Control Automático de Procesos

# Transformada de Laplace

Prof. Carlos A. Toro N.
carlos.toro.ing@gmail.com
2021

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
Astrónomo y matemático francés, pionero de la transformada de Laplace, estudio de ecuaciones diferenciales y teoría de probabilidades y estadística.

“*What we know is not much. What we don’t know is enormous*” (P.-S. Laplace )

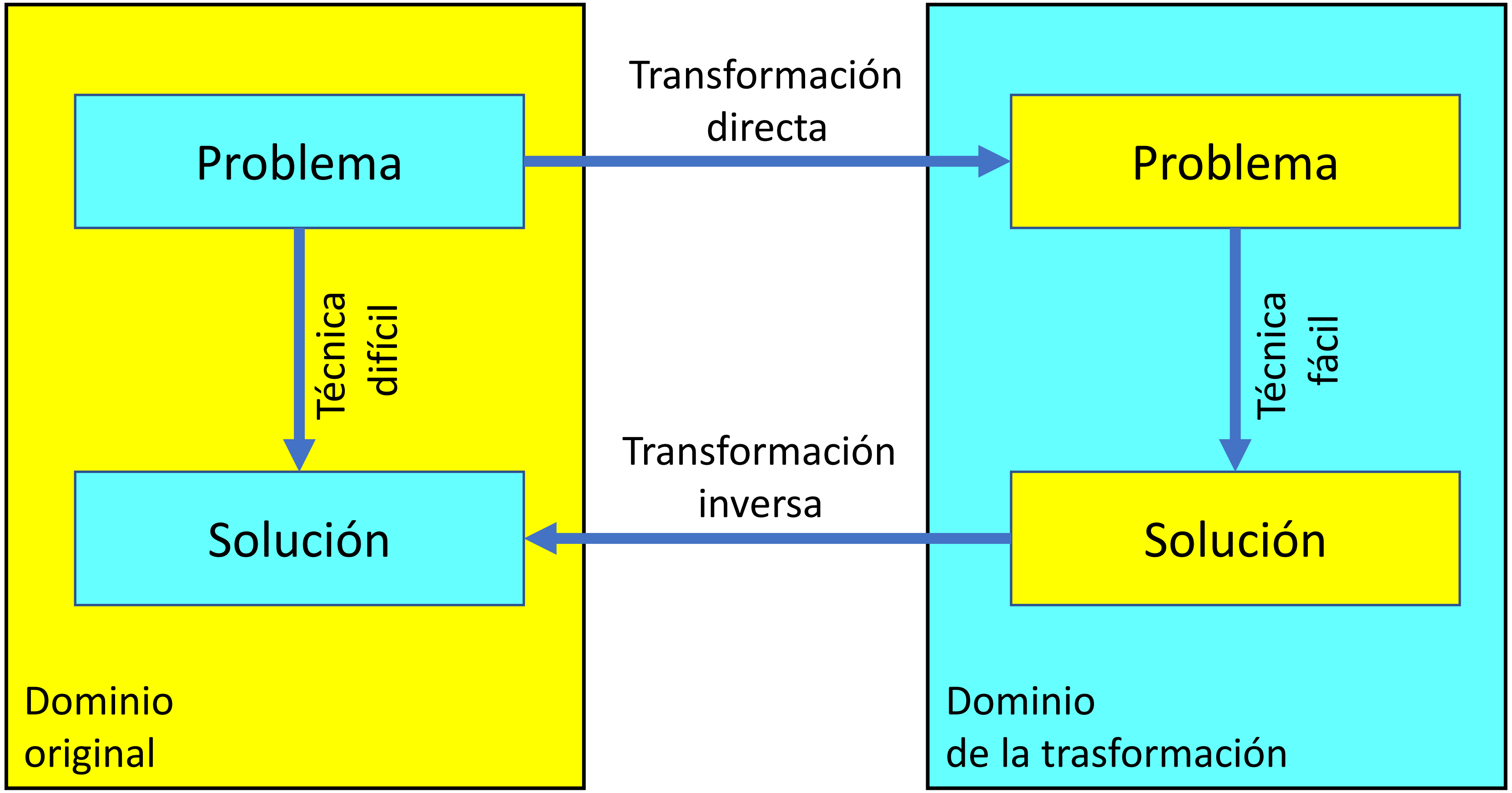
# Objetivos

- ❑ Conocer la definición de Transformada de Laplace y comprender su utilidad en el análisis de sistemas.
- ❑ Aplicar la Transformada de Laplace en la solución de EDOs.
- ❑ Analizar el valor inicial y en estado estacionario de un sistema desde su representación en el plano complejo (‘*s*’).

