

Control Automático de Procesos

Modelación de sistemas II

Prof. Carlos A. Toro N.
carlos.toro.ing@gmail.com
2021

Objetivos

- ❑ Representar la dinámica de componentes: eléctricos, mecánicos, hidráulicos y térmicos mediante su descripción fenomenológica.
- ❑ Simular la dinámica de sistemas físicos interconectados (ej. electromecánicos).

Introducción



Tener en cuenta que dependiendo de la aplicación, el **grado de aproximación** con que se construya un modelo será mayor o menor. Debido a estas aproximaciones existirá un **error del modelo**, traducido en desviaciones respecto a los datos medidos vs los predichos con dicho modelo.

Siempre reportar cuales fueron las suposiciones y simplificaciones llevadas a cabo al modelar.

Introducción: Estrategia de modelación general

Los siguientes pasos y criterios pueden ser una guía a la hora de construir modelos:

- i. **Establecer los objetivos de modelación.**
- ii. **Evaluar los recursos de modelación:**
 - Grado de conocimiento y aproximación requerido
 - Tiempo disponible
 - Recursos humano y capital disponible
 - Recursos computacionales
- iii. **Definir el dominio de modelación y los rangos de aplicación.**
- iv. **Identificar los fenómenos y aspectos de interés.**
- v. **Definir las variables de entrada y salida, parámetros, perturbaciones, variables internas.**
- vi. **Proceder a aplicar las técnicas de modelación (ej. EDOs, FdeT., Laplace).**
- vii. **Cuidar que el modelo permita una fácil cuantificación e implementación, que sea robusto y con el menor error posible.**
- viii. **Validar el modelo y reanalizar o rediseñar en caso de que sea necesario.**

Modelación Fenomenológica

Principios Básicos

Además de los tipos de modelos vistos en clases anteriores, la obtención de modelos fenomenológicos se basa principalmente en la aplicación de leyes de conservación o balance (y otras específicas del dominio de aplicación). **La forma general de un balance de materia, energía o momentum para una propiedad $P(t)$ en un sistema en un Δt es:**

$$\frac{[Acumulación\ de\ P]}{\Delta t} = \left[\begin{array}{c} \text{flujo de } P \\ \text{que entra} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{flujo de } P \\ \text{que sale} \end{array} \right] + \frac{\left[\begin{array}{c} \text{cantidad de } P \\ \text{generada} \end{array} \right]}{\Delta t} - \frac{\left[\begin{array}{c} \text{cantidad de } P \\ \text{consumida} \end{array} \right]}{\Delta t}$$




En forma diferencial ($\Delta t \rightarrow 0$), se tiene:

$$\frac{dP(t)}{dt} = F_e(t) - F_s(t) + C_g(t) - C_c(t)$$

Lo anterior se puede enfrentar de dos formas: con un balance macroscópico (no interesan las variaciones espaciales, i.e. análisis global) o microscópico.

Modelos de Sistemas Eléctricos

Relaciones de componentes eléctricos básicos: ej. voltaje-corriente, corriente-voltaje e impedancia.

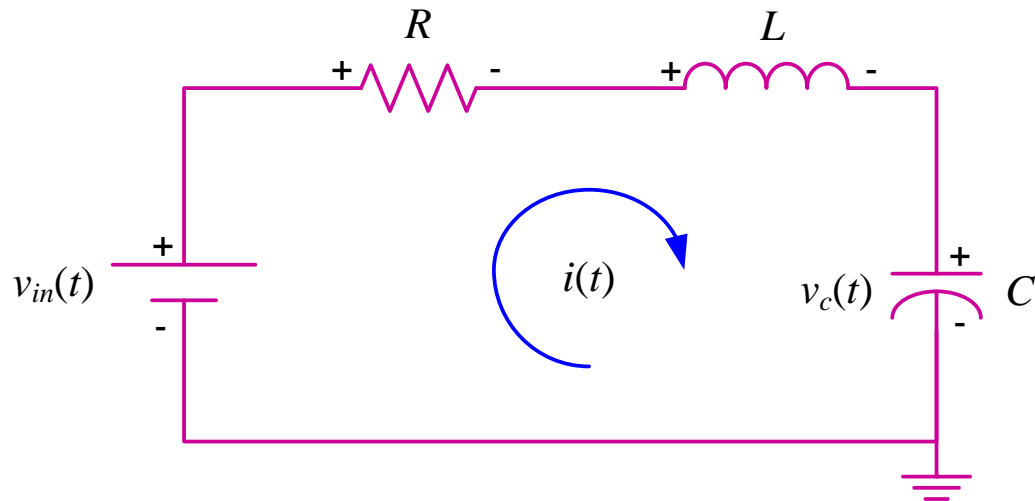
Componente	Voltaje-Corriente	Corriente-Voltaje	Impedancia $Z(s) = V(s)/I(s)$
 Capacitor	$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$Z_C(s) = \frac{1}{Cs}$
 Resistor	$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{1}{R} v(t)$	$Z_R(s) = R$
 Inductor	$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$	$Z_L(s) = Ls$

$v(t)$: V (volts), $i(t)$: A (amperes), C (capacitancia): F (Farads), R (resistencia): Ω (ohms), L (inductancia): H (Henry)

Modelos de Sistemas Eléctricos

□ **Ejemplo:** Este ejemplo corresponde a un circuito eléctrico RLC alimentado por una fuente de voltaje. La fuente $v_{in}(t)$ alimenta una resistencia R , una inductancia L y un capacitor C , todos en serie. Supongamos que en este caso queremos encontrar una relación entre el voltaje de entrada y la corriente $i(t)$ en el circuito, para esto aplicamos las leyes de Kirchoff. Así, en el plano temporal tendremos:

$$\left. \begin{aligned} v_{in}(t) &= v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t) \\ i(t) &= C \frac{dv_C(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{En el plano de Laplace (con CIs nulas) tendremos:} \\ V_{in}(s) &= RI(s) + LsI(s) + V_C(s) \\ I(s) &= CsV_C(s) \end{aligned}$$



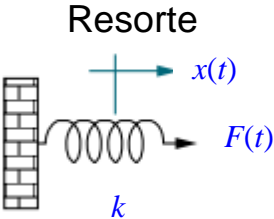
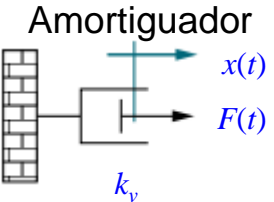
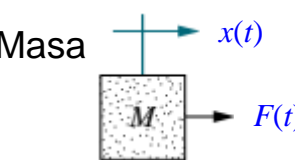
Combinando ambas ecuaciones llegamos a que:

$$H(s) = \frac{I(s)}{V_{in}(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

¿Cuál será la FdeT. entre $V_C(s)/V_{in}(s)$?

Modelos de Sistemas Mecánicos

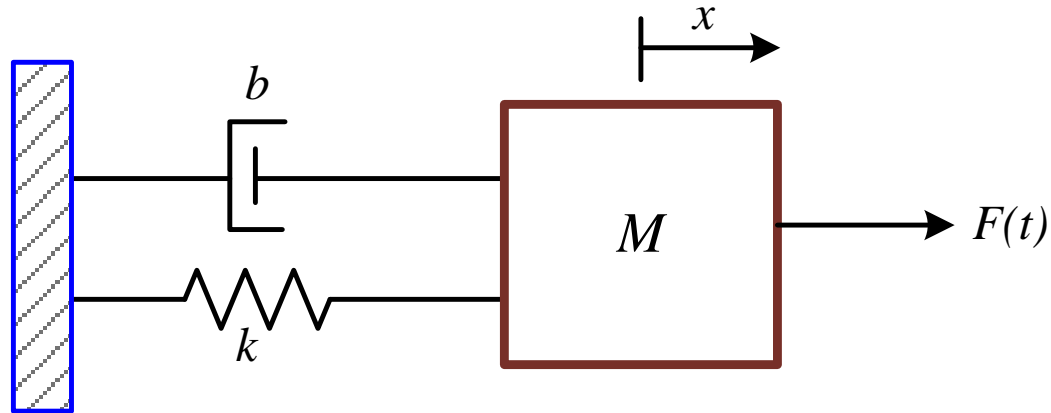
Relaciones de componentes mecánicos traslacionales básicos: ej. fuerza-velocidad, fuerza-desplazamiento e impedancia traslacional.

