Control Automático de Procesos

Análisis de Sistemas Realimentados II

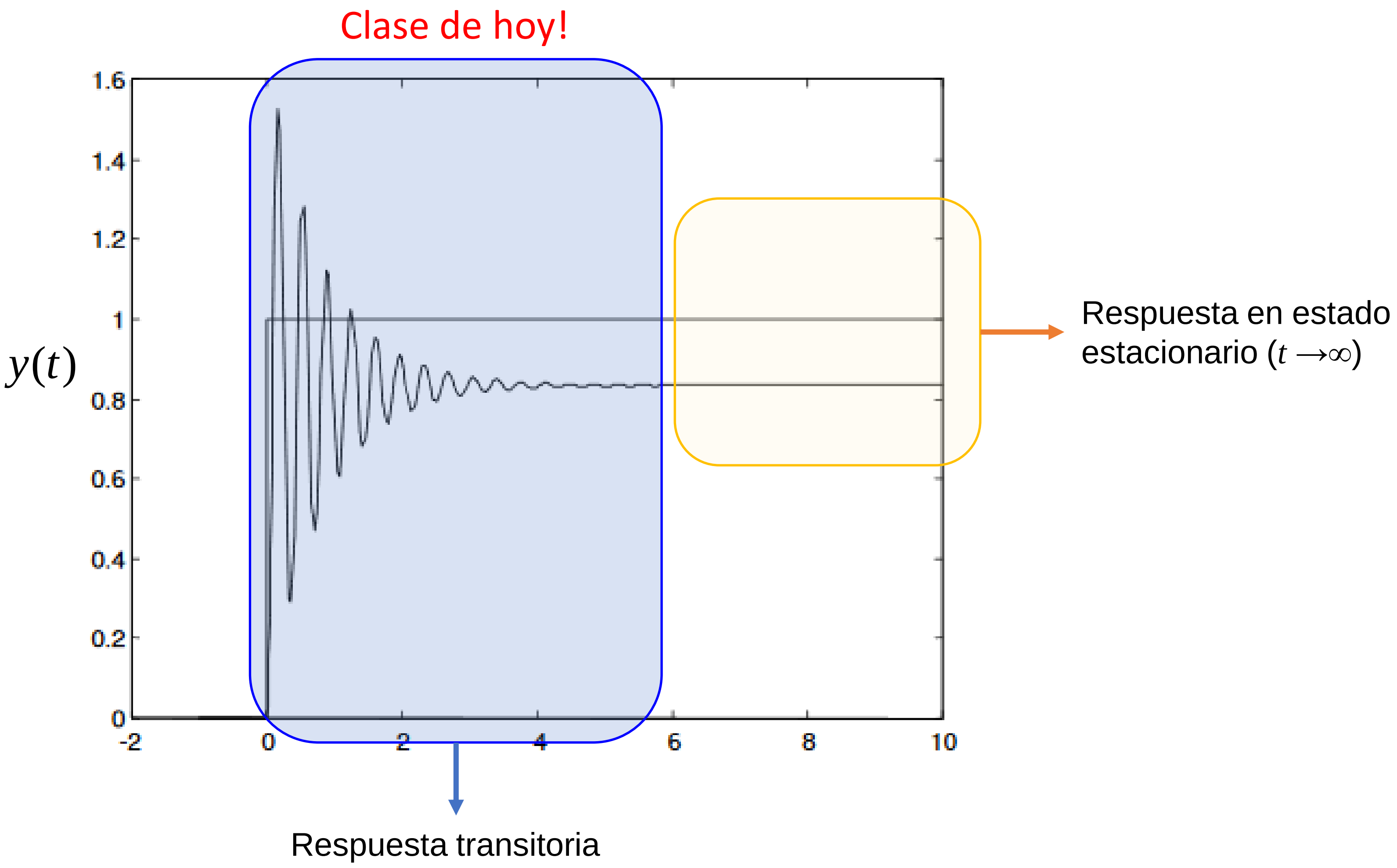
Prof. Carlos A. Toro N.
carlos.toro.ing@gmail.com
2021

Respuesta Transiente

Objetivos

- Analizar la respuesta transiente de sistemas de primer y segundo orden.
- Comprender la importancia de la realimentación y uso de controladores proporcionales en la respuesta dinámica de sistemas de primer y segundo orden.

Introducción



Cualquier salida para un sistema lineal puede ser descompuesta como: $y(t) = y_{ss}(t) + y_{tr}(t)$

Respuesta Transiente: Sistemas de Primer Orden

Sistemas de primer orden

Un sistema de primer orden en L.A. se caracteriza por la siguiente EDO y FdeT. correspondiente ante c.i.s nulas:

$$\dot{y} + ay = bu \quad o \quad \tau\dot{y} + y = k_{dc}u$$

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\dfrac{k_{dc}}{\tau s+1}} \longrightarrow Y(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b}{s+a} = \frac{k_{dc}}{\tau s+1}$$

Donde k_{dc} (ganancia DC) y τ (constante de tiempo) definen por completo al sistema.

Sistemas de primer orden

Respuesta a entrada impulso

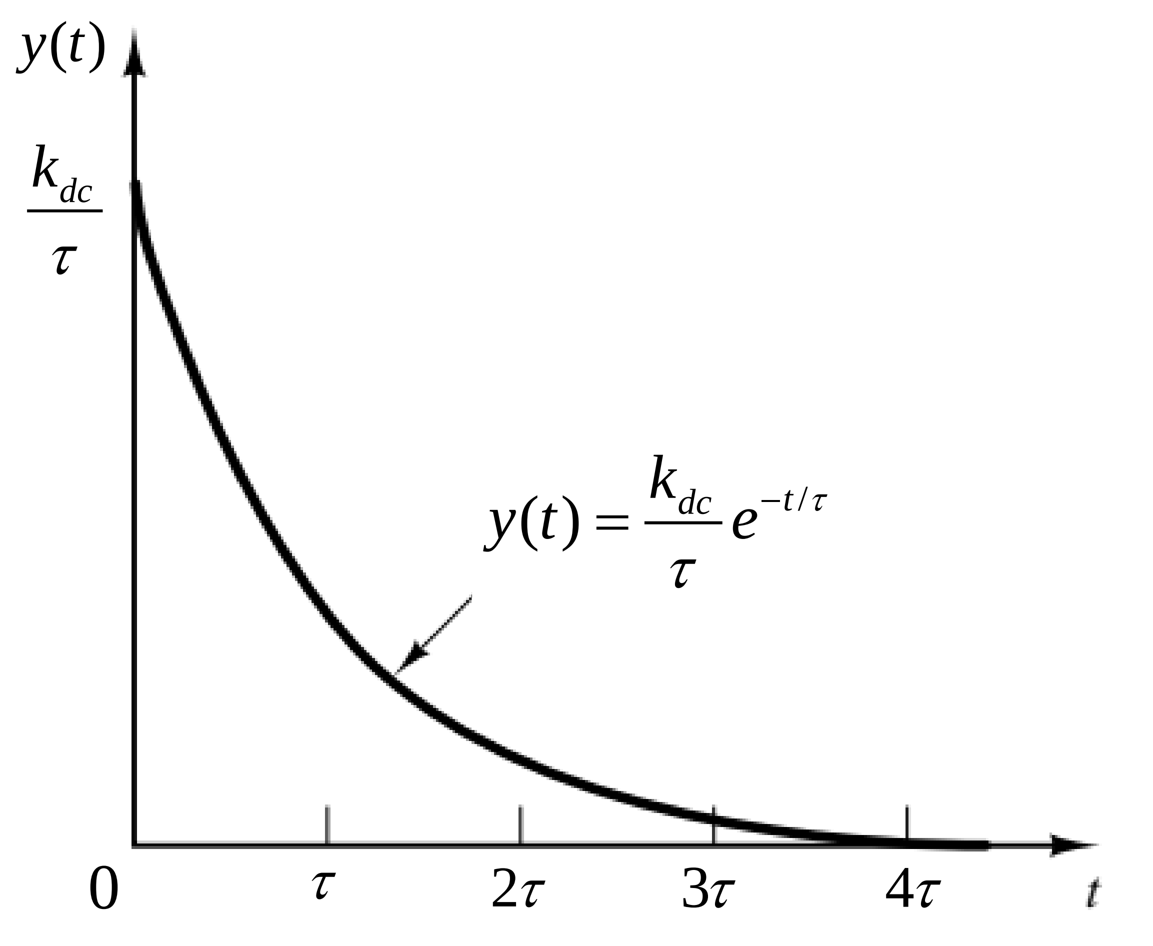
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = \frac{k_{dc}}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Respuesta a entrada escalón

