(\frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - v_{i,j} u_{i,j}^n \right)$$

Vi går igjen tilbake til

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

og flytter over slik at vi får

$$u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} F_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} F_{i,j}^n$$

Vi utvider F og får

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) = + \frac{i\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ & - \frac{i\Delta t}{2\Delta y^2} (u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{i\Delta t}{2\Delta y^2} (u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\ & - \frac{i\Delta t}{2} v_{i,j} u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2} v_{i,j} u_{i,j}^n \end{aligned}$$

Vi skal gå over samme steglengde på x og y akse så vi setter $\Delta x = \Delta y = h$. Så definerer vi $r \equiv \frac{i\Delta t}{2h^2}$ slik at vi har

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2\Delta x^2} (u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) = +r(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ & - r(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) + r(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\ & - \frac{i\Delta t}{2} v_{i,j} u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2} v_{i,j} u_{i,j}^n \end{aligned}$$

F. Matriseform

For å gjøre det litt raskere skal vi konvertere om til matriseform som i Kilde 1. Denne gangen har vi imidlertid to dimensjoner så det blir litt annerledes. Første forskjellen er at vi har en todimensjonal matrise med elementer $u_{i,j}$ hvor radene er y -aksen og kolumnene x -aksen, mens vi trenger en vektor for å tidsvikle ved hjelp av matriser. Vi vil derfor lage en vektor \vec{u} som organiserer matrisen slik

$$\vec{u} = (u_{0,0}, u_{1,0}, u_{2,0}(\dots) u_{M-2,0}, u_{0,1}, (\dots) u_{0,M-2}, (\dots) u_{M-2,M-2})$$

Så $k = i + j \cdot (M - 2)$. Det betyr at \vec{u} er $(M - 2)^2$ stor. Vi skal så lage matrisene A og B slik at

$$B\vec{u}^n = \vec{c}$$

og

$$A\vec{c} = \vec{u}^{n+1}$$

La oss ta et eksempel i $(M - 2) = 3$. Da vil matrisen A og B være

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & a_1 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & a_2 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & a_3 & -r & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -r & a_4 & -r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_5 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & a_6 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_7 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_8 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & b_1 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & b_2 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & b_3 & r & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r & b_4 & r & r & r & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & r & b_5 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & b_6 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_7 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_8 \end{pmatrix}$$

Hvor diagonalene er satt sammen av vektorene \vec{a} og \vec{b} hvor elementene er gitt som

$$a_k = 1 + 4r + \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

og

$$b_k = 1 - 4r - \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

Av disse matrisene kan vi se to ting. Foruten om diagonalen er $A = -B$. I tillegg foruten om diagonalene er matrisene satt sammen av to $M - 2 \times M - 2$ matriser. Diagonalen til B består av matrisen P med som har side-diagonalene r . For $M - 2 = 3$ får vi da at

$$P = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$

Denne matrisen vil gå diagonalt ned over B . Som sidediagonaler til denne matrisen, altså under og til venstre for P vil vi ha matrisen R som har diagonalen bestående av r . Så for $M - 2 = 3$ har vi da

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Så da har vi uten å ta hensyn til diagonalen at

$$-A = B = \begin{pmatrix} P & R & 0 \\ R & P & 0 \\ 0 & R & P \end{pmatrix}$$

Legger vi så til vektorene \vec{a} og \vec{b} langs diagonalene har vi matrisene A og B .

G. Startverdier og tilhørende simuleringer

Vi har nå laget en funksjon som gir oss en del resultater og er avhengig av en del verdier. En forklaring for alle instillingene finnes i [II](#)

h	Steglengden over x og y-aksen
Δt	Tidsstegene
T	Den totale tiden vi kjører simuleringen over.
x_c og y_c	Hvor initialtistandens sansynlighet vil være sentrert for deres tilhørende akse.
σ_x og σ_y	Bredden til den gaussiske funksjonen initialtstanden består av.
p_x og p_y	Bevegelses- mengden i x og y retning for initialtstanden.
v_0	Potensialet i veggen.
n_{slits}	Antall åpninger i veggen

Table II. En forklaring for alle verdiene som trengs for å kjøre simulasjonen

I alle tilfeller vi tester vi $h = 0,005$ $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5}$, $x_c = 0,25$, $y_c = 0,5$, $\sigma_x = 0,05$ og $p_y = 0$. De andre vil vi variere.

