Control Automático de Procesos

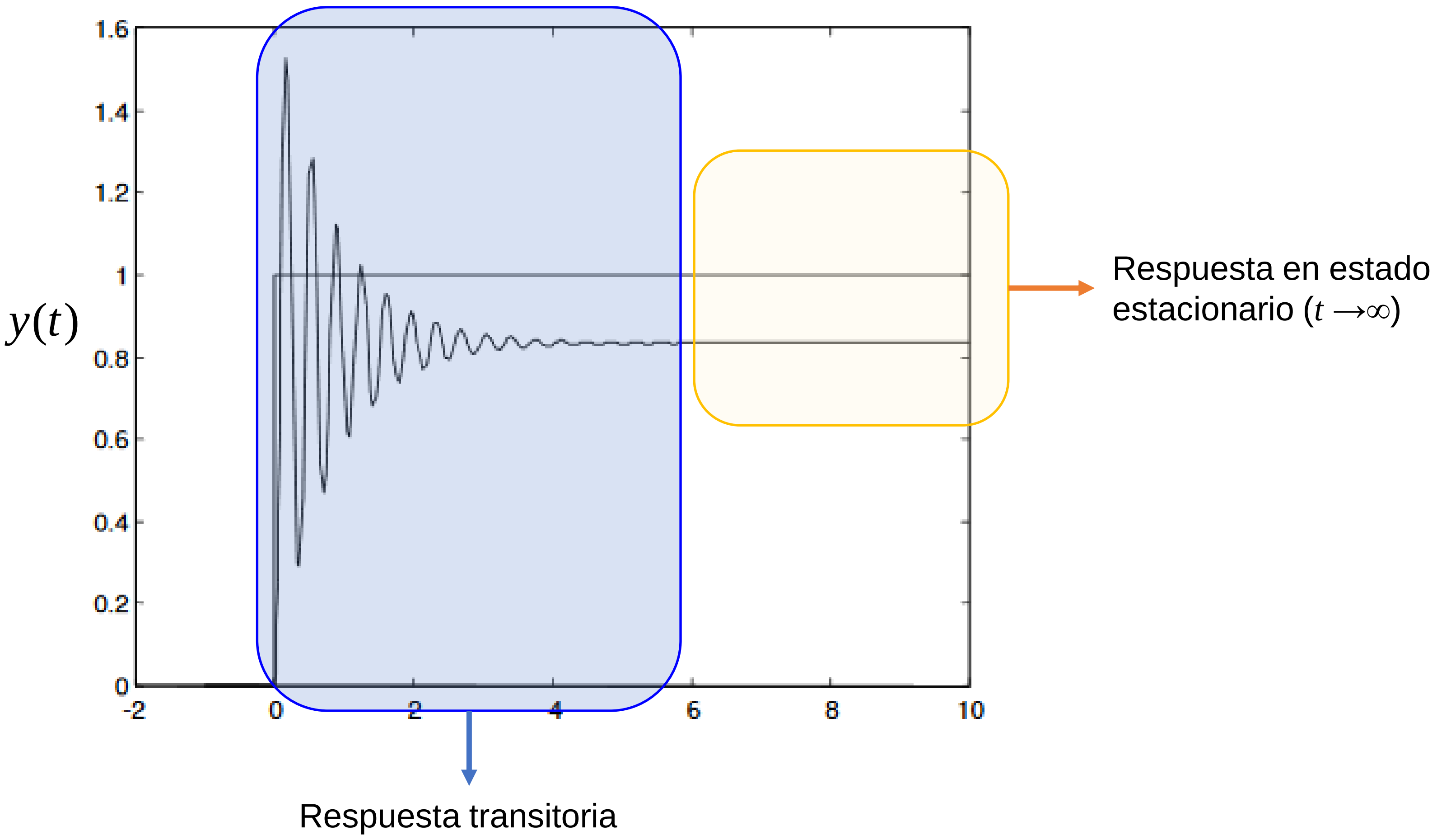
Análisis de Sistemas Realimentados I

Prof. Carlos A. Toro N.
carlos.toro.ing@gmail.com
2021

Objetivos

- ❑ Analizar la respuesta en estado estacionario de un sistema en base a su FdeT.
- ❑ Estudiar el error estacionario de un sistema realimentado.

