

# Felle for ladede partikler

Henrik Modahl Breitenstein and Carl Petter Duedahl

(Dated: October 25, 2021)

Vi ser på analytiske og numeriske løsninger av bevegelsesbanene til en- og flerpartikkelsystem i en penningfelle, med og uten Coloumb krefter mellom partiklene. Vi ser på presisjonen til Forward-Euler og Runge Kutta 4 i situasjonen av et ènpartikkelsystem. Vi ser også på hvordan systemet vil være med to partikler som kan påvirke hverandre med ladningen sin. I tillegg ser vi på hvordan systemet oppfører seg når man påfører et tidsvarierende elektrisk felt. Vi finner stabile baner når det ikke er interaksjoner mellom partiklene, og kaotiske baner med Coloumb krefter. Vi fant at RK4 har divergerende feil for  $h < 1$  og Forward-Euler hadde divergerende feil for  $h < 10^{-3}$ . Vi kom fram til at simuleringene av ènpartikkel og topartikkelsystemene sansynligvis er riktige, slev om vi fikk et ganske forskjellig system for to partikler enn én partikkel. For tidsvarierende elektrisk felt så finner vi at systemet har resonansfrekvenser rundt  $\omega_v = 0,2 \text{ MHz}$ ,  $\omega_v = 0,3 \text{ MHz}$  og  $\omega_v = 0,6 \text{ MHz}$ , hvor en stor andel av partikkelene har sluppet ut etter  $500 \mu s$ .

## I. INTRODUKSON

Alt materiale består av små partikler. For å kunne teste teorier eksperimentelt og for å kunne finne nye egenskaper ved partikler, så vil man måtte kunne kontrollere bevegelsen til en partikkel.

Gauss' lov forteller oss at divergensen til det elektriske feltet  $\mathbf{E}$  i et lukket volum, i vakuum, er definert av ladningene i volumet. For en ladningstetthet  $\rho$  og permitiviteten i vakuum,  $\epsilon_0$ , så har vi:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} . \quad (1)$$

Så for å fange en partikkel innenfor et lukket område, vil det ikke være mulig å ha et eksternt felt som peker inn mot en partikkel fra alle kanter, siden partikkelen da må være positiv for å gjøre den totale divergensen null. En løsning ble gitt av Hans George Dehemelt, som tok inspirasjon fra F. M. Penning, og har navngitt instrumentet for en Penning felle<sup>1</sup>. Fellen går ut på å bruke både et elektrisk og magnetisk felt for å få ladde partikler til å gå i baner inne i et lukket området. Penning fellen er spesielt nyttig til presisjonsmåling, og den brukes for eksempel ved CERN for å holde antiprotoner vekk fra normal materie. Diagrammet i Figure 1 viser skjemtatisk hvordan en Penning felle er konstruert<sup>2</sup>.

For å kunne gjøre beregninger så trenger man å vite hvordan partikler vil oppføre seg i en Penning felle. I teorikapitlet ser vi på hvordan vi kan finne den analytiske løsningen for én partikkel. Vi skal videre se i metode delen hvordan vi skal numerisk regne ut banene til et flerpartikkel system. I resultat og diskusjonsdelen så ser vi på hva vi kom fram til og hva resultatene betyr, som oppsummeres og konkretiseres i konklusjonsdelen.

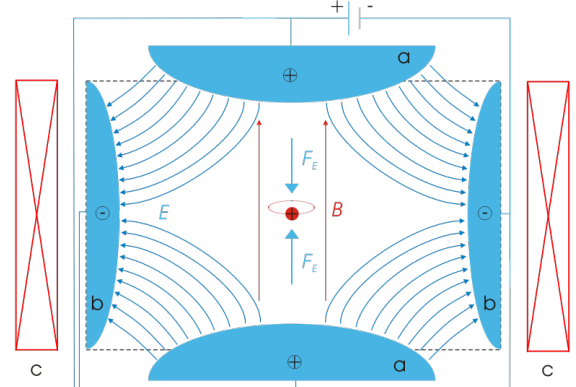


Figure 1. En skjemtatisk illustrasjon av en Penning felle. Diagrammet er et snitt av fellen hvor den nedre og øvre elektrodene,  $a$ , er positive, og den tredje elektroden,  $b$  er en sirkulær negativt ladd elektrode. I midten er det en positiv ladd partikkel. Bildet er hentet fra Wikipedia Commons

## II. TEORI

Det elektriske feltet  $\mathbf{E}$  og det elektriske potensialet  $\mathbf{B}$  relaterer til hverandre som følgende:

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2)$$

Om vi har et elektrisk felt  $E$  og et magnetisk felt  $\mathbf{B}$  så vil kraften på en ladd partikkel,  $\mathbf{F}$ , være gitt ved Lorentz kraften:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

hvor  $q$  er ladningen til partikkelen.

En ladd partikkel danner sitt eget elektriske felt. For flere ladde partikler så vil hver partikkel bidra til det totale elektriske feltet:

$$\mathbf{E} = k_e \sum_{j=1}^n q_j \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|^3} \quad (4)$$

<sup>1</sup> [https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/ion-trapping/public/PwTCP\\_chap1.pdf](https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/research-centres-and-groups/ion-trapping/public/PwTCP_chap1.pdf)

<sup>2</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Penning\\_trap#/media/File:Penning\\_Trap.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Penning_trap#/media/File:Penning_Trap.svg)

Partiklene vil også bidra til det totale magnetfeltet, men siden  $|\vec{E}_p| \approx \left| \frac{E_p}{c} \right|$ , hvor  $c$  er lyshastigheten, ignorer vi bidragene til magnetfeltet fra partikkene.

