

Control Automático de Procesos

# Estabilidad BIBO (*Bounded Input Bounded Output*)

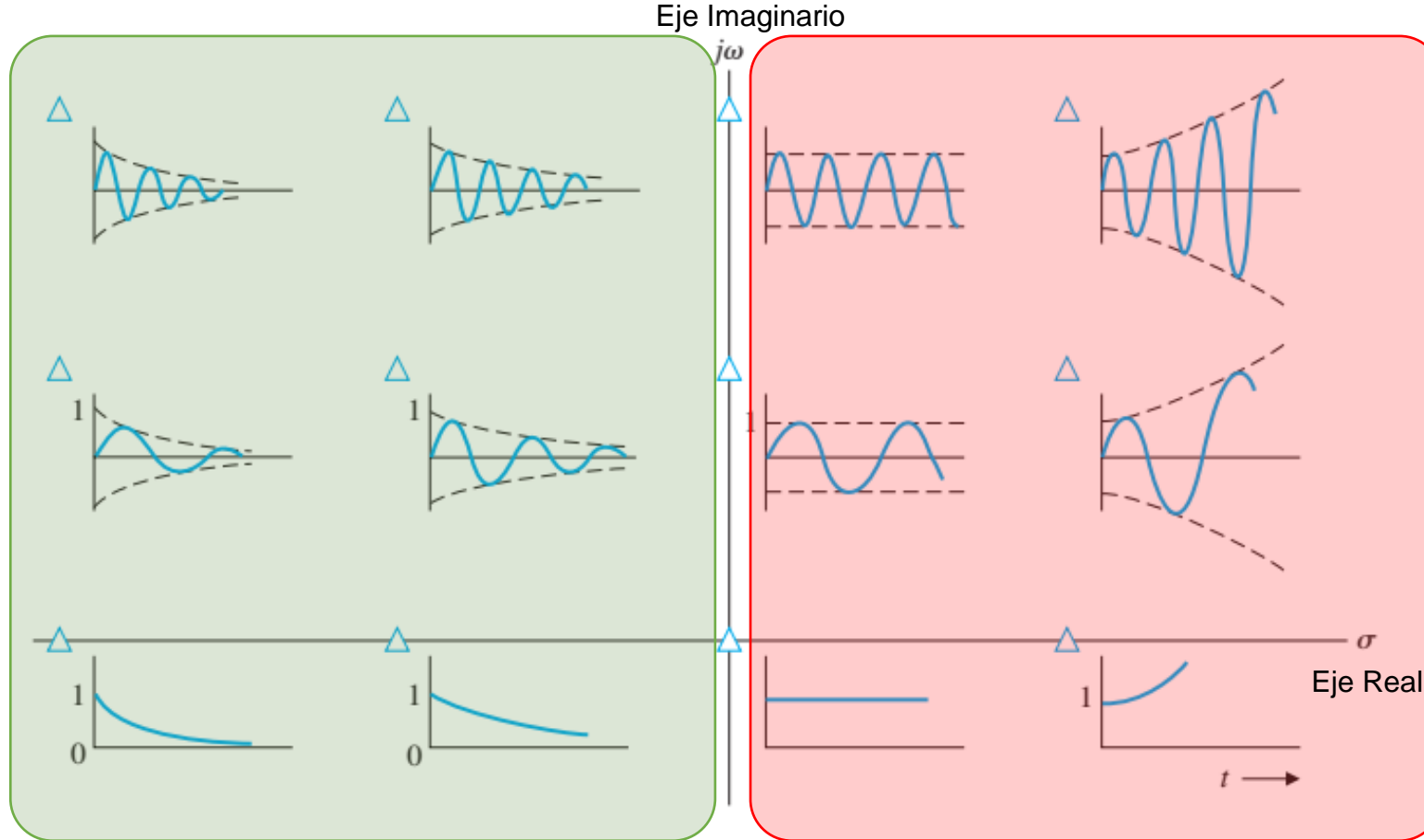
Prof. Carlos A. Toro N.  
carlos.toro.ing@gmail.com  
2021

# Objetivos

- ❑ Implementar algunas estrategias para evaluar la estabilidad de sistemas realimentados.
- ❑ Aplicar conceptos de estabilidad de sistemas para diseñar controladores.

# Introducción

E  
S  
T  
A  
B  
L  
E



SPI

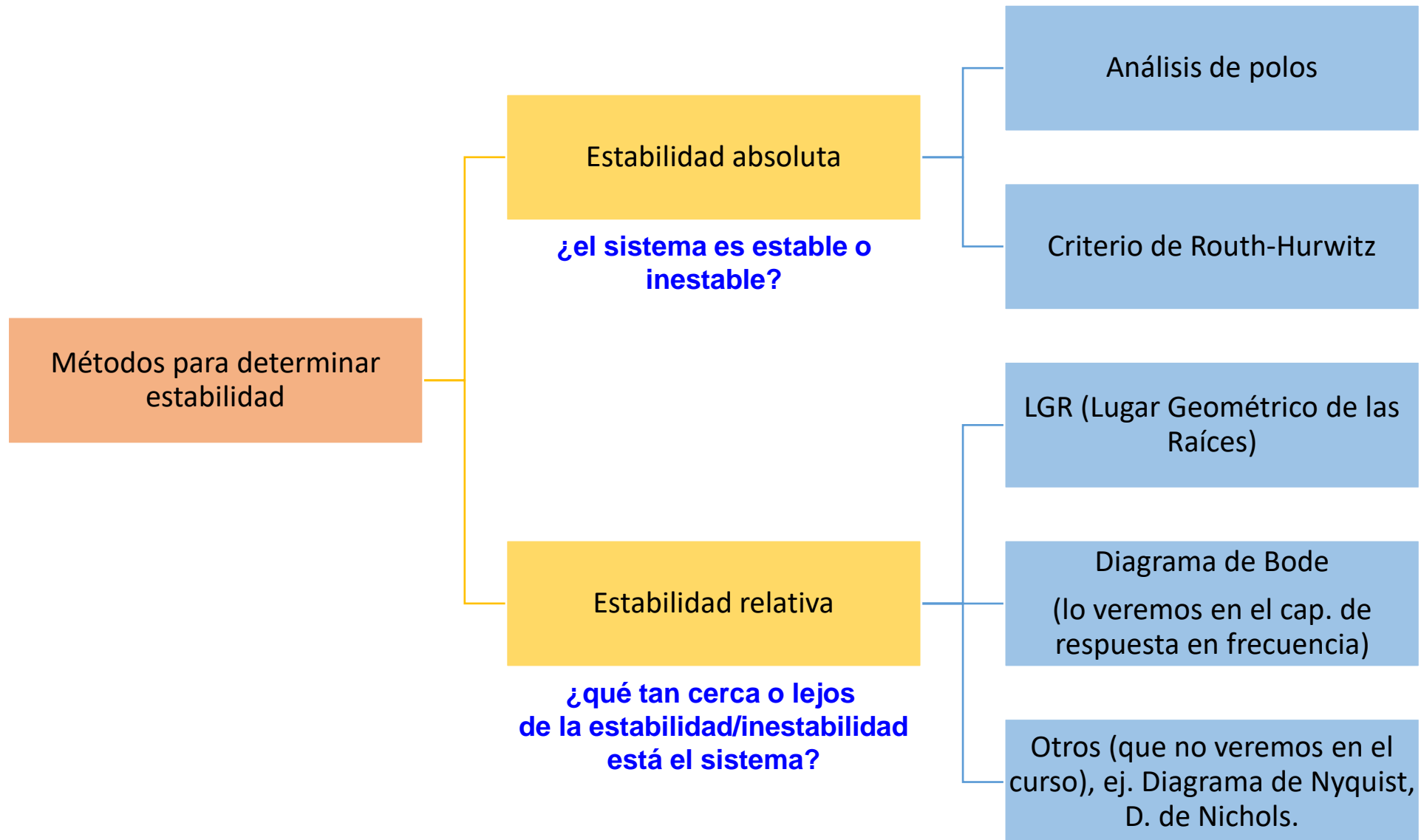
SPD

I  
N  
E  
S  
T  
A  
B  
L  
E

Un sistema dinámico será estable si presenta una respuesta acotada ante una entrada acotada (BIBO: *Bounded Input Bounded Output*) independiente de las condiciones iniciales.