H. Sansynlighetsunøyaktighet

Som sagt tidligere burde den totale sansynligheten for å finne partikkelen i systemet holde seg ganske konstant rundt 1. Altså

$$P^n = \sum_{i,j} p_{i,j} = 1$$

Siden vi dette er numerisk så kan vi få litt avvik fra dette, men jo større dette avviket er, jo verre er modellen vår. Vi vil derfor som en kontrolltest, sette $v_0 = 0$ slik at vi ikke har en vegg. Så tester vi med $\sigma_y = 0,05$, altså lik som σ_x . Vi vil da ta P^n for hvert tidssteg og etterpå plote avviket, altså $P^n - 1$. Vi plotter opp til $T = 0,008$. Slik har vi en kontrolltest uten noe, så vi ser om sansynligheten holder seg konstant uten en vegg.

Vi legger så til en dobbeltspaltevegg, så $s_l = 2$ og $v_0 = 10^{10}$. Hvis vi nå fortsetter å ha $\sigma_y = 0,05$ vil det meste av bølgefunksjonen gå rett på veggen med samme bredde. Vi setter derfor opp σ_y til 0,1 så en større del av bølgefunksjonen går gjennom spalten. Så kjører vi simulasjonen på nytt og plotter igjen avviket.

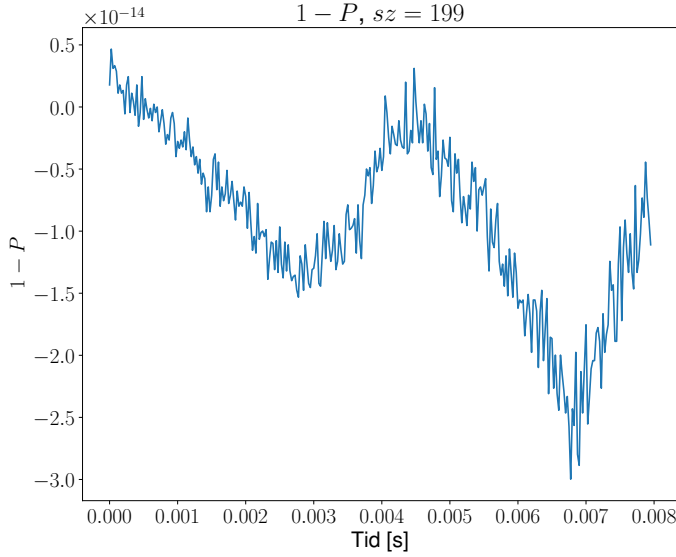


Figure 4. Avviket til den totale sannsynligheten $1 - P$ for $v_0 = 0$.

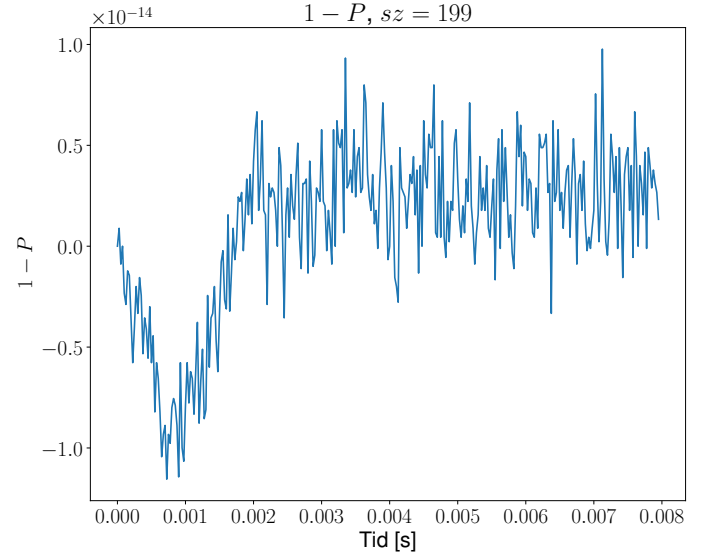


Figure 5. Avviket til den totale sannsynligheten $1 - P$ for $v_0 = 10^{10}$.