En Penning felle kan bli vist skjematisk som vist i **Figure 1**

For en ideel Penning felle så er det elektriske feltet definert:

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{2d^2} (2z^2 - x^2 - y^2) , \quad (5)$$

hvor  $V_0$  er størrelsen til det elektriske potensialet påført elektrodene.  $d$  er den karakteristiske dimensjonen og er definert:

$$d = \sqrt{z_0^2 + r_0^2/2} \quad (6)$$

I **Figure 1** så kan man se at kreftene i z-retningen vil kansellere hverandre. Siden det elektriske feltet kurver ut mot ringen, så kan man se at feltet kun har xy-komponent i midtlinjen av penningfellen. Siden vi da kun trenger å videre begrense bevegelsen i xy-retning, så bruker vi et magnetfelt definert ved:

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{e}_z = (0, 0, B_0) \quad (7)$$

Via newtons andre lov så kan vi vise at bevegelsen for en enkelt partikkel vil være gitt av differensiallikningene (8), (9) og (10), refer til appendix A for utregning.

$$\ddot{x} - \omega_0 \dot{y} - \frac{1}{2} \omega_z^2 x = 0 , \quad (8)$$

$$\ddot{y} + \omega_0 \dot{x} - \frac{1}{2} \omega_z^2 y = 0 , \quad (9)$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2 z = 0 , \quad (10)$$

hvor

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

De to første likningene, (8) og (9), er avhengig av hverandre, så vi kombinerer de i

$$f(t) = x(t) + iy(t) ,$$

Hvor vi da får

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2} \omega_z^2 f = 0 . \quad (11)$$

Se appendix B for utregning. Den generelle løsningen er da:

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t} , \quad (12)$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2} .$$

Siden

$$\omega_{\pm}$$

skal være reelle tall, så har vi restriksjonen

$$\omega_0^2 - 2\omega_z^2 \geq 0$$

$$\frac{|q|^2 B_0^2}{m^2} \geq \frac{2|q|V_0}{md^2}$$

Som gir oss

$$\frac{|q|B_0^2 d^2}{2mV_0^2} \geq 1 . \quad (13)$$

Og vi kan vise at maksimumet til  $f(t)$  er gitt ved

$$R_+ = A_+ + A_- , \quad (14)$$

og at minimumet er gitt ved

$$R_- = |A_+ - A_-| . \quad (15)$$

Se appendix B for forklaring. Vi tenker oss initialverdiene

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Da får vi at

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}, \quad (16)$$

og

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+} \quad (17)$$

Videre så kan vi finne den analytiske løsningen for den tredje differensiallikningen (10). Ved å sette

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t),$$

med initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

så har vi at

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t).$$

Referer til appendix C for utregning.

Legger vi til flere partikler i systemet som kan påvirke hverandre med Coloumb krefter, så får vi en bevegelse som ser slik ut:

$$\ddot{x}_i - \omega_{0,i} \ddot{y}_i - \frac{1}{2} \omega_{z,i}^2 x_i - k_e \frac{q_e}{m_i} \sum_{j \neq i} q_j \frac{x_i - x_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = 0$$

$$\ddot{y}_i - \omega_{0,i} \ddot{x}_i - \frac{1}{2} \omega_{z,i}^2 y_i - k_e \frac{q_e}{m_i} \sum_{j \neq i} q_j \frac{y_i - y_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = 0$$

$$\ddot{z}_i + \omega_{z,i}^2 z_i - k_e \frac{q_e}{m_i} \sum_{j \neq i} q_j \frac{z_i - z_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} = 0$$

Som det vil bli forklart dypere hvordan i Metode-delen skal vi bruke to numeriske metoder for å simulere banen. Den ene er Eulers metode og den andre er Runge Kutta 4. For Forward-Euler vil vi ha en feilorden på  $O(h^3)$ , og Runge Kutta 4 har en feilorden på  $O(h^4)$

### III. METODE

#### Analytisk

Først så definerer vi initialverdiene

$$x_0 = 1, y_0 = 0, z_0 = 1$$

$$\dot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0 = 1, \dot{z}_0 = 0$$

Og verdiene

$$m = 20, B_0 = 9.65 \cdot 10^1, V_0 = 9.65 \cdot 10^8$$

For å ha noe å sammenlikne de numeriske resultatene med så trenger vi å skissere de analytiske løsningene. Vi setter inn verdiene vi har satt og ser på bevegelsen i xy-retning.

#### Enpartikkelsystemet

Vi starter først med et enpartikkelsystem. Vi setter partikkelen i samme posisjon som i den analytiske delen, altså

$$\vec{r}'(0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

hvor vi setter  $x_0 = 1 \mu m$  og  $v_0 = 1 \frac{\mu m}{\mu s}$  for enkelhetsskyld. Vi bruker så at det elektriske feltet kan skrives som

$$\vec{E} = \begin{Bmatrix} V_0 \frac{x}{d^2} \\ V_0 \frac{y}{d^2} \\ -2V_0 \frac{z}{d^2} \end{Bmatrix}$$

og det magnetiske feltet er  $\vec{B} = (0, 0, B_0)$ . Vi vet også at den eksterne kraften er gitt som

$$\vec{F}_{eks} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

og slik kan vi regne ut den eksterne kraften. Så skal vi bruke dette som kraften når vi bruker de numeriske metodene. Vi starter med Eulers metode som er ganske rett fram:

---

Some maths, e.g  $f(x) = x^2$ .  
**for**  $i = 0, 1, \dots, N-1$  **do**

$$r_{i+1} \leftarrow r_i + v_i \cdot h$$

$$v_{i+1} \leftarrow v_i + \frac{F(r_i, v_i)}{m} \cdot h$$


---

hvor  $h$  er lengden på tidssteget.  
Runge Kutta 4 er litt mer komplisert:

---

Some maths, e.g  $f(x) = x^2$ .  
**for**  $i = 0, 1, \dots, N - 1$  **do**

```

     $R \leftarrow r_i$ 
     $V \leftarrow v_i$ 
     $vk_1 \leftarrow h \cdot F(r_i, v_i)$ 
     $rk_1 \leftarrow h \cdot v_i$ 
     $v_{i+1} \leftarrow V + vk_1/2.0$ 
     $r_{i+1} \leftarrow R + rk_1/2.0$ 
     $vk_2 \leftarrow h \cdot \frac{F(r_{i+1}, v_{i+1})}{m}$ 
     $rk_2 \leftarrow h \cdot v_{i+1}$ 
     $v_{i+1} \leftarrow V + vk_2/2$ 
     $r_{i+1} \leftarrow R + rk_2/2$ 
     $vk_3 \leftarrow h \cdot F(r_{i+1}, v_{i+1})/m$ 
     $rk_3 \leftarrow h \cdot v_{i+1}$ 
     $v_{i+1} \leftarrow V + vk_3$ 
     $r_{i+1} \leftarrow R + rk_3$ 
     $vk_4 \leftarrow h \cdot F(r_{i+1}, v_{i+1})/m$ 
     $rk_4 \leftarrow h \cdot v_{i+1}$ 
     $v_{i+1} \leftarrow V + (vk_1 + 2vk_2 + 2vk_3 + vk_4)/6$ 
     $r_{i+1} \leftarrow R + (rk_1 + 2rk_2 + 2rk_3 + rk_4)/6;$ 

```

---

Vi vil så teste om  $\omega_z = \frac{2qV_0}{md^2}$  er den samme i den numeriske som den analytiske. Vi tester dette ved å vite at  $\omega_z$  er vinkelhastigheten til hasitgheten i  $z$ -retning som gir oss  $\omega_z = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$  hvor  $f$  er frekvensen. Så da regner vi ut  $f = \frac{\omega_z}{2\pi}$  og ganger dette med  $100\mu s$  for å finne antall perioder den analytiske løsningen har over tidsrommet. Så plotter vi hasithgeten i  $z$ -retingen og teller antall perioder og sammnenlikner.