\* SPI: Semi Plano Izquierdo, SPD: Semi Plano Derecho

# Métodos de determinación de estabilidad



## Métodos para evaluar la ESTABILIDAD BIBO

## A. Estabilidad del sistema analizando los polos de la FdeT.

❑ Tenemos la siguiente función de transferencia para un sistema:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$

donde los polos (raíces de la ecuación característica  $D(s) = 0$ ) pueden ser reales, imaginarios o complejos. El criterio para determinar si un sistema es estable o no a partir de esta representación será:

- ❖ Si todos los polos  $p_j$  poseen parte real negativa menor a cero, i.e.  $\text{Re}(p_j) < 0 \ \forall j$  (están en el SPI), entonces el **sistema es estable**.
- ❖ Si al menos un polo posee parte real positiva mayor a cero (está en el SPD), entonces el **sistema es inestable**.

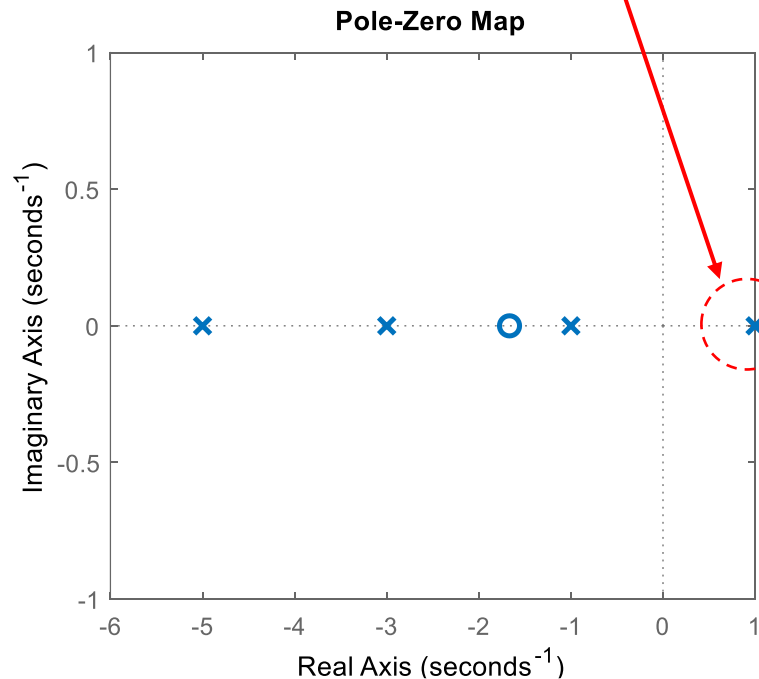
Recordar el uso de la función `roots()` para encontrar los polos.

# A. Estabilidad del sistema analizando los polos de la FdeT.

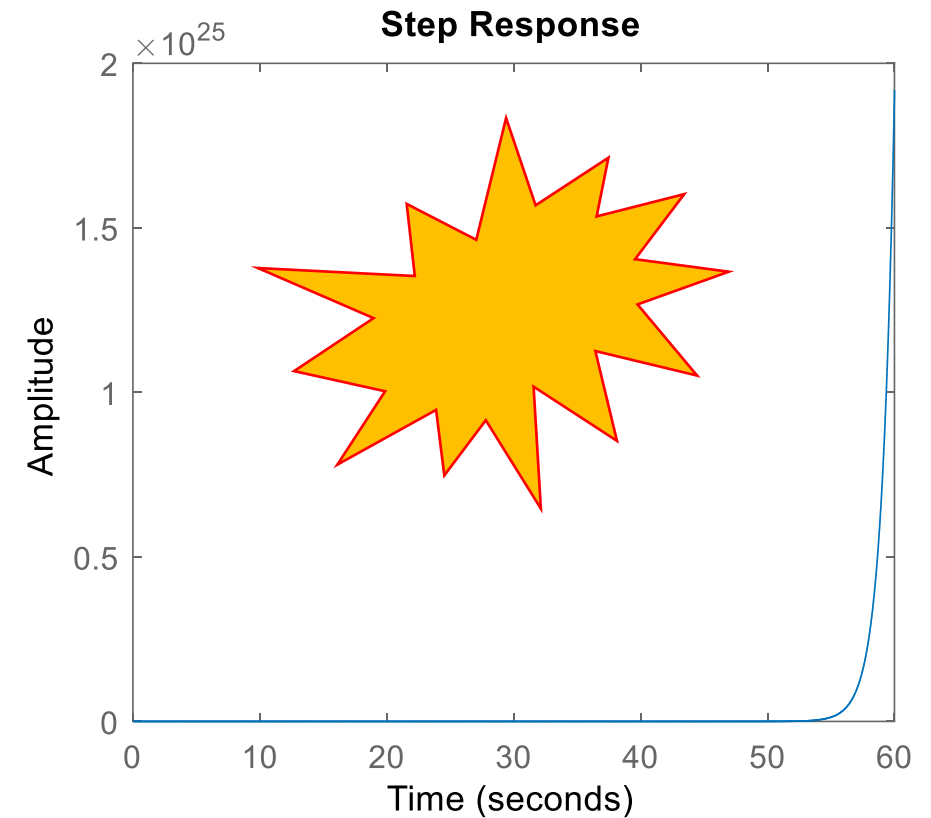
**Ejemplo:** Decidir si los siguientes sistemas descritos por su FdeT. son estables o inestables.

$$a) G_1(s) = \frac{3s + 5}{s^4 + 8s^3 + 14s^2 - 8s - 15}$$

$(s-1)(s+1)(s+3)(s+5)$



$s_1 = 1 > 0$   
**→ Sistema inestable**



Respuesta a entrada escalón unitario.  
**DIVERGE!**

## A. Estabilidad del sistema analizando los polos de la FdeT.

**Ejemplo:** Decidir si los siguientes sistemas descritos por su FdeT. son estables o inestables.

$$b) G_2(s) = \frac{10(s+1)}{s^5 + 3s^3 + 2s + 5}$$

```
roots([1 0 3 0 2 5])
```

```
-0.3036 + 1.7167i
-0.3036 - 1.7167i
 0.7697 + 1.0827i
 0.7697 - 1.0827i
-0.9323
```

**Inestable**

$$c) G_3(s) = \frac{10(s+1)}{s(s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 2)}$$

```
roots([1 1 3 1 2 0])
```

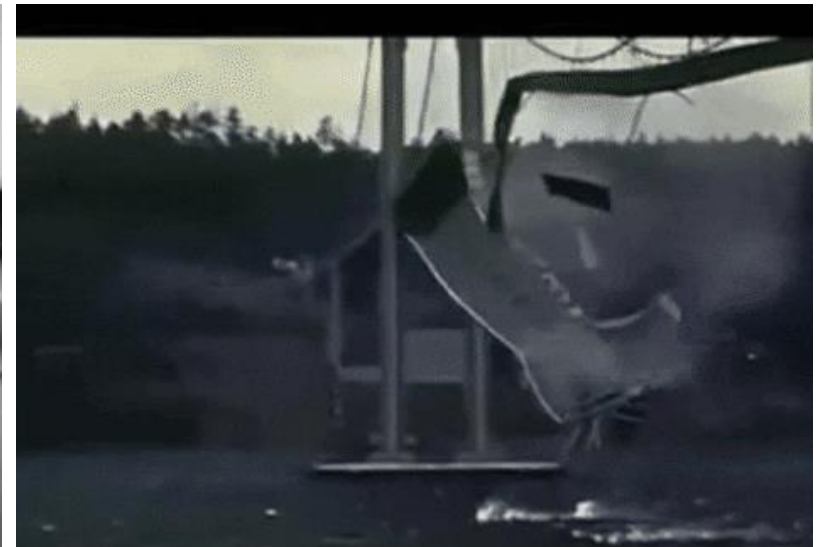
```
0.0000
-0.5000 + 1.3229i
-0.5000 - 1.3229i
-0.0000 + 1.0000i
-0.0000 - 1.0000i
```