Componente	Fuerza-Velocidad	Fuerza-Desplazamiento	Impedancia $Z_M(s) = F(s)/X(s)$
<p>Resorte</p> 	$F(t) = k \int_0^t v(\tau) d\tau$	$F(t) = kx(t)$	k
<p>Amortiguador</p> 	$F(t) = k_v v(t)$	$F(t) = k_v \frac{dx(t)}{dt}$	$k_v s$
<p>Masa</p> 	$F(t) = M \frac{dv(t)}{dt}$	$F(t) = M \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	$M s^2$

$F(t)$: N (Newton), $x(t)$: m (posición), k (cte. resorte): N/m, k_v (cte. amortiguador): Ns/m, M (masa): kg

Modelos de Sistemas Mecánicos

□ **Ejemplo:** Obtener la función de transferencia $H(s) = X(s)/F(s)$ del sistema mecánico mostrado en la figura.



$$\begin{cases} F_{neta} &= M \cdot \ddot{x}(t) \text{ (Newton)} \\ F_{resorte} &= k \cdot x(t) \text{ (Ley de Hook)} \\ F_{amortiguador} &= b \cdot \dot{x}(t) \text{ (Amortiguador)} \end{cases}$$

Solución: Aplicando la segunda ley de Newton tenemos que:

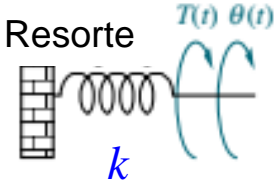
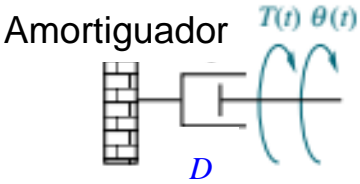
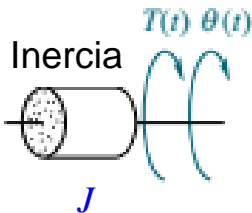
$$\left. \begin{aligned} F(t) - F_{amortiguador} - F_{resorte} &= F_{neta} = M \cdot \ddot{x} \\ \Rightarrow M \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) &= F(t) \quad / \mathcal{L} \\ \Rightarrow M \cdot s^2 X(s) + b \cdot sX(s) + k \cdot X(s) &= F(s) \end{aligned} \right\}$$

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

*se asume que el sistema parte del reposo

Modelos de Sistemas Mecánicos Rotacionales

Relaciones de componentes mecánicos rotacionales básicos: ej. torque-velocidad angular, torque-desplazamiento angular e impedancia rotacional.

Componente	Torque-Velocidad angular	Torque-Desplazamiento angular	Impedancia $Z_M(s) = T(s)/\Theta(s)$
	$T(t) = k \int_0^t \omega(\tau) d\tau$	$T(t) = k\theta(t)$	k
	$T(t) = D\omega(t)$	$T(t) = D \frac{d\theta(t)}{dt}$	Ds
	$T(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt}$	$T(t) = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$	Js^2

$T(t)$: $N \cdot m$ (Newton-metros), $\theta(t)$: rad (radianes), $\omega(t)$: rad/s , k : $N \cdot m/rad$, D : $N \cdot m \cdot s/rad$, J (momento de inercia): $kg \cdot m^2$

Modelos de Sistemas Hidráulicos

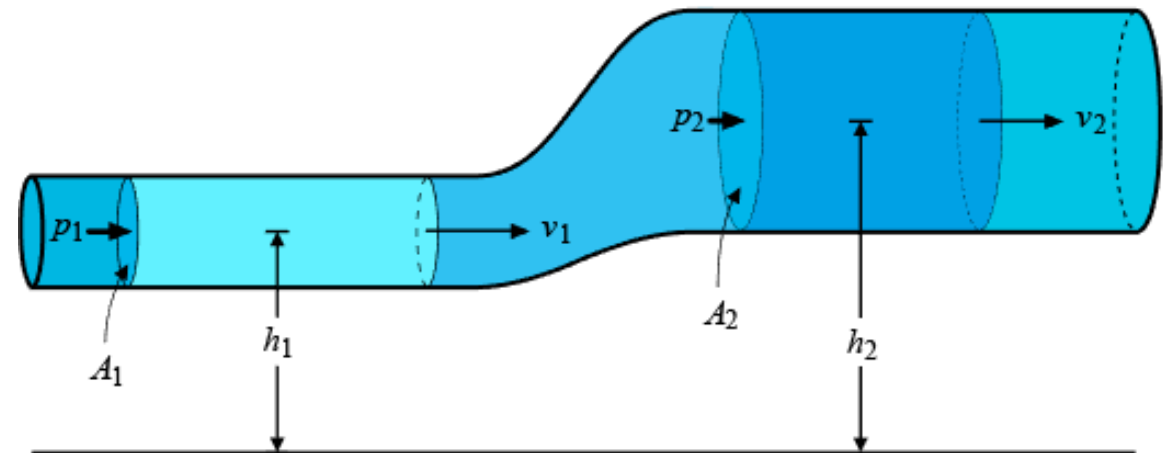
Para estos casos consideraremos fluidos incompresibles, i.e. su densidad $\rho(\text{kg/m}^3)$ no varía con la presión, y conducidos en sistemas cerrados (ej. cañerías). A continuación se describen algunos principios relacionados a estos sistemas:

Cañerías

Ecuaciones de continuidad considerando que no se acumula volumen en la cañería y que representa un flujo único.

$$q_1 \left[\text{m}^3 / \text{s} \right] = q_2 \left[\text{m}^3 / \text{s} \right]$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



Energía asociada a la presión en la entrada

Principio de Bernoulli:

a partir del balance de energía del fluido tendremos →

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \beta$$

Energía potencial

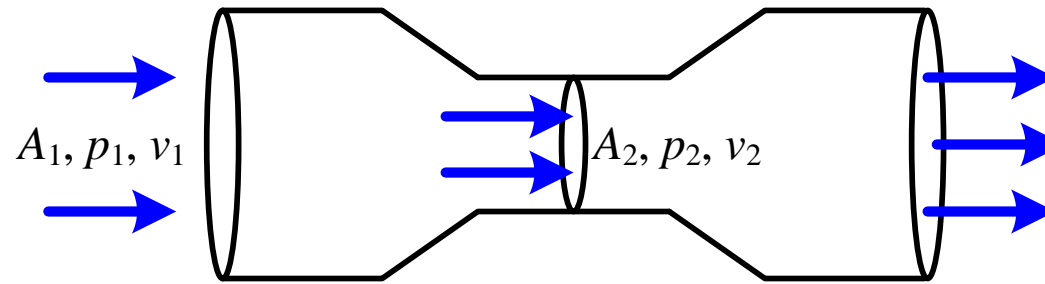
Energía cinética

Pérdidas por roce

Modelos de Sistemas Hidráulicos

Restricciones al paso del fluido

En particular, cuando existe una restricción en el sistema que lleva el fluido (ej. una válvula), se produce una redistribución de la energía a medida que el fluido se acerca a las restricciones, usando el principio de Bernoulli y ecuación de continuidad, con $h_1 = h_2$ y $\beta = 0$, se obtiene que:



$$v_2 = \sqrt{\frac{2A_1^2}{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{(p_1 - p_2)}{\rho}} \Rightarrow q_2 = k_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}}$$

