Control de Procesos – Ayudantía 5
Estabilidad de Sistemas

PARTE 1 INTRODUCCIÓN

Un sistema estable es un sistema dinámico el cual frente a una entrada acotada (de magnitud limitada) también genera una respuesta acotada. Por esto, una condición necesaria y suficiente para que un sistema de realimentación sea estable es que **todos los polos de la función de transferencia del sistema tengan partes reales negativas**, en el plano complejo según su posición esto quiere decir que (Figura 1):

- Polos en la parte izquierda del plano *s* dan como resultado una respuesta decreciente $\Rightarrow$ sistema estable.
- Polos en la parte derecha del plano *s* dan como resultado una respuesta creciente $\Rightarrow$ sistema inestable.
- Polos en el eje $j\omega$ dan como resultado una respuesta neutral $\Rightarrow$ marginalmente estable.

Dependiendo del dominio de análisis, existen varios métodos para responder a la pregunta de si un sistema es estable o no, estos son: (1) el del plano *s*, (2) el del plano de la frecuencia ($j\omega$), y (3) el del dominio del tiempo. Ahora veremos el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz el que considera la ecuación característica del sistema en el plano *s* para investigar la estabilidad del sistema.

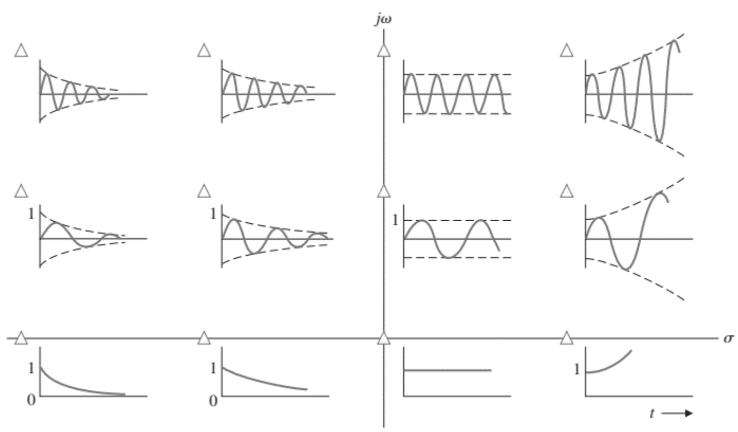

Figura 1. Estabilidad de sistemas a entrada impulso para distintas ubicaciones de los polos en el plano complejo.

Estabilidad según Routh-Hurwitz

Este método sirve para determinar cuándo un sistema es estable o no, basándose en los coeficientes del polinomio característico del sistema (denominador de la F.deT.). Sea el polinomio característico:

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

a partir del polinomio se genera la siguiente tabla:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & \delta_1 & & &
\end{array}$$

Donde los coeficientes:

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}, b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}, b_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}, \, etc.$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}, c_2 = \frac{b_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot b_3}{b_1}, c_3 = \frac{b_1 \cdot a_{n-7} - a_{n-1} \cdot b_4}{b_1}, \, etc.$$

y así llegar a δ_1, el criterio establece que el número de raíces de $p(s)$ con parte real positiva, i.e. polos inestables ubicados en el semiplano derecho, SPD, del plano complejo s, es igual al número de cambios de signo en la primera columna del arreglo (columna pivote). Luego, el sistema será estable si no hay cambios de signo en dicha columna. El análisis se complica cuando hay ceros en la columna pivote.

Ejemplo: Para el polinomio característico $p(s) = s^4 + 5s^3 + 3s^2 + s + 2$, ¿tendrá éste polos en el SPD? La tabla queda como sigue:

$$\begin{array}{c|cccc}
s^4 & 1 & 3 & 2 & 0 \\
s^3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\
s^2 & \frac{5\times3-1\times1}{5} = 2.8 & \frac{5\times2-1\times0}{5} = 2 & \frac{5\times0-1\times0}{5} = 0 & \\
s^1 & \frac{2.58\times1-5\times2}{2.58} = -2.57 & \frac{2.58\times0-5\times0}{2.58} = 0 & & \\
s^0 & \frac{-2.57\times2-2.8\times0}{-2.57} = 2 & & &
\end{array}$$

en este caso si miramos la primera columna de pivotes, tenemos que hay 2 cambios de signo, por lo que hay dos polos con parte real positiva y por lo tanto el sistema será inestable.

PARTE 2 EJERCICIOS

Ejercicio 1. Determinar la estabilidad de los siguientes sistemas dados sus polinomios característicos. Use Routh-Hurwitz y verifique calculando las raíces de los polinomios (use `roots()` de Matlab):

1. $p(s) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$, (Resp. El sistema es estable)
2. $p(s) = s^4 + 9s^3 + 45s^2 + 87s + 50$, (Resp. El sistema es estable)
3. $p(s) = s^3 + 2s^2 - 4s + 20$, (Resp. El sistema es inestable)

Ejercicio 2. Determinar los valores de $K > 0$ para los cuales los siguientes sistemas descritos por sus polinomios característicos serán estables:

1. $p(s) = s^4 + s^3 + 3s^2 + 2s + K$, (Resp. El sistema es estable para $0 < K < 2$)
2. $p(s) = s^3 + (1 + K)s^2 + 10s + (5 + 15K)$, (Resp. El sistema es estable para $0 < K < 1$)

Ejercicio 3. Dadas las siguientes F.de.T. en lazo abierto se desea aplicar un control proporcional ($H_c(s) = K$) en lazo cerrado con realimentación negativa unitaria. Determinar el intervalo de K (con $K > 0$) para que el sistema sea estable.

1. $G(s) = 1/(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$, (Resp. $0 < K < 8$)
2. $H(s) = 1/(s(s^2 + 2s + 4))$, (Resp. $0 < K < 8$)