

# Kvantetilstand i et dobbelt-spalte system

Carl Petter Duedahl and Henrik Modahl Breitenstein  
(Dated: December 15, 2021)

Vi har sett på hvordan en kvantetilstand vil oppføre seg i en boks med én, to og tre spalter ved å gjøre numeriske beregninger. Avviket til den totale sannsynligheten fikk vi til å være på størrelsesordenen  $10^{-14}$ . Ved to spalter ser vi hvordan kvantetilstanden tidsutvikler seg, ved at noe reflekteres og noe går igjennom spaltene. For én, to og tre spalter ser vi på sannsynlighetsfordelingen ved  $x = 0.8$  og finner at sannsynlighetstettheten ligner mye på fordelingen til interferenslinjene til bølger igjennom spalter.

## I. INTRODUKSON

Et viktig eksperiment i kvantefysikkens historie har vært dobbelt-spalte eksperimentet, først introdusert av Thomas Young på 1800-tallet (Referanse 1). Young sitt eksperiment gikk ut på hvordan lys oppfører seg som en bølge. Senere har det blitt vist hvordan partikler, som for eksempel elektroner også kan oppføre seg som bølger ved hjelp av det samme eksperimentet. Forståelsen på hvordan en partikkel interferer med seg selv er gitt av Schrödingerlikningen fra kvantefysikken:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle, \quad (1)$$

For å kunne se hvordan en kvantetilstand vil oppføre seg i et slikt eksperiment så skal vi bruke Schrödingers likning til å simulere et ett-spalte, to-spalte og tre-spalte system innad i en boks. Ved å gjøre dette kan vi finne sannsynlighetsfordelingen til en tenkt partikkel og sammenlikne med tidligere teoretiske og eksperimentelle resultater. I metoddelen går vi først igjennom Schrödingerlikningen og ser hvordan vi kan forenkle den. Så viser setter vi opp en initialtilstand en vegg. Deretter ser vi på Crank-Nicolson likningen og viser hvordan vi kan bruke denne til å tidsutvikle systemet. Før vi til slutt i metoddelen bruker alt dette. Vi representerer resultatene så i resultatskapittelet og diskuterer de separat i diskusjonsdelen. Til slutt summerer vi opp og kommer med en konklusjon.

## II. TEORI OG METODE

### A. Om Schrödinger-likningen

Vi har altså at Schrödinger-likningen kan skrives som

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$

Vi skal imidlertid se på en partikkel i et todimensjonalt system med en vegg med et høyt tidsuavhengig potensial  $V(x, y)$ . Da blir Schrödinger-likningen heller slik

$$i\hbar \frac{d}{dt} \Psi(x, y, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right) \Psi(x, y, t) + V(x, y) \Psi(x, y, t)$$

I denne oppgaven vil vi være mest opptatt av hvordan sannsynligheten for å finne partikkelen på spesifikke posisjoner i systemet utvikler seg over tid. Av Borns regel har vi at sannsynligheten for å finne partikkelen i en tilstand eller i vårt tilfelle posisjon på et gitt tidspunkt er

$$p(x, y; t) = |\Psi(x, y, t)|^2 = \Psi^*(x, y, t) \Psi(x, y, t)$$

I denne simuleringen skal vi forenkle denne modellen slik at vi nå har

$$i \frac{du}{dt} = -\frac{\delta u}{\delta x} - \frac{\delta u}{\delta y} + v(x, y)u$$

Her er  $u$  en normalisert og dimensjonsløs kvantetilstand. Siden den er normalisert og vi går over et gitter vil da

$$\sum p_{i,j} = \sum u_{i,j}^* u_{i,j} = 1$$

I tillegg er  $u$  i et dimensjonsløst plan så vi setter  $x$  og  $y$  til å gå fra 0 til 1. Selve initialtilstanden vil bli videre diskutert i [section II B](#).  $v(x, y)$  er også innenfor det samme enhetsløse to-dimensjonale planet og vil bli videre diskutert i [section II C](#).

### B. Initialtilstand

Vi trenger en initialtilstand, altså tilstanden  $u(x, y, t = 0) = u_{i,j}^0$ . Vi skal bruke en Gaussisk initialtilstand på formen

$$u(x, y, t = 0) = \frac{1}{C} e^{-\frac{(x-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x-x_c) + ip_y(y-y_c)}$$

Siden dette er Gaussisk så vil  $x_c$  og  $y_c$  være toppunktet til  $p_{i,j}$  og der det vil være mest sannsynlig at partikkelen er.  $p_x$  og  $p_y$  er bevegelsesmengden til partikkelen.  $\sigma_x$  og  $\sigma_y$  er bredden til funksjonen.  $C$  er normaliseringskonstanten. Siden vi skal gjøre dette over et gitter får vi heller

$$u_{i,j}^0 = \frac{1}{C} e^{-\frac{(x_i-x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j-y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i-x_c) + ip_y(y_j-y_c)}$$

Vi må også normalisere dette, altså at

$$\sum_{i,j} u_{i,j}^{n*} u_{i,j}^n = \sum_{i,j} p_{i,j}^n = 1$$

Så det vi da må gjøre er å la

$$C = \sum_{i,j} \left| e^{-\frac{(x_i - x_c)^2}{2\sigma_x^2} - \frac{(y_j - y_c)^2}{2\sigma_y^2} + ip_x(x_i - x_c) + ip_y(y_j - y_c)} \right|_2$$

Å normalisere slikt gjør vi kun i initialtilstanden, men dersom systemet er nøyaktig nok, vil  $\sum_{i,j} p$  holde seg ganske nærme 1 også når vi tidsutvikler tilstanden. Imens vi tidsutvikler koden vår vil vi summere opp alle  $p_{i,j}^n$  for å se om den totale sannsynligheten holder seg jevnt rundt 1 og dermed også kontrollere at vi gjør riktig.