Modelos de Sistemas Hidráulicos

□ **Ejemplo:** Encontrar el modelo que representa la dinámica de la altura del líquido, $h(t)$, en el siguiente estanque cilíndrico de área de sección transversal A . Asumir densidad cte., no hay reacciones dentro del estanque y $T^\circ = \text{cte.}$

Solución: Aplicando un balance de materia al sistema tendremos que:

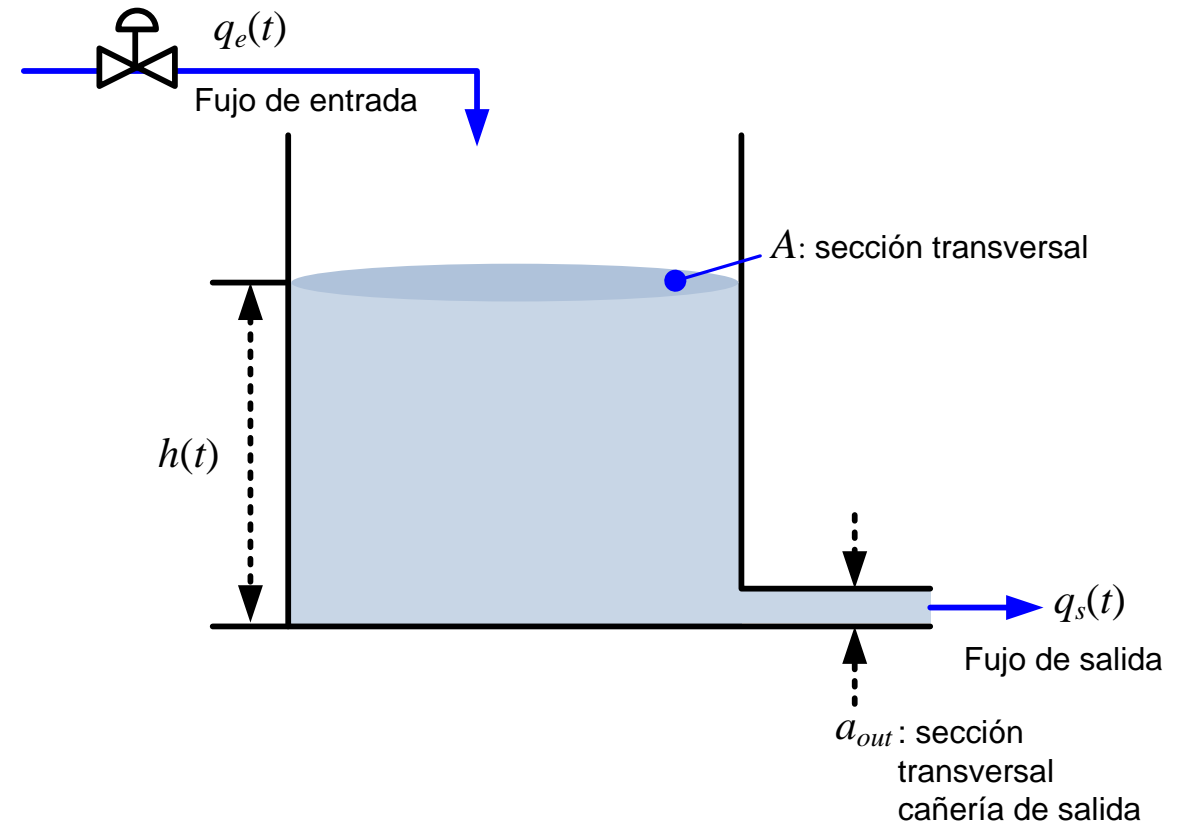
$$\begin{aligned}\frac{dm(t)}{dt} &= \dot{m}_e - \dot{m}_s \\ \Rightarrow \frac{d(\rho \cdot V(t))}{dt} &= \rho q_e(t) - \rho a_{out} v_s(t) \\ \Rightarrow A \cdot \frac{d(h(t))}{dt} &= q_e(t) - k_v \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} = q_e(t) - k_v \sqrt{\frac{\rho g h(t)}{\rho}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d(h(t))}{dt} = \alpha \cdot q_e(t) - \beta \cdot \sqrt{h(t)}, \quad \text{No lineal!}$$

$$\text{Con: } \alpha = \frac{1}{A}, \quad \beta = \frac{k_v \sqrt{g}}{A}, \quad k_v \approx \underbrace{a_{out} \sqrt{2}}_{A \gg a_{out}}$$

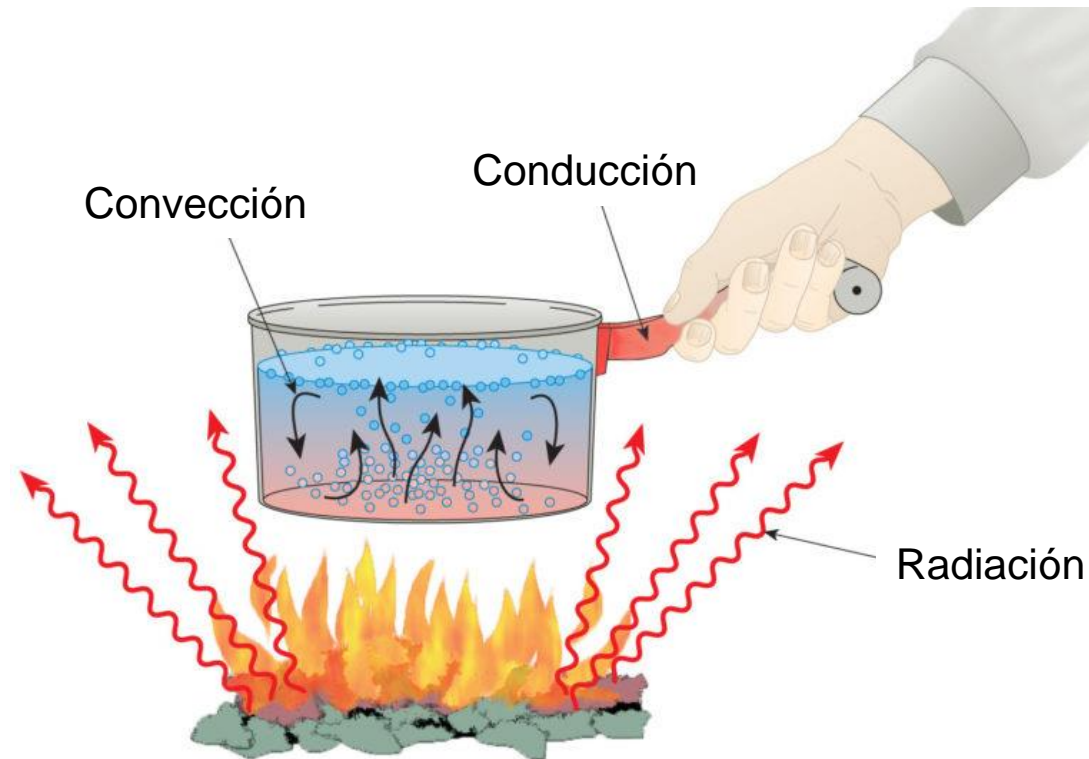
* Encontrar el modelo linealizado y la FdeT. con dicho modelo.

Recordar: $m(t) = \rho V(t), \quad V(t) = Ah(t)$



Modelos de Sistemas Térmicos

En estos sistemas la energía es transferida y guardada en forma de calor. En general es difícil modelar estos sistemas dinámicamente por ser de parámetros distribuidos y por que el flujo de calor no sigue un camino específico. Podemos distinguir tres mecanismos de transferencia de calor: i) por **conducción**, ii) por **convección** y iii) por **radiación**.