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = k_{dc}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Respuesta a entrada rampa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}\right\} = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$



Sistemas de primer orden

Respuesta a entrada impulso

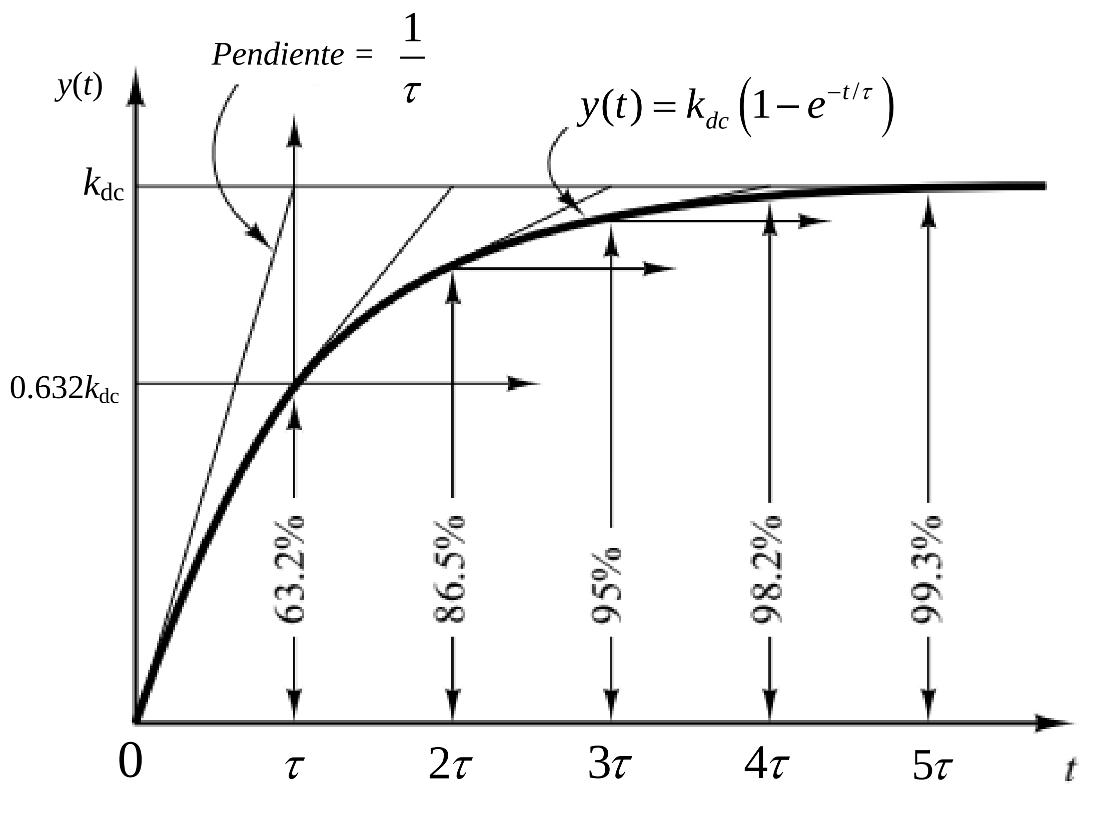
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = \frac{k_{dc}}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Respuesta a entrada escalón

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = k_{dc}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Respuesta a entrada rampa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}\right\} = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$



Sistemas de primer orden

Respuesta a entrada impulso

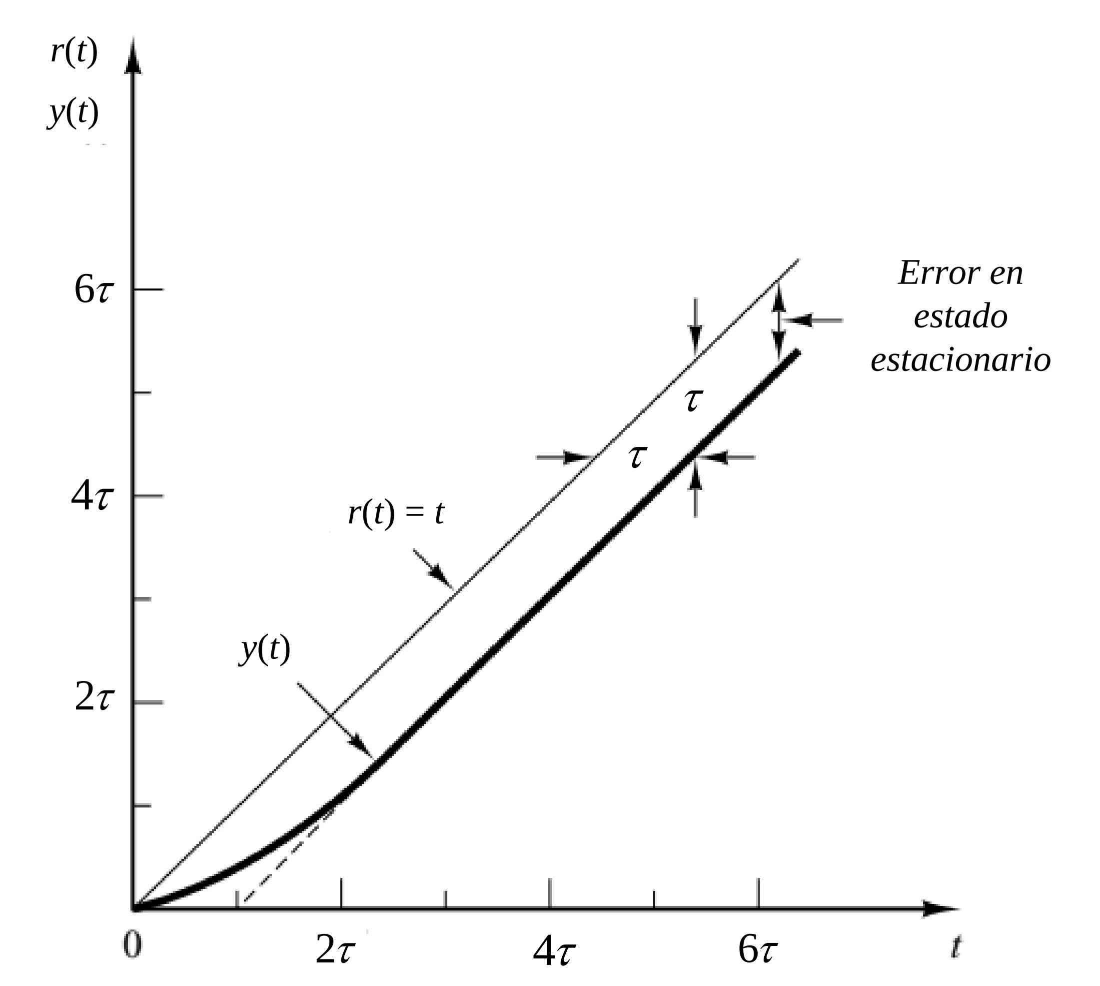
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{1 \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = \frac{k_{dc}}{\tau} e^{-t/\tau}$$