**Estable**



## A. Estabilidad del sistema analizando los polos de la FdeT.

- ❑ Qué sucede si existe un polo con parte real igual a cero,  $s = j\omega_n$  (el resto con parte real negativa si hay):
  - ❖ **Caso A: Marginalmente estable**, si la entrada es acotada entonces la salida contendrá oscilaciones hasta el infinito.
  - ❖ **Caso B: Inestable**, si la entrada es una sinusoidal (acotada claramente) con una frecuencia de oscilación igual a la frecuencia de oscilación natural  $\omega_n$ , entonces la salida divergirá, i.e. será no acotada. En la vida real, sucederán cosas como las del video ↓



Tacoma Narrows Bridge, 1940

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

- ❑ Qué sucede si el polinomio  $D(s)$  no es fácilmente factorizable?, por ejemplo, si este incluye parámetros como la ganancia de un controlador a diseñar  $\rightarrow$  factorizarlo de forma simbólica puede ser difícil.
- ❑ Una forma de analizar la estabilidad del sistema sin estimar las raíces, es usando el **criterio de Routh-Hurwitz**.



Edward J. Routh  
(1831 – 1907),  
Matemático Inglés.



Adolf Hurwitz  
(1859 – 1919),  
Matemático Alemán.

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

□ Esta metodología se basa en analizar los coeficientes  $a_i$  de la ecuación característica,

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

este criterio se establece a partir de un arreglo algebraico (de Routh) de estos coeficientes como sigue.

**Pivotes**

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	<b>Conocidos</b>
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	<b>A estimar</b>
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$s^0$					

$$b_i = - \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2i} \\ a_{n-1} & a_{n-2i-1} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2i} - a_n \cdot a_{n-2i-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_i = - \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-2i-1} \\ b_1 & b_{i+1} \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1 \cdot a_{n-2i-1} - a_{n-1} \cdot b_{i+1}}{b_1}$$

Notar que si  $n$  es impar, los coeficientes en la primera fila son los que acompañan a las potencias impares, lo mismo para el caso par. En la segunda fila por ende sucederá lo complementario.

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

❑ Luego de construir el arreglo de R-H, el criterio nos dice que el número de raíces de la ecuación característica con parte real positiva es igual al **número de cambios de signo** de la primera columna (pivotes) del arreglo. Por lo tanto una **condición necesaria y suficiente para que el sistema sea estable** es que la primera columna no pose cambios de signo.

❑ Para visualizar esto primero dejar el signo de  $a_n$  como positivo (si es negativo multiplicar toda la ec. por -1).

▪ **Ejemplo:** Determinar la estabilidad de un sistema con el siguiente polinomio característico:

$$P(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 4s + 5$$

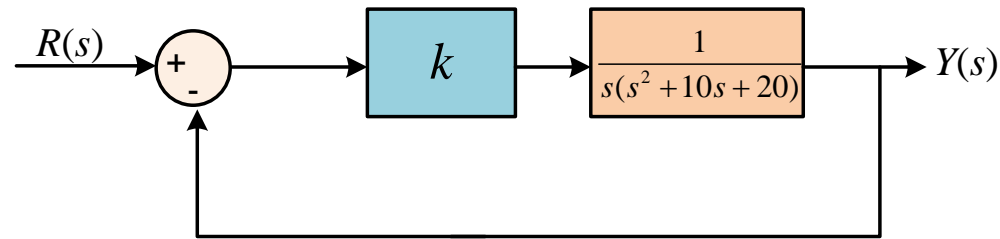
▪ Primero, construimos el arreglo de Routh como:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^4 & 1 & 3 & 5 \\
 s^3 & 2 & 4 & 0 \\
 s^2 & 1 = \frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{2} & 5 = \frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} & \\
 s^1 & -6 = \frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} & 0 & \\
 s^0 & 5 & & 
 \end{array}$$

→ Como el número de cambios de signo es = 2, se tendrán dos raíces en el SPD del plano complejo  $\therefore$  **el sistema es inestable.**

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

- **Ejemplo:** Dado el siguiente sistema realimentado unitariamente, encontrar el rango de  $k$  tal que el sistema sea estable.



- Primero, encontramos la función de transferencia en lazo cerrado:

$$H(s) = \frac{k}{s^3 + 10s^2 + 20s + k} \Rightarrow \text{ec.cta. } P(s) = s^3 + 10s^2 + 20s + k = 0$$

- Segundo, construimos el arreglo de Routh como:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 20 \\ s^2 & 10 & k \\ s^1 & \frac{10 \times 20 - 1 \times k}{10} = \frac{1}{10}(200 - k) & \\ s^0 & k & \end{array}$$

→ Luego, para que no exista un cambio de signo en la primera columna se debe cumplir que:

$$\frac{1}{10}(200 - k) > 0 \text{ y } k > 0 \Rightarrow 0 < k < 200$$

∴ usando R-H, concluimos que el sistema será estable cuando  $0 < k < 200$

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

### Algunos casos especiales:

- **Caso 1:** Ceros en la columna pivote con elementos distintos de cero en la fila en donde está el cero. En este caso como no podemos dividir por cero en la columna siguiente, reemplazar ese pivote por un **número positivo pequeño  $\varepsilon$**  y luego llevar al límite.
- **Ejemplos:**

$$s^3 + 2s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 2 & 2 \\ s^1 & 0 \approx \varepsilon & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

No hay cambios de signo antes o después de  $\varepsilon$   
por lo que el **sistema es estable**.

$$s^3 - 3s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & -3 \\ s^2 & 0 \approx \varepsilon & 2 \\ s^1 & (-3 - \frac{2}{\varepsilon}) & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Los signos cambian 2 veces  
por lo que el **sistema es inestable**.

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

### Algunos casos especiales:

- **Caso 2: Una fila completa es cero.** En este caso tendremos dos raíces reales con igual magnitud y signos opuestos y/o dos raíces complejas conjugadas, el siguiente ejemplo ilustra como proceder.
- **Ejemplo 1:**

$$p(s) = s^5 + 5s^4 + 11s^3 + 23s^2 + 28s + 12 = 0$$

$s^5$	1	11	28
$s^4$	5	23	12
$s^3$	6.4	25.6	
$s^2$	3	12	
$s^1$	0	0	
$s^1$	6	0	
$s^0$	12		

← **Fila antigua**, se define el polinomio auxiliar:  $P(s) = 3s^2 + 12$

← **Fila nueva**, se define el polinomio auxiliar:  $P'(s) = 6s + 0$

Las raíces del polinomio auxiliar:  $P(s)$  son  $s_{1,2} = \pm 2j$ , las cuales son raíces del polinomio original igualmente.