Introducción



Cualquier salida para un sistema lineal puede ser descompuesta como: $y(t) = y_{ss}(t) + y_{tr}(t)$

Estado Estacionario en Sistemas Realimentados

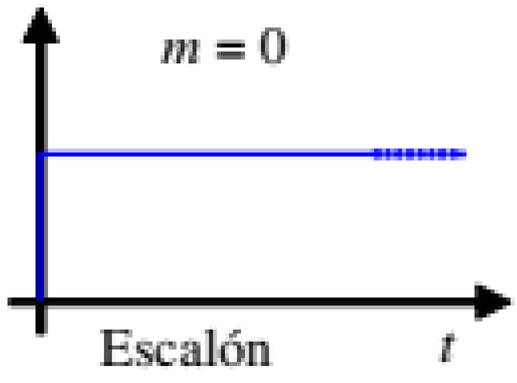
Señales de Prueba Estándar en Sistemas

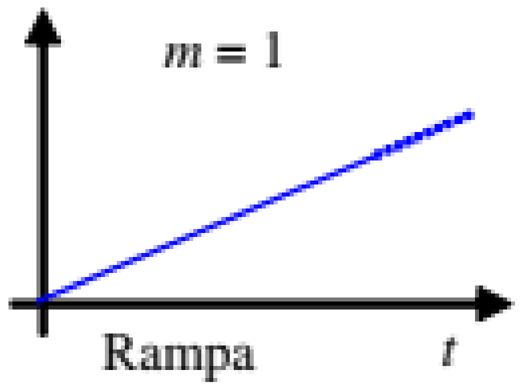
- Idea simple: Si queremos saber como se desempeña nuestro sistema, excitarlo con diferentes entradas y estudiar la respuesta.

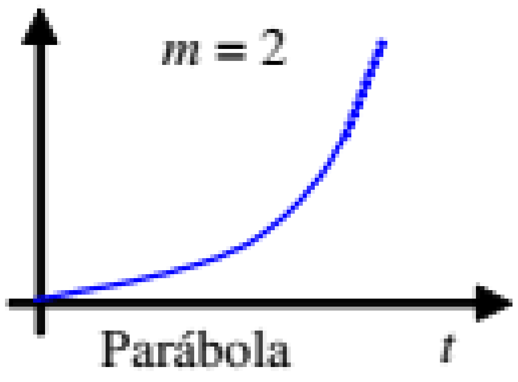
- Señales de prueba estándar: por ejemplo un estímulo súbito (impulso), un cambio repentino (escalón), una velocidad constante (rampa), una aceleración constante (parábola) o una señal oscilatoria (sinusoidal).

- Además se definen como entradas normalizadas a las señales dadas por:

$$u(t) = \frac{t^m}{m!}\mathrm{u}(t),\ con\ m = 0,1,2 \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$$