Respuesta a entrada escalón

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{k_{dc}}{\tau s + 1}\right\} = k_{dc}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

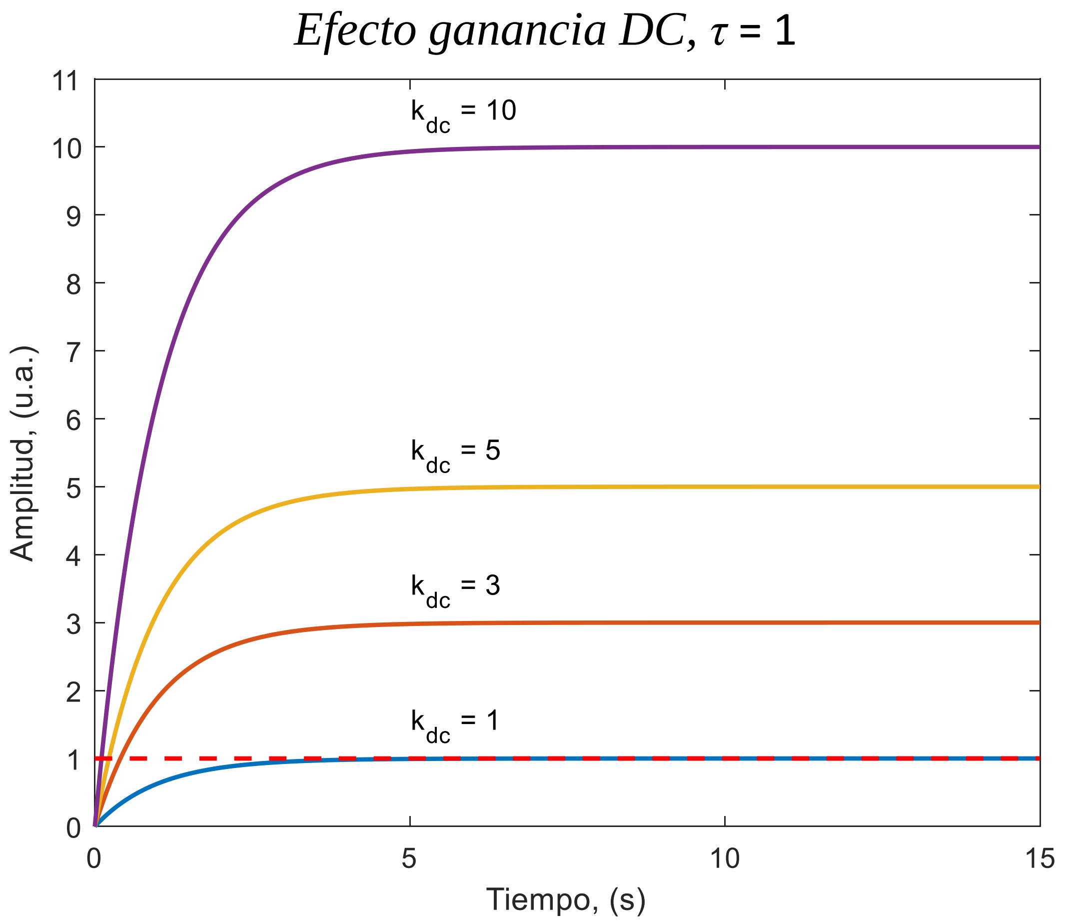
Respuesta a entrada rampa

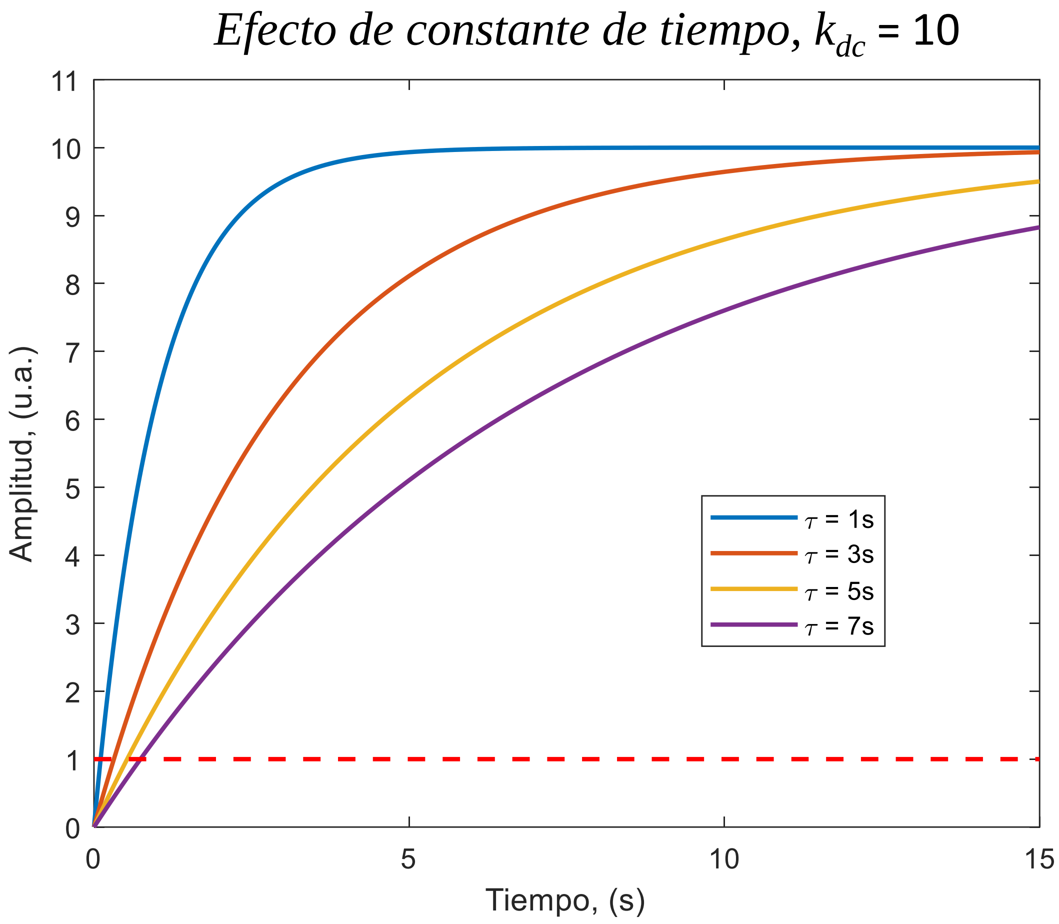
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{\tau s + 1}\right\} = t - \tau + \tau e^{-t/\tau}$$