# Introducción

## ¿Por qué usar transformadas?

En ingeniería es común aplicar transformaciones (algoritmos, funciones matemáticas) sobre los datos o dominio original del problema para simplificar su análisis y la interpretación de resultados.




El interés particular de estudiar la Transformada de Laplace es que permite transformar E.D.O.s lineales en ecuaciones algebraicas más fáciles de analizar.

# Transformada de Laplace: Definición

**Def.**: Se define la **Transformada de Laplace** (T.deL.) unilateral* de una función $f(t)$, como:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

en donde, $f(t) \in \mathbb{R}$, $t \in [0, \infty[$, $s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$

- La T.deL. no existe para cualquier $f(t)$, esta debe ser continua y acotada tal que:

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}$$

se dice que la integral existe y converge para todo $\sigma > \alpha$, esto incluye todas las señales físicas realizables.

- Notar que $F(s)$ es una función de la variable compleja $s$.

* Definida en este caso para señales que son cero a la izquierda del origen.

# Transformada de Laplace: Ejemplos

**Ejemplo:** Determinar la T.deL. de: **a**) la función escalón unitario $f(t) = \mathrm{u}(t)$, **b**) $f(t) = e^{-at}\mathrm{u}(t)$.

**Solución:**

a)

$$F(s) = \mathcal{L}[\mathrm{u}(t)] = \int_0^{\infty} \mathrm{u}(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-st}dt = -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-s\infty}\right) = \frac{1}{s}$$

$$\therefore F(s) = \mathcal{L}[\mathrm{u}(t)] = \frac{1}{s}$$

b)

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{-at}\mathrm{u}(t)] = \int_0^{\infty} e^{-at}\mathrm{u}(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot 1 \cdot e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}$$

$$\therefore F(s) = \mathcal{L}[e^{-at}\mathrm{u}(t)] = \frac{1}{s+a}$$

# Propiedades de la Transformada de Laplace

| Propiedad | Dominio temporal | Dominio Lapalce |
|---|---|---|
| Linealidad | $af(t)+bg(t)$ | $aF(s)+bG(s)$ |
| Desplazamiento temporal | $f(t-a)$ | $e^{-as}F(s)$ |
| Desplazamiento potencia n – ésima | $t^n f(t)$ | $(-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$ |
| Desplazamiento en frecuencia | $e^{at}f(t)$ | $F(s-a)$ |
| Escalamiento | $f(at)$ | $\frac{1}{a}F(s-a)$ |
| 1° Derivación | $\frac{d}{dt}f(t)$ | $sF(s)-f(0)$ |
| n-esima derivación | $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ | $s^n \mathrm{L}\{f(t)\}-\sum_{i=1}^{n} s^{n-i}f^{(i-1)}(0)$ |
| Integración | $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}F(s)$ |
| Convolución | $f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ | $F(s)G(s)$ |

©C.A.T.N/2021

# Transformada de Laplace: Ejemplos

**Ejemplo:** Haciendo uso de las propiedades, obtener la T.deL. de la siguiente E.D.O. sabiendo que $y(0) = 0$, donde $u(t)$ es una función arbitraria.

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = Ku(t-\alpha)$$

**Solución:**

$$\mathcal{L}\{\tau \dot{y}(t) + y(t)\} = \mathcal{L}\{Ku(t-\alpha)\}$$

$$\Rightarrow s\tau Y(s) - \tau \cdot \underbrace{Y(0)}_{=0} + Y(s) = Ke^{-\alpha s}U(s)$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \mathcal{L}\left[\dfrac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - F(0) \\ \mathcal{L}\left[f(t-a)\right] = e^{-sa}F(s) \end{cases}$$

$$\therefore Y(s) = \frac{Ke^{-\alpha s}}{\tau s + 1}U(s)$$

# Transformada de Laplace: Tablas

- La Transformada de Laplace ha sido calculada para muchas funciones, por ejemplo, tenemos los siguientes pares.