Vi finner så hva som blir feilen i systemet vårt. Vi kan regne den analytiske løsningen av systemet vårt  $\vec{r}_a$  som forklart tidligere. Så har vi vår numeriske løsning  $\vec{r}_n$  regnet ut som over. Vi har så den absolutte feilen gitt ved

$$err_{abs} = |\vec{r}_a - \vec{r}_n|$$

og den relative feilen er da

$$err_{re} = \frac{err_{abs}}{|\vec{r}|}$$

Så gjør vi dette for hvert tidssteg slik at

$$err_{re_i} = \frac{|\vec{r}_{a_i} - \vec{r}_{n_i}|}{|\vec{r}_{a_i}|}$$

Vi gjør dette med  $h = 10^{-i}$  hvor  $i = 0, 1, 2, 3, 4$  og finner ulike grafer for feilene med både Euler og Runge Kutta 4.

## Topartikkelsystemet

I simulasjonene for topartikkelsystemet vil vi kun bruke Runge Kutta 4. Vi setter en ny partikkel i posisjonen

$$\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ og hastigheten } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så bruker vi samme metode som i enpartikkelsystemet med Runge Kutta 4 på de to partiklene.

Så skal vi legge til en partikkelkraft mellom partiklene. Kraften på partikkel  $j$  fra alle andre partiler  $i$  er gitt ved

$$\vec{F}_{p_{ji}} = k_e q_j \sum_{i \neq j} q_i \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}$$

som vi da legger til i kraften for hver partikkel. I vårt tilfelle vil  $i$  bare være den andre partikkelen, men det blir nyttig å gjøre det slik for når vi har 100 partikler senere. Totalkraften på en partikkel blir da

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{Eks_i} + \vec{F}_{p_i}$$

Så bruker vi Runge Kutta 4 med denne nye kraften.

## Tidsvarierende Spenning

Videre så ser vi på hvordan en tidsvarierende elektrisk felt vil påvirke partikkene. Vi definerer feltet som følgende:

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0(1 + f \cos(\omega_v t)) , \quad (18)$$

hvor  $f$  er amplituden og  $\omega_v$  er frekvensen. Med den oscilerende spenningen, så ser vi på hvor mange partikler som fortsatt er fanget i penningfellen etter  $500\mu s$ . Vi bruker amplitudene  $f = 0.1, 0.4, 0.7$  og frekvensene i området  $\omega_v = [0.2 \text{ MHz}, 2.5 \text{ MHz}]$  med et mellomrom på  $0,02 \text{ MHz}$ . Vi ser så på om Coloumb kreftene mellom partikkene påvirker hvor mange partikler som er igjen i fellen.

## IV. RESULTATER

### Det analytiske

Vi tegner bevegelsen angitt av den anaylitske løsningen i [Figure 2](#).

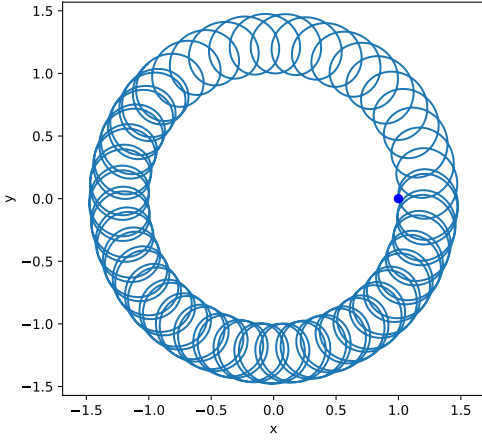


Figure 2. Illustrasjon av den analytiske banen til én enkelt partikkel i systemet.

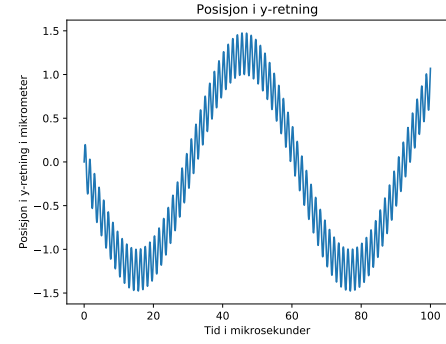


Figure 4. Posisjonen i y-retning for en partikkel alene i systemet.

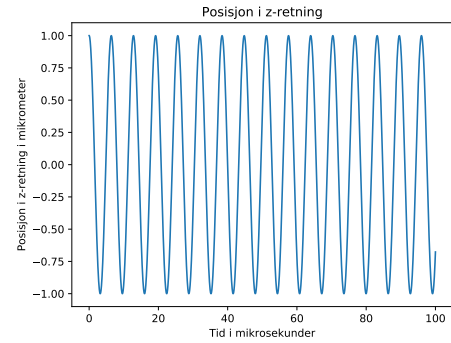


Figure 5. Posisjonen i z-retning for en partikkel alene i systemet.

### Énpartikkelsystemet

Vi fikk at i ènpartikkelsystemet så ble posisjonene som gitt i figurene [Figure 3](#), [Figure 4](#) og [Figure 5](#).

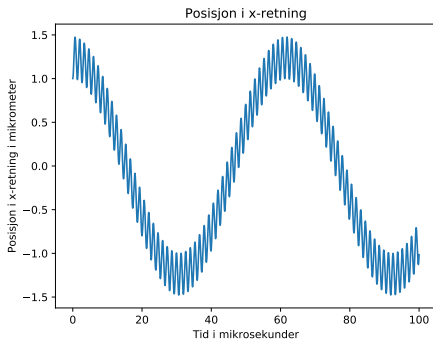


Figure 3. Posisjonen i x-retning for en partikkel alene i systemet.