Sistemas de primer orden

Efecto de la ganancia DC y constante de tiempo ante una entrada escalón unitario: $y(t) = k_{dc}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$





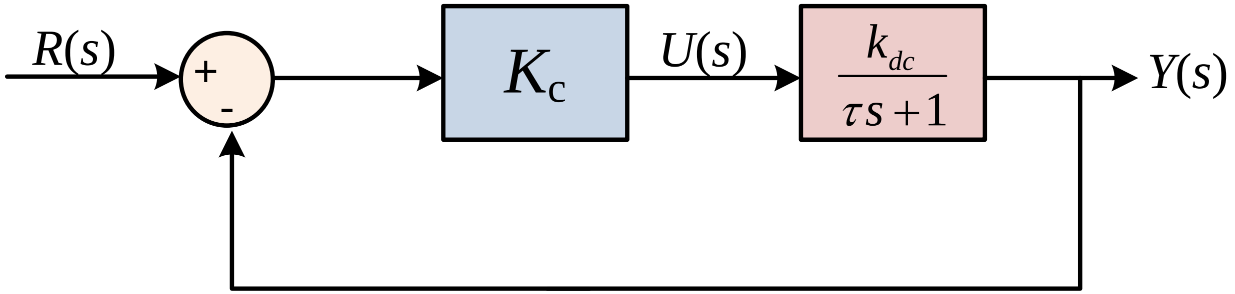
Sistemas de primer orden

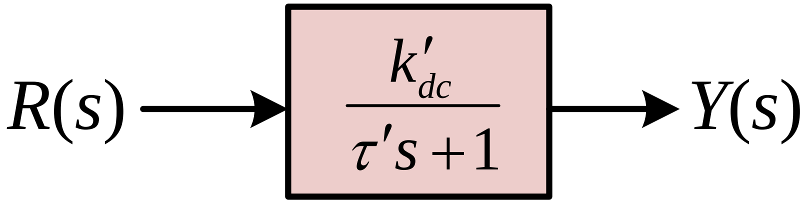
La FdeT. en LC considerando un controlador proporcional con ganancia K_c será:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{k_{dc}\cdot K_c}{\tau s+1+k_{dc}\cdot K_c}$$

$$\Rightarrow H(s)=\frac{\dfrac{k_{dc}\cdot K_c}{1+k_{dc}\cdot K_c}}{\dfrac{\tau}{1+k_{dc}\cdot K_c}s+1}$$

$$\therefore H(s)=\frac{k'_{dc}}{\tau' s+1}$$

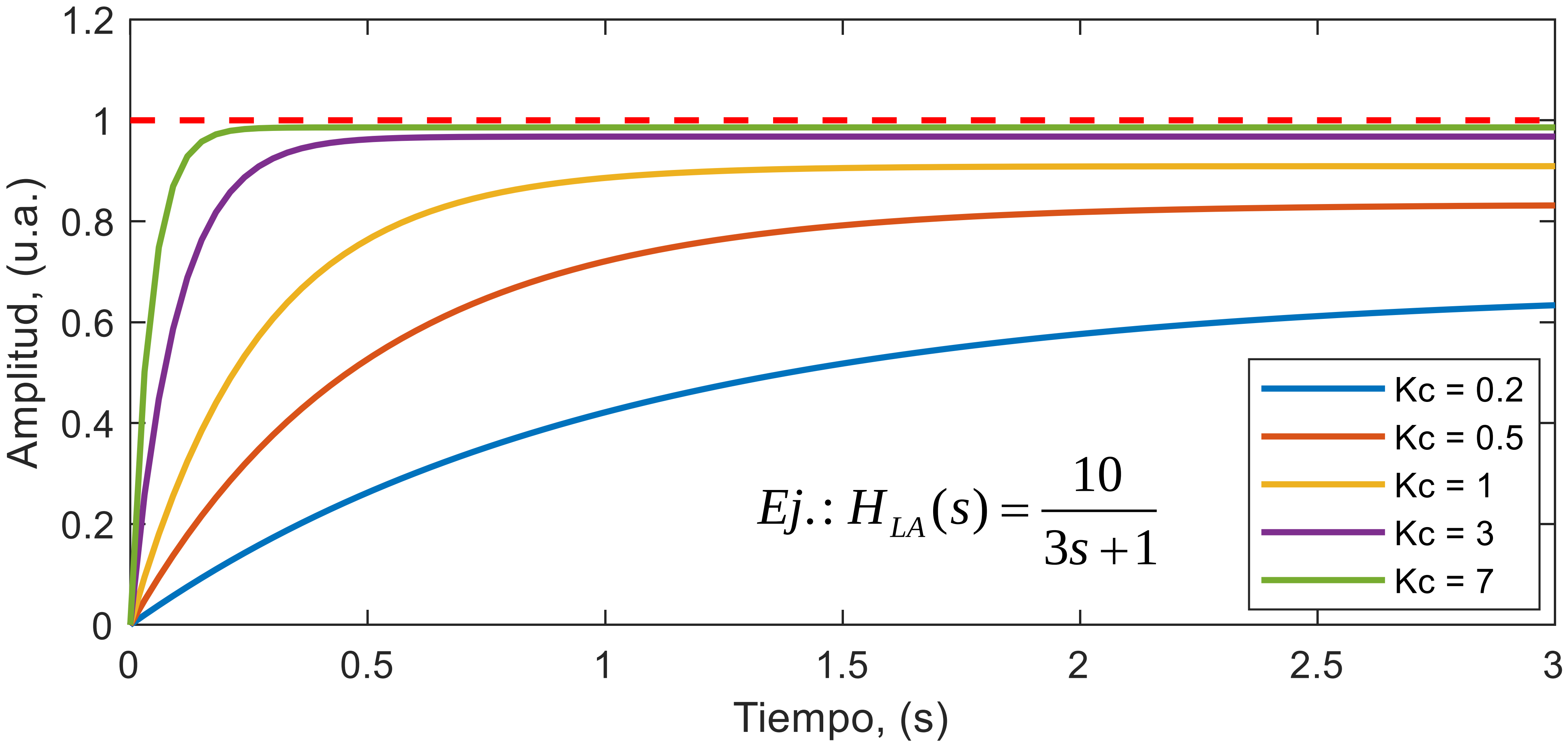




Se mantiene la estructura de un sistema de 1er orden en L.C., donde $k'_{dc} < k_{dc}$ y $\tau' < \tau$.