Modelos de Sistemas Térmicos

i. Conducción de Calor

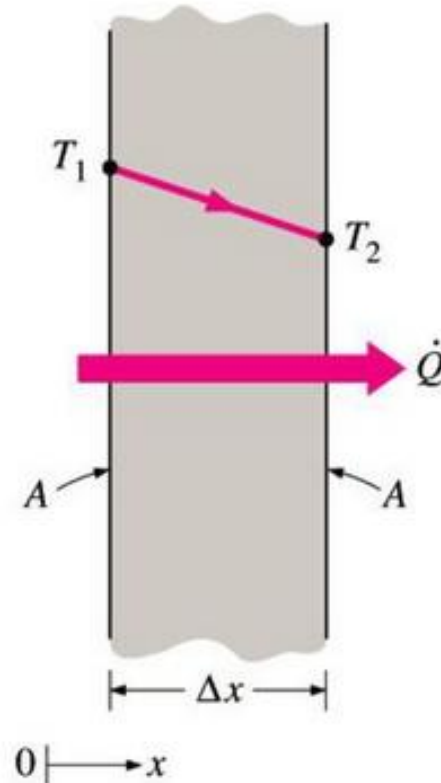
Aquí encontramos la **Ley de Fourier** para describir el flujo de calor q (o flujo de calor por unidad de área) a través de un material homogéneo entre dos secciones transversales paralelas y en la dirección de temperatura decreciente:

$$\frac{\dot{Q}}{A} = q = k \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} = -k \frac{\Delta T}{\Delta x} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$$

k : Conductividad térmica

A : Sección transversal

Q : calor en J



Algunos valores de conductividad térmica a 300 K (~ 25°C)

Material	k (W/mK)
Cobre	386
Aluminio	204
Acero inoxidable	15
Mercurio	8.4
Concreto	1.4
Agua	0.611
Aire	0.027

Modelos de Sistemas Térmicos

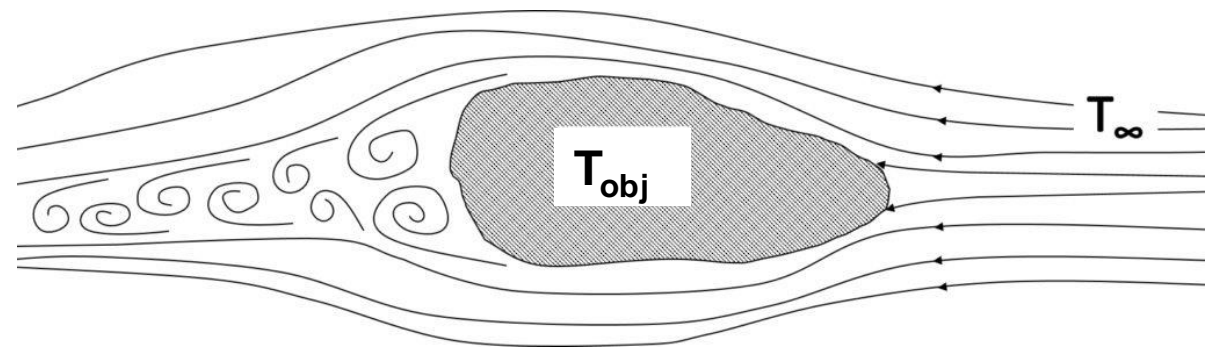
ii. Transferencia por Convección

La convección es el término usado para describir la transferencia de calor desde una superficie a un fluido (liquido o gases) en movimiento. La ecuación que gobierna este fenómeno está dada por la Ley de Enfriamiento de Newton:

$$\dot{Q} = hA[T_{obj} - T_{\infty}][W]$$

h : Coeficiente de transferencia de calor

T_{∞} : es la temperatura del fluido (ambiente del objeto)



Algunos valores de h [W/(m²K)] (bajo ciertas condiciones)

Fluido	Rango típico
Convección libre aire, gases o vapores secos	0.5 – 1000
Convección libre de agua y líquidos	50 – 3000
Convección forzada de agua y líquidos	50 – 10000
Convección forzada de metales líquidos	5000 – 40000

* Notar que este coeficiente depende del tipo de medio, el estado y otras propiedades del fluido como su velocidad o temperatura.

Modelos de Sistemas Térmicos

iii. Transferencia por Radiación

Para altas temperaturas existe una gran transferencia de calor debido a radiación, un ejemplo de esto son las llamas producidas en procesos de combustión o metales fundidos, esto se explica por la Ley de Stefan-Boltzmann:

$$\dot{Q} = A\varepsilon\sigma T^4$$

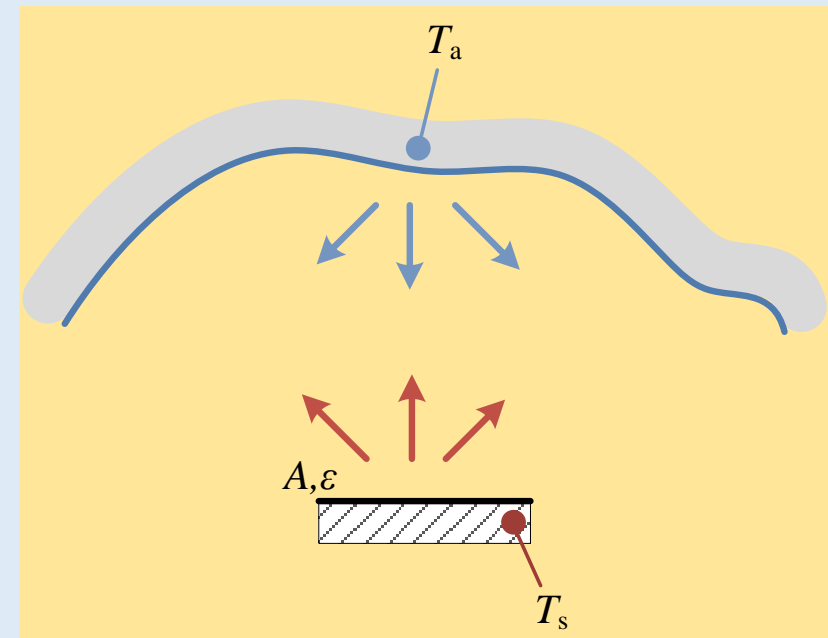
σ : Constante de Stefan-Boltzmann = $5.67 \times 10^{-8} \text{ [W/(m}^2\text{K}^4\text{)]}$

ε : Emisividad del cuerpo que emite la energía radiante

A : Área de la superficie del objeto que emite la radiación

¿Cómo viaja esta radiación?

Asumiendo que un objeto con una temperatura superficial T_s está rodeado por un ambiente con una temperatura uniforme T_a , el flujo de calor por radiación es:

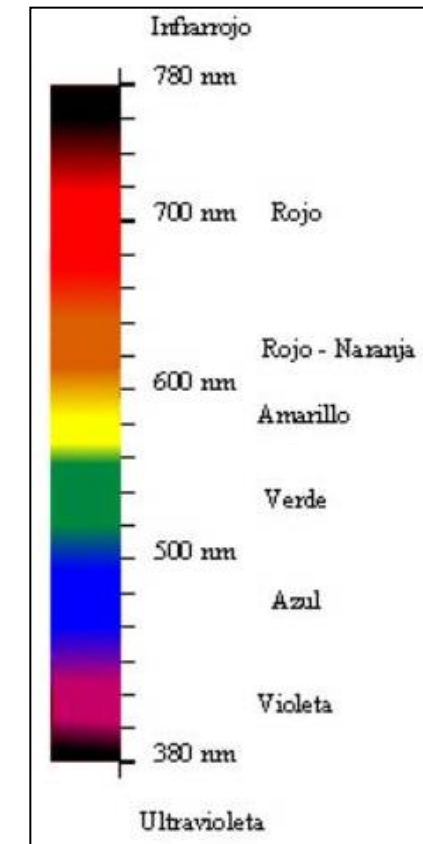
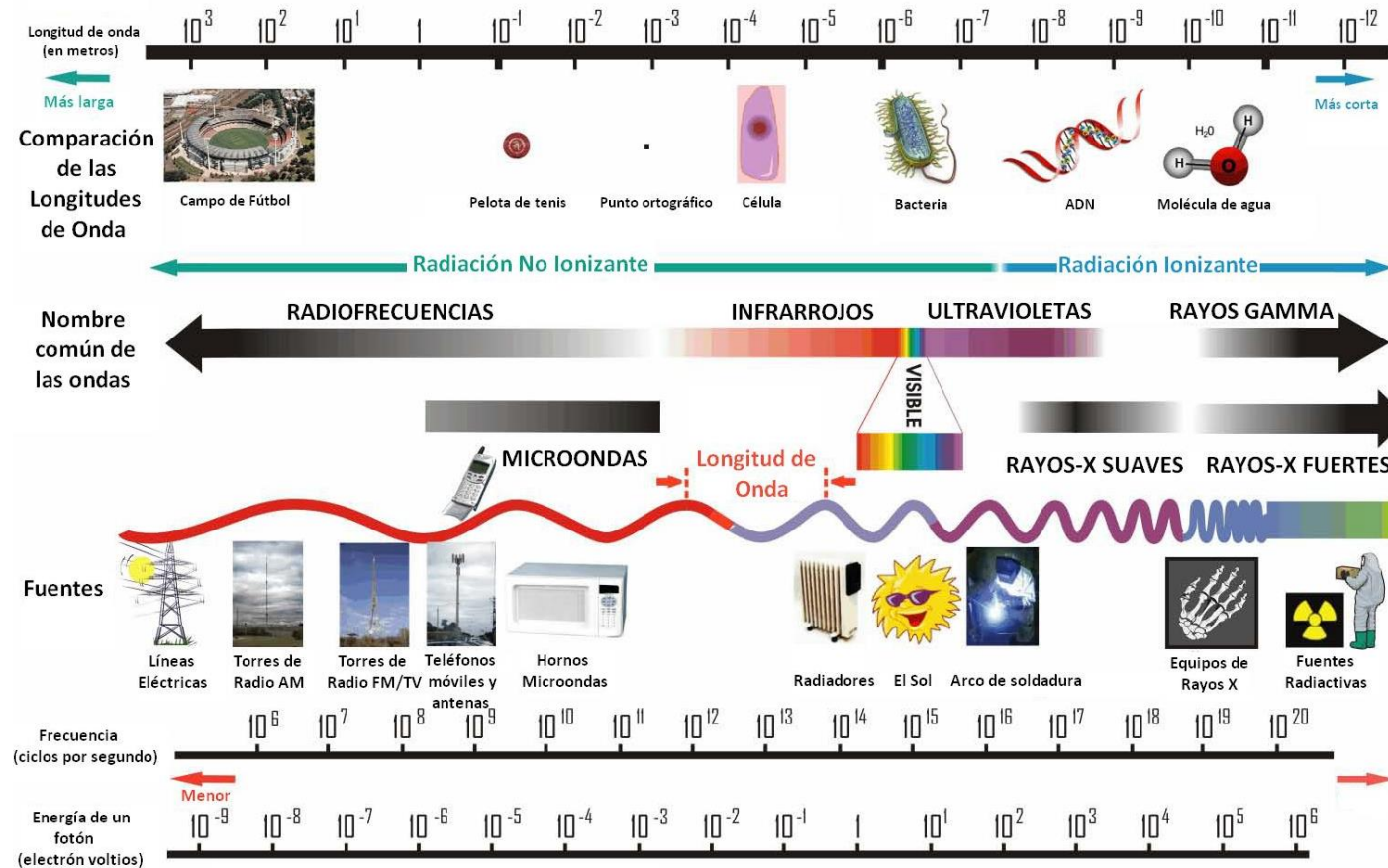


$$\dot{Q} = A\varepsilon\sigma(T_s^4 - T_a^4)$$

Modelos de Sistemas Térmicos

iii. Transferencia por Radiación (cont.)

La radiación viaja en forma de ondas electromagnéticas, caracterizadas por su energía y longitud de onda o frecuencia. Estas características permiten clasificar la radiación en un espectro de radiación electromagnético como sigue:



Modelos de Sistemas Térmicos

iii. Transferencia por Radiación (cont.)

En relación a la emisividad, cabe notar que es una medida de que tan eficientemente puede emitir radiación un cuerpo en comparación a un cuerpo ideal (cuerpo negro), se define como la razón:

$$\varepsilon(\lambda, T) = E_{\text{objeto}}(\lambda, T) / E_{\text{BB}}(\lambda, T)$$

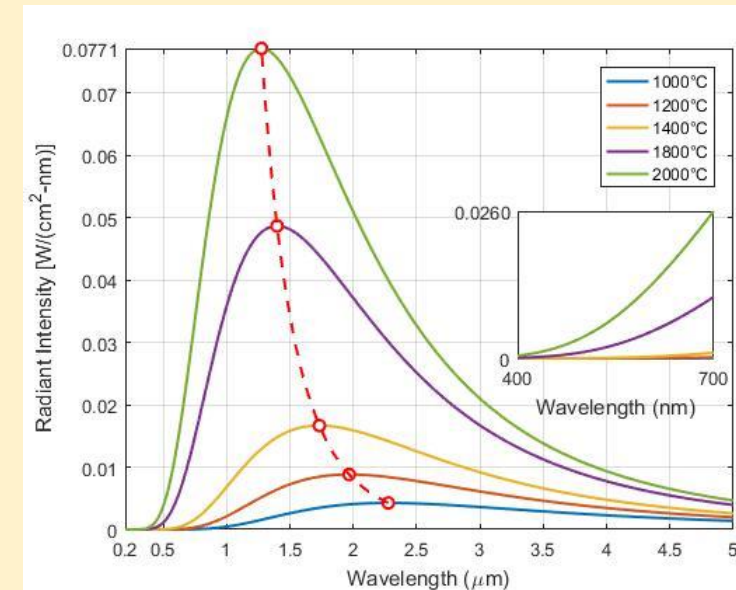
Donde E es la intensidad espectral de energía radiante, se tiene que:

- $0 < \varepsilon \leq 1$
- $\varepsilon = 1 \rightarrow$ cuerpo negro
- $\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon(T) = \text{cte.} \rightarrow$ Cuerpo gris
- $\varepsilon(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T) \rightarrow$ Cuerpo real

La radiación espectral emitida por un cuerpo negro puede ser descrita por la [Ley de Radiación de Planck](#):

$$E_{\text{BB}}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot [\exp(c_2 / \lambda T) - 1]}$$