| | $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | Unit impulse $\delta(t)$ | $1$ |
| 2 | Unit step $1(t)$ | $\frac{1}{s}$ |
| 3 | $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| 4 | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\frac{1}{s^n}$ |
| 5 | $t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| 6 | $e^{-at}$ | $\frac{1}{s+a}$ |
| 7 | $te^{-at}$ | $\frac{1}{(s+a)^2}$ |
| 8 | $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\frac{1}{(s+a)^n}$ |
| 9 | $t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ |
| 10 | $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ |
| 11 | $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ |
| 12 | $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ |
| 13 | $\cosh \omega t$ | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$ |
| 14 | $\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$ | $\frac{1}{s(s+a)}$ |
| 15 | $\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$ | $\frac{1}{(s+a)(s+b)}$ |
| 16 | $\frac{1}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at})$ | $\frac{s}{(s+a)(s+b)}$ |
| 17 | $\frac{1}{ab}\left[1 + \frac{1}{a-b}(be^{-at} - ae^{-bt})\right]$ | $\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$ |

Gracias a estos resultados no será necesario calcular la integral sobre cada nueva función que encontremos!

# Transformada de Laplace: Tablas (cont.)

| | | |
|---|---|---|
| 18 | $\frac{1}{a^2}(1 - e^{-at} - ate^{-at})$ | $\frac{1}{s(s+a)^2}$ |
| 19 | $\frac{1}{a^2}(at - 1 + e^{-at})$ | $\frac{1}{s^2(s+a)}$ |
| 20 | $e^{-at}\sin\omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 21 | $e^{-at}\cos\omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$ |
| 22 | $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t \quad (0<\zeta<1)$ | $\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ |
| 23 | $-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi)$<br>$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$<br>$(0<\zeta<1, \quad 0<\phi<\pi/2)$ | $\frac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$ |
| 24 | $1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \phi)$<br>$\phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$<br>$(0<\zeta<1, \quad 0<\phi<\pi/2)$ | $\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 25 | $1-\cos\omega t$ | $\frac{\omega^2}{s(s^2+\omega^2)}$ |
| 26 | $\omega t - \sin\omega t$ | $\frac{\omega^3}{s^2(s^2+\omega^2)}$ |
| 27 | $\sin\omega t - \omega t\cos\omega t$ | $\frac{2\omega^3}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 28 | $\frac{1}{2\omega}t\sin\omega t$ | $\frac{s}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 29 | $t\cos\omega t$ | $\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |
| 30 | $\frac{1}{\omega_2^2-\omega_1^2}(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t) \qquad (\omega_1^2 \neq \omega_2^2)$ | $\frac{s}{(s^2+\omega_1^2)(s^2+\omega_2^2)}$ |
| 31 | $\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t + \omega t\cos\omega t)$ | $\frac{s^2}{(s^2+\omega^2)^2}$ |

Notar que si sabemos la expresión de la T.deL. de una función, podremos encontrar su expresión temporal haciendo la operación inversa, luego de algunos ajustes algebraicos. La **Transformada Inversa de Laplace (T.I.L.)** se define como:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st}dt, t>0$$

# Transformada de Laplace: Inversa

**Ejemplo:** dada la siguiente función en el dominio de Laplace, cuál es la función de salida $y(t)$ si la entrada al sistema es un escalón unitario con T.L. $U(s) = 1/s$.

$$Y(s) = \frac{K}{\tau s + 1} U(s)$$

**Solución:**

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K}{\tau s + 1} \frac{1}{s} \right\} = K\mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1} \right\}$$

← descomposición en fracciones parciales

$$\Rightarrow y(t) = K\mathcal{L}^{-1}\left\{ \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau} \right] \right\} = K\left[ \mathrm{u}(t) - e^{-\frac{t}{\tau}} \mathrm{u}(t) \right]$$

$$\Leftarrow \begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left[ \frac{1}{s} \right] = \mathrm{u}(t) \\ \mathcal{L}^{-1}\left[ \frac{1}{s + a} \right] = e^{-at} \end{cases}$$

$$\therefore y(t) = K\left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \mathrm{u}(t)$$

← Notar que dentro de los pasos aparece el concepto de descomposición en fracciones parciales, lo que será relevante para poder aplicar la T.I.L. usando las tablas (ver Anexo A)

# Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

Dentro del análisis de sistemas, es común el interés en situaciones límites de los modelos matemáticos obtenidos. Por ejemplo:

- ¿Qué sucede con el sistema cuando el tiempo tiende a infinito?
- ¿Qué ocurrió al momento inicial del tiempo de modelación, si sólo se conoce el modelo?