Hele matrisen  $U$  bestående av  $u_{i,j}$  vil være på størrelsen  $M \times M$  og dimensjonene vil være normalisert så laveste verdiene av  $x$  og  $y$  vil være 0 og høyeste 1. Vi vil bruke Dirichlet grensebetingelser så vi setter  $u(x = 0, y, t) = u(x = 1, y, t) = u(x, y = 0, t) = u(x, y = 1, t) = 0$  uansett tidssteg. Det gjør at vi egentlig ikke trenger å finne tidsutviklingen i grensene så for det meste av metoden begrenser vi  $U$  til å være en  $(M - 2) \times (M - 2)$ -matrise, med  $u_{0,0}^n = u(x = 0 + h, y = 0 + h, t)$  og  $u_{M-3,M-3}^n = u(x = 1 - h, y = 1 - h)$ . Hvor  $h$  da er steglengden. Vi vil da til slutt omgi matrisen med en vegg av 0 når vi plotter  $U$ .

### C. Lage spalten

Så trenger vi å lage en vegg og en spalteåpning. Vi skal sette spalten i midten av systemet vårt, altså har den et midtpunkt i  $x = 0,5$ . Så skal tykkelsen på veggene være 0,02 i x-retning. I y-retning har vi da hullene og veggene. Vi vil i starten bruke to spalter, men vil også variere mellom å bruke én spalte, tre spalter og å ikke ha noen vegg i det hele tatt. Vi tar først eksempelet med to åpninger. Da har vi først en vegg, så en åpning på 0,05, deretter en vegg også på 0,05, så en ny åpning på 0,05 og til slutt en vegg som er like lang som den første vegg. Lengden på åpningene og veggene mellom åpningene vil ikke forandre seg når vi endrer antall åpninger, men veggene på sidene vil endre seg avhengig av antall åpninger vi har. For å finne lengden for endeveggene kan vi da bruke

$$l_{endevegg} = \frac{1 - (n_{slits} + n_{mellomvegger}) \cdot 0.05}{2}$$

Hvor  $n_{slits}$  er antall åpninger og  $n_{mellomvegger}$  er antall vegger imellom åpningene.

Vi får da at

Antall åpninger	Endevegg
1	0,475
2	0,425
3	0,375

Table I. Lengden til endeveggen til barrieren basert på antall spalter.

Vi går da fra 0 opp til den tilhørende vegg lengden og finner høyden åpningen starter i, så går vi 0,05 opp for å finne hvor skilleveggen starter, så går vi enda 0,05 opp for å finne hvor neste åpning starter og slik til vi når endeveggen. Vi finner da y-verdiene vi trenger og får vegger som i [Figure 1](#), [Figure 2](#) og [Figure 3](#).

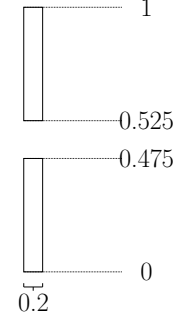


Figure 1. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her én åpning.

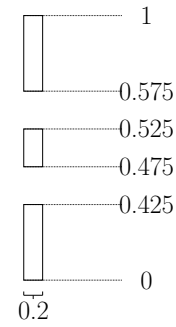


Figure 2. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her to åpninger



Figure 3. Veggens og åpningens start og ender på y-aksen i tillegg til veggens tykkelse. Vegg har her tre åpninger

Vi kan fortsatt ikke generelt anta at slike posisjoner ligger nøyaktig på et punkt på posisjonsgitteret vårt, så vi vil avrunde til det nærmeste punktet. Idéelt sett burde vegg hatt et uendelig stort potensial for at veggdelen skulle vært helt ugjennomtregelig.

Dessverre er uendelig et altfor stort tall for maskinen å regne med. Vi setter derfor potensialet der veggen er til å være  $10^{10}$ , og over resten av systemet vil potensialet være 0.

#### D. Numerisk tilnærming

V har da fra Schrödingerlikningen at

$$i \frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} - \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + v(x, y)$$

eller

$$\frac{\delta u}{\delta t} = i \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - iv(x, y)$$

Vi skal så bruke Crank-Nicolson tilnærming så vi starter med å approksimere venstre-siden

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

hvor  $n$  er tidsteget vi er i. Crank-Nicolson baser seg på forover og bakover tilnærminger. For forover har vi at

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^n$$

mens bakover har vi

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F_{i,j}^{n+1}$$

Så kombinerer vi både forover og bakover tilnærming og får

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \theta F_{i,j}^{n+1} - (1 - \theta) F_{i,j}^n$$

slik at for  $\theta = 1$  har vi bakover tilnærmingen og for  $\theta = 0$  har vi forover tilnærmingen. For Crank-Nicolson setter vi  $\theta = \frac{1}{2}$  slik at vi får

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

#### E. Bruke Crank-Nicolson

Vi hadde fra Crank-Nicolsons

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

fra forrige del og bruke den på vårt system. I vårt tilfelle er

$$F_{i,j} = i \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} - iv(x, y)u$$

så

$$F_{i,j}^n = i \frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} + i \frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} - iv(x, y)u^n$$

Vi bruker deretter at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2}$$

Siden  $i$  er den eneste som varierer i med hensyn på  $x$ , er det denne vi vil bruke for  $\frac{\delta^2 u^n}{\delta x^2}$ . Tilsvarende får vi at

$$\frac{\delta^2 u^n}{\delta y^2} \approx \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2}$$

Så vi får da at

$$F^n = i \left( \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} - v_{i,j}u_{i,j}^n \right)$$

Vi går igjen tilbake til

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^n)$$

og flytter over slik at vi får

$$u_{i,j}^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} F_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + \frac{\Delta t}{2} F_{i,j}^n$$

Vi utvider  $F$  og får

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) = + \frac{i\Delta t}{2\Delta x^2}(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ & - \frac{i\Delta t}{2\Delta y^2}(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) = + \frac{i\Delta t}{2\Delta y^2}(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\ & \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u_{i,j}^n \end{aligned}$$