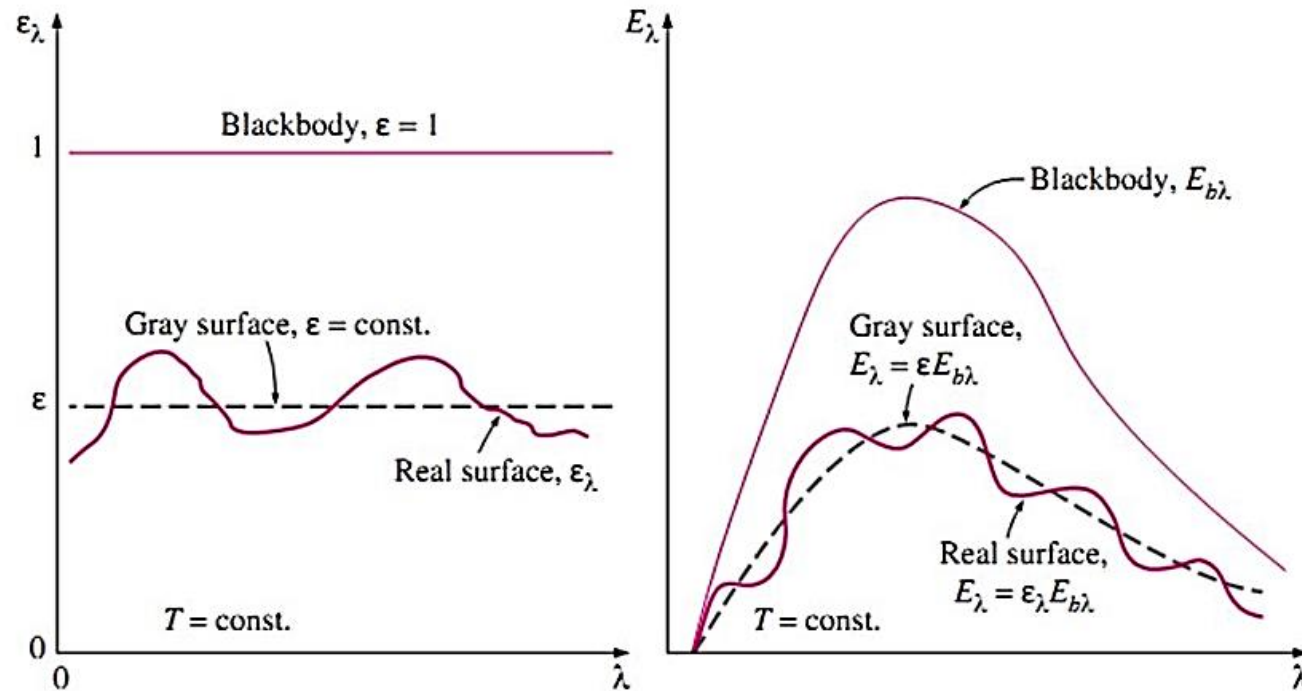
Donde c_1 y c_2 son la primera y segunda cte. de Planck, λ es la longitud de onda en m y T es la temperatura en K .



Modelos de Sistemas Térmicos

iii. Transferencia por Radiación (cont.)

Por otro lado, la emisividad de los cuerpos puede depender de la longitud de onda:



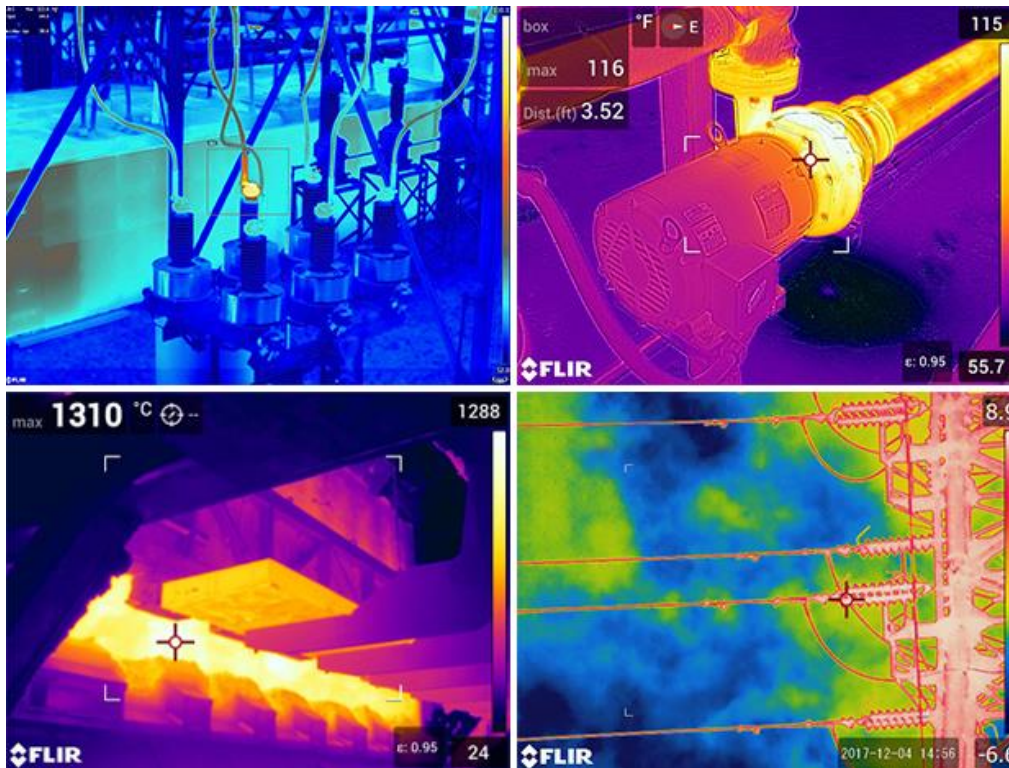
Algunos valores de ϵ (medidas a ciertas temperaturas)

Cuerpo	Emisividad
Cobre pulido (a 40°C)	0.03
Madera (a 70 °C)	0.94
Acero oxidado (a 200 °C)	0.79
Aluminio no oxidado (a 100°C)	0.03

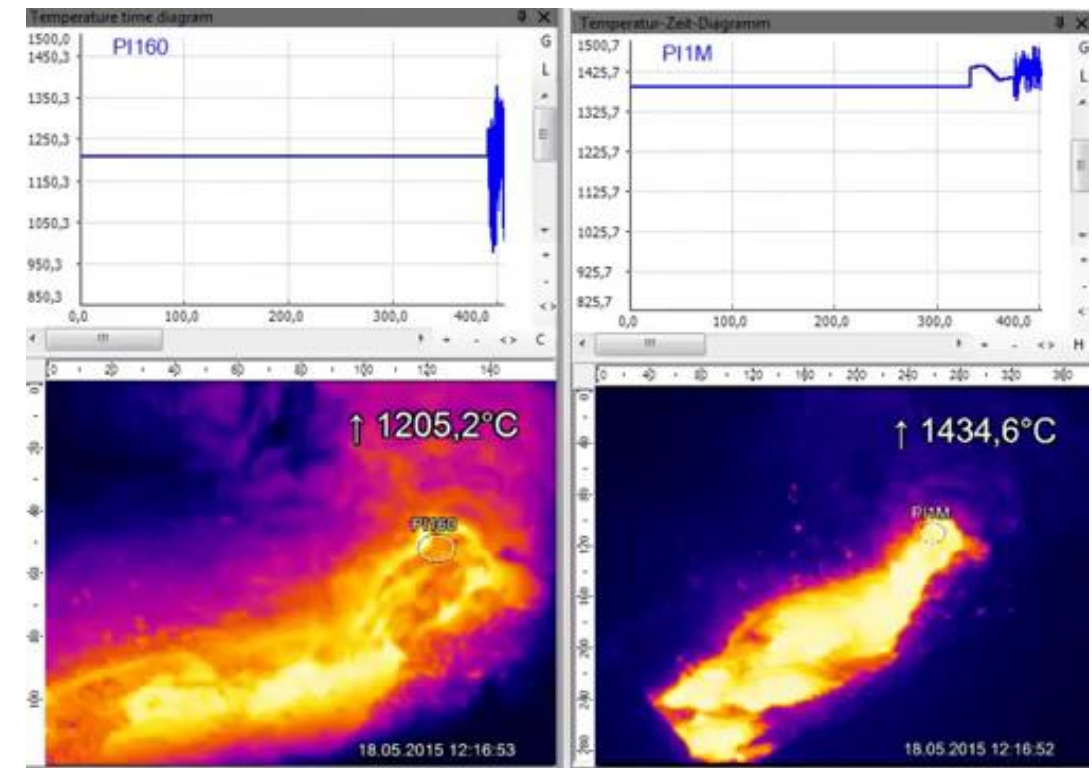
Modelos de Sistemas Térmicos

iii. Transferencia por Radiación (cont.)

Por otro lado, la radiación que emiten los cuerpos (radiación térmica), o la que reflejan, transmiten o absorben, puede ser usada para medir ciertas características de los materiales involucrados, veremos algunos tópicos relacionados a la instrumentación específica para capturar esta radiación hacia el final del curso.



Aplicación de técnicas de termografía en ambientes industriales.