I. Simulasjonen i det to dimensjonale tomme

Vi skal så se på $p_{i,j}$ og $u_{i,j}$ i planet. Vi vil her se på noen øyeblikksbilder i $t = 0$, $t = 0,001$ og $t = 0,002$. Vi har fortsatt en dobbeltspaltevegg med $v_0 = 10^{10}$, men denne gangen har vi $\sigma_y = 0,2$. Vi vil for disse tidsstegene plote den reelle og den imaginære delen av $u_{i,j}$ i planet, og deretter $p_{i,j} = u *_{i,j} u_{i,j}$.

J. Sansynligheten over på en gitt x-verdi

Vi har også nå de samme startverdiene som fra [section III](#). La oss nå anta at ved $t = 0,002$ så måler at partikkelen posisjon på x-aksen er $x = 0,8$, men vi vet fremdeles ikke partikkelens posisjon på y-aksen. Altså bryter tilstanden sammen til at $p(x = 0,5) = 1$. Vi vil så finne ut hvordan sansynlighetsfordelingen på y-aksen ved $x = 0,5$. Vi bruker forrige simulasjons verdier i $x = 0,5$ og normaliserer disse slik at $\sum_i u *_{i,j} u_{i,j} = 1$. Så plotter vi over y-aksen. Vi kjører så simulasjonen igjen, $sl = 1$ og $sl = 3$ og finner sansynlighetsfordelingen over y-aksen i $x = 0,8$ for disse også.

III. RESULTATER

Avviket til den totale sannsynligheten er vist i [Figure 4](#) og [Figure 5](#)

For to-spalte system så fikk vi [Figure 6](#) for $t = 0$ s, med den reelle delen vist i [Figure 7](#) og imaginær i [Figure 8](#):