Vi skal gå over samme steglengde på  $x$  og  $y$  akse så vi setter  $\Delta x = \Delta y = h$ . Så definerer vi  $r \equiv \frac{i\Delta t}{2h^2}$  slik at vi har

$$\begin{aligned} & u_{i,j}^{n+1} - r(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}) = +r(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) \\ & - r(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}) = +r(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n) \\ & \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u_{i,j}^{n+1} - \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}u_{i,j}^n \end{aligned}$$

#### F. Matriseform

For å gjøre det litt raskere skal vi konvertere om til matriseform. For da å tidsutvikle  $U$ , må vi få den over på en vektorform. Vi vil derfor lage en vektor  $\vec{u}$  som organiserer matrisen  $U$  slik

$$\vec{u} = (u_{0,0}, u_{1,0}, u_{2,0}(\dots)u_{M-2,0}, u_{0,1}, (\dots)u_{0,M-2}, (\dots)u_{M-2,M-2})$$

Hvis vi nå snakke om et element i vektoren  $\vec{u}$  vil vi bruke notasjonen  $u_k$ , mens for matriseelementen vil vi bruke notasjonen  $u_{i,j}$ . Vi har da at  $u_k = u_{i,j}$ . Da er  $k =$

$i + j \cdot (M - 2)$ . Det betyr at  $\vec{u}$  er  $(M - 2)^2$  stor. Vi skal så lage matrisene  $A$  og  $B$  slik at

$$B\vec{u}^n = \vec{c}$$

og

$$A\vec{c} = \vec{u}^{n+1}$$

La oss ta et eksempel for et lavt tall  $(M - 2) = 3$ . Matrisen for  $A$  og  $B$  vil da være

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -r & a_1 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & a_2 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 \\ -r & 0 & 0 & a_3 & -r & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 & -r & a_4 & -r & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_5 & 0 & 0 & -r \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & a_6 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_7 & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & a_8 \end{pmatrix} \quad (2)$$

og

$$B = \begin{pmatrix} b_0 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & b_1 & r & 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & b_2 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 & b_3 & r & 0 & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & r & b_4 & r & r & r & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & r & b_5 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & b_6 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_7 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & b_8 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Her er diagonalene satt sammen av vektorene  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  der elementene er gitt som

$$a_k = 1 + 4r + \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

og

$$b_k = 1 - 4r - \frac{i\Delta t}{2}v_{i,j}$$

Av disse matrisene kan vi se to ting. Foruten om diagonalen er  $A = -B$ . I tillegg matrisene satt sammen av to typer  $M - 2 \times M - 2$  matriser, ser man igjen bort fra diagonalene. Diagonalen til  $B$  består av matrisen  $P$  som har side-diagonalene  $r$ . For  $M - 2 = 3$  får vi da at

$$P = \begin{pmatrix} 0 & r & 0 \\ r & 0 & r \\ 0 & r & 0 \end{pmatrix}$$

Denne matrisen vil gå diagonalt ned  $B$ . Som sidediagonaler til denne matrisen, altså under og til høyre for  $P$

vil vi ha matrisen  $R$  som har diagonalen bestående av  $r$ . Så for  $M - 2 = 3$  har vi da

$$R = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Så da har vi uten å ta hensyn til diagonalen at

$$-A = B = \begin{pmatrix} P & R & 0 \\ R & P & 0 \\ 0 & R & P \end{pmatrix}$$

Legger vi så til vektorene  $\vec{a}$  og  $\vec{b}$  langs diagonalene har vi matrisene  $A$  og  $B$  som de er gitt i [Equation 2](#) og [Equation 3](#).

### G. Startverdier og tilhørende simuleringer

Vi har nå laget en metode som gir oss en del resultater og er avhengig av en del verdier som den må bruke. En forklaring for alle disse finnes i [II](#)

$h$	Steglengden over x og y-aksen
$\Delta t$	Tidsstegene
$T$	Den totale tiden vi kjører simuleringen over.
$x_c$ og $y_c$	Hvor initialtistandens sannsynlighetsfordeling vil være sentrert på deres tilhørende akse.
$\sigma_x$ og $\sigma_y$	Bredden til den gaussiske funksjonen initialtilstanden består av.
$p_x$ og $p_y$	Bevegelsesmengden i x og y retning for initialtilstanden.
$v_0$	Potensialet i veggen.
$n_{slits}$	Antall åpninger i veggen

Table II. En forklaring for alle verdiene som trengs for å kjøre simuleringen

I alle tilfeller vi tester vil  $h = 0,005$   $\Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5}$ ,  $x_c = 0,25$ ,  $y_c = 0,5$ ,  $\sigma_x = 0,05$  og  $p_y = 0$ . De andre vil vi variere.

### H. Sannsynlighetsunøyaktighet

Som sagt tidligere burde den totale sannsynligheten for å finne partikkelen i systemet holde seg ganske konstant rundt 1. Altså

$$P^n = \sum_{i,j} p_{i,j}^n = 1$$

Hvor  $P$  her er den totale sannsynligheten for å finne partikkelen i systemet.

Siden vi gjør dette numerisk så kan vi få litt avvik fra 1, men jo større dette avviket er, jo verre er modellen vår, så avviket er en god indikasjon på hvor god modellen vår er. Vi vil derfor som en kontrolltest, sette  $v_0 = 0$  slik at vi ikke har en vegg. Så tester vi med  $\sigma_y = 0,05$ , altså lik som  $\sigma_x$ . Vi vil da ta  $P^n$  for hvert tidssteg og etterpå plotte avviket, altså  $P^n - 1$ . Vi plotter opp til  $T = 0,008$ . Slik har vi en kontrolltest uten noen hindring, så vi ser om sannsynligheten holder seg konstant når partikkelen går uforstyrret uten en vegg.

