Control Automático de Procesos

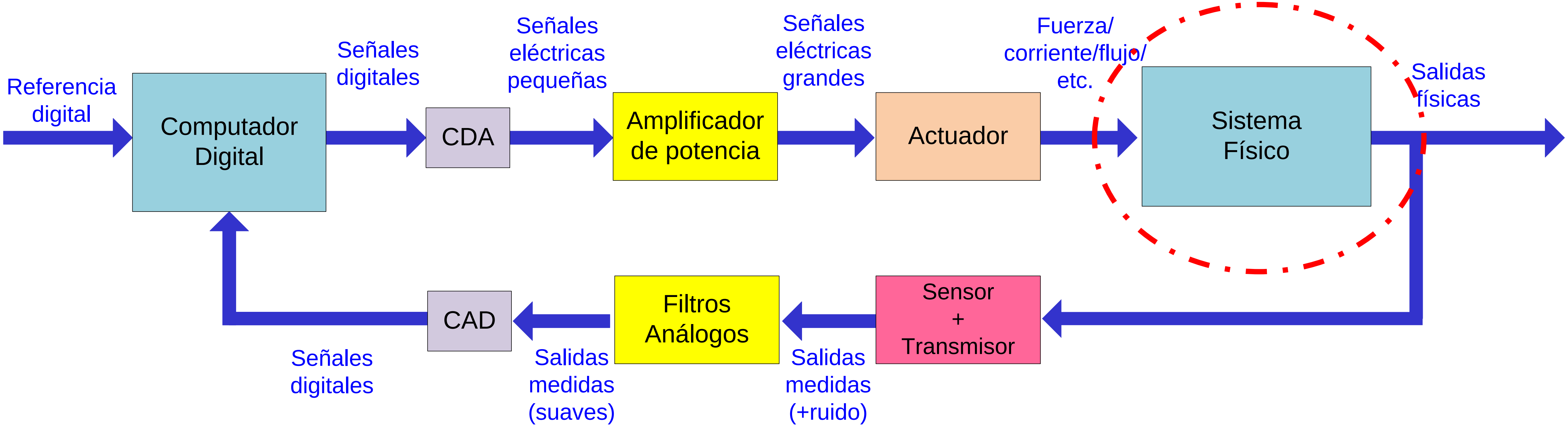
Modelación de sistemas I: Representaciones

Prof. Carlos A. Toro N.
carlos.toro.ing@gmail.com
2021

Objetivos

- Diferenciar las formas de representar un sistema
- Reconocer la importancia del concepto de Función de Transferencia.
- Representar sistemas de forma pictórica con diagramas en bloques.

Introducción



Clasificación de Sistemas y Modelos

Según las características de la planta tendremos sistemas de naturaleza:

Linealidad	Comportamiento temporal	Continuidad en el tiempo	Número de variables	Según naturaleza del proceso	Comportamiento espacial
Lineal	Variantes	Continuos	SISO (single In – single Out)	Determinístico	Concentrados
No lineal	Invariantes	Discretos	MIMO (multi In – multi Out)	Estocástico	Distribuidos

En la práctica se encontrarán combinaciones de estos, i.e. sistemas híbridos

Clasificación de Sistemas y Modelos

En este curso modelaremos y estudiaremos sistemas:

Linealidad	Comportamiento temporal	Continuidad en el tiempo	Número de variables	Según naturaleza del proceso	Comportamiento espacial
Lineales	Variantes	Continuos	SISO (single In – single Out)	Determinísticos	Concentrados
No lineales	Invariantes	Discretos	MIMO (multi In – multi Out)	Estocásticos	Distribuidos

Clasificación de Sistemas y Modelos

Además, según los objetivos de análisis que hayamos planteado, tendremos modelos:

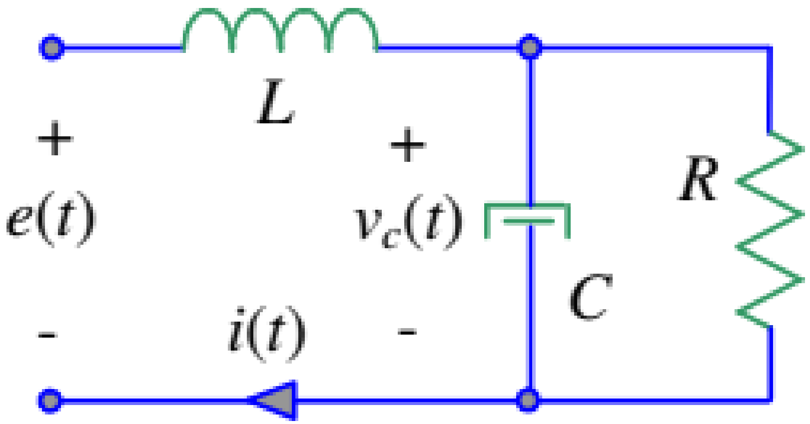
a) Estáticos y Dinámicos

M. Estáticos: representados generalmente con ecuaciones algebraicas lineales y/o no lineales, y en derivadas parciales (respecto solo a la posición), ej: para el circuito RLC, el modelo estático será:

$$e = v_c,\quad i = \frac{v_c}{R}$$

M. Dinámicos: representados con E.D.O.s o E.D.P.s (con derivadas temporales y espaciales), ej: para el mismo circuito, el modelo dinámico será:

$$e = L\frac{di}{dt} + v_c,\quad i = C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R}$$



Clasificación de Sistemas y Modelos

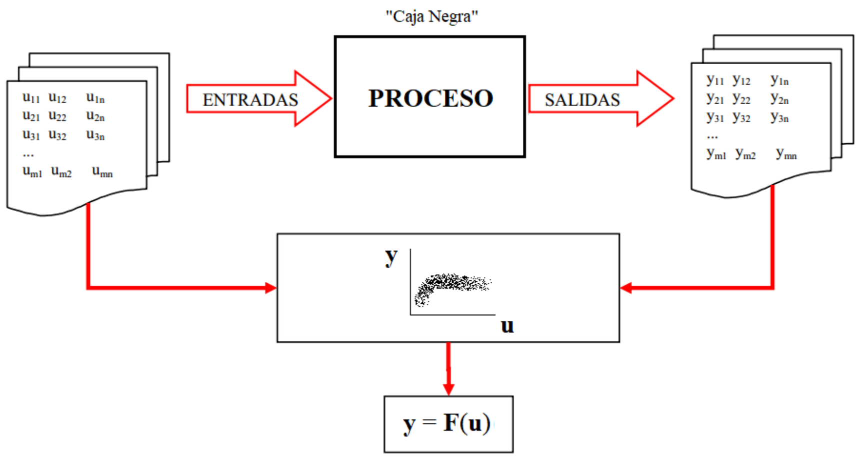
Además, según los objetivos de análisis que hayamos planteado, tendremos modelos:

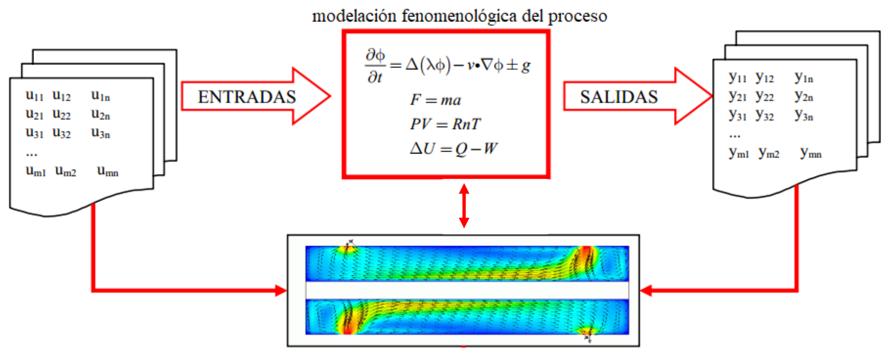
b) Empíricos y Fenomenológicos (o mezclas)

M. Empíricos: Guardan relación con el tratamiento estadístico de la información disponible. Considera al proceso y/o sistema como una caja negra. Estos modelos son útiles cuando poco o nada se sabe de los fenómenos involucrados con el proceso de interés.

Para desarrollarlos requieren conocer los datos de entrada y salida el proceso.

M. Fenomenológicos: Se obtienen mediante la aplicación de leyes que rigen los fenómenos de interés en el proceso. Se busca conocer lo que ocurre en la caja negra. En general, cuando es complejo modelar todos los fenómenos involucrados en un sistema, se recurre a diversas simplificaciones, ej. eliminar la dimensión espacial, análisis en estado estacionario del sistema, o a enfoques mixtos.