Sistemas de primer orden

La FdeT. en LC considerando un controlador proporcional con ganancia K_c será:



Sistemas de primer orden

Ejemplo: La respuesta impulso de un sistema de primer orden está dada por: $y(t)=3e^{-0.5t}$. Encontrar la constante de tiempo del sistema, la ganancia DC, la función de transferencia, y la respuesta a entrada escalón.

Solución:

- La transformada de Laplace de la respuesta impulso de un sistema es su función de transferencia (mostrar!).
- Por consiguiente, la FdeT. es:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\mathcal{L}\left(3e^{-0.5t}\right)=\frac{3}{s+0.5}=\frac{6}{2s+1}$$

- → Ganancia DC k_{dc} = 6, constante de tiempo τ = 2
- La respuesta escalón será:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{6}{2s+1}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{s}-\frac{6}{s+0.5}\right\}=6\left(1-e^{-0.5t}\right)$$

Respuesta Transiente: Sistemas de Segundo Orden

Sistemas de Segundo Orden

Un sistema dinámico de segundo orden se puede caracterizar por la siguiente EDO:

$$\underbrace{\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = \beta u}_{forma\ general} \quad \text{o} \quad \underbrace{\ddot{y} + 2\xi\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \omega_n^2 ku}_{forma\ canónica}$$

La ventaja de la **forma canónica** es que se pueden identificar los parámetros que caracterizan a un sistema dinámico de segundo orden y definirán completamente el tipo de respuesta que tendrá ante una entrada. Estos parámetros son:

$$\left.\begin{array}{ll} k & : \text{Ganancia estática} \\ \xi & : \text{Factor de amortiguamiento} \\ \omega_n & : \text{Frecuencia natural de oscilación} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} k = \beta / \omega_n^2 \\ \xi = a_1 / 2\omega_n \\ \omega_n = \sqrt{\frac{1}{a_2}} \end{array}$$

Sistemas de Segundo Orden

ξ : Este factor es una medida del grado de resistencia al cambio en la salida del sistema.

ω_n : Esta sería la frecuencia de oscilación libre que tendría el sistema sin amortiguación.

La **FdeT. del sistema de segundo orden** será:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Notar que esta FdeT. posee dos polos (raíces del denominador) dados por:

$$s_{1,2} = \underbrace{-\xi\omega_n}_{\substack{Envolvente \\ \exp onencial}} \pm \underbrace{\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}}_{\substack{Parte \\ Oscilatoria}}$$

Ojo, estos polos pueden ser complejos!!, como se comportará la respuesta del sistema según el valor de estos parámetros?

Sistemas de Segundo Orden

Dependiendo del valor de ξ , el sistema puede caer dentro de las siguientes cuatro categorías:

- **Caso 1, $\xi > 1$, sistema sobre amortiguado**: raíces negativas y distintas.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$$

- **Caso 2, $\xi = 1$, sistema críticamente amortiguado**: raíces negativas e iguales.

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n$$

- **Caso 3, $\xi = 0$, sistema no amortiguado (oscilatorio)**: raíces imaginarias.

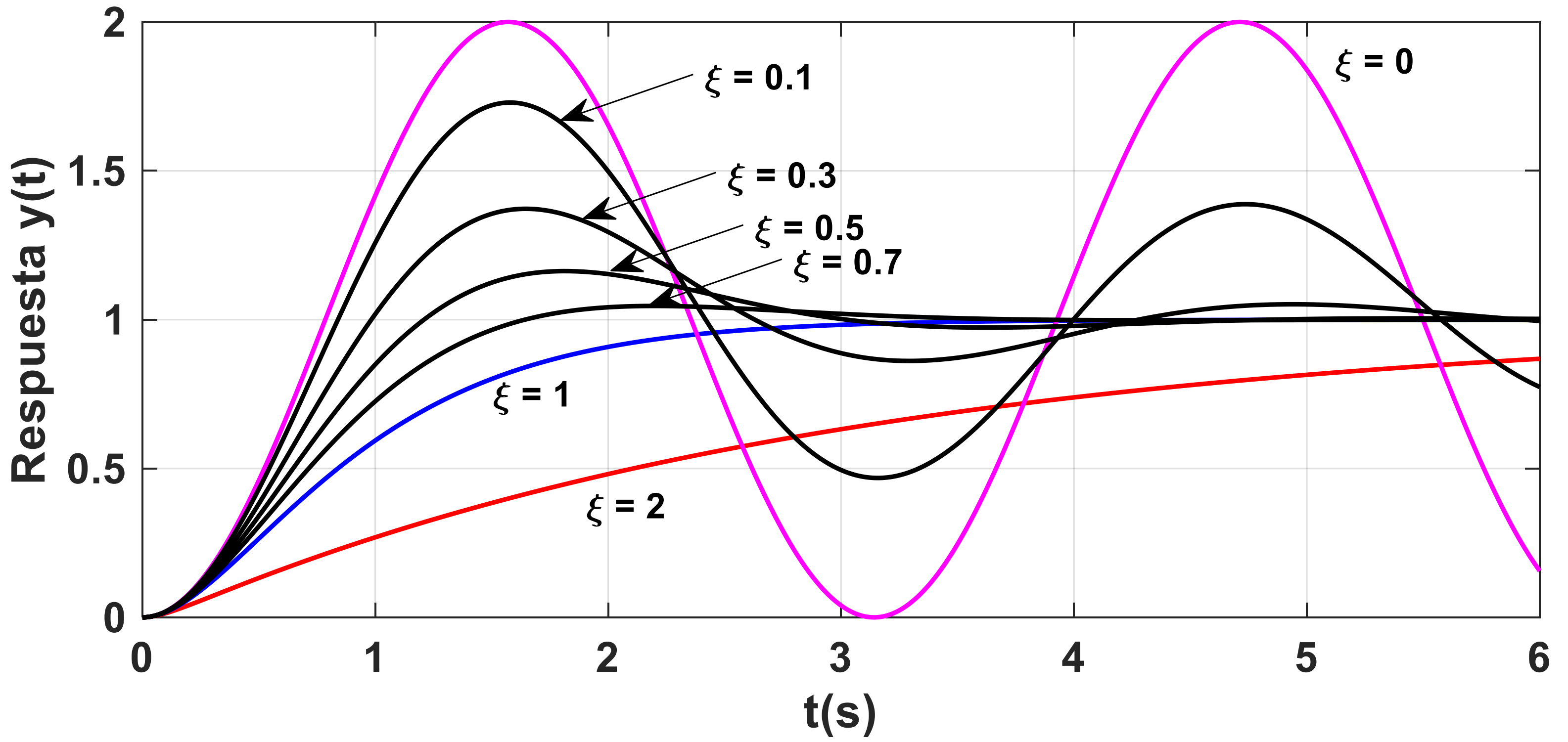
$$s_{1,2} = \pm\omega_n \cdot j$$

- **Caso 4, $0 < \xi < 1$, sistema sub amortiguado**: raíces de la ecuación característica complejas,

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j \cdot \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

Sistemas de Segundo Orden

La siguiente figura ilustra la respuesta de un sistema de segundo orden para diferentes valores del coeficiente de amortiguación ξ:



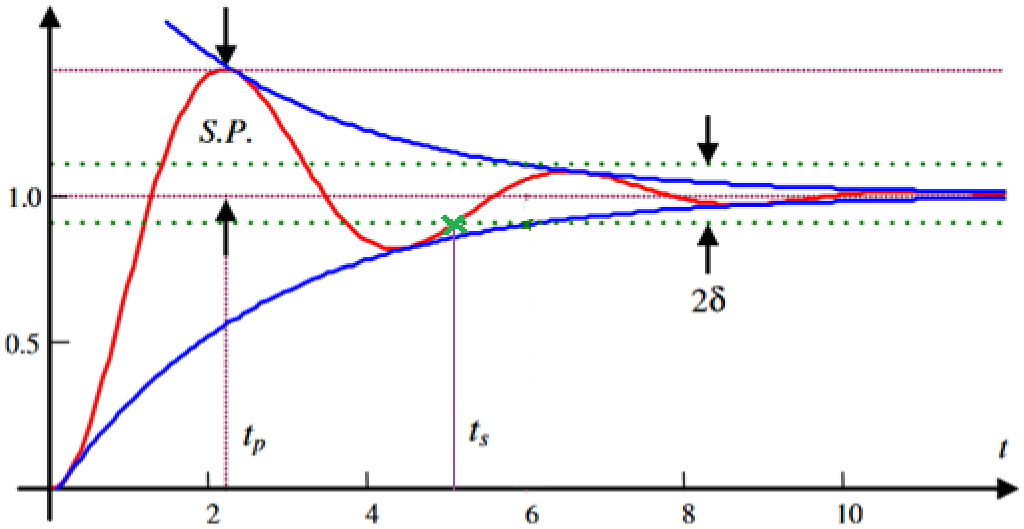
$$\omega_n = 2(\text{rad/ s}),\ k = 1$$

Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

Caso sub amortiguado:

- En general, en problemas de diseño, se prefiere especificar el sistema de segundo orden de tal manera que tenga una respuesta sub amortiguada.
- La respuesta a entrada escalón de este sistema será la siguiente:

$$y(\mathrm{t}) = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} sen\left\{\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)t + \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right\}\right]$$



Respuesta típica sub amortiguada para entrada escalón unitaria.

Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

- **Magnitudes características respuesta a entrada escalón, $0 < \xi < 1$:**
  - S.P.: sobrepaso
  - t_p : instante en el cual ocurre el máximo
  - δ : banda de asentamiento
  - t_s : tiempo de asentamiento

- El instante en el cual ocurre el máximo t_p se obtiene haciendo $dy/dt = 0$, resultando en:

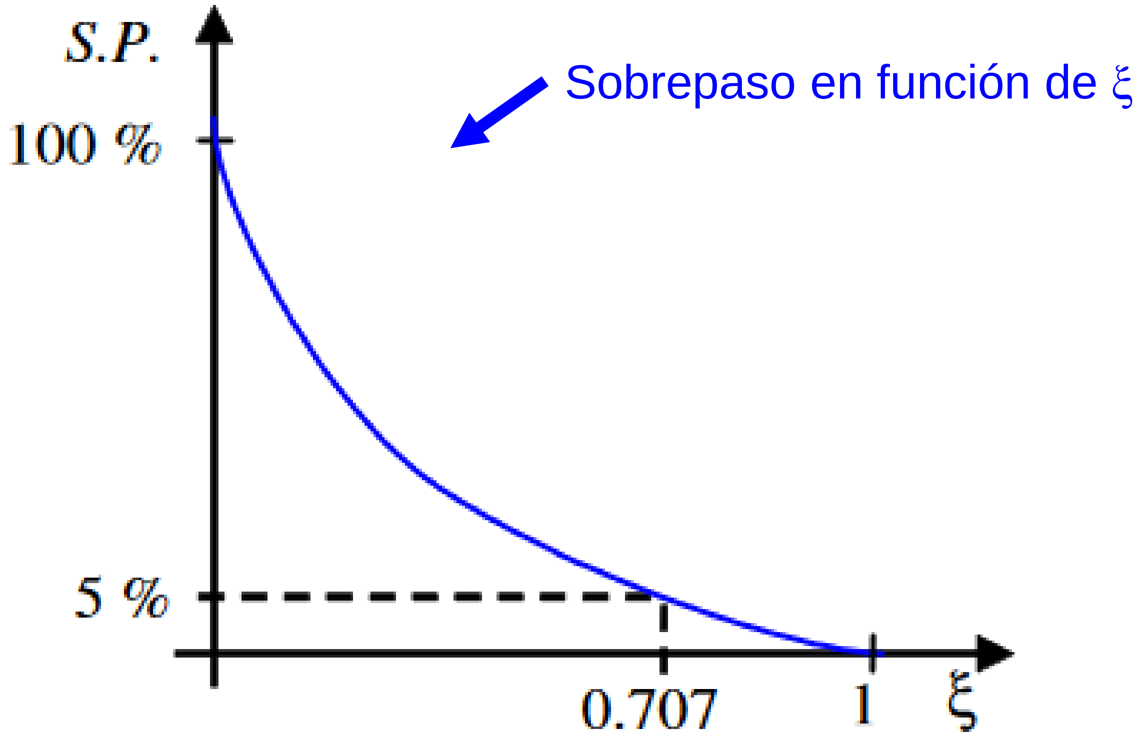
$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}, \ \omega_n (\mathrm{rad/s})$$

- El **máximo de la respuesta** se obtiene evaluando $y(t = t_p) = y_{\max}$ y se relaciona con el **sobrepaso** como:

$$\frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} = \underbrace{e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}}}_{S.P.}$$

Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

- La cantidad de sobrepaso depende directamente del coeficiente de amortiguamiento ξ y será un indicio de la estabilidad relativa del sistema:
  - Mientras más bajo sea este coeficiente, el sobrepaso máximo será mayor



Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

- El **tiempo de asentamiento o estabilización** corresponde al instante en el cual la respuesta se mantiene dentro de un rango (**banda de asentamiento**) determinado alrededor del valor final, un valor típico de banda de tolerancia o asentamiento es de $\delta = 5\%$ (valor dado):

$$t_s = -\frac{\ln\left(\frac{\delta}{100}\right)}{\xi\omega_n}$$

Especificaciones en el dominio del tiempo

- Gracias a las características anteriores podremos definir completamente la respuesta temporal del sistema en función de los parámetros dados. Al diseñar sistemas en L.C. esto será importante para encontrar la ganancia de los controladores (*ubicación de los polos*).
- Ojo, no todas las definiciones anteriores se aplican a cualquier caso, en un sistema sobre amortiguado no habrá un tiempo *peak* ni sobrepaso máximo.
- Excepto para algunas aplicaciones en las que no se pueden tolerar oscilaciones, es conveniente que la respuesta transitoria sea lo suficientemente rápida y amortiguada.

Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

Ejemplo: Determinar los índices que caracterizan a un sistema ante entrada escalón para el que su FdeT. en lazo cerrado es la siguiente:

$$H_{LC} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Solución:

- Comparando el sistema dado con la función de transferencia estándar de un sistema de 2° orden:

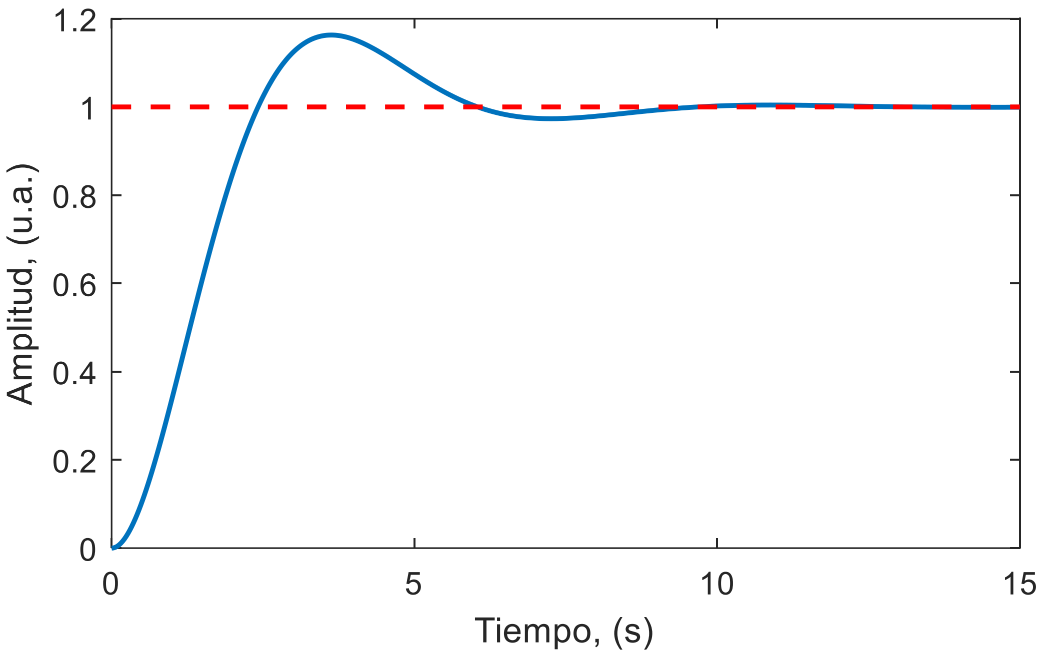
$$\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Encontramos que $\omega_n = 1$ rad/seg y $\xi = 0.5$. Luego, el porcentaje de sobrepaso es: $S.P.(\%) = 100 \cdot e^{-\xi\pi / \sqrt{1-\xi^2}} = 16\%$
- El tiempo *peak* será: $t_p = \pi / \left[\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \right] = 3.627 seg$
- El tiempo de asentamiento considerando una banda de asentamiento del 2% será:

$$t_s = -\frac{\ln\left(\frac{2}{100}\right)}{0.5 \cdot 1} \approx 7.8 seg$$

Sistemas de Segundo Orden: Caso Sub Amortiguado

Ejemplo(cont.): Simulando la respuesta ante entrada escalón unitario tendremos:

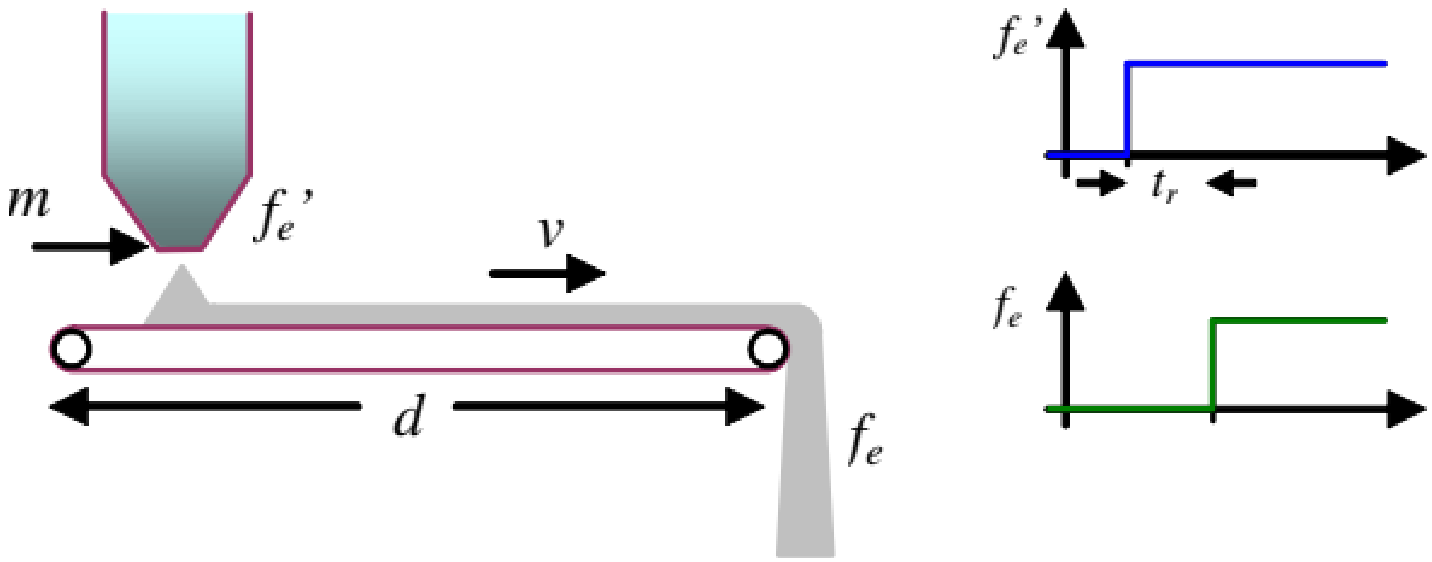



```
s   = tf('s');
G   = 1/(s^2+s+1);% FdeT. del sistema
t   = linspace(0,15,500);
y   = step(G,t);% respuesta sistema a entrada escalón unitario
plot(t,y,'LineWidth',1.5);
xlabel('Tiempo, (s)'); ylabel('Amplitud, (u.a.)');
hold on; plot(t,ones(1,numel(t)),'--r','LineWidth',1.5);% escalón
```

Sistemas con Retardo

Sistemas con Retardo

- El retardo es el tiempo que el sistema demora en responder frente a un estímulo.
- En muchas situaciones reales las respuestas de un sistema toman cierto lapso de tiempo en ser detectadas, por ejemplo, una correa transportadora toma un tiempo t_r en llevar material a una velocidad v un recorrido d.



- Estos retardos aparecen en sistemas que tienen tiempos de procesamiento considerables, retardos en el transporte de variables, retardos en las mediciones o intrínsecos del sistema.