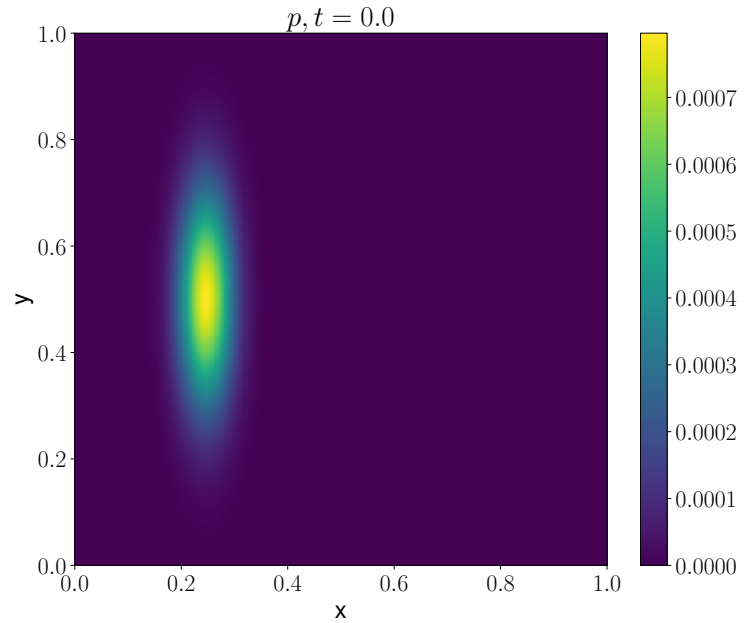
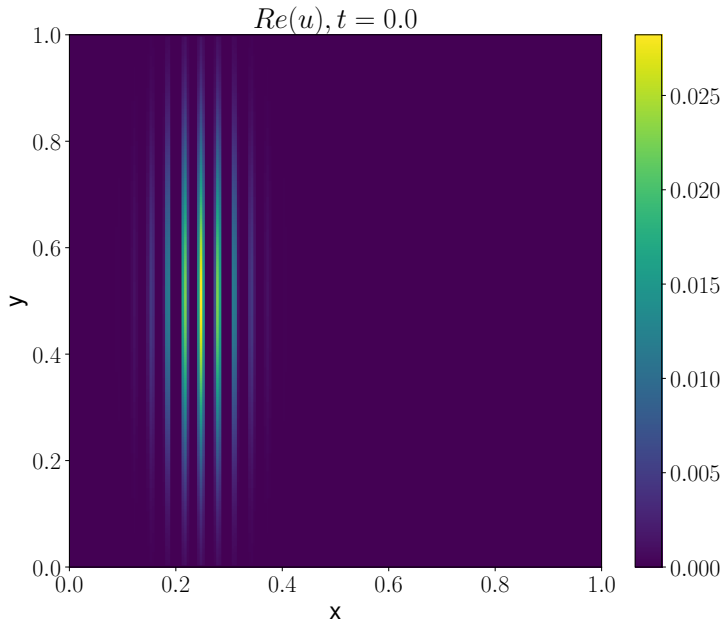
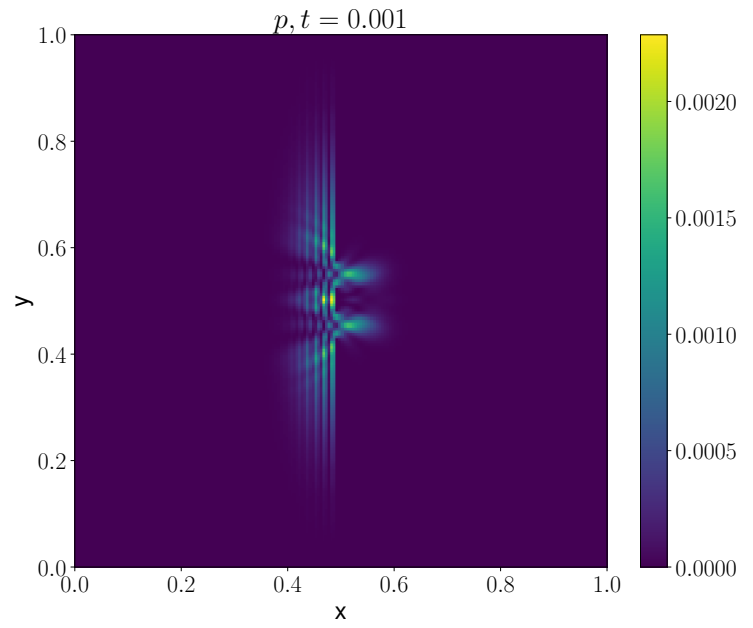
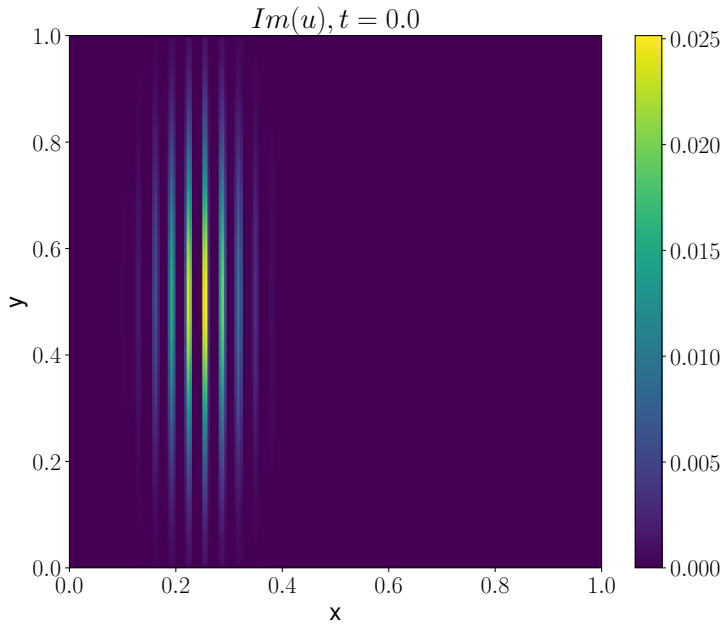
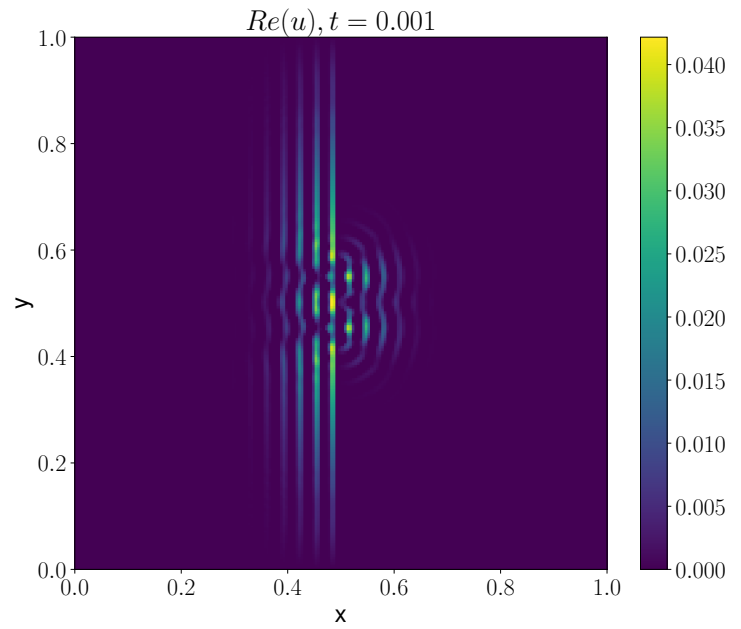
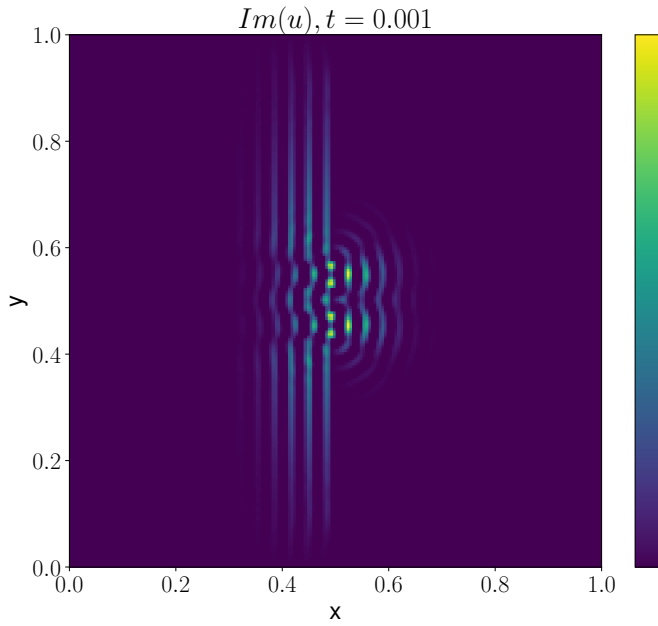
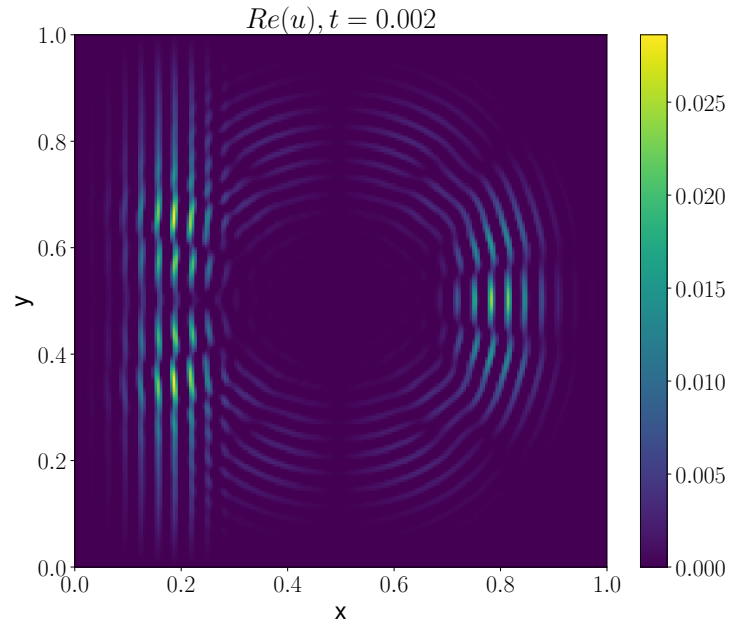