Clasificación de Sistemas y Modelos

Ejemplo de un enfoque de modelación mixta (*ref. del ejemplo*):

Datos de referencia

Nuevos datos

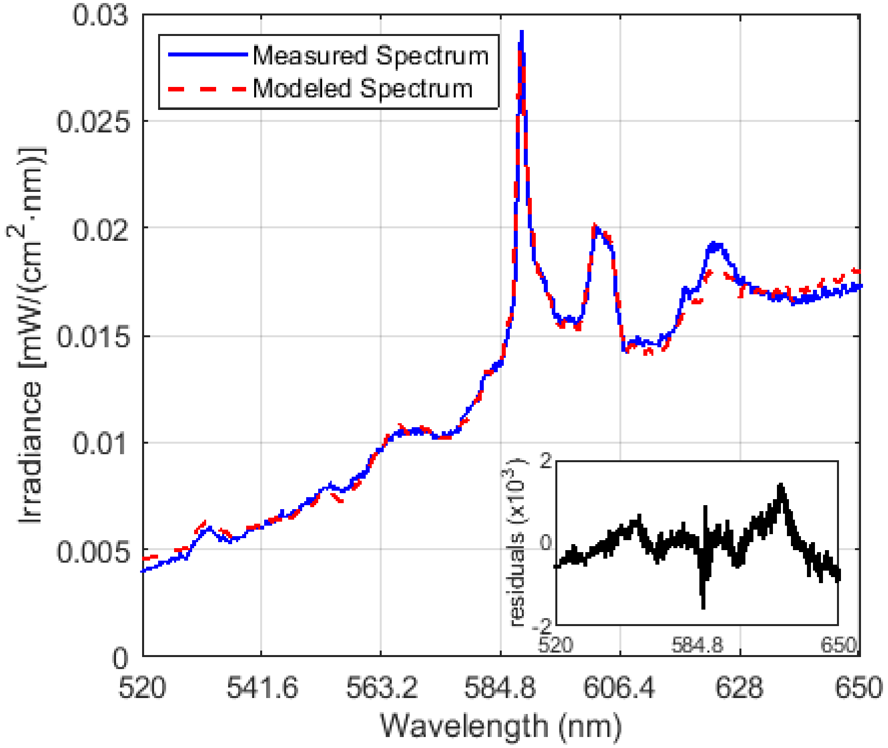
Modelos matemáticos o físicos

Regresión no lineal

Información relevante de proceso

$$\mathbf{I}([\boldsymbol{\theta}\,T]) = \mathbf{I}_c([\theta_0\,T]) + \sum_{j=1}^{k}\theta_j\cdot\mathbf{I}_k + \boldsymbol{e} + \theta_{k+1}\cdot\mathbf{1}$$

$$I_c(\lambda,[\theta_0\,T]) = \theta_0\cdot\frac{c_1\cdot(\pi\cdot\mathrm{N.A.}^2)}{\lambda^5\cdot\left[\exp\left(\frac{c_2}{\lambda\cdot T}\right)-1\right]}\left(\frac{10^{-7}\cdot\mu\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2 nm}\right)$$



Modelación analítica + empírica (modelos de caja gris)

Recapitulando

Modelación: el proceso de representar el comportamiento de un sistema real por medio de ecuaciones matemáticas y lógicas.

Modelo matemático: Un conjunto de ecuaciones matemáticas (e.g. E.D.O.s) que describen el comportamiento entrada – salida de un sistema.

Estos modelos son útiles para simulación, predicción, diseño/evaluación de desempeño, y análisis y diseño de sistemas de control. Entre los que usaremos están:

- Modelos de ecuaciones diferenciales (para sistemas lineales y no lineales)
- Modelos de espacio de estados (para sistemas lineales y no lineales, versión SISO)
- Modelos de función de transferencia (para sistemas lineales invariantes en el tiempo) y diagramas de bloques.

Representación con EDOs y Ecuaciones de Estado

Representación mediante EDOs

La forma general de un modelo dinámico con respuesta $y(t)$ y entrada $u(t)$ descrito por EDOs está dado por:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + a_0 u$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

←Es común expresar la ecuación normalizando los coeficientes por el valor de a_n.

Condiciones para que exista la solución de la EDO y ésta sea única:

- El intervalo de solución es $t \in [0,\infty[$.
- La entrada $u(t)$ y sus derivadas en el intervalo de solución son conocidas.
- Se deben conocer las c.i. $y(0)$, $y'(0)$, ... , $y^{(n-1)}(0)$

Representación con Ecuaciones de Estado

En este caso, el sistema se representa por un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden. De forma general:

vector de variables de estado

vector de entradas

vector de derivadas de primer orden $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$

vector de salidas $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$

vector de perturbaciones

Donde $\boldsymbol{f}()$ es una función que describe las derivadas y $\boldsymbol{h}()$ es una función que describe las salidas.