Sistema de detección de escoria [fuente].

Modelos de Sistemas Térmicos

□ **Ejemplo:** Considerar el estanque agitado de la figura. Para este proceso se asume un flujo volumétrico de entrada igual al de salida, y las densidades y capacidades caloríficas conocidas. El líquido en el estanque se asume bien mezclado (qué implica esto?) y el tanque completamente aislado (pérdidas de calor despreciables). Nos interesa en este caso determinar un modelo matemático que describa la temperatura del flujo de salida $T(t)$ ante cambios en la temperatura del flujo de entrada $T_i(t)$.

Solución: Por medio de un balance de energía tendremos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Cambio de acumulación} \\ \text{de energía en el estanque} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de energía que} \\ \text{entra al estanque} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Tasa de energía que} \\ \text{sale del estanque} \end{array} \right\}$$

O en términos de ecuaciones:

$$f \rho_i h_i(t) - f \rho h(t) = \frac{d[V \rho u(t)]}{dt}$$

donde:

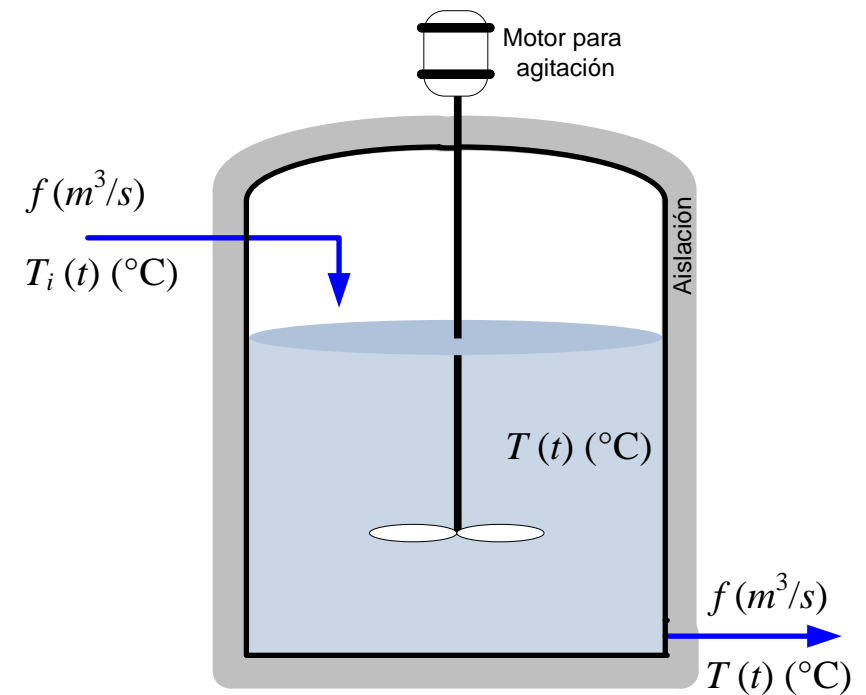
f = flujo volumétrico, m^3/s

ρ_i, ρ = densidades del flujo de entrada y salida, respectivamente, kg/m^3

V = volumen del líquido en el estanque (cte.), m^3

$h_i(t), h(t)$ = entalpías del líquido de entrada y salida, respectivamente, J/kg

$u(t)$ = energía interna del líquido en el estanque, J/kg



Modelos de Sistemas Térmicos

□ **Ejemplo (cont.):** En términos de las temperaturas tenemos:

$$f \rho_i C_{pi} T_i(t) - f \rho C_p T(t) = \frac{d[V \rho C_v T(t)]}{dt}$$

donde:

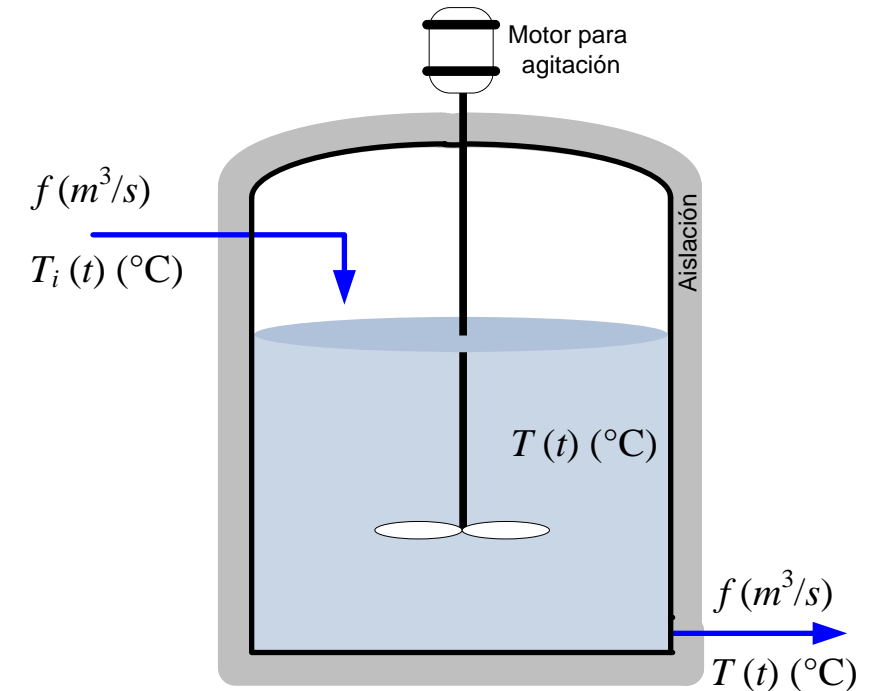
C_{pi}, C_p = capacidades caloríficas del líquido de entrada y salida, respectivamente, a presión constante, $J/kg \cdot ^\circ C$

C_v = capacidad calorífica del líquido a volumen constante, $J/kg \cdot ^\circ C$

$T_i(t), T(t)$ = temperaturas de entrada y salida, respectivamente, $^\circ C$

Asumiendo que las densidades y capacidades caloríficas son constantes sobre el rango de operación de temperaturas, la última ecuación puede ser escrita como:

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{f C_p}{V C_v} [T_i(t) - T(t)]$$

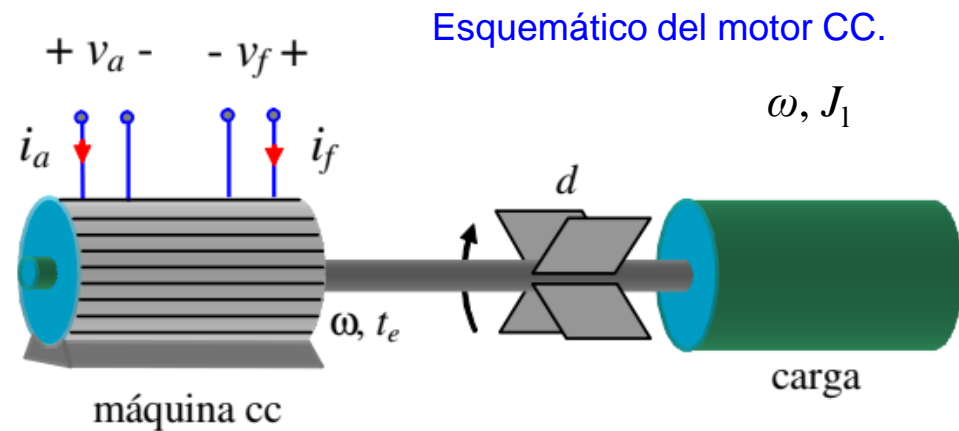


* Encontrar la FdeT. de este sistema.

Modelación de un sistema mixto

Caso mixto: Sistema Electromecánico

Los sistemas electromecánicos permiten transformar la energía eléctrica en energía mecánica y viceversa, el elemento típico es la máquina eléctrica. En este caso analizaremos la dinámica de un sistema accionado con un **motor de corriente continua**, como se muestra en la figura [1,2].