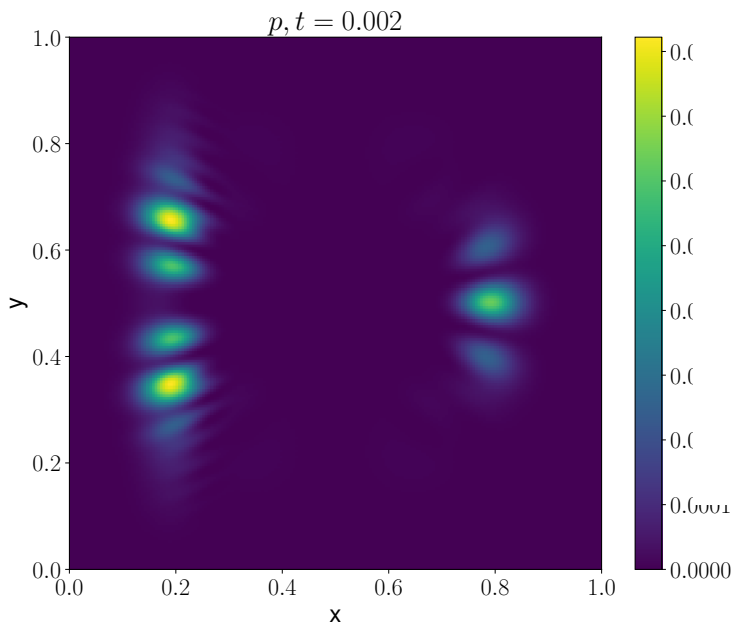
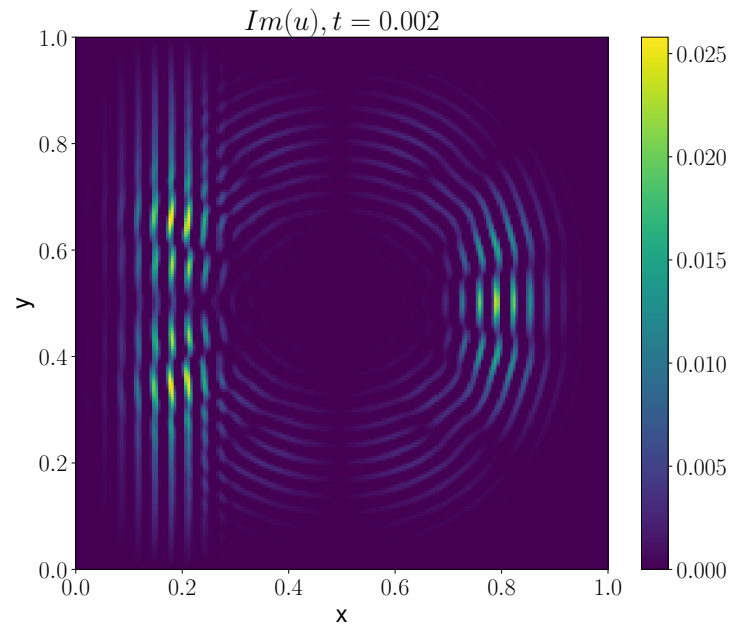
Figure 6. $|u|^2$ i tiden $t = 0$ s.