Para un sistema lineal, las ecuaciones de estado se pueden representar como:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{u} + \mathbf{E}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{u} + \mathbf{F}\boldsymbol{p}$$

Representación con Ecuaciones de Estado

En el caso de tener un sistema dinámico no lineal, podemos linealizarlo en torno a un punto de operación $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{y}_0$ para expresarlo como en el caso lineal.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \\ \vdots \\ h_q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta\dot{\boldsymbol{x}} &= \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{B}\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{E}\Delta\boldsymbol{p} \\ \Delta\boldsymbol{y} &= \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{F}\Delta\boldsymbol{p} \end{aligned}$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} \quad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} \quad \mathbf{E} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} \quad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}} \quad \mathbf{F} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\substack{x=x_0 \\ u=u_0 \\ p=p_0}}$$

En el caso no-lineal $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{y}_0$ satisfacen

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{p}_0),$$

$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{p}_0)$$

Funciones de Transferencia

Representación con Funciones de Transferencia

Def.: Se define la **Función de Transferencia (F. de T.)** a la función H(s) como el factor en la ecuación de Y(s) que multiplica la entrada U(s), considerando c.i. nulas. En otras palabras,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n} (s - p_j)}$$

Def.: Los **polos** p_j de $H(s)$ son las raíces del denominador $D(s)$.

Def.: Los **ceros** z_i de $H(s)$ son las raíces del numerador $N(s)$.

Representación con Funciones de Transferencia

En el área de control de procesos, los polos y ceros de la FdeT. Son relevantes para analizar el comportamiento del sistema.

Ejemplo: Encuentre los polos de la siguiente FdeT.:

$$G(s) = \frac{5}{s^2 - 4s + 6}$$

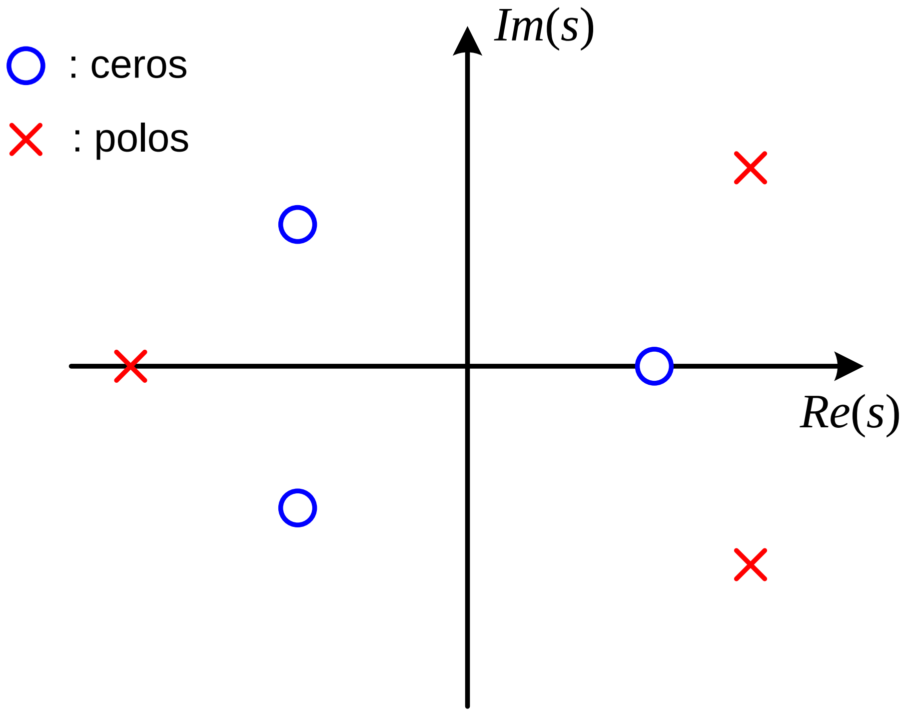
Solución. Factorizando el denominador tenemos que las raíces o polos son:

$$\boxed{s_{1,2} = 2 \pm j\sqrt{2}}$$

La función **`roots()`** de Matlab será de utilidad para estos cálculos.

Representación con Funciones de Transferencia

Durante las siguientes unidades, serán de utilidad los gráficos de polos y ceros en el plano complejo (recordar que $s = \sigma + j\omega$):



Estos se pueden hacer directamente graficando la parte imaginaria vs la parte real de los polos y ceros usando **`plot()`** o con la función [**`pzmap()`**](). Experimentar!