Donde:

v_a, i_a	= voltaje y corriente de armadura respectivamente.
v_f, i_f	= voltaje y corriente de campo respectivamente.
ω, θ	= velocidad y posición angular del eje del sistema.
J_1	= momento de inercia de la carga.
t_e	= torque eléctrico producido por la corriente de armadura.
d	= constante de roce

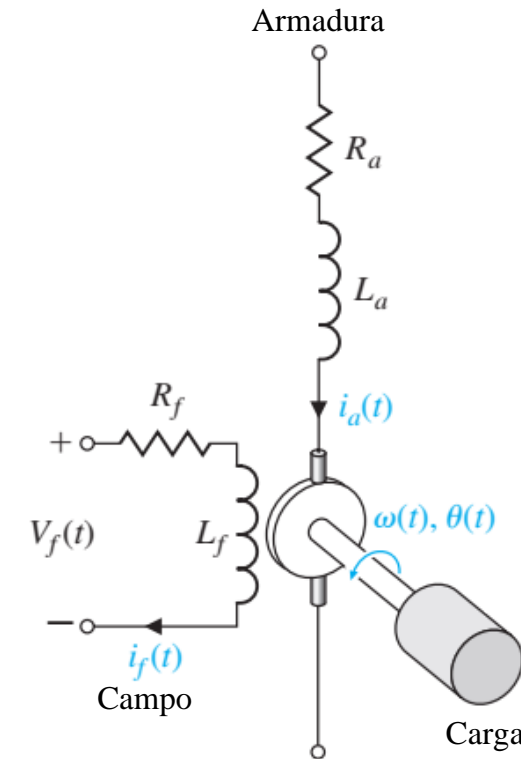


Diagrama eléctrico del motor CC.

Caso mixto: Sistema Electromecánico

(Algunas nociones) **Motor de corriente continua**



www.LearnEngineering.org

video

[[Fuente](#) original, [versión español](#)]

Caso mixto: Sistema Electromecánico

Ecuaciones dinámicas del motor CC.

El campo de la máquina es alimentado con una tensión v_f constante, para plantear el modelo eléctrico, la dinámica de la corriente de armadura es:

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_a$$

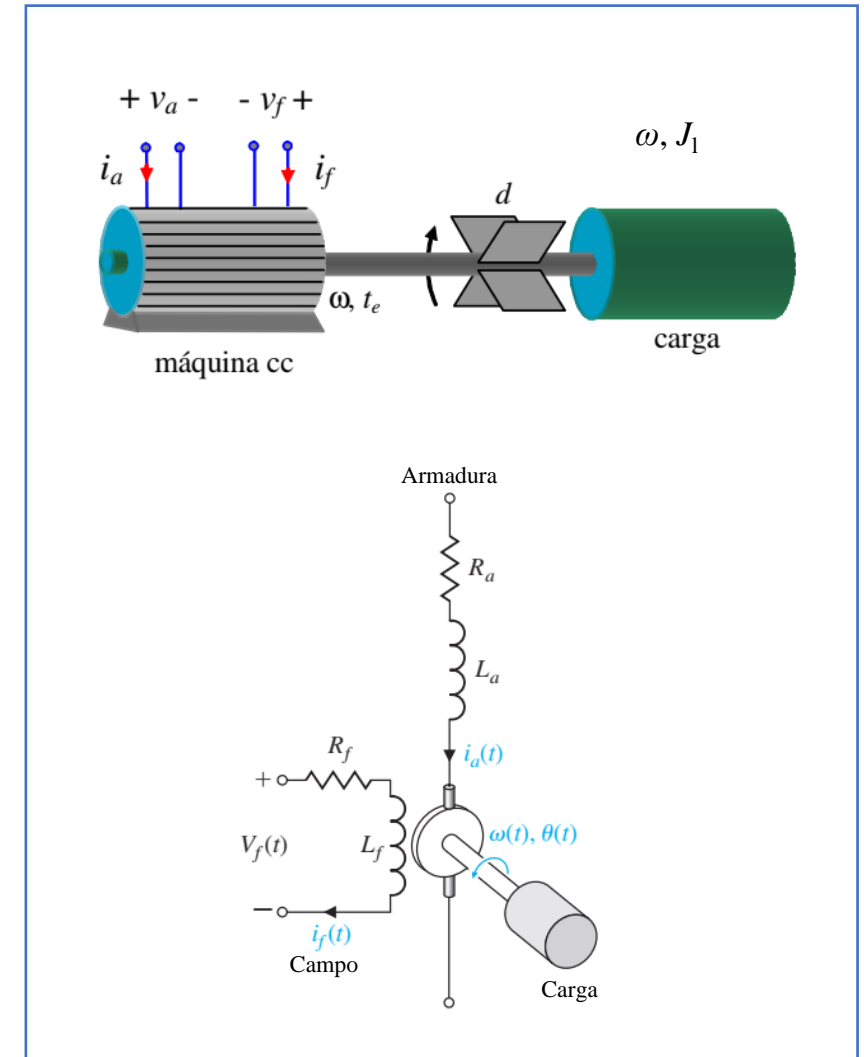
Donde $e_a = K_m \omega$ es el voltaje inducido en la máquina debido a la velocidad del rotor, con K_m una constante del motor. Por otro lado, las ecuaciones mecánicas del sistema son:

$$J_l \frac{d\omega}{dt} = k_m i_a - d\omega$$

Luego, una representación en variables de estado del sistema, asumiendo $x_1 = i_a(t)$, $x_2 = \omega(t)$, $u = v_a(t)$ tendremos:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_a / L_a & -K_m / L_a \\ K_m / J_l & -d / J_l \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 / L_a \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontrar la FdeT. $H(s) = \Omega(s)/V_a(s)$.



Caso mixto: Sistema Electromecánico

Ejercicio. Simular la corriente de armadura, velocidad del eje del motor y torque en la carga para el caso anterior considerando los siguientes valores de los parámetros y variables:

$$J_1 = 0.01 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$K_m = 0.015 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{A}$$

$$d = 0.1 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

$$L = 0.5 \text{ H}$$

$$R_a = 2 \text{ } \Omega$$

Asumir un voltaje de entrada $v_a(t) = 3u(t-1) \text{ V}$

Nota sobre función de transferencia

Una forma de encontrar la función de transferencia a partir de esta representación en espacio de estados es aplicando directamente la transformada de Laplace a dicha representación y despejando la entrada y salida como:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{x}(t) + du(t) \end{array} \right\} \mathcal{L} \Rightarrow Y(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} \cdot U(s) + d \cdot U(s)$$

c.i. nulas

Luego, la FdeT. se puede estimar como:

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$$

En Matlab pueden usar la función `ss2tf()` para aplicar directamente esta transformación. Para el caso mostrado, aplicar esta definición para encontrar la FdeT. asumiendo que $d = 0$ y que la salida es $x_1 = i_a(t)$.

Esto puede ser útil cuando se tengan sistemas con gran número de ecuaciones de estado.

Reflexión



(1285-1394) Filósofo y teólogo inglés.

Navaja de Ockham : “*En igualdad de condiciones, la explicación más sencilla suele ser la más probable*”.

Referencias

- [1] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, 13th ed., Pearson, 2017.
- [2] Prof. J.R. Espinoza y Prof. D.G. Sbárbaro, Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos (543214), DIE, Universidad de Concepción, 19ava ed., 2020. [Disponible Online]: [link](#).
- [3] Prof. J.R. Espinoza, Apuntes Sistemas de Control (543244), DIE, Universidad de Concepción, 18ava ed., 2019. [Disponible Online]: [link](#).
- [4] Prof. B. Messner, Prof. D. Tilbury, Prof. R. Hill y PHD. student JD. Taylor, Control Tutorials for Matlab & Simulink. [Disponible Online]: [link](#).

* Algunas imágenes de la presentación fueron tomadas de las referencias citadas.