## B. Estabilidad usando Criterio de Routh-Hurwitz

### Algunos casos especiales:

- **Caso 2:** Una fila completa es cero.
- **Ejemplo 2:** Determinar si el sistema con la siguiente ecuación característica es estable o no.

$$p(s) = s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$$

$s^5$	1	24	-25
$s^4$	2	48	-50
$s^3$	0	0	
$s^3$	8	96	
$s^2$	24	-50	
$s^1$	112.7	0	
$s^0$	-50		

← Fila antigua, se define el polinomio auxiliar:  $P(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$

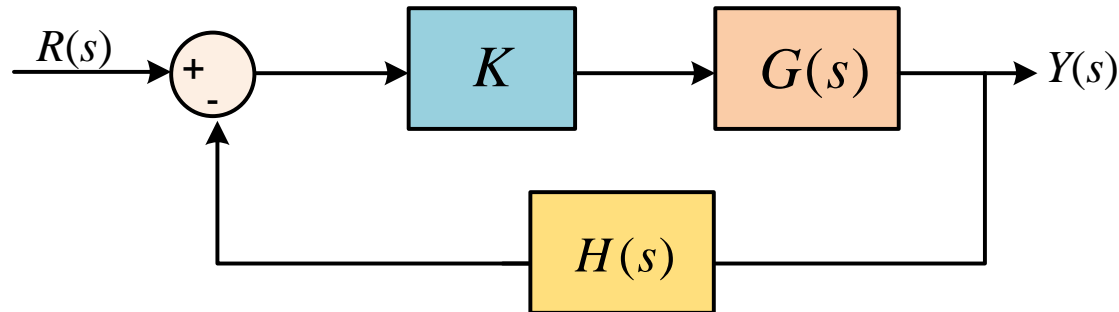
← Fila nueva, se define el polinomio auxiliar:  $P'(s) = 8s^3 + 96s$

Dado que hay un cambio de signo, entonces el sistema no es estable.

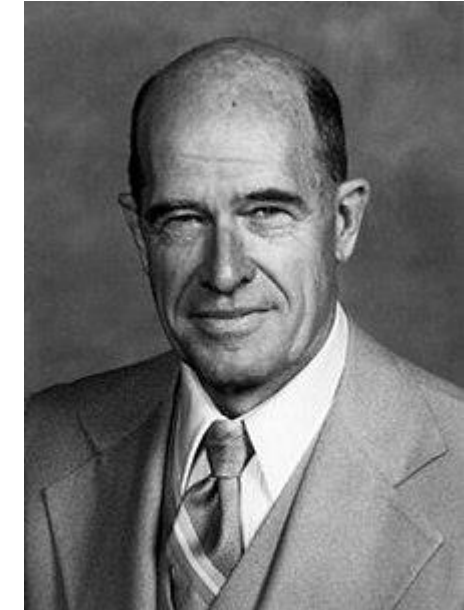


## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

- El método del lugar geométrico de las raíces (LGR), diseñado por W.R. Evans, permite **analizar gráficamente las raíces de la ecuación característica** de un sistema al variar los valores de un parámetro, por ejemplo, la ganancia de un controlador.
- En el caso de sistemas realimentados, el L.G.R permite determinar los polos de la F.deT. en L.C.,  $H_{lc}(s)$  a partir de la F.deT. en L.D.  $L(s)$



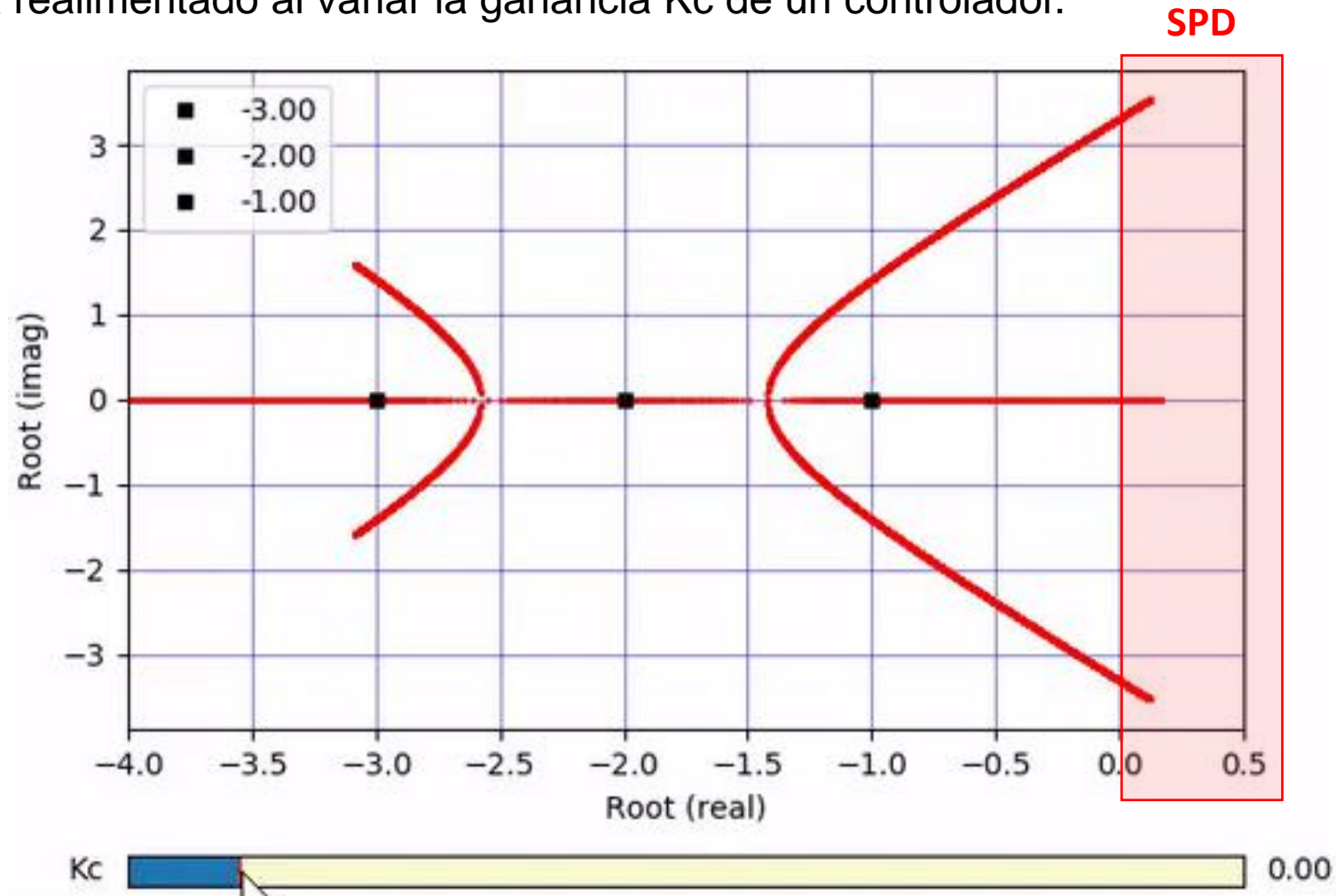
$$H_{lc}(s) = \frac{KG(s)}{1 + \underbrace{KG(s)H(s)}_{L(s)}} \Rightarrow \text{ec. cta.es } 1 + L(s) = 1 + KG(s)H(s) = 0$$



Walter R. Evans  
(1920 – 1999),  
Matemático Estadounidense.  
Inventor del método del LGR.

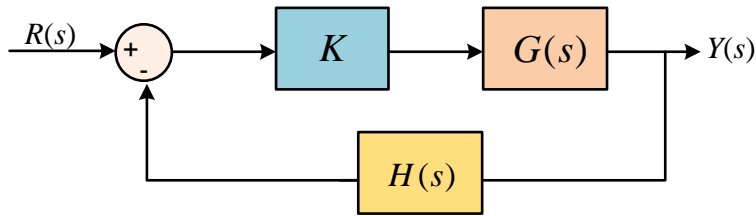
## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR) Intro.

- ❑ LGR de un sistema realimentado al variar la ganancia  $K_c$  de un controlador.