Sistemas con Retardo

- Para un sistema de primer orden con retardo, la EDO canónica y su FdeT. asociadas puede representarse como:

$$\tau\dot{y} + y = k_{dc}u(t - t_r)$$

$$H(s) = \frac{k_{dc}e^{-t_r s}}{\tau s + 1}$$

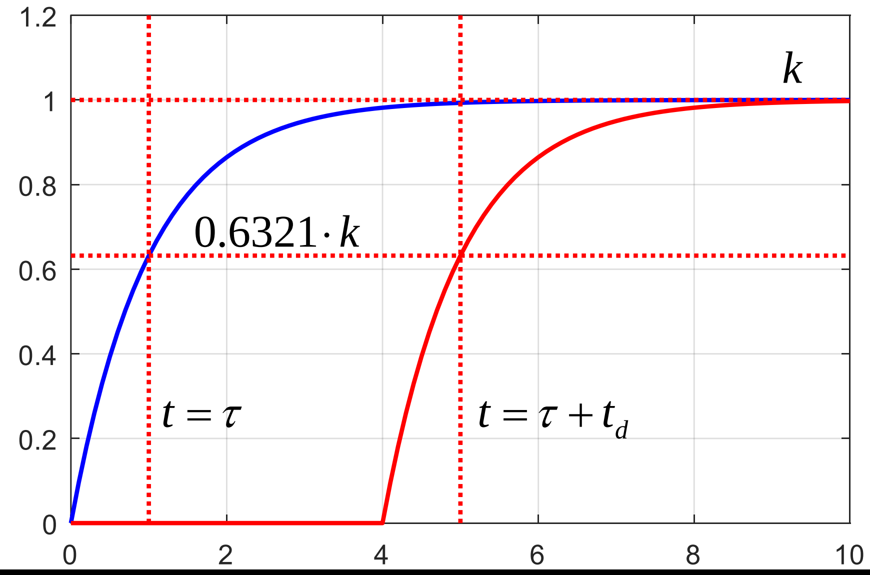
- Respuesta a entrada escalón. La respuesta del sistema de primer orden con retardo a entrada escalón será:

$$y(t) = k_{dc}\left(1 - e^{-(t-t_r)/\tau}\right)\mathrm{u}(t - t_r)$$

***Ejemplo**, en la figura se aprecia la respuesta de un sistema de primer orden:*

a) sin retardo y

b) con un retardo de 4 unidades de tiempo.



Sistemas con Retardo

Linealización del retardo (Padé)

Esta aproximación puede ser útil para analizar sistemas con retardo en el espacio complejo, aquí, el término exponencial asociado se transforma a una función racional como:

$$e^{-\tau s} \sim \frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{e^{\frac{\tau}{2}s}} = \frac{1-\left(\frac{\tau}{2}s\right)+\frac{\left(\frac{\tau}{2}s\right)^2}{2!}-\frac{\left(\frac{\tau}{2}s\right)^3}{3!}+\dots}{1+\left(\frac{\tau}{2}s\right)+\frac{\left(\frac{\tau}{2}s\right)^2}{2!}+\frac{\left(\frac{\tau}{2}s\right)^3}{3!}+\dots}$$

Aprox. lineal

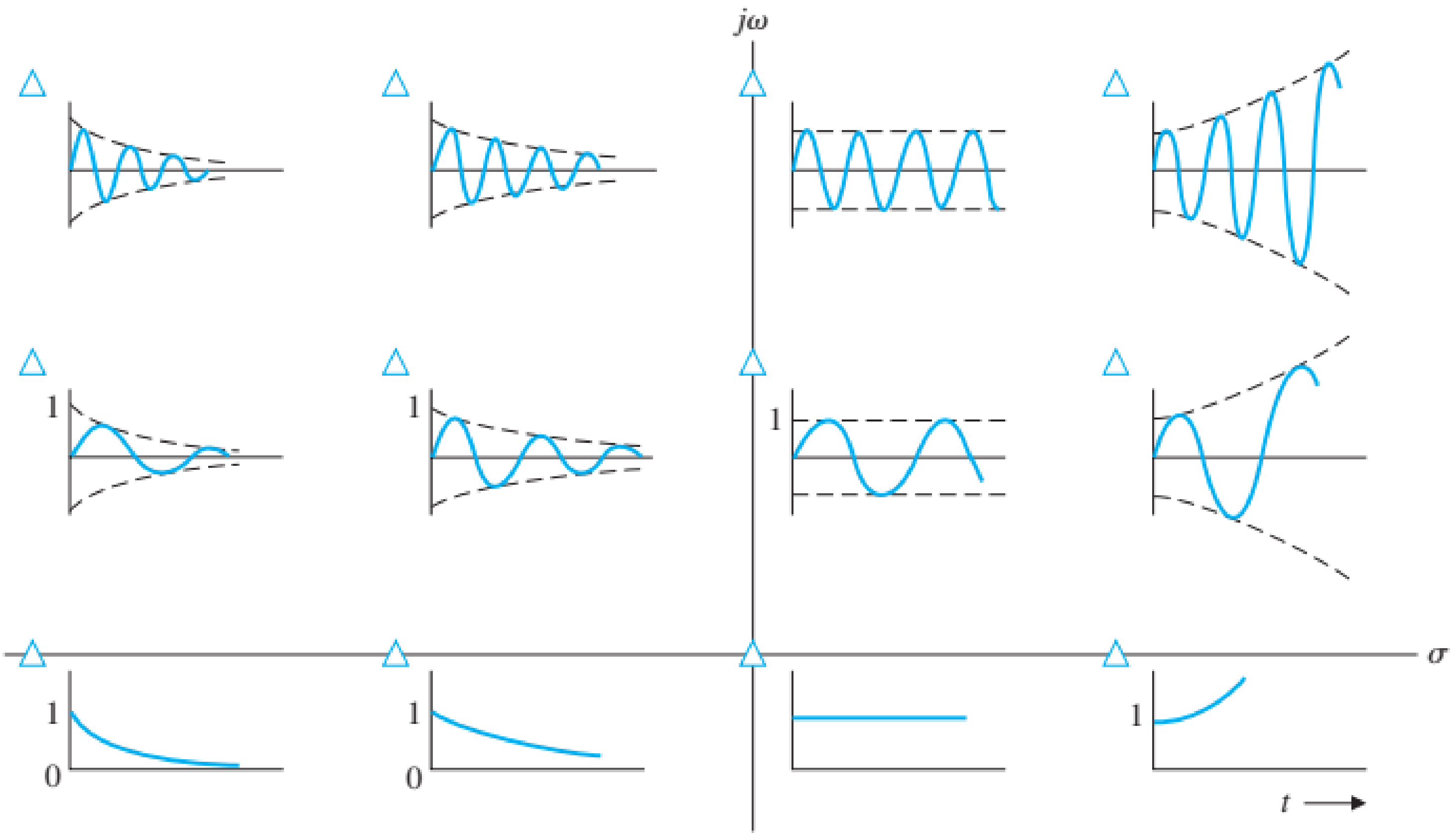
Aprox. cuadrática

Aprox. cúbica

- ❑ En Matlab pueden hacer esta aproximación directamente con la función pade().

En resumen

Dependiendo de la ubicación de los polos en el plano complejo, podremos tener respuestas estables o inestables (convergentes o divergentes)



En la siguiente clase, veremos en profundidad conceptos de estabilidad para sistemas de control!

Referencias

[1] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, 13th ed., Pearson, 2017.

[2] Prof. J.R. Espinoza y Prof. D.G. Sbárbaro, Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos (543214), DIE, Universidad de Concepción, 19ava ed., 2020. [Disponible Online]: link.

[3] Prof. J.R. Espinoza, Apuntes Sistemas de Control (543244), DIE, Universidad de Concepción, 18ava ed., 2019. [Disponible Online]: link.

[4] Prof. B. Messner, Prof. D. Tilbury, Prof. R. Hill y PHD. student JD. Taylor, Control Tutorials for Matlab & Simulink. [Disponible Online]: link.