Representación con Funciones de Transferencia

- Para analizar sistemas físicos genéricos podemos seguir los siguientes pasos:

1. Identificar las variables dinámicas, entradas $u(t)$, y salidas $y(t)$.
2. Enfocarse en un componente y analizar su dinámica (cómo? Siguiente clase)
3. Obtener la EDO de orden n que representa el sistema
4. Tomar la transformada de Laplace de la EDO
5. Combinar las ecuaciones para eliminar variables internas
6. Escribir la función de transferencia $H(s)$ desde la entrada a la salida
7. Para una cierta entrada $U(s)$, encontrar $Y(s)$, luego $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)=H(s)U(s)\}$

Representación con Funciones de Transferencia

Ejercicio. Para las siguientes funciones de transferencia, determinar:

- Polos del sistema
- Ceros del sistema
- Orden del sistema

$$a)\ H_1(s) = \frac{s+3}{s(s+2)}$$

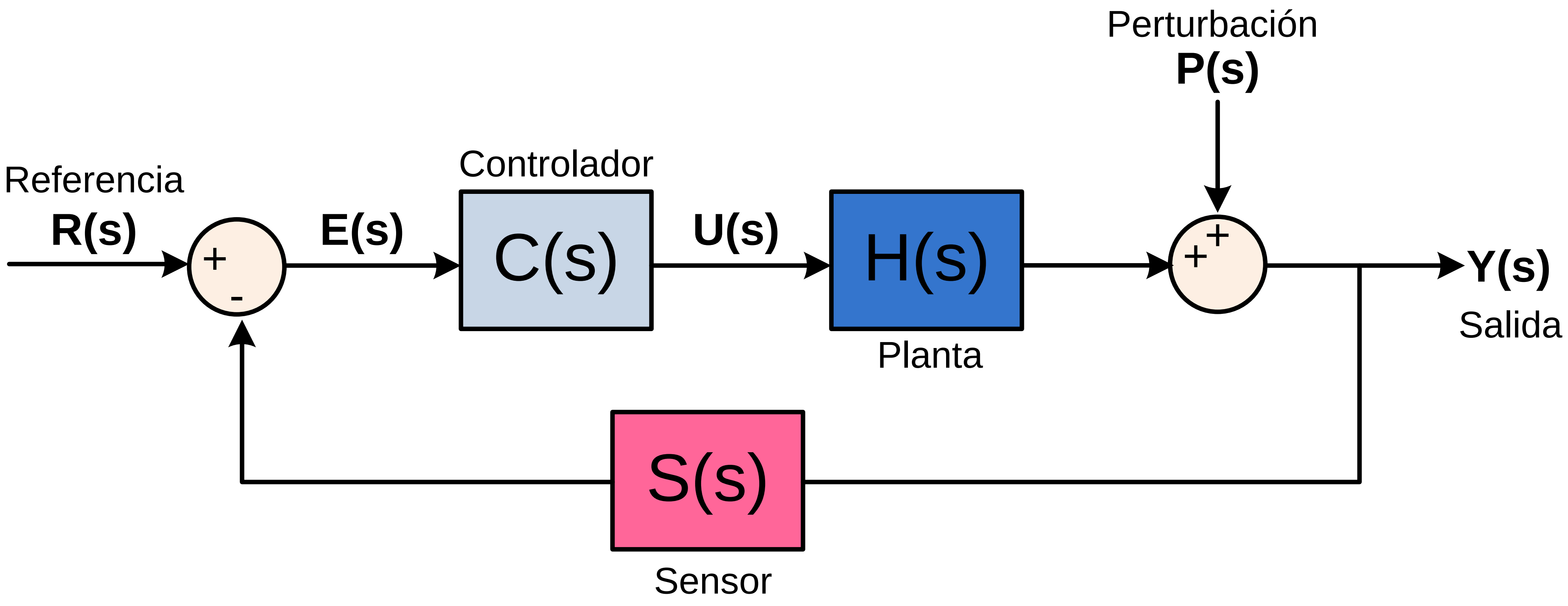
$$b)\ H_2(s) = \frac{s}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$c)\ H_3(s) = \frac{(s+3)^2}{s(s^2+10)}$$