Av den analytiske løsningen var  $\omega_z = \frac{2qV_0}{md^2}$  som med våre verdier gir  $\omega_z = 0,982Hz$ . Da får vi at antall perioder over  $100\mu s$  blir litt over rundt femten og en halv. Vi ser på grafen, teller antall perioder og får sånn ca. femten og en halv der også. Hastigheten fra den numeriske løsningen ble som i [Figure 6](#).

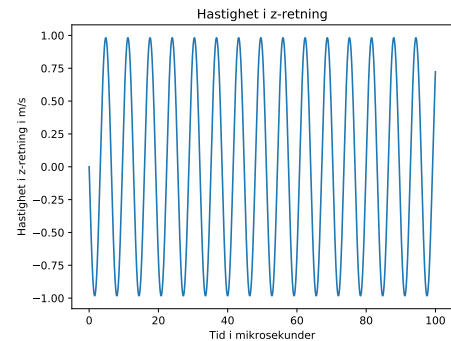


Figure 6. Hastigheten i z-retning for en partikkel alene i fella.

De relative feilene for Eulers metode over tiden ble seende ut som i [Figure 7](#), mens de relative feilene for Runge-Kutta 4 er den relative feilen gitt i [Figure 8](#)

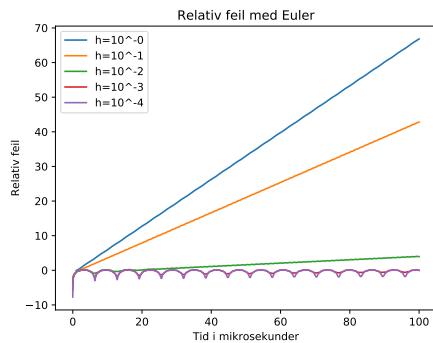


Figure 7. De relative feilene over tiden for ulike tidssteg ved bruke av Eulers metode

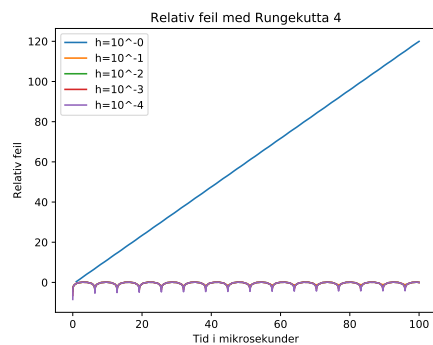


Figure 8. De relative feilene over tiden for ulike tidssteg ved å bruke Runge Kutta 4

For Eulers metode fikk vi at konvergesraten ble  $errRate_{Eu} = 66,658$ , mens for Runge Kutta 4 fikk  $errRate_{RK4} = 13,009$ .

### To-partikkelsystemet

Partiklene uten interaksjon vil se ut som i **Figure 9** i xy-planet.

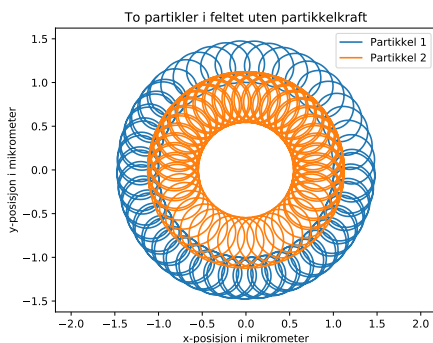


Figure 9. To partikler som ikke gir forveksler kraft med hverandre i feltet

Partiklene med interaksjon ble derimot seende ut som på **Figure 10** i xy-planet

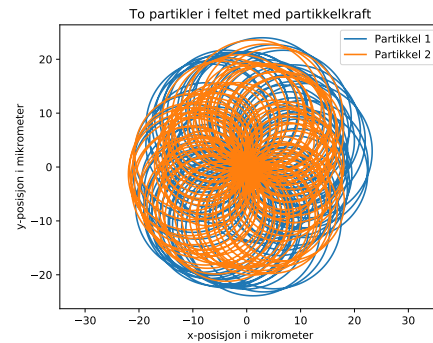


Figure 10. To partikler i feltet som også kan virke på hverandre.

I tre dimensjoner vil banene se ut som i **Figure 11** uten partikkelinteraksjon, mens banene med partikkelinteraksjon vil se ut som de i **Figure 12**.

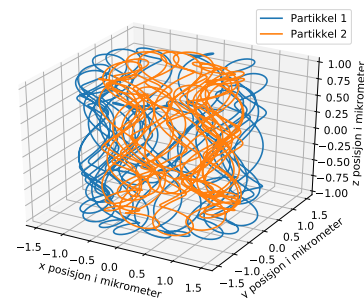


Figure 11. Partiklenes baner i 3 dimensjoner uten partikkelinteraksjon.

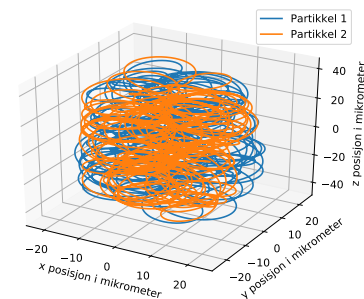


Figure 12. Partiklenes baner i 3 dimensjoner med partikkelinteraksjon.

Fasediagrammene til partiklene uten påvirkning ble seende ut som **Figure 13** for den første partikkelen og

Figure 14 for den andre partikkelen. Fasediagrammene til partiklene med påvirkning fra den andre partikkelen ble som i Figure 15 for den første partikkelen og ?? for den andre.

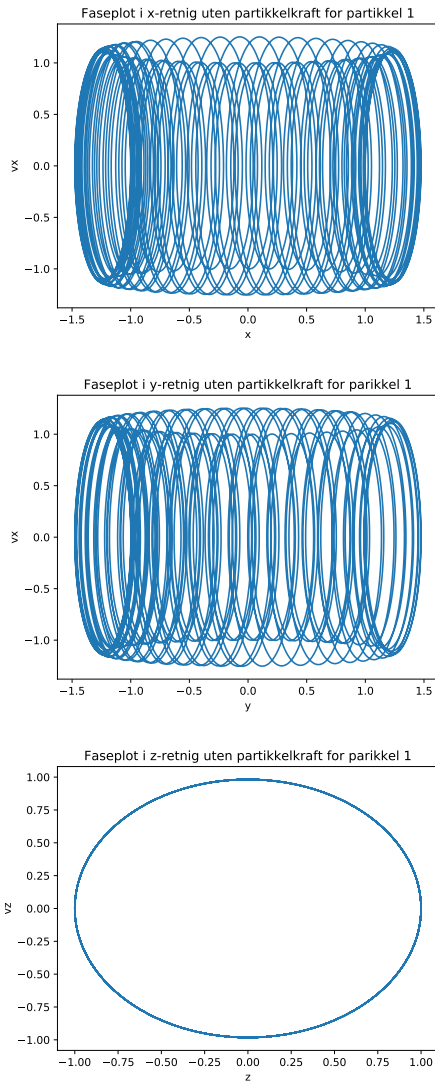


Figure 13. Fasediagrammene for partikkel 1 i x, y og z-retning uten partikkelkrefter. Verdiene er skalert i mikrometer og mikrometer per mikrosekund