# C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

□ **Ejemplo.** Grafiquemos el LGR para el caso realimentado donde:

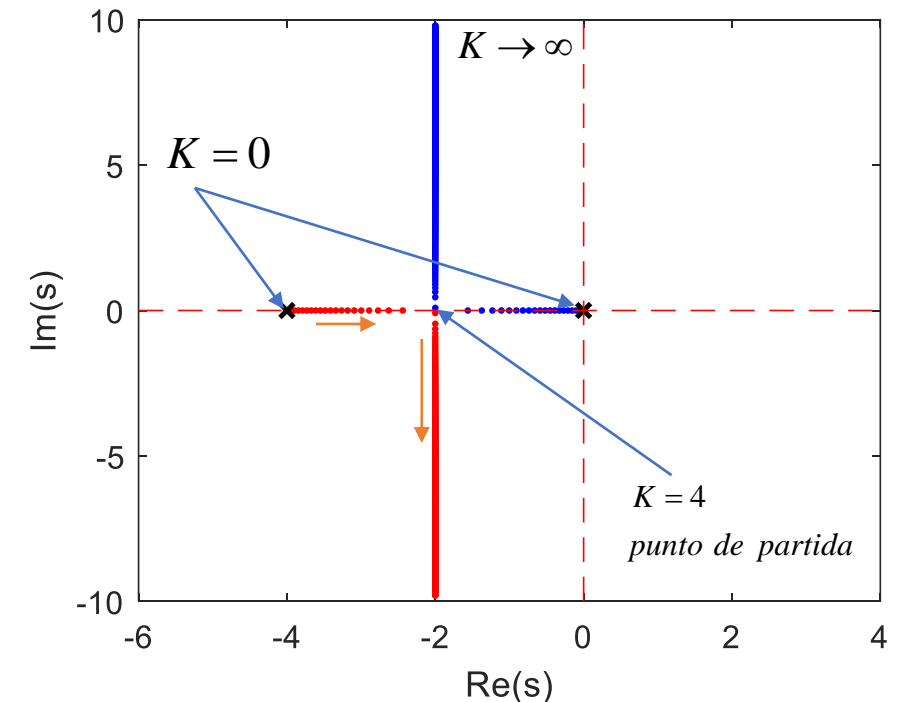


$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}, \quad H(s) = 1$$

▪ Notemos que la ecuación característica es:

$$1 + L(s) = 1 + \frac{K}{s(s+4)} = 0 \Rightarrow s^2 + 4s + K = 0$$

- Luego los polos serán:  $p_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - K}$ , cómo variará su ubicación para  $0 \leq k < \infty$  ?
- Podemos intuir algunos valores simples, para  $K = 0$ :  $p_{1,2} = 0, -4$  (polos de la FdeT. en L.A.); para  $K = 4$ :  $p_{1,2} = -2, -2$ ; para  $K > 4$ :  $p_{1,2}$  = números complejos conjugados, en Matlab podemos iterar fácilmente para generar otros casos, lo cual podemos graficar: →



## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

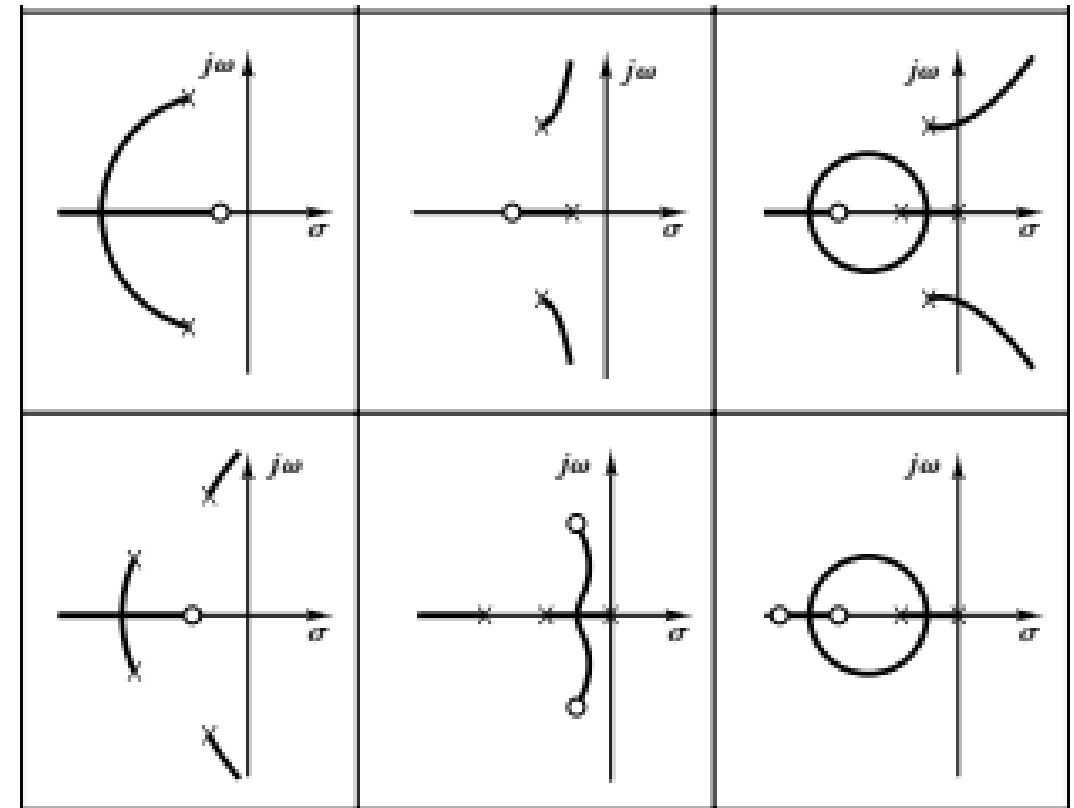
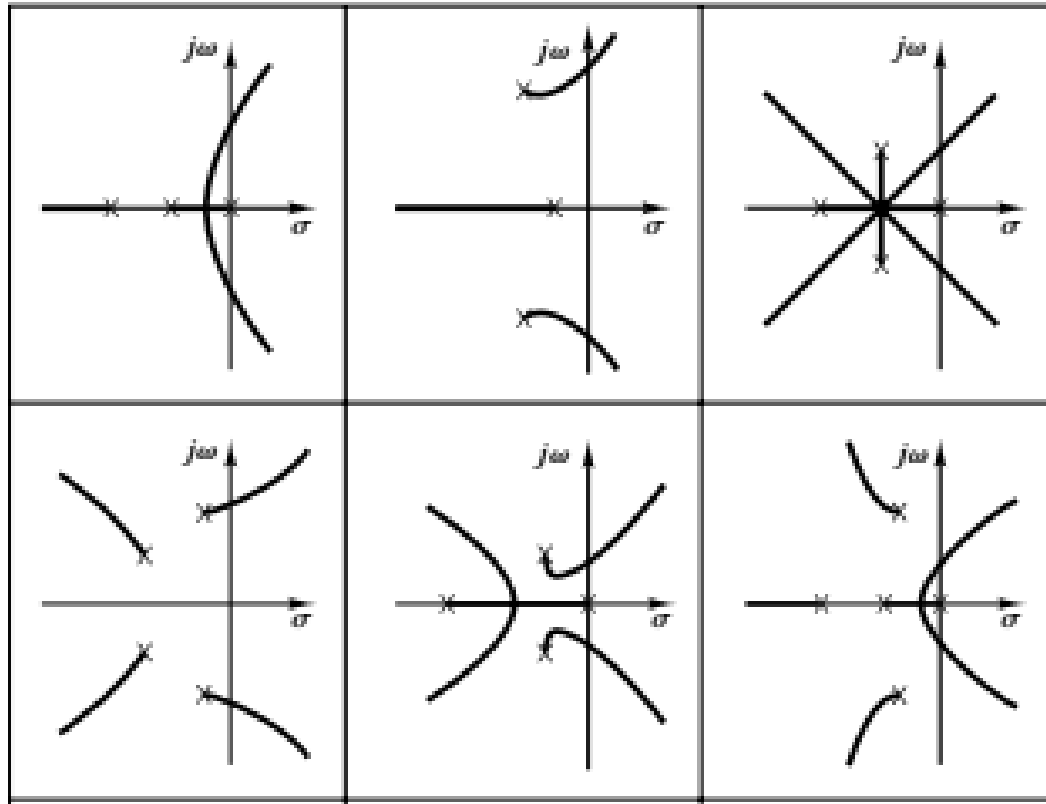
- ❑ Siempre podremos obtener el LGR tomando diferentes valores del parámetro  $K$  y evaluando los correspondientes polos (raíces de la ec. cta.) de la F.de.T. de L.C. Esto se puede complicar para sistemas de orden mayor.
- ❑ **Objetivo:** Diseñar una forma sistemática para dibujar el LGR de **cualquier sistema en LC a partir de la FdeT. en L.D.**