Vi legger så til en dobbeltspaltevegg, så  $s_l = 2$  og  $v_0 = 10^{10}$ . Hvis vi nå fortsetter å ha  $\sigma_y = 0,05$  vil det meste av bølgefunksjonen gå rett på veggen med samme bredde. Vi setter derfor opp  $\sigma_y$  til 0,1 så en større del av bølgefunksjonen går gjennom spalten. Så kjører vi simuleringen på nytt og plotter igjen avviket for denne simuleringen også.

### I. Simulasjonen i det to dimensjonale tomme

Vi skal så se på  $p_{i,j}$  og  $u_{i,j}$  i planet. Vi vil her se på noen øyeblikksbilder i  $t = 0$ ,  $t = 0,001$  og  $t = 0,002$ . Vi har fortsatt en dobbeltspaltevegg med  $v_0 = 10^{10}$ , men denne gangen har vi  $\sigma_y = 0,2$ . Vi vil for disse tidsstegene plotte den reelle og den imaginære delen av  $u_{i,j}$  i planet, i tillegg til  $p_{i,j} = u^*_{i,j} u_{i,j}$ .

### J. Sannsynligheten over y-aksen for en gitt x-verdi

Vi bruker nå de samme startverdiene som i [section III](#). La oss nå anta at ved  $t = 0,002$  så måler vi at partikkelens posisjon på x-aksen er  $x = 0,8$ , men vi vet fremdeles ikke partikkelens posisjon på y-aksen. Altså bryter tilstanden sammen til at  $p(x = 0,5) = 1$ . Vi vil så finne ut hvordan sannsynlighetsfordelingen på y-aksen ved  $x = 0,8$  vil være. Vi bruker forrige simulasjons verdier i  $x = 0,8$  og normaliserer disse slik at  $\sum_i u_i^* u_i = 1$ . Så plotter vi over y-aksen. Vi kjører så simuleringen igjen for  $sl = 1$  og  $sl = 3$  og finner sannsynlighetsfordelingen over y-aksen i  $x = 0,8$  for disse verdiene av  $sl$  også.

## III. RESULTATER

Avviket til den totale sannsynligheten er vist i [Figure 4](#) og [Figure 5](#)

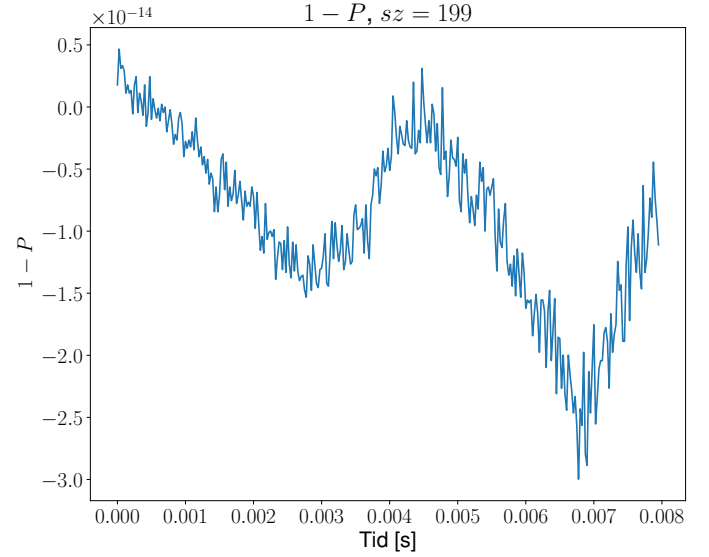


Figure 4. Avviket til den totale sannsynligheten  $1 - P$  for  $v_0 = 0$ .

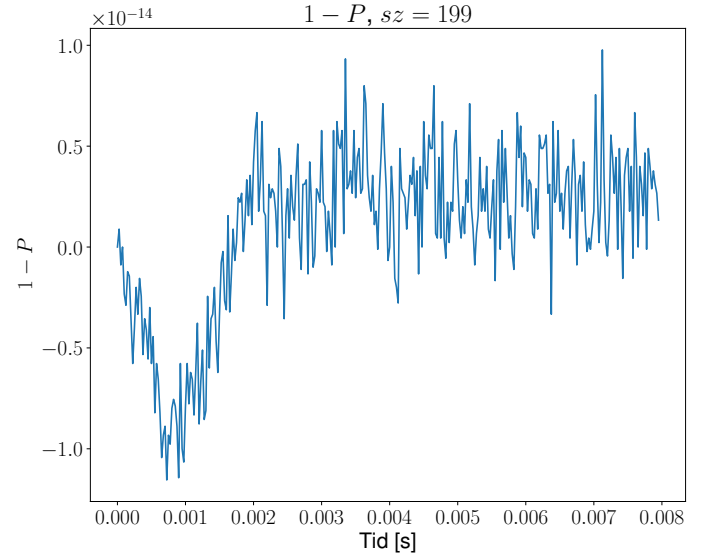


Figure 5. Avviket til den totale sannsynligheten  $1 - P$  for  $v_0 = 10^{10}$ .

For to-spalte system så fikk vi [Figure 6](#) for  $t = 0$  s, med den reelle delen vist i [Figure 7](#) og imaginær i [Figure 8](#).