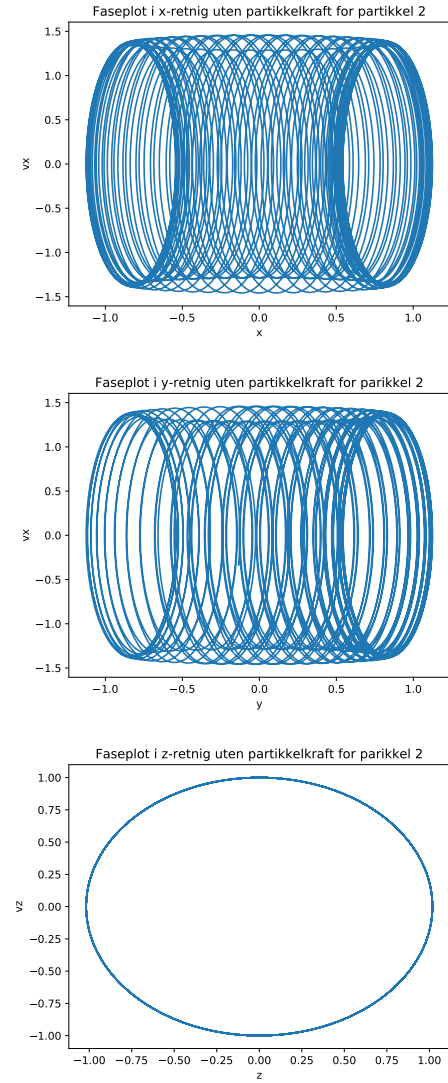


Figure 14. Fasediagrammene for partikkel 2 i x, y og z-retning uten partikkelkrefter. Verdiene er skalert i mikrometer og mikrometer per mikrosekund



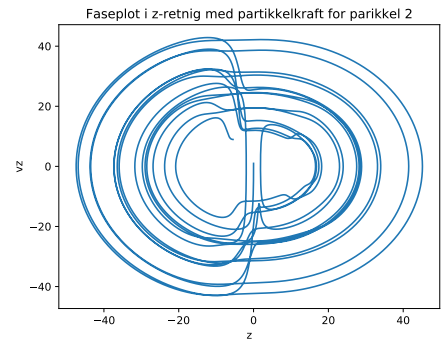
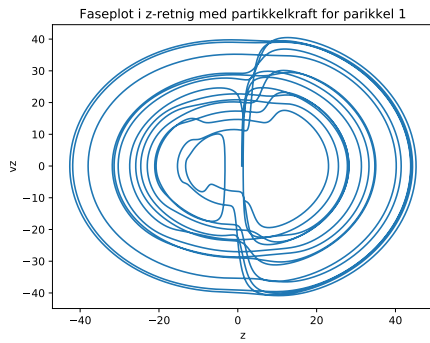
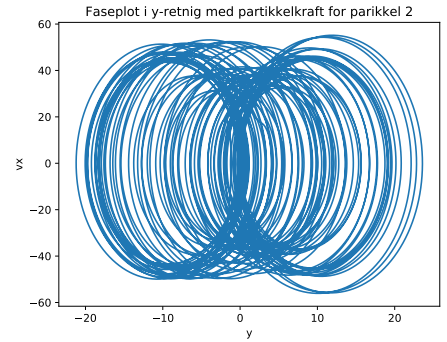
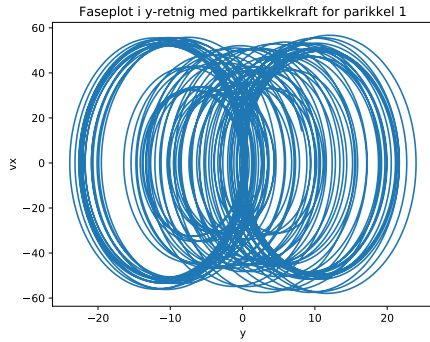
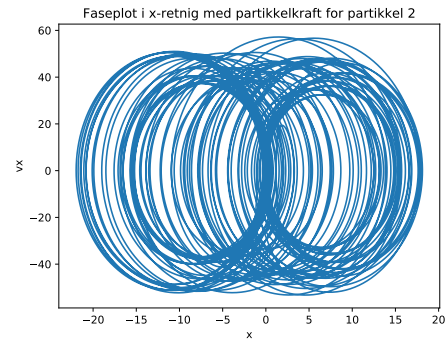
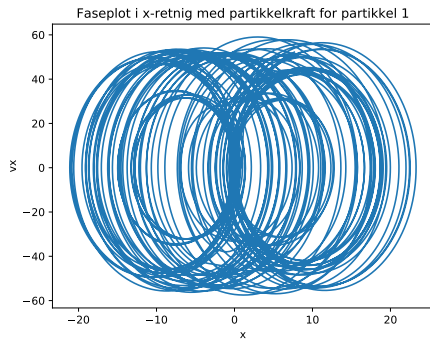


Figure 15. Fasediagrammene for partikkel 1 i x, y og z-retning med partikkelkraft. Verdiene er skalert i mikrometer og mikrometer per mikrosekund

Figure 16. Fasediagrammene for partikkel 2 i x, y og z-retning med partikkelkraft. Verdiene er skalert i mikrometer og mikrometer per mikrosekund

### Tidsvarierende spenning

I [Figure 17](#), [Figure 18](#) og [Figure 19](#) så har vi tegnet grafene for hvor mange partikler som er igjen i fellen etter 500 mikrosekunder.