Diagramas de Bloques

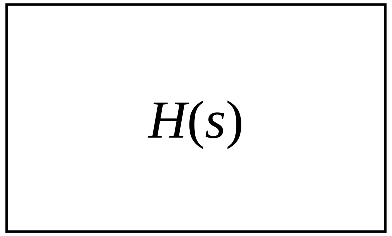
Representación mediante diagramas de bloques

Una manera de representar las relaciones de causa y efecto de un sistema o sistemas conectados es usando **diagramas de bloques**. En estos, una FdeT. puede ser representada mediante un bloque, con su correspondiente entrada y salida, por ejemplo:



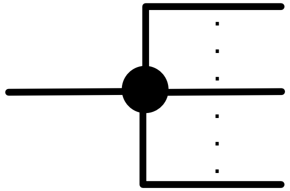
Representación mediante diagramas de bloques

Los elementos básicos de estos diagramas son:

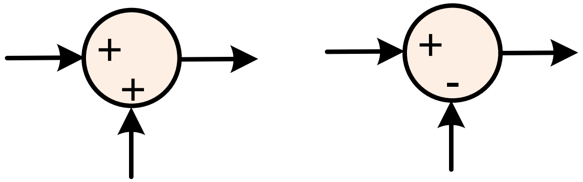


Bloque: Representa un sistema que posee una FdeT. (se usa una letra mayúscula, ej. H(s))

Señal: Representa el fujo de las señales de entradas y salidas desde o hacia un sistema.



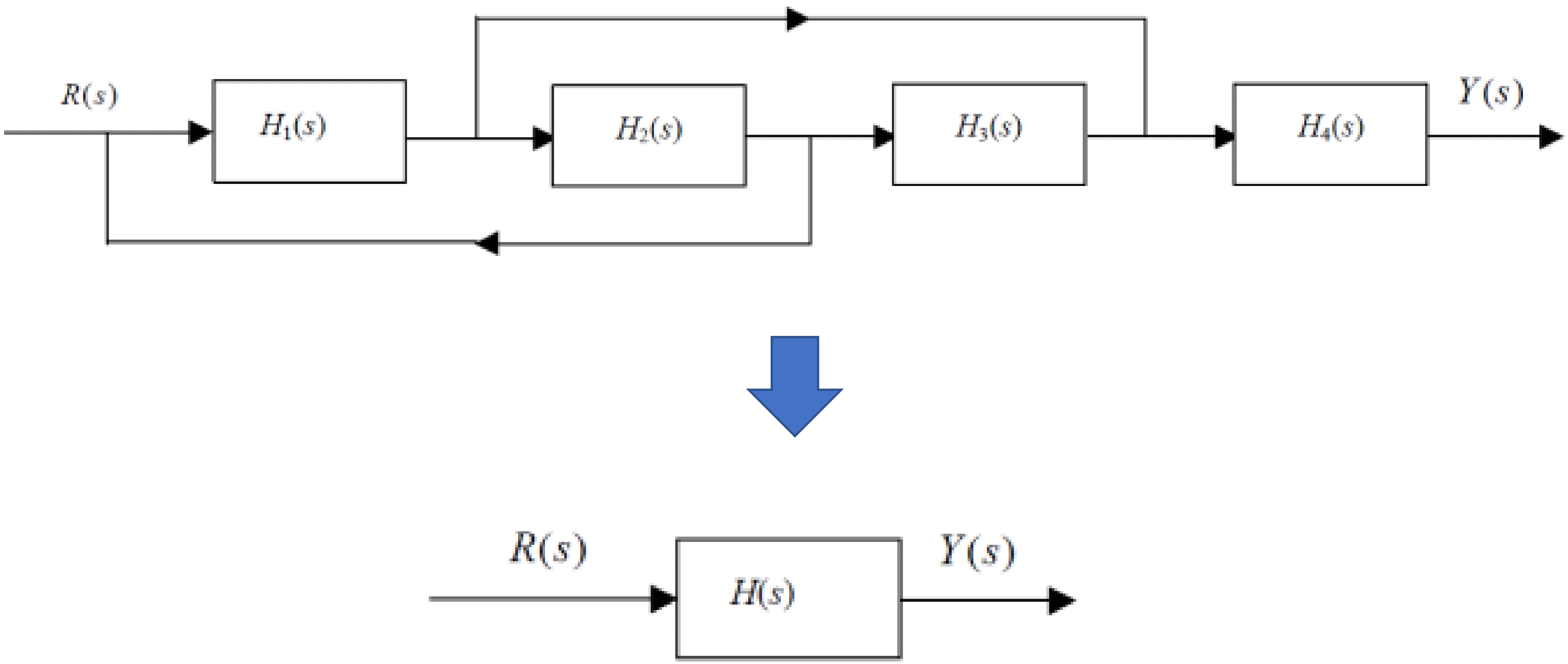
Nodo divisor: Este elemento recoge una señal de entrada para generar dos o más de salida idénticas.