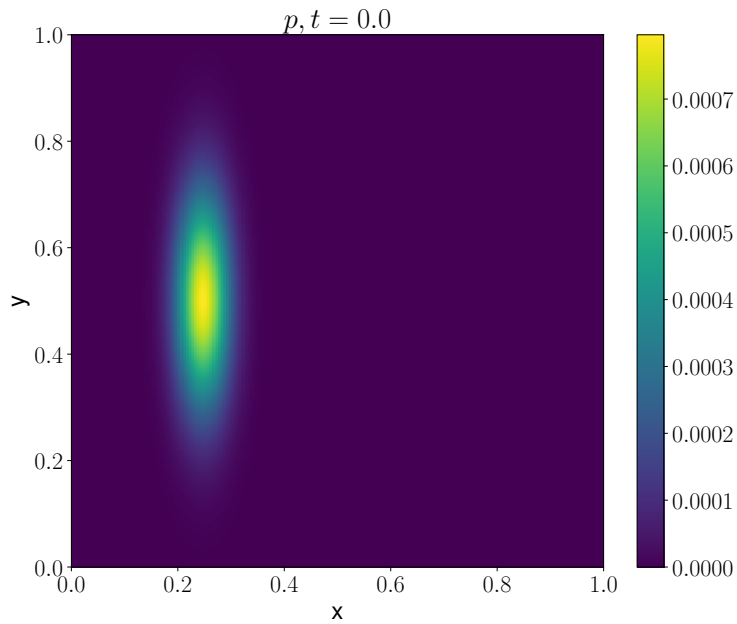


Figure 6.  $p = |u|^2$  i tiden  $t = 0$  s.

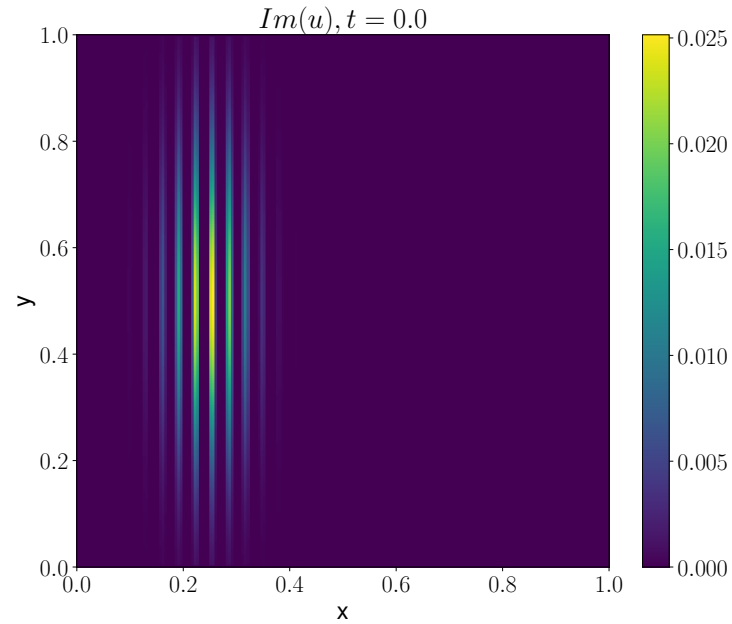


Figure 8.  $Im(u)$  i tiden  $t = 0$  s.

Ved tiden  $t = 0,001$  s fikk vi [Figure 9](#) for  $p$ , [Figure 10](#) for den reelle delen av  $u$  og [Figure 11](#) for den imaginære delen.

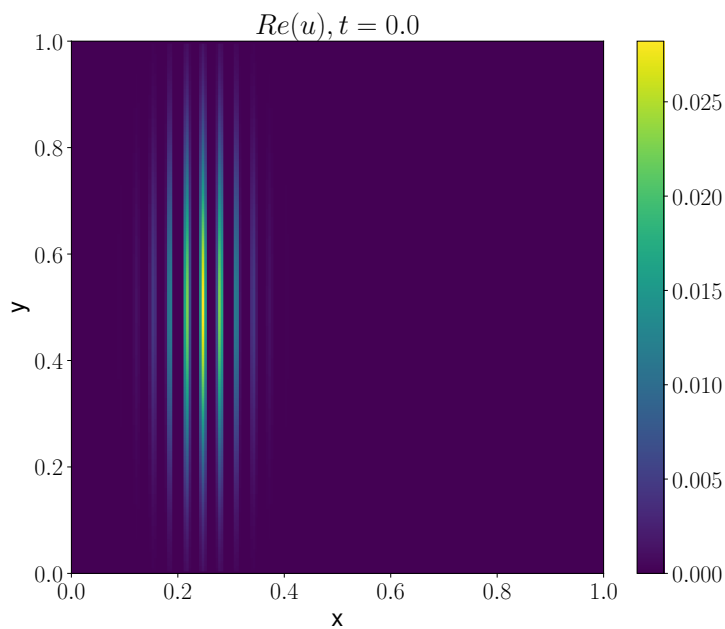


Figure 7.  $Re(u)$  i tiden  $t = 0$  s.

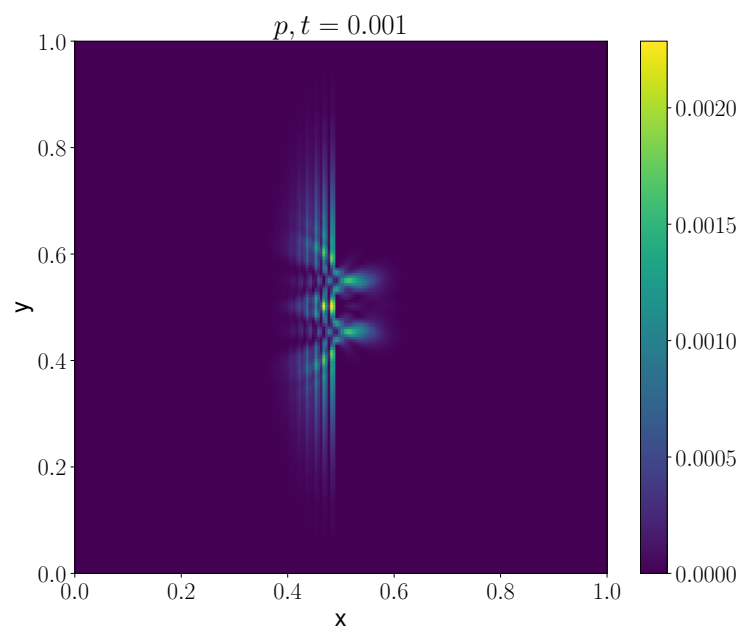


Figure 9.  $p = |u|^2$  i tiden  $t = 0,001$  s.