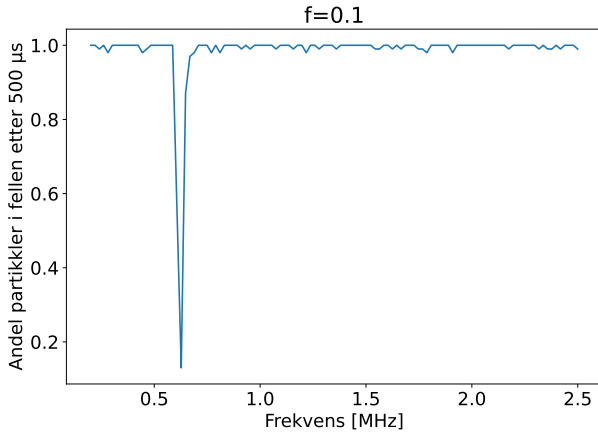


Figure 17. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2  $MHz$  og 2,5  $MHz$ . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,1. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

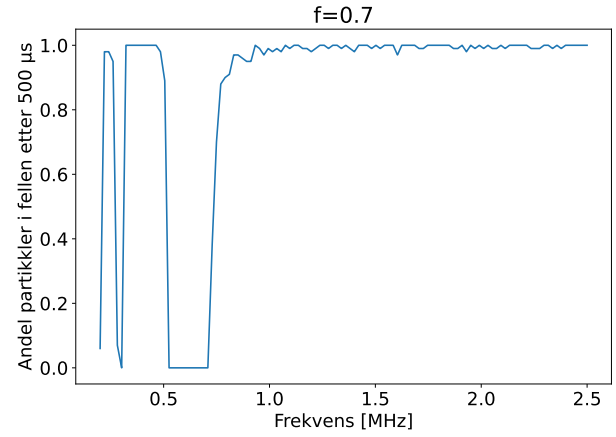


Figure 19. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2  $MHz$  og 2,5  $MHz$ . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,7. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

Vi ser at for amplitudene  $f = 0,1$ ,  $f = 0,4$  og  $f = 0,7$  så faller antall partikler igjen etter 500 mikrosekunder rundt frekvensen 0,6  $MHz$ . Ved mer nøyaktig avlesning så får vi at bunnen til grafen er på  $\omega_v \approx 0,627 MHz$ . For amplitudene  $f = 0,4$  og  $f = 0,7$  så ser vi at frekvensrommet hvor partikler slipper løs blir større, og at det danner seg nye områder rundt frekvensen  $\omega_v = 0,3$  for  $f = 0,4$  og  $\omega_v = 0,3$  og  $\omega_v = 0,2$  for  $f = 0,7$ . I [Figure 20](#) så er grafen for amplituden  $f = 0,4$  tegnet opp i frekvensområdet  $\omega_v = [0.5, 0.9]$ , hvor interaksjoner mellom partikkene fortsatt er ignorert. I [Figure 21](#) så har vi tegnet opp det samme området, men tatt med Coloumb kreftene mellom partikkene.

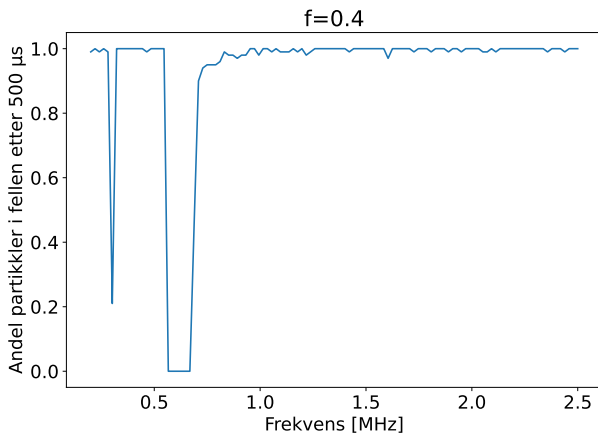


Figure 18. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,2  $MHz$  og 2,5  $MHz$ . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet.

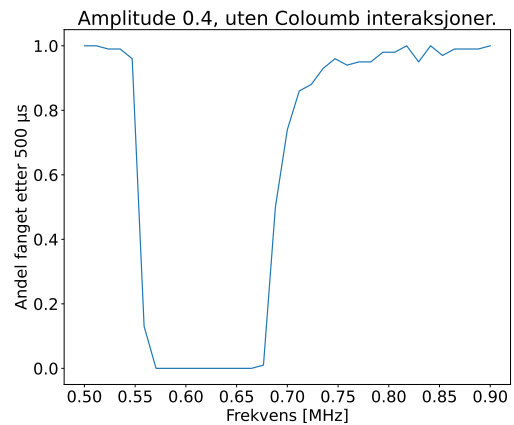


Figure 20. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,5  $MHz$  og 0,9  $MHz$ . Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Interaksjoner mellom partikkene er ikke tatt med i bergningene.

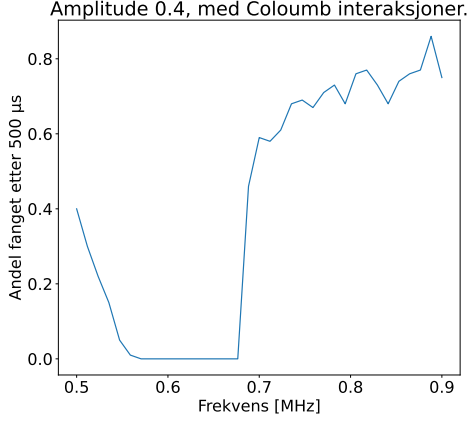


Figure 21. Antall partikler som er fanget etter 500 mikroseunder for frekvenser mellom 0,5 MHz og 0,9 MHz. Amplituden til den tidsvarierende spenningen er 0,4. Partikkene har blitt gitt en tilfeldig startposisjon og hastighet. Coloumb kreftene mellom partikkene er tatt med i bergningene.

Vi ser at frekvensområdet som gjør at partikler slipper fri er større når coloumb kreftene er tatt med, i [Figure 21](#), enn med uten interaksjoner mellom partikkene, som sett i [Figure 20](#).

## V. DISKUSJON

### Énpartikkelsystemet

Vi ser at  $\omega_z$  for den numeriske løsningen er ved øymål lik den analytiske  $\omega_z$  som forsterker troen på at simuleringen vår er en god tilnærming.