Este tipo de preguntas, puede ser contestado con la aplicación de dos importantes resultados del análisis matemático en variable compleja de sistemas dinámicos:

- **El Teorema del Valor Inicial**
- **El Teorema del Valor Final**

# Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

**Teorema del Valor Inicial (TVI)**: Sea $f(t)$ una función con soporte positivo para un sistema estable, sean $F(s)$ su T.de.L. y $f_0 = f(t = 0)$ su valor inicial. Entonces,

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} \{sF(s)\}$$

**Teorema del Valor Final (TVF)**: Sea $f(t)$ una función con soporte positivo para un sistema estable, sean $F(s)$ su T.de.L. y $f_{ee} = f(t \to \infty)$ su valor final. Entonces,

$$f_{ee} = f(t \to \infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} \{sF(s)\}$$

# Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

**Ejemplo:** Para el siguiente modelo dinámico,

$$\frac{dy(t)}{dt} = F_0 - kAy(t),\ y(0) = y_0$$

asumiendo que la entrada $F_0$ es constante, determine:

a) El estado estacionario de la variable $y$, usando el TVF.

b) El valor inicial de la variable $y$, usando el TVI.

**Solución:**

i) Aplicando la T.deL. al modelo se obtiene:

$$sY(s) - y_0 = \frac{F_0}{s} - kAY(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{y_0}{s+kA} + \frac{F_0}{s(s+kA)}$$

# Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

**Ejemplo (cont.):**

ii) Aplicando la TVF a $Y(s)$, se obtiene:

$$y_{ee} = y(\infty) = \lim_{s\to 0}\{sY(s)\} = \lim_{s\to 0}\left\{\frac{sy_0}{s+kA} + \frac{F_0}{s+kA}\right\} = \frac{F_0}{kA}$$

Además, desde la EDO original, en estado estacionario se comprueba que:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = F_0 - kAy_{ee} \Rightarrow y_{ee} = \frac{F_0}{kA}$$

# Teoremas del Valor Inicial y del Valor Final

**Ejemplo (cont.):**

ii) Aplicando la TVI a $Y(s)$, se obtiene:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty}\{sY(s)\} = \lim_{s\to\infty}\left\{\frac{sy_0}{s+kA} + \frac{F_0}{s+kA}\right\}$$

$$\Rightarrow y(0) \overset{L'Hopital}{=} \frac{y_0}{1} = y_0$$

# Ejercicio de repaso: Solución de una EDO usando la TdeL.

- Considerar un sistema representado por la ecuación diferencial: $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+4\dfrac{dy(t)}{dt}+3y(t)=2\mathrm{u}(t)$

Donde $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

**Solución.** Aplicando la TdeL. tenemos:

$$[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+4[sY(s)-y(0)]+3Y(s)=2U(s)$$

Como $U(s)=1/s$, tenemos que la salida queda:

$$Y(s)=\frac{s+4}{s^2+4s+3}+\frac{2}{s(s^2+4s+3)}=\left[\frac{3/2}{s+1}+\frac{-1/2}{s+3}\right]+\left[\frac{-1}{s+1}+\frac{1/3}{s+3}\right]+\frac{2/3}{s}=Y_1(s)+Y_2(s)+Y_3(s)$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace, la respuesta buscada será:

$$y(t)=\left[\frac{3}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}\right]+\left[-1e^{-t}+\frac{1}{3}e^{-3t}\right]+\frac{2}{3}$$

El valor en estado estacionario de $y(t)$ será 2/3 (verificar de diferentes formas).

# Resumiendo

Para encontrar la función de salida de un sistema dada su EDO y una entrada usando la TdeL. seguir los siguientes pasos:

- Aplicar la TdeL. a la EDO (ojo con las CIs.)
- Despejar $Y(s)$
- Descomponer en fracciones parciales la función $Y(s)$
- Aplicar la TIdeL. o usar las tablas dadas.
- Definir $y(t)$.

Matlab y Octave también tienen unas utilidades que pueden servir para implementar lo anterior, el *toolbox* para operaciones simbólicas (`syms`) junto a las funciones `laplace` e `ilaplace` pueden ayudar.

# Ejercicios extra

Encontrar $y(t)$ si:

1. $Y(s) = \dfrac{1}{s(s^2 + 2s + 2)}$

2. $\ddot{y}(t) - y(t) = t,\ y(0) = 1,\ \dot{y}(0) = 1$

3. $\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5,\ y(0) = -1,\ \dot{y}(0) = 2$

Graficar las respuestas encontradas en un intervalo de tiempo adecuado.