Nodo sumador o comparador: Elementos que recogen dos señales de entrada para generar una de salida equivalente a la suma o diferencia de las de entrada.

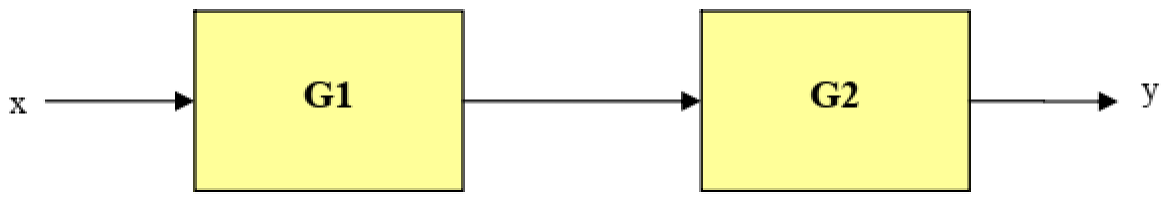
Representación mediante diagramas de bloques: Objetivo

El objetivo en este tipo de representaciones será reducir los bloques interconectados de los subsistemas en un bloque unificado o una única función de transferencia. Ejemplo:

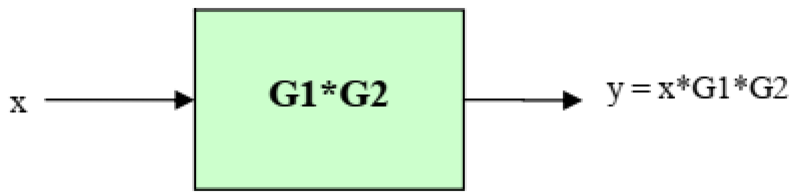


Algunas transformaciones de diagramas de bloques

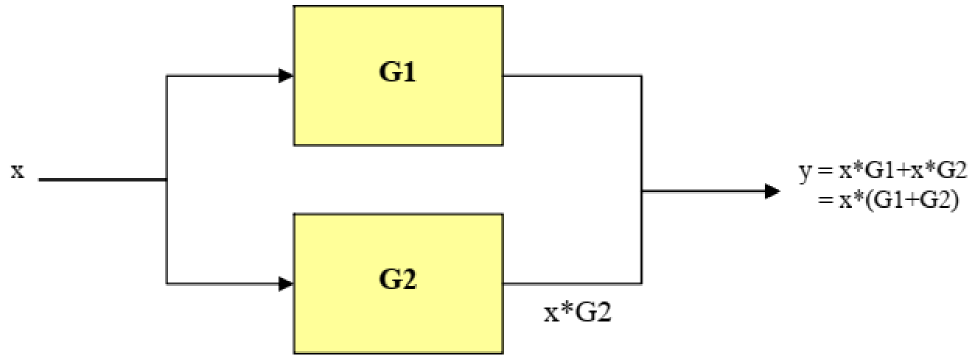
1) El diagrama en bloques de dos procesos unitarios en serie:



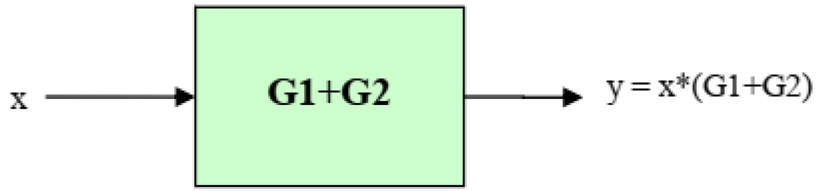
equivalen a



2) El diagrama en bloques de dos procesos unitarios en paralelo:

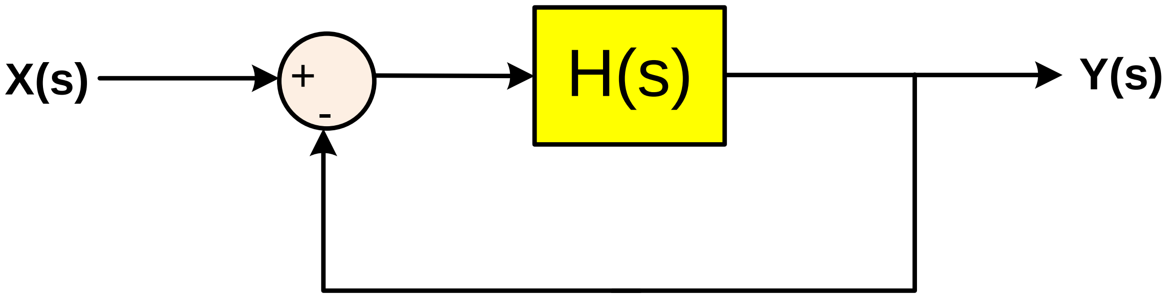


equivalen a



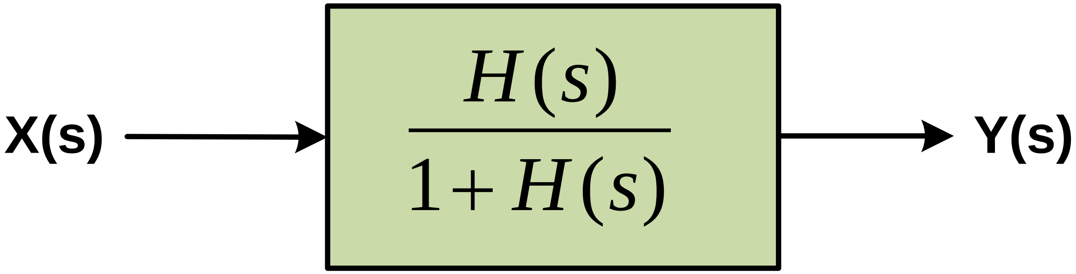
Algunas transformaciones de diagramas de bloques

3) Procesos realimentados: un proceso unitario con realimentación negativa puede ser representado mediante un diagrama de bloques como sigue:



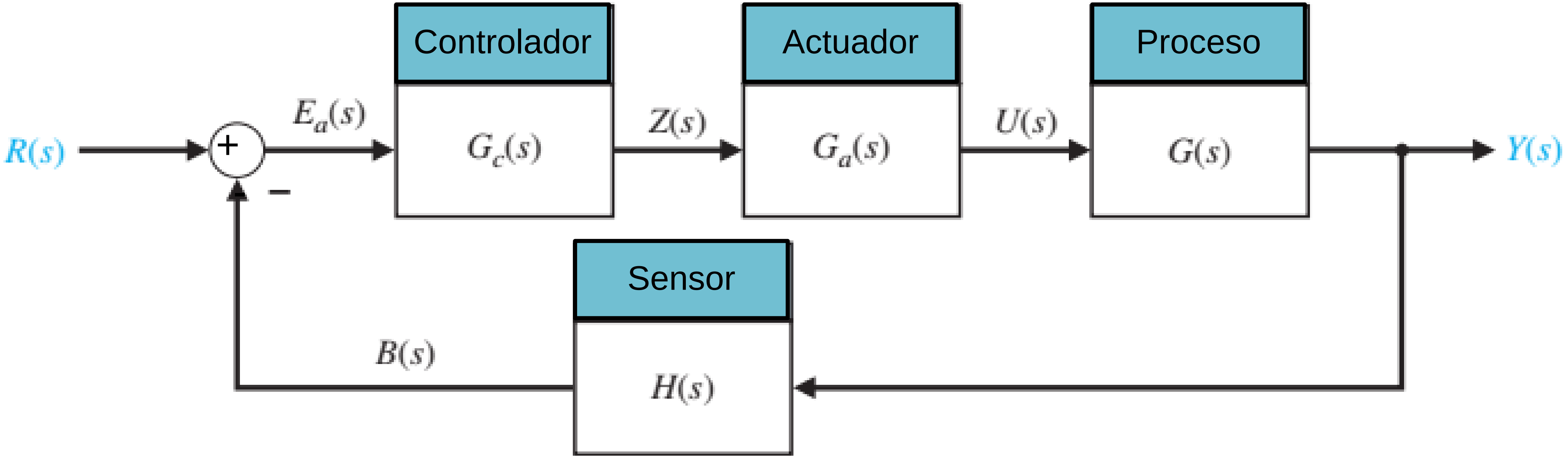
Flujo de realimentación

Equivale a:



Ejercicio propuesto

Simplificar el siguiente diagrama de bloques de un proceso:



En otras palabras, se pide encontrar $H_{eq}(s) = Y(s)/R(s)$.

En práctica