I den relative feilen så ser vi den ikke er stabil for tidssteg høyere enn  $h = 10^{-3} \mu s$ . Den relative feilen for RK4 lar oss gå helt opp til  $h = 10^{-1}$ . Det vil si at Runge Kutta 4 er en mer stabil metode enn Forward-Euler i dette systemet, noe som var forventet ettersom Forward-Euler klarer seg dårlig i oscilerende systemer. Runge Kutta 4 skal ha en global feil som skalerer med  $O(h^4)$  og Euler sin feil skalerer med  $O(h^3)$ , som stemmer overens med resultatene ved at Euler ender opp med å divergere ved lavere  $h$  enn ved Runge Kutta 4. Konvergensfaktoren for Runge kutta 4 er også mindre enn for Euler. Begge har en konvergensfaktor større enn 1, trolig grunnet at vi har med tidssteg hvor begge har en divergerende feil. Fjerner vi det største tidssteget så får vi at  $err_{Rate_{RK4}} < 1$ , som passer med at den da kun har konvergerende relative feil.

### Topartikkelsystemet

Vi ser at når partikkelene ikke påvirker hverandre følger de baner som likner énpartikkelsystemet, som kan tyde på at denne simuleringen fungerer. Man kan tross alt se på de to partikkene som to uavhengige

énpartikkelsystemer. Når vi skruer på interaksjonen derimot, så ser vi noe ganske annet. Vi kan fortsatt se noen tendenser til et liknende mønster, for eksempel at det fortsatt er sirkelbevegelse inni en større sirkelbevegelse, men vi ser også at partikkene har mye større baner enn før. Dette kan være fordi partikkene startet kun noen mikrometer nærme hverandre og partikkelkraften mellom dem har derfor blitt veldig sterk og skutt dem ut i større baner. Her har de kanskje blitt langt fra hverandre og kreftene mellom dem har blitt mindre. Da vil de eksterne kreftene ha mer å si igjen og de begynner å likne mer på énpartikkelsystemer igjen. Da vil de også gå i baner igjen, men større baner enn før, som stemmer med figuren siden vi gikk fra en bane med radius på rundt  $1 \mu m$  til en bane med radius rundt  $10 \mu m$ .

Vi ser av fasediagrammet at i et systemet uten interaksjon mellom partikkene så er ser det ut til å være et system av sirkler. Det gir mening siden også partikkelen danner sirkler over  $xy$ -planet. I  $z$ -retning er den mer sirkulær som gir mening siden denne kun er en cosinus funksjon. Når vi legger på partikkelinteraksjon får vi derimot mindre regelrette diagrammer. Hastigheten og posisjonen går også fra  $1.5 m/s$  og  $1 \mu m$  til  $60 m/s$  og  $20 \mu m$ . Dette samstemmer med hva vi så i  $xy$ -planet hvor partikkelen gikk fort langt ut fordi de var veldig nærme hverandre i starten og hadde stor påvirkning på hverandre.

### Tidsvarierende Spenning

Grunnen til at partikkene flykter fra fellen ved noen frekvenser og ikke andre er at det danner seg en resonans i bevegelsen. Det vil si at partikkene får en større og større amplitude i bevegelsesbanen, som til slutt gjør at partikkelen kommer seg ut av fellen. Om vi ser på hvordan resonansfrekvensene endrer seg med amplituden så lister vi de opp på nytt:

$$\omega_{R1} = 0,6 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R2} = 0,3 \text{ MHz}$$

$$\omega_{R3} = 0,2 \text{ MHz}$$

Og våre basisfrekvenser for systemet:

$$\omega_z \approx 0,0155 \text{ MHz}$$

$$\omega_- \approx 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ MHz}$$

$$\omega_+ \approx 4,8 \text{ MHz}$$

Vi kan da se at vi kan bygge opp resonansfrekvensen  $\omega_{R1}$  ved at

## REFERANSER

Vi har kodene i Github repositoriet: <https://github.com/carlpd/FYS3150/tree/main/Project3>

$$\omega_{R1} = 0,6 \approx 40 \cdot \omega_z$$

Med Coloumb kreftene så er det tydelig at de gjør det lettere for partikkene å flykte. Grunnen til dette kan være at om en partikkel kommer seg mot kanten av fellen så vil de andre partikkene påføre en kraft utover. Det kan da føre til at det er flere tilfeller hvor en partikkel klarer å gå over kanten.

## VI. KONKLUSJON

Vi har sett på analytiske og numeriske beregninger av banen til partikler i en penningfelle. For én-partikkel system så har vi fått god overenstemmelse mellom analytisk og numeriske metoder. De numeriske metodene vi har brukt er Runge Kutta 4 og Forward Euler, og vi har funnet at i denne situasjonen så divergerer feilen raskere med Forward Euler enn med Runge Kutta 4, hvor RK4 sin konvergerings rate er ca. 13 og Forward Euler har en konvergerings rate på ca. 66, noe som stemmer bra med metodenes teoretiske globale feil. For to-partikkelsystemet var det vanskeligere å analysere bevegelsen siden den ikke lenger var så forutsigbar med interaksjoner. Uten partikkelinteraksjoner var det mer som to énpartikkelsystemer, men med partikkelinteraksjoner ble det annerledes. Likevel var partiklene ganske nærme hverandre i starten og de fikk seg fort en ganske mye større bane så de fikk en ganske stor akselerasjon fra hverandres elektriske kraft og skjøt ut i en større bane. Dette kan tyde på at vi har en god simulasjon, men uheldige initialverdier. Ved å sette på et elektrisk felt som varierer med tiden, så har vi funnet resonansfrekvensene  $\omega_v = 0,2 \text{ MHz}$ ,  $\omega_v = 0,3 \text{ MHz}$  og  $\omega_v = 0,6 \text{ MHz}$ , hvor en større andel av partikkelene slipper unna fellen.

## Appendix A: Utregning av enkeltspartikkelens bevegelseslikning

Vi har posisjonsvektoren  $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Newtons andre lov git oss at endringen i posisjonen er gitt ved

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \sum_i \mathbf{F}_i .$$

Kreftene på partikkelen er Lorentz kraften.