# Anexo A: Descomposición en Fracciones Parciales

# Anexo A

En general, en este curso muchas de las transformadas de Laplace serán funciones racionales, esto es, una razón de dos polinomios:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_1s+a_0},\ n\geq m$$

Donde los coeficientes del polinomio del numerador y denominador son coeficientes constantes (no varían en el tiempo). Además típicamente el orden de $N(s)$ < orden de $D(s)$.

En este curso será de interés expresar la función anterior en una de las siguientes formas:

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s+p_i)}}_{Forma\ \ factorizada}=\underbrace{\frac{A}{(s+p_1)}+\frac{B}{(s+p_2)}+\frac{C}{(s+p_2)}+\ldots}_{\substack{ej.\ Descomposición\ en\ \ fracciones\ \ parciales\\ factores\ \ distintos}}$$

Por qué es útil esta forma?

# Anexo A

Algunos casos para descomponer en fracciones parciales la función $H(s)$. Se considera que el grado del numerador es menor al del denominador.

- **Caso 1: El denominador U(s) es un producto de factores lineales distintos, luego:**

$$H(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{A_1}{(s+p_1)}+\frac{A_2}{(s+p_2)}+\frac{A_3}{(s+p_2)}+\ldots+\frac{A_n}{(s+p_n)}$$

- Los coeficientes $A_j$ son constantes a determinar.
- **Ejemplo**: descomponer la siguiente función en fracciones parciales, $H(s)=\dfrac{7s+3}{s^2+3s-4}$

$$H(s)=\frac{7s+3}{s^2+3s-4}=\frac{7s+3}{(s+4)(s-1)}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s-1}\rightarrow 7s+3=A(s-1)+B(s+4)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B & =7\\ -A+4B & =3\end{cases}\Rightarrow A=5,\ \ B=2,\quad\therefore\ \boxed{H(s)=\frac{5}{s+4}+\frac{2}{s-1}}$$

# Anexo A

**Caso 2: El denominador $D(s)$ contiene factores lineales $(s+p)^k$ repetidos $k$ veces:**

- En este caso en la descomposición aparecerán $k$ términos de la forma:

$$\frac{A_1}{(s+p)} + \frac{A_2}{(s+p)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(s+p)^k}$$

**Caso 3: El denominador $D(s)$ contiene un factor cuadrático $as^2 + bs + c$ irreducible, i.e. $b^2 - 4ac < 0$:**

- En el caso de que sea único, la descomposición en fracciones parciales contiene un término de la forma:

$$\frac{As + B}{as^2 + bs + c}$$

- En el caso de que el factor cuadrático irreducible aparezca repetido, $(as^2 + bs + c)^k$, la descomposición contendrá $k$ términos de la forma:

$$\frac{A_1 s + B_1}{as^2 + bs + c} + \frac{A_2 s + B_2}{(as^2 + bs + c)^2} + \ldots + \frac{A_k s + B_k}{(as^2 + bs + c)^k}$$

Proceder como en el caso 1 para encontrar los coeficientes.

# Anexo A: Ejercicio

- Descomponer la siguiente función en fracciones parciales:

$$H(s)=\frac{1-s+2s^2-s^3}{s(s^2+1)^2}$$

**Solución**. como hay un término cuadrático irreductible repetido tendremos:

$$\frac{1-s+2s^2-s^3}{s(s^2+1)^2}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+1}+\frac{Ds+E}{(s^2+1)^2}$$

Multiplicando ambos lados por $s(s^2+1)^2$ y ordenando términos tendremos que:

$$A+B=0,\ \ C=-1,\ \ 2A+B+D=2,\ \ C+E=-1,\ \ A=1$$

Con lo que tendremos finalmente que:

$$H(s)=\frac{1-s+2s^2-s^3}{s(s^2+1)^2}=\frac{1}{s}+\frac{s+1}{s^2+1}+\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

# Anexo A: Algunas utilidades de Matlab

- Algunas utilidades usando operaciones simbólicas con: `residue`, `syms`, `expand` y `partfrac`.

  - `residue`: Entrega los valores de los coeficientes de la descomposición en fracciones parciales.
  - `syms`: Crea una variable simbólica.
  - `expand`: Expande una operación simbólica.
  - `partfrac`: Fracciones parciales a partir de una función simbólica.

- Ejercicio: Comprobar los ejercicios presentados con las funciones anteriores.