*Luego, a partir de este gráfico, podremos estudiar algunas propiedades del sistema:*

- *Estabilidad → polos en el SPI/SPD*
- *Dinámica → ubicación de polos en el diagrama (complejos: oscilaciones)*
- *Estado estacionario → error en E.E. en el diagrama (polos en el origen)*
- *Sensibilidad → variación del L.G.R. en función de algún parámetro*
- *Diseño → ubicación de polos según requerimientos.*

# C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

## Algunos ejemplos de LGR



Fuente [5]

## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

Antes de definir algunas reglas, debemos tener presente que el producto  $G(s)H(s)$  es un número complejo ( $s$  es una variable compleja) así la ec. característica podemos escribirla como:

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K}$$

$$\Leftrightarrow G(s)H(s) = \frac{e^{j\pi}}{K} = \frac{e^{j\pi(1+2n)}}{K} \quad \text{Usando la relación de Euler}$$

- De esta expresión se derivan las condiciones de magnitud y ángulo siguientes:

Condición de magnitud	→	$ G(s)H(s)  = \frac{1}{K}$
Condición de ángulo	→	$\arg(G(s)H(s)) = \pi(1 + 2n), n = 0, 1, 2, \dots$

- Donde cualquier punto que cumpla con estas condiciones estará en el LGR. Sin embargo, para no tener que resolver estas ecuaciones, se puede recurrir a algunas reglas.

## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

### ❑ Reglas para construir el LGR:

- **Regla 1.** El LGR es siempre simétrico respecto al eje real! Esto dado que los polos complejos son conjugados.
- **Regla 2.** # ramas del LGR = # polos de LA.,  $N_p$
- **Regla 3. Puntos iniciales ( $K \rightarrow 0$ ).** Para  $K = 0 \rightarrow$  Los polos en LC = Polos en LA.
- **Regla 4. Puntos finales ( $K \rightarrow \infty$ ).** Si  $G(s)H(s)$  tiene  $N_p$  polos y  $N_c$  ceros, entonces  $N_c$  ramas terminan en los  $N_c$  ceros y  $N_p - N_c$  ramas restantes terminan en el infinito.
- **Regla 5. Comportamiento en el eje real.** Hay LGR si el número de polos y ceros a la derecha de un punto del eje real es impar ( $K > 0$ ).
- **Regla 6. Determinación de la ganancia.** Para un  $s = s_0$  arbitrario que pertenece al LGR la ganancia se calcula como,  $K = 1/|GH|_{s=s_0}$ .
- **Regla 7. Puntos de despegue y llegada (eje real).** Un punto de salida (llegada) del (al) eje real sucede en un máximo (mínimo) relativo de la ganancia. Estos se pueden encontrar resolviendo la siguiente ecuación:

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=\sigma} = \frac{d}{ds} \left( \frac{-1}{G(s)H(s)} \right) \bigg|_{s=\sigma} = 0$$

- **Regla 8. Ángulo de salida (llegada) del (al) eje real.** Las líneas que entran (salen) del (al) LGR están separadas por un ángulo dado por  $180^\circ/\alpha$  en el punto de entrada (salida), donde  $\alpha$  es el número de ramas que se cruzan (siempre es múltiplo de 2).

## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

### □ Reglas para construir el LGR (cont.):

- **Regla 9. Comportamiento asintótico para  $K \rightarrow \infty$ .** El LGR tiende a los ceros en infinito a través de asíntotas en  $\sigma_A$  y con ángulos  $\phi_A$ . Cuando el número finito de ceros  $N_c$  es menor que el número de polos  $N_p$  (caso típico), entonces  $N_p - N_c$  ramas del LGR terminan en ceros en el infinito. Las asíntotas están centradas en el eje real.

➤ Intersección asíntotas con eje real.

$$\sigma_A = \frac{\sum \text{Localización de Polos} - \sum \text{Localización de Ceros}}{N_p - N_c} = \frac{\sum \text{Re}(p_i) - \sum \text{Re}(z_j)}{N_p - N_c}$$

➤ Ángulos respecto al eje real

$$\phi_A = \frac{(1 + 2q)}{N_p - N_c} 180^\circ, \quad q = 0, 1, 2, \dots, (N_p - N_c - 1)$$

- **Regla 10. Ángulos de partida de un polo complejo y ángulos de llegada a un cero.**

$$\theta_p = \sum \text{ángulos desde los ceros} - \sum \text{ángulos desde los polos restantes} - 180^\circ$$

$$\theta_c = \sum \text{ángulos desde los polos} - \sum \text{ángulos desde los ceros restantes} + 180^\circ$$



## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

- **Ejemplo:** Esquematizar el LGR para el sistema con FdeT. en L.D. dada por,

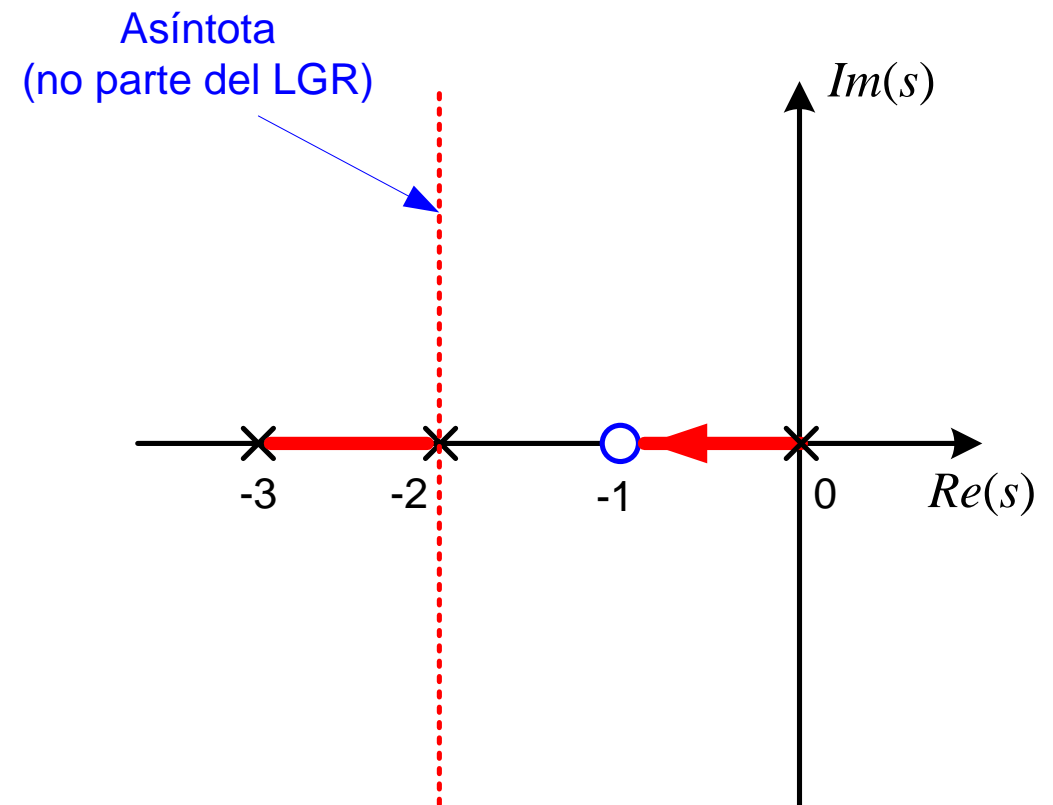
$$L(s) = K \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)} = KG(s)H(s)$$