Figure 7. $Re(u)$ i tiden $t = 0$ s.Figure 9. $|u|^2$ i tiden $t = 0,001$ s.Figure 8. $Im(u)$ i tiden $t = 0$ s.Figure 10. $Re(u)$ i tiden $t = 0,001$ s.

Ved tiden $t = 0,001$ s fikk vi [Figure 9](#):

Figure 11. $Im(u)$ i tiden $t = 0,001$ s.Figure 13. $Re(u)$ i tiden $t = 0,002$ s.

Ved tiden $t = 0,002$ s fikk vi [Figure 12](#) for sannsynlighetsfordelingen og ?? for den relle delen og [Figur](#) for den imaginære:

Figure 12. $|u|^2$ i tiden $t = 0,002$ s.Figure 14. $Im(u)$ i tiden $t = 0,002$ s.

Med en spalte så fikk vi sannsynlighetstettheten langs y-aksen for $x = 0.8$ i [Figure 15](#)

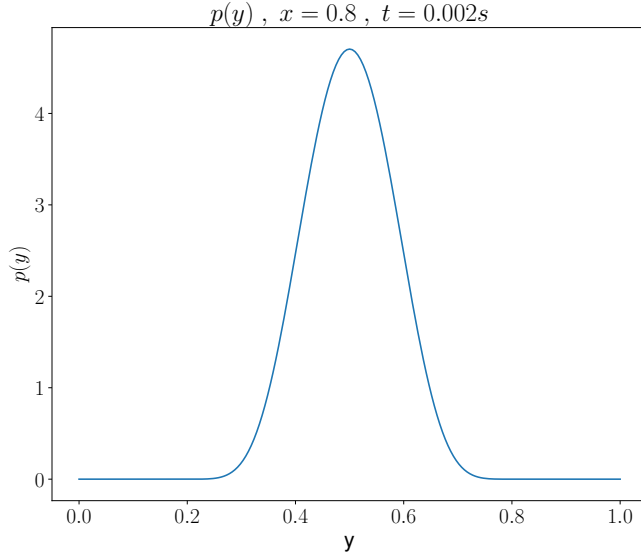


Figure 15. Sannsynlighetstettheten ved $x = 0.8$ og $t = 0.001975$ s for en spalte