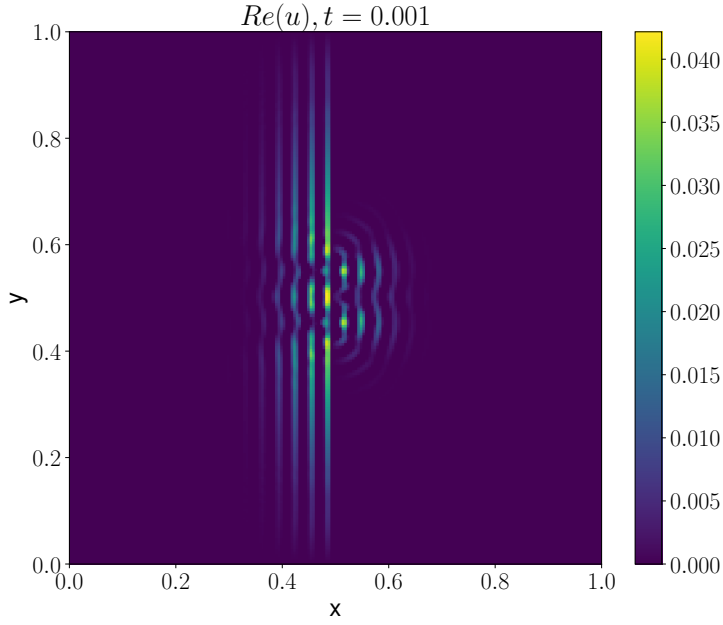


Figure 10.  $Re(u)$  i tiden  $t = 0,001$  s.

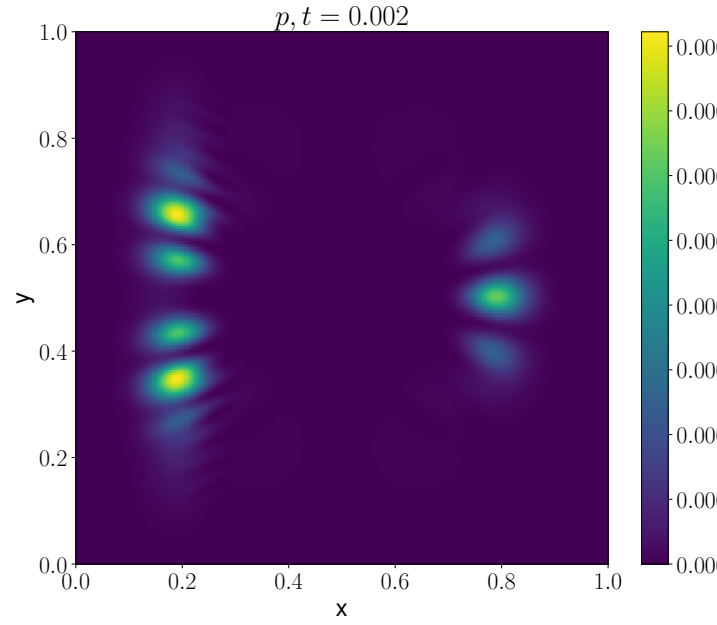


Figure 12.  $p = |u|^2$  i tiden  $t = 0,002$  s.

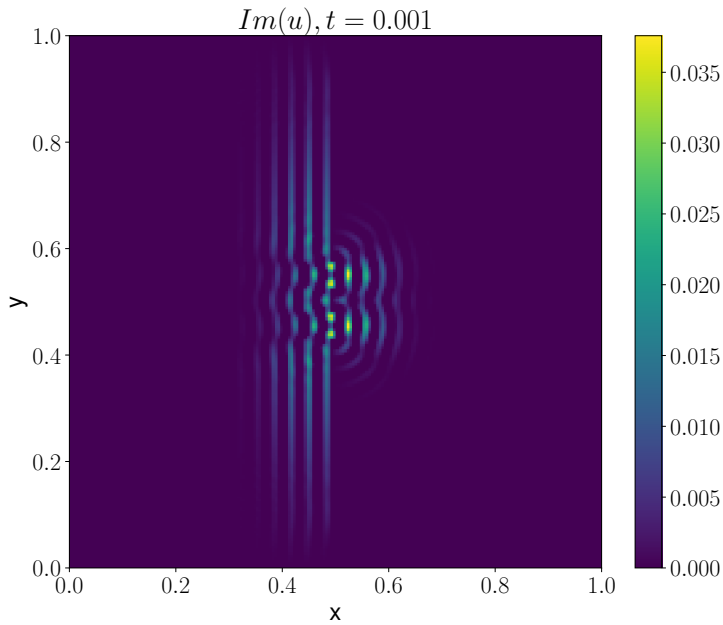


Figure 11.  $Im(u)$  i tiden  $t = 0,001$  s.

Ved tiden  $t = 0,002$  s fikk vi [Figure 12](#) for sannsynlighetsfordelingen og [Figure 13](#) for den relle delen og [Figure 11](#) for den imaginære:

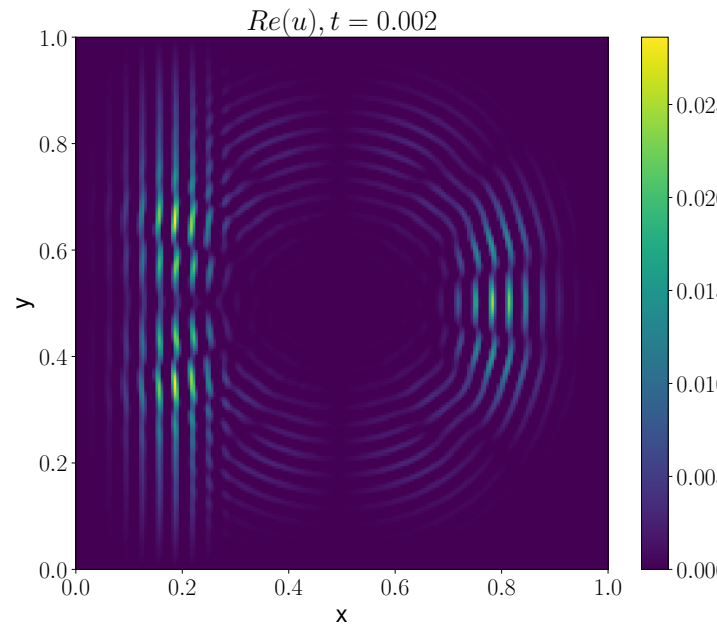


Figure 13.  $Re(u)$  i tiden  $t = 0,002$  s.