- **Regla 2,**  $N_p = 3$ ,  $N_c = 1$ , # de ramas = 3
- **Regla 3,** puntos iniciales  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -2$  y  $p_3 = -3$ .
- **Regla 4,** 1 rama terminarán en un cero y  $3-1 = 2$  terminarán en infinito
- **Regla 5,** de derecha a izquierda hay LGR entre  $p_1$  y  $z_1 = -1$  y entre  $p_2$  y  $p_3$
- **Regla 9.1,** Intercepto del eje real de la asíntota:

$$\sigma_A = \frac{0 + (-2) + (-3) - (-1)}{2} = -2$$

- **Regla 9.2,** Ángulo respecto al eje real:

$$\phi_A = 90^\circ \text{ y } 270^\circ$$



## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

- **Ejemplo (cont.):** Ahora determinamos en que punto del eje real y con qué ángulo, despegan los polos, y con que ganancia se tiene este valor crítico.
- **Regla 7.** Las ramas se interceptan en el eje real en puntos donde  $K$  está en el valor extremo para valores reales de  $s$ . Para esto aplicamos la definición:

$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{-1}{G(s)H(s)} \right) \bigg|_{s=\sigma} = 0$$

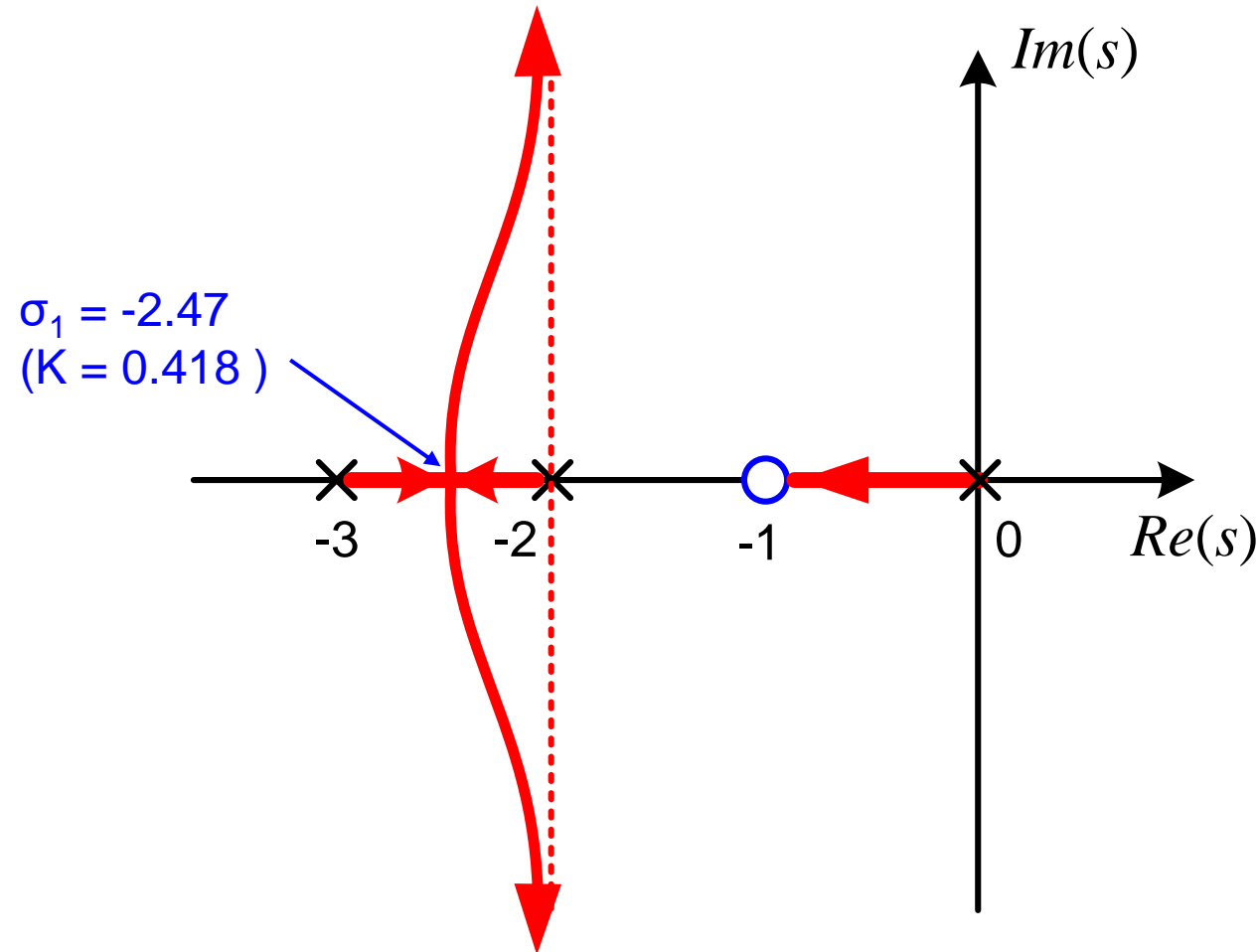
Donde:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left\{ -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)} \right\} &= \frac{d}{d\sigma} \left\{ -\frac{\sigma(\sigma+2)(\sigma+3)}{\sigma+1} \right\} \\ \Rightarrow \frac{d}{d\sigma} \left\{ -\frac{1}{G(\sigma)H(\sigma)} \right\} &= \left\{ -\frac{(3\sigma^2 + 8\sigma + 3)(\sigma+1) - \sigma^3 - 4\sigma^2 - 3\sigma}{(\sigma+1)^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Luego, simplificando lo anterior tenemos que:  $2\sigma^3 + 8\sigma^2 + 10\sigma + 6 = 0$  cuyas raíces son  $\sigma_1 = -2.47$ ,  $\sigma_2 = -0.77 + 0.79j$ ,  $\sigma_3 = -0.77 - 0.79j$ , reemplazando  $\sigma_1$  en la condición de magnitud, llegamos a que  $K(\sigma_1) = 0.418 > 0$  (comprobar!).

## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

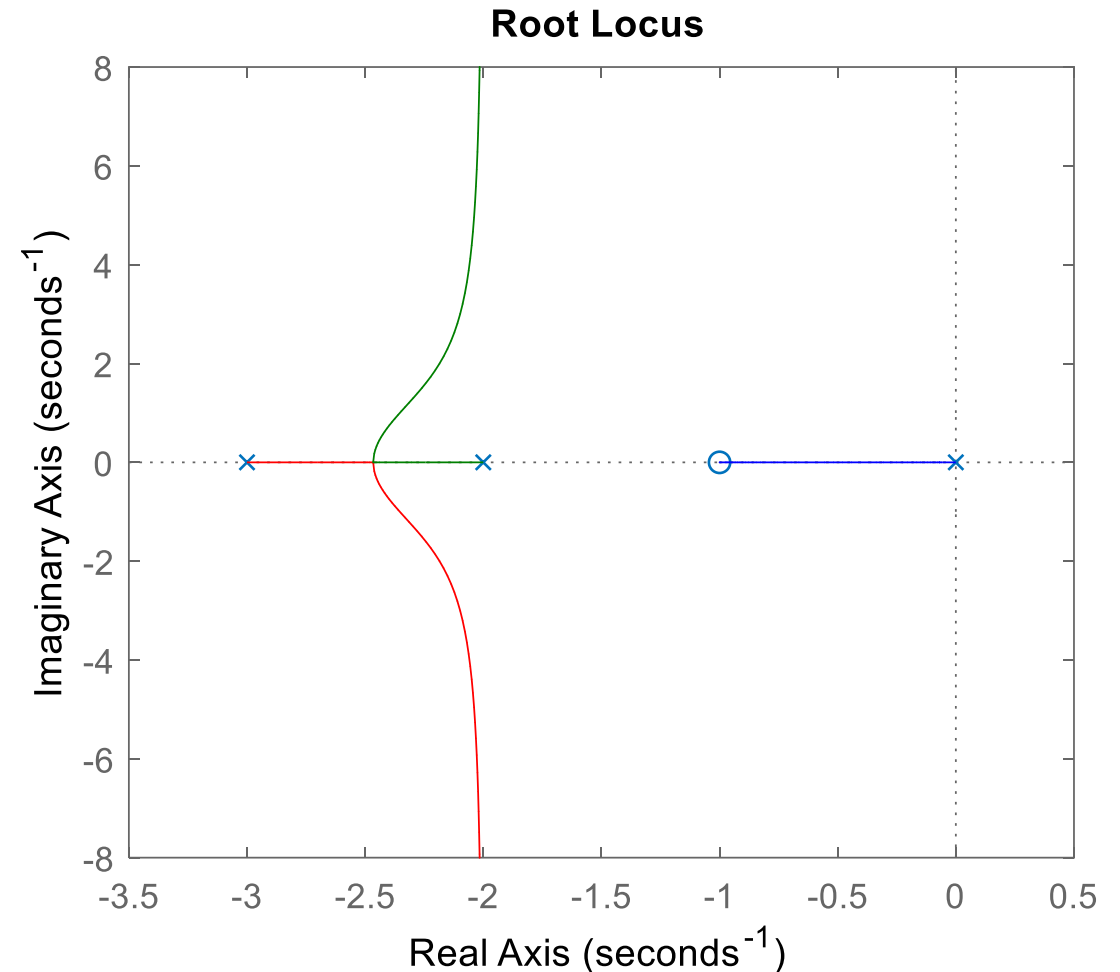
- **Ejemplo (cont.):**
- **Regla 7.** el ángulo de partida será  $180^\circ/(N_p - N_c) = 90^\circ$ , el esquema final será:



## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

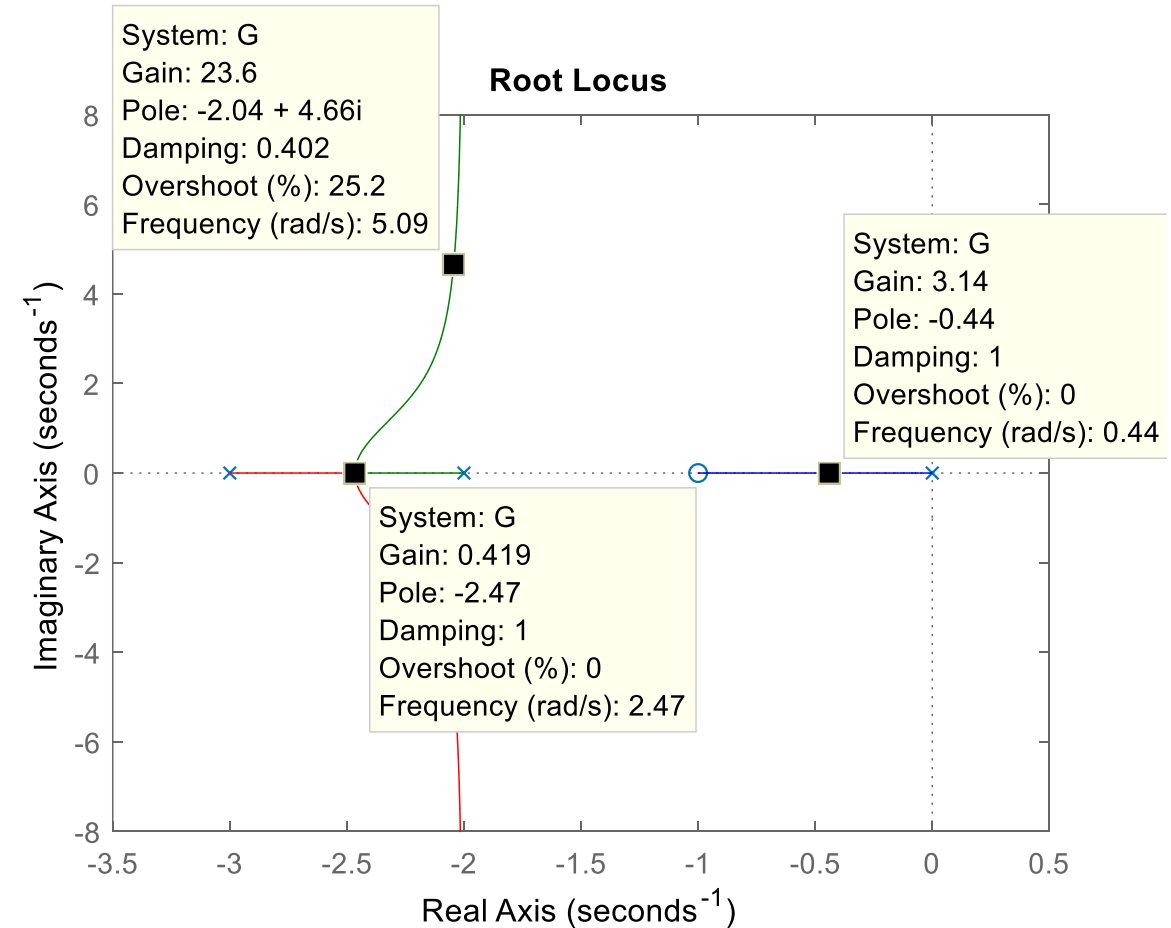
❑ En **Matlab**, podemos usar la función [rlocus](#) para esquematizar el LGR usando la FdeT. GH. Para el ejemplo anterior:

```
% Usando rlocus
s = tf('s');
GH = (s+1)/(s*(s+2)*(s+3));
figure
rlocus(GH)
```



## C. Método del Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)

- ❑ **En Matlab (cont.):** Al hacer *click* con la herramienta de *Data Cursor* de la figura, podemos ver valores de importancia para la posición actual, como la ganancia asociada en el punto, pos. del polo, factor de amortiguamiento, sobrepaso y frecuencia asociada.
- ❑ Desafortunadamente con esta herramienta no podemos evaluar la variación en conjunto de todos los polos al ir modificando la posición de uno a medida que varia la ganancia, ni ver la respuesta temporal del sistema inmediatamente, más adelante profundizaremos en el uso del LGR para diseñar controladores.
- ❑ En práctica verán más ejemplos, usando otras herramientas como [sisotool](#) de Matlab.



# Referencias

- [1] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, 13th ed., Pearson, 2017.
- [2] Prof. J.R. Espinoza y Prof. D.G. Sbárbaro, Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos (543214), DIE, Universidad de Concepción, 19ava ed., 2020. [Disponible Online]: [link](#).
- [3] Prof. J.R. Espinoza, Apuntes Sistemas de Control (543244), DIE, Universidad de Concepción, 18ava ed., 2019. [Disponible Online]: [link](#).
- [4] Prof. B. Messner, Prof. D. Tilbury, Prof. R. Hill y PHD. student JD. Taylor, Control Tutorials for Matlab & Simulink. [Disponible Online]: [link](#).
- [5] K. Ogata, Modern Control Engineering, 5th ed., Prentice Hall, 2010.