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Bruker at  $\mathbf{E} = -\nabla V$  og setter inn

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\nabla V + q\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} .$$

Finner gradienten

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) .$$

Hvor

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{V_0}{d^2}x$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{V_0}{d^2}y$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{2V_0}{d^2}z$$

Løser kryssproduktet

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} = (B_0\dot{y})\hat{i} - (B_0\dot{x})\hat{j} = B_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter inn

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = q \frac{V_0}{d^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + qB_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{qV_0}{md^2} \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \frac{qB_0}{m} \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Innfører

$$\omega_0 = \frac{|q|B_0}{m}$$

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2|q|V_0}{md^2}}$$

Som gir oss

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\omega_z^2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ -2z \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Som tilsvare likningene

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0\dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 ,$$

$$\ddot{z} + \omega_z^2z = 0 .$$

## Appendix B: Utregning av $f(t)$ fra differensiallikningene og dens egenskaper

Vi har

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$\ddot{y} + \omega_0\dot{x} - \frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 .$$

Ved å skalere den ene likningen med  $i$  så får vi

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x = 0 ,$$

$$i\ddot{y} + i\omega_0\dot{x} - i\frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 ,$$

$$\ddot{x} - \omega_0\dot{y} - \frac{1}{2}\omega_z^2x - i\ddot{y} - i\omega_0\dot{x} + i\frac{1}{2}\omega_z^2y = 0 .$$

Vi setter de sammen og får

$$(\ddot{x} + i\ddot{y}) + i\omega_0(\dot{x} + \dot{y}) - \frac{1}{2}\omega_z^2(x + iy) = 0 .$$

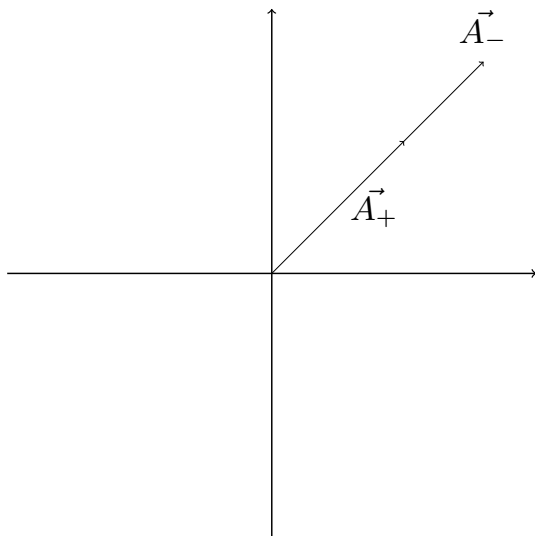


Figure 22. Ledd  $A_+$  og  $A_-$  som vektorer for å se loggikken bak  $f$  sine grenser.

Som er det samme som

$$\ddot{f} + i\omega_0 \dot{f} - \frac{1}{2}\omega_z^2 f = 0.$$

Den generelle løsningen av  $f$  er

$$f(t) = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t},$$

hvor

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_0 \pm \sqrt{\omega_0^2 - 2\omega_z^2}}{2}.$$

Funksjonen  $f$  vil ha et maksimum når begge leddene går i samme retning, som man kan se i **Figure 22**.

Vi kan da skrive at maksimumet  $R_+$  er

$$R_+ = |A_+ + A_-| = A_+ + A_-.$$

På samme måte så vil minimumet være når leddene til  $f$  går i motsatte retninger, som vist i **Figure 23**. som vil si at

$$R_- = |A_+ - A_-|$$

### Appendix C: Utregning av analytiske løsninger til differensiallikningene

Vi starter med

$$f = A_+ e^{-i\omega_+ t} + A_- e^{-i\omega_- t}$$

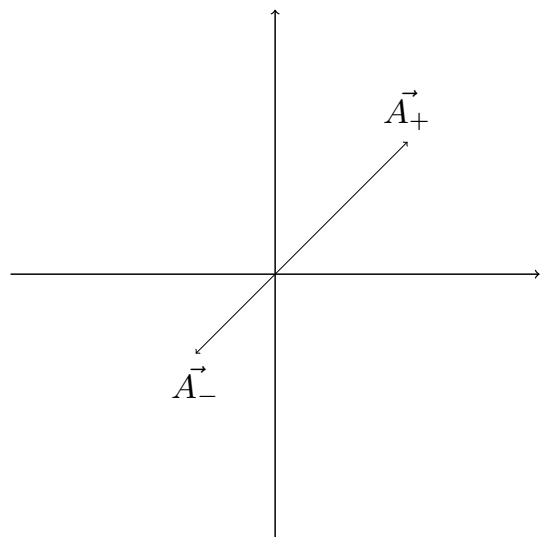


Figure 23. Ledd  $A_+$  og  $A_-$  som vektorer for å se loggikken bak  $f$  sine grenser.

Og har at

$$x_0 = x_0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

$$y_0 = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0$$

Det vil si

$$\text{Re}(f(0)) = x_0$$

$$x_0 = A_+ + A_-$$

Og vi har

$$\dot{f}(0) = -i\omega_+ A_+ - i\omega_- A_-$$

$$\text{Im}(\dot{f}(0)) = v_0$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- A_-$$

Stokker om

$$A_- = x_0 - A_+$$

Og setter inn

$$c_2 = \frac{z_0}{2}$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- (x_0 - A_+)$$

$$v_0 = -\omega_+ A_+ - \omega_- x_0 + \omega_- A_+$$

$$v_0 = (\omega_- - \omega_+) A_+ - \omega_- x_0$$

$$A_+ = \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Og vi har

$$A_- = x_0 - A_+$$

$$A_- = x_0 - \frac{v_0 + \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = \frac{x_0(\omega_- - \omega_+) - v_0 - \omega_- x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

$$A_- = -\frac{v_0 + \omega_+ x_0}{\omega_- - \omega_+}$$

Videre så har vi initialverdiene

$$z(0) = z_0$$

$$\dot{z}(0) = 0$$

Vi starter da med

$$\omega_z^2 z(t) = -\frac{d^2}{dt^2} z(t)$$

Som har den generelle løsningen

$$z(t) = c_1 e^{-i\omega_z t} + c_2 e^{i\omega_z t}$$

Bruker så initialverdiene

$$z(0) = c_1 + c_2 \Rightarrow z_0 = c_1 + c_2$$

$$\dot{z}(0) = -ic_1 \omega_z + i\omega_z c_2 \Rightarrow c_1 = c_2$$

Som gir at

$$c_1 = \frac{z_0}{2}$$

Og vi får løsningen

$$z(t) = \frac{z_0}{2} e^{-i\omega_z t} + \frac{z_0}{2} e^{i\omega_z t}$$

Som vi kan skrive som

$$z(t) = \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) - i \sin(\omega_z t)) + \frac{z_0}{2} (\cos(\omega_z t) + i \sin(\omega_z t))$$

Som til slutt blir

$$z(t) = z_0 \cos(\omega_z t)$$