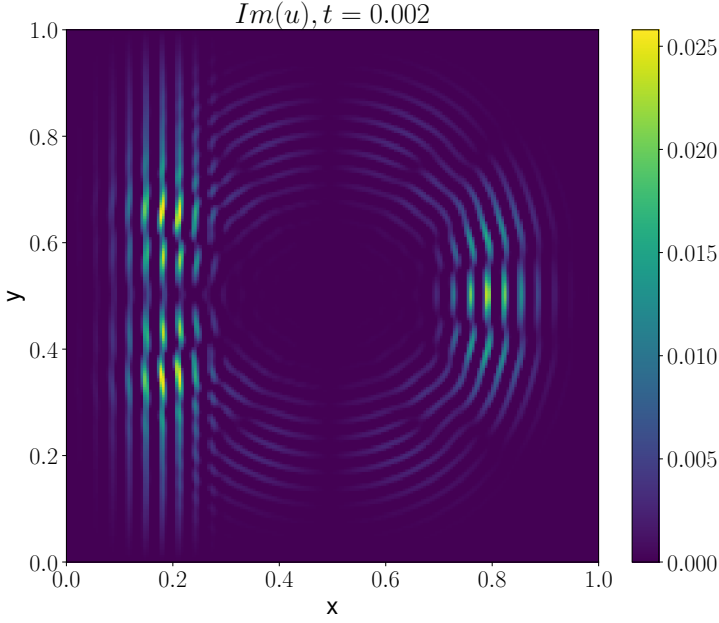


Figure 14.  $Im(u)$  i tiden  $t = 0,002 s$ .

Med én åpning så fikk vi sannsynlighetsfordelingen langs y-aksen for  $x = 0.8$  i [Figure 15](#)

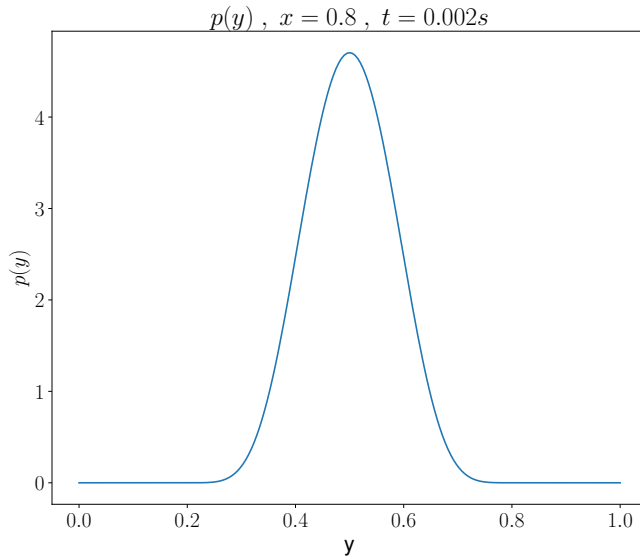


Figure 15. Sannsynlighetsfordelingen ved  $x = 0.8$  og  $t = 0.002 s$  for en spalte

For to åpninger fikk vi [Figure 16](#) og for tre fikk vi [Figure 17](#)

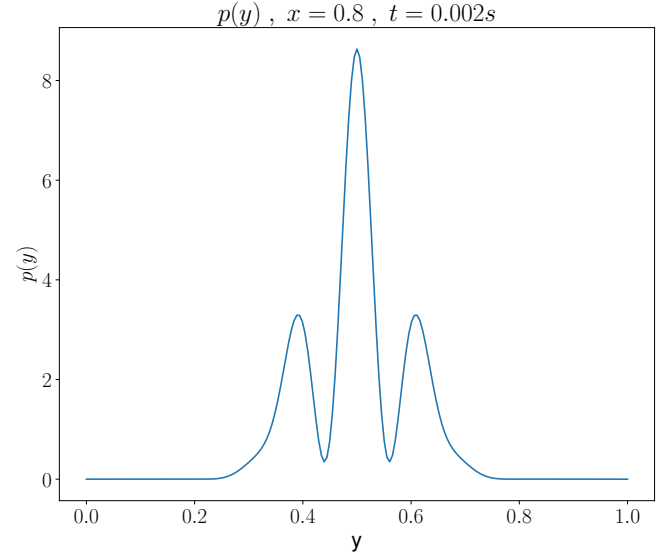


Figure 16. Sannsynlighetsfordelingen ved  $x = 0.8$  og  $t = 0.002 s$  for to spalter