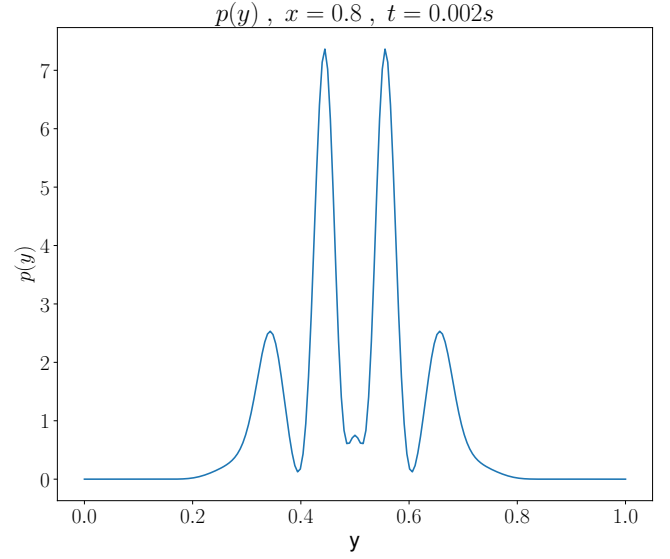


Figure 17. Sannsynlighetstettheten ved $x = 0.8$ og $t = 0.002$ s for tre spalter

IV. DISKUSJON

A. Sannsynlighetsavvik

For to spalter fikk vi [Figure 16](#) og for tre fikk vi [Figure 17](#)

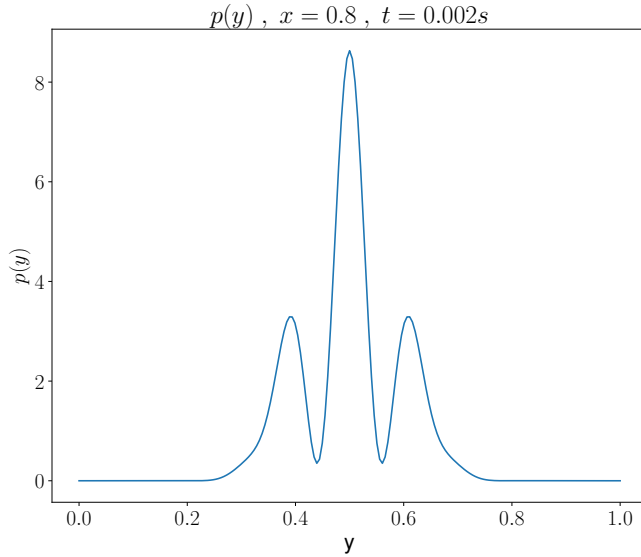


Figure 16. Sannsynlighetstettheten ved $x = 0.8$ og $t = 0.002$ s for to spalter

Av [??](#) og [Figure 5](#) ser vi at avviket for den totale sannsynligheten er på en skala av 10^{-14} både med og uten vegg, som forsterker troen på at vi har gjort det riktig, siden den totale sannsynligheten viker så lite fra 1. 10^{-14} begynner også å nærme seg maskinpresisjonen for doubles som vi brukte, altså 10^{-15} , så det blir vanskelig å få mere nøyaktighet. Vi ser også av [??](#) at avviket ser ut til å ha en syklus, men kommer seg fortsatt ikke opp mot 0 igjen ved $t = T = 0,008$. Dette kan tyde på at avviket blir større, men det kan også hende at avviket blir mindre igjen etter $t = 0,008$, men siden vi bare har målt til $t = 0,008$ er dette vanskelig å si. I vårt tidsrom er fortsatt avviket lite nok til at man kan si dette er akseptabelt. I [Figure 5](#) ser det imidlertid ut til at avviket stabiliserer seg ved $t = 0,002$. Vi vet igjen ikke hvordan den vil oppføre seg etter $t = 0,008$, men for tidsperioden av vår simulering er dette akseptabelt. Så ut ifra sannsynlighetsavviket kan det tyde på at vi har ganske riktige resultater.