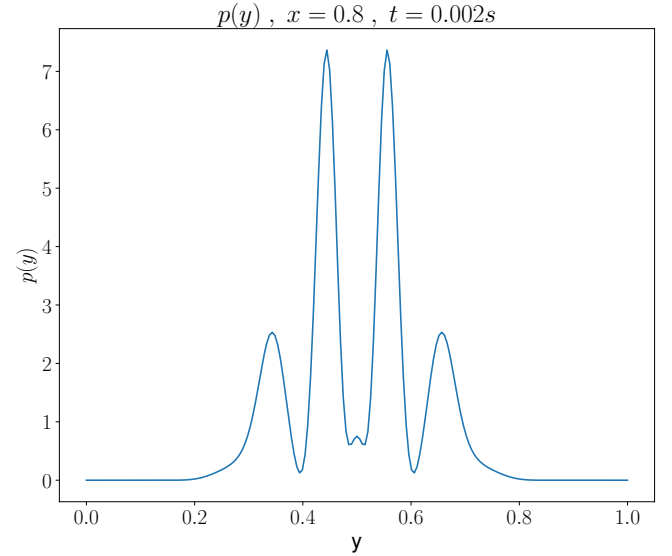


Figure 17. Sannsynlighetsfordelingen ved  $x = 0.8$  og  $t = 0.002 s$  for tre spalter

## IV. DISKUSJON

### A. Sannsynlighetsavvik

Av [Figure 4](#) og [Figure 5](#) ser vi at avviket for den totale sannsynligheten er på en skala av  $10^{-14}$  både med og uten vegg, som forsterker troen på at vi har gjort det riktig, siden den totale sannsynligheten viker så lite fra 1.



$10^{-14}$  begynner også å nærme seg maskinpresisjonen for doubles som vi brukte, altså  $10^{-15}$ , så det blir vanskelig å få mere nøyaktighet. Vi ser også av 4 at avviket ser ut til å ha en syklus, men kommer seg fortsatt ikke opp mot 0 igjen ved  $t = T = 0,008$ . Dette kan tyde på at avviket blir større, men det kan også hende at avviket blir mindre igjen etter  $t = 0,008$ , men siden vi bare har målt til  $t = 0,008$  er dette vanskelig å si. I vårt tidsrom er fortsatt avviket lite nok til at man kan si dette er akseptabelt. I Figure 5 ser det imidlertid ut til at avviket stabiliserer seg ved  $t = 0,002$ . Vi vet igjen ikke hvordan den vil oppføre seg etter  $t = 0,008$ , men for tidsperioden av vår simulering er dette akseptabelt. Så ut ifra sannsynlighetsavviket kan det tyde på at vi har ganske riktige resultater.

### B. Målingene av $u$ i planet

Av Figure 6 ser vi en ganske normal todimensjonal sannsynlighetsfordeling med et toppunkt i  $x = x_c, y = y_c$ . Ser vi imidlertid på den relle delen og den imaginære delen hver for seg, som i Figure 7 og Figure 8, ser vi at  $|u|^2 = p$  egentlig er satt sammen av to bølgefunksjoner som ser ut til å svinge langs  $x$ -aksen og har en bredde langs  $y$ -aksen. Ser vi kun på  $p$  ser vi at i  $t = 0,001$  så går noe av  $p$  gjennom åpningene, mens noe blir reflektert i veggen og går motsatt vei, som bølger. Til slutt ved  $t = 0,002$  ser vi i Figure 12 at  $p$  har blitt splittet opp til mindre toppunkter rundt om i planet. De fleste og mest sannsynlige punktene er igjen på venstre side, mens noe har fortsatt gått over til høyre side. Ser vi derimot på den reelle og den imaginære delen i Figure 10 og Figure 11 ser vi her at det ikke bare er en stråle som  $p$  på samme tidspunkt, men at det faktisk her er som bølger som går gjennom en åpning. Når vi også ser på den relle delen og den imaginære delen til  $u$  for  $t = 0,002$  i Figure 13 og Figure 14, så ser vi at det er bølger som har spredd seg, med noen interferenslinjer som er de som synes i Figure 12.

### C. Sannsynligheten i $x = 0,8$

Vi ser at Figure 15 har ett toppunkt, Figure 16 har tre og Figure 17 har 5. Disse ligner veldig mye på interferenslinjene til bølger som går gjennom spalter som kan forsterke påstanden om at simulasjonen er korrekt,

siden vi så at  $u$  var satt sammen av bølger fra den relle og imaginære delen.

### D. Andre feilkilder

Som sagt var ikke veggens potensial uendelig stor og derfor var ikke veggen helt ugjennomtrengelig. Dette kan gjøre at vi miste noe nøyaktighet ved at noe av bølgefunksjonen kommer seg inn i veggen og det blir da en liten sannsynlighet for at partikkelen er der også. Likevel var veggens potensial ganske stor, så unøyaktigheten dette bidro med var nok minimal. I tillegg kunne vi kanskje ha minket  $h$  og  $\Delta t$  slik at vi kunne hatt mer presisjon under utviklingen av tilstanden. Det ser fortsatt ut til at vi har fått vist egenskapene vi ville vise av bølgefunksjonen, men hvis vi skulle gjøre dette for faktiske verdier, kan det hende denne simulasjonen ville ha blitt litt unøyaktig avhengig av hvor gode resultater man vil ha.

## V. KONKLUSJON

Vi har simulert oppførelsen til en kvantetilstand i en boks. Ved å gi en initialhastighet så har vi sett hvordan en, to og tre spalter påvirker kvantetilstanden. Avviket til den totale sannsynligheten i beregningene er på  $10^{-14}$ . I en boks med dobbeltspalte har vi sett hvordan den imaginære og relle delen av kvantetilstanden er to bølgefunksjoner som kvantetilstanden består av. Sannsynlighetsfordelingen i dobbeltspalte-oppsettet har vi sett splitter seg opp ved at noe går igjennom spaltene imens en annen del blir reflektert av barrieren. For én, to og tre åpninger i veggen har vi sett nærmere på sannsynlighetsfordelingen ved  $x = 0,8$ , hvor vi får en fordeling som ligner mye på interferensmønsteret for vanlige bølger igjennom spalter.

## VI. REFERANSER

- APS Physics (2021, 10. Desember) *Thomas Young and the Nature of Light*. <https://www.aps.org/publications/apsnews/200805/physicshistory.cfm>
- Github Carl Peter Duedahl. FYS3150. <https://github.com/carlpd/FYS3150>