B. Målingene av u i planet

Av [Figure 6](#) ser vi en ganske normal todimensjonal sannsynlighetsfordeling med et toppunkt i x_c, y_c . Ser vi imidlertid på den relle delen og den imaginiære delen for seg som i [Figure 7](#) og [Figure 8](#), ser vi $|u|^2 = p$ egentlig er satt sammen av to bølgefunksjoner som ser ut til å sirkulere på x -aksen og har en bredde på y -aksen. Ser

vi kun på p ser vi at i $t = 0,001$ så går noe av p gjennom åpningene, mens noe blir reflektert i veggen og går motsatt vei, som bølger. Til slutt ved $t = 0,002$ ser vi i **Figure 12** at p har blitt splittet opp til mindre toppunkter rundt om i planet. De fleste og mest sannsynlige punktene er igjen på venstre side, mens noe har fortsatt gått over til høyre side.

Ser vi derimot på den reelle og den imaginære delen i **Figure 10** og **Figure 11** ser vi her at det ikke bare er en stråle som p på samme tidspunkt, men at det faktisk her er som bølger som går gjennom en åpning. Når vi også ser på den reelle delen og den imaginære delen til u for $t = 0,002$ i **Figure 13** og **Figure 14**, så ser vi at det er bølger som har spredd seg, med noen interferenslinjer som er de som synes i **Figure 12**.

C. Sannsynligheten i $x = 0,8$

Vi ser at **Figure 15** har ett toppunkt, **Figure 16** har tre og **Figure 17** har 5. Disse ligner veldig mye på interferenslinjene til bølger som går gjennom spalter som kan forsterke påstanden om at simulasjonen er korrekt, siden vi så at u var satt sammen av bølger.

V. KONKLUSJON

Vi har simulert oppførelsen til en kvantetilstand i en boks. Ved å gi en initialhastighet så har vi sett hvordan en, to og tre spalter gjør med kvantetilstanden. Avviket til den totale sannsynligheten i beregningene er på 10^{-14} . I en boks med dobbeltspalte har vi sett hvordan den imaginære og reelle delen av kvantetilstanden er to bølgefunksjoner som kvantetilstanden består av. Sannsynlighetstettheten i dobbeltspalte-oppsettet har vi sett splitter seg opp ved at noe går gjennom spaltene imens en annen del blir reflektert av barrieren. For en, to og tre spalter har vi sett nærmere på sannsynlighetstettheten ved $x = 0.8$, hvor vi får en fordeling som ligner mye på interferensmønsteret for vanlige bølger igjennom spalter.

ACKNOWLEDGMENTS

I would like thank myself for writing this beautiful document.

REFERENCES

- Reference 1
- Reference 2

Appendix A: Name of appendix

This will be the body of the appendix.

Appendix B: This is another appendix

Tada.

Note that this document is written in the two-column format. If you want to display a large equation, a large

figure, or whatever, in one-column format, you can do this like so:

This text and this equation are both in one-column format.

[?]

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad (\text{B1})$$

Note that the equation numbering (this: B1) follows the appendix as this text is technically inside Appendix B. If you want a detailed listing of (almost) every available math command, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Mathematics>.

And now we're back to two-column format. It's really easy to switch between the two. It's recommended to keep the two-column format, because it is easier to read, it's not very cluttered, etc. Pro Tip: You should also get used to working with REVTeX because it is really helpful in FYS2150.

One last thing, this is a code listing:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can add extra arguments using optional parameters:

```
This will be displayed with a cool programming font!
```

You can also list code from a file using `\lstinputlisting`. If you're interested, check https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Source_Code_Listings.

This is a basic table:

Table III. This is a nice table

Hey	Hey	Hey
Hello	Hello	Hello
Bye	Bye	Bye

You can find a detailed description of tables here: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Tables>.

I'm not going to delve into TikZ in any level detail, but here's a quick picture:

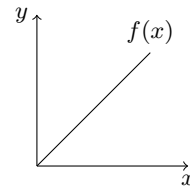


Figure 18. This is great caption

If you want to know more, check: <https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/PGF/TikZ>.