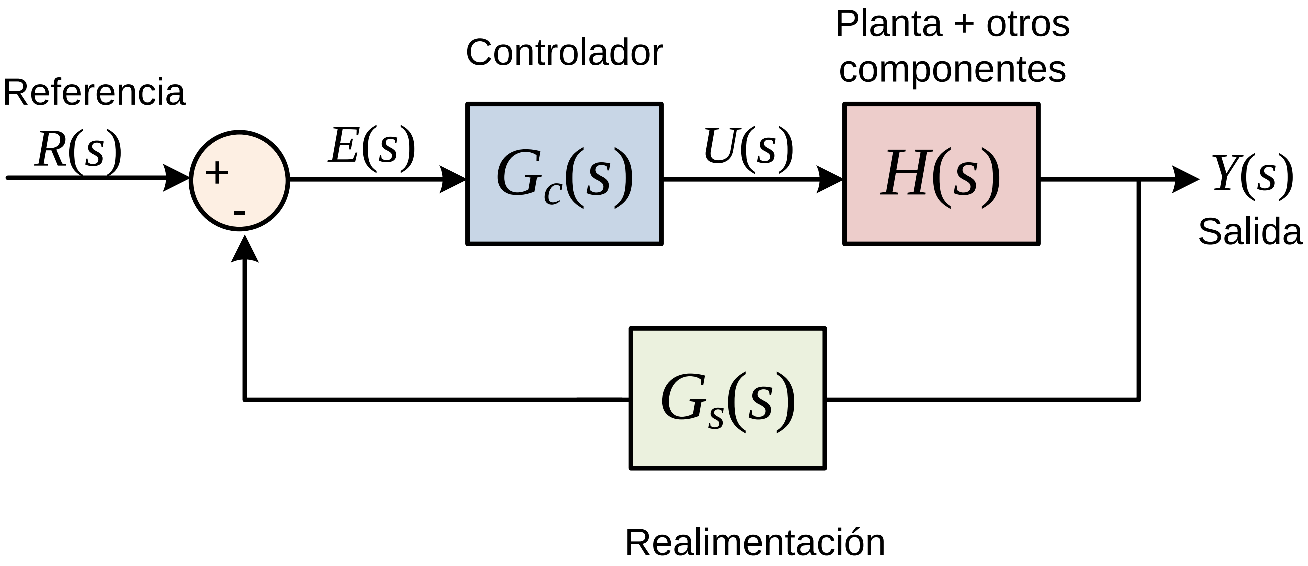




Error en Régimen Permanente de un Sistema Realimentado

Consideremos el sistema en LC como el mostrado en la figura, la función de transferencia $H_{LC}(s) = Y(s)/R(s)$ será:

$$H_{LC}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)H(s)}{1 + G_c(s)G_s(s)H(s)}$$



Sin perdida de generalidad, asumamos una realimentación unitaria (i.e. $\mathbf{G_s} = \mathbf{1}$) para simplificar el análisis, luego el error $E(s) = R(s) - Y(s)$ será:

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G_c(s)H(s)}$$

Error en Régimen Permanente de un Sistema Realimentado

Para calcular el error en estado estacionario, podemos aplicar el teorema del valor final:

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G_c(s)H(s)}$$

notar que este dependerá de la señal de entrada y de las funciones de transferencia involucradas en el lazo cerrado. **Un sistema se dice de tipo *N*** dependiendo del número de polos en el origen (s = 0) que tenga la FdeT. $L(s) = G_c(s)H(s)$ (Def: FdeT. en lazo directo). Por ejemplo, si $L(s)$ está dada por :

$$L(s) = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^N (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0)}$$

¿Qué valor tendrá el error en estado estacionario para entradas normalizadas de tipo escalón, rampa o parábola en función del tipo de sistema?

Error en Régimen Permanente de un Sistema Realimentado

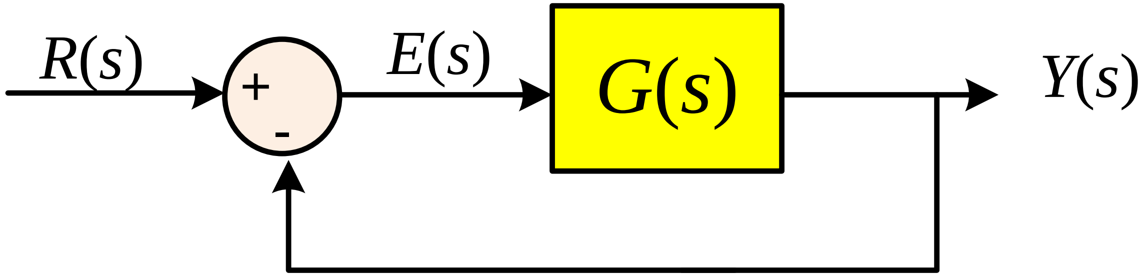
Se definen tres coeficientes de acuerdo a las entradas normalizadas escalón, rampa y parábola: de posición, de velocidad y de aceleración respectivamente. La siguiente tabla resume el coeficiente y error en estado estacionario respectivo:

Entrada	**Escalón**	**Rampa**	**Parábola**
Tipo de sistema	Error en estado estacionario		
0	$1/(1+k_p)$	∞	∞
1	0	$1/k_v$	∞
2	0	0	$1/k_a$
Cte. error dada por:	$k_p = \lim_{s\to 0} G_c(s)H(s)$	$k_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)H(s)$	$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G_c(s)H(s)$

* Como ejercicio, mostrar los resultados de la tabla anterior y esbozar una respuesta para los distintos casos.

Ejemplo

Ejemplo: Calcular los errores en estado estacionario, ante señales típicas de prueba, para el siguiente sistema realimentado:



$$G(s) = \frac{10}{(0.2s+1)(0.5s+1)}$$

Solución: Primero notamos que el sistema es de tipo 0, luego los errores estacionarios para entrada escalón, rampa y parábola estarán dados por:

Para entrada escalón (posición)

$$k_p = \lim_{s\to 0} G(s) \Rightarrow k_p = \lim_{s\to 0} \frac{10}{(0.2s+1)(0.5s+1)} = 10$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} = \frac{1}{11} = 0.09$$

Para entrada rampa (velocidad)

$$k_v = \lim_{s\to 0} sG(s) \Rightarrow k_v = \lim_{s\to 0} \frac{s10}{(0.2s+1)(0.5s+1)} = 0$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_v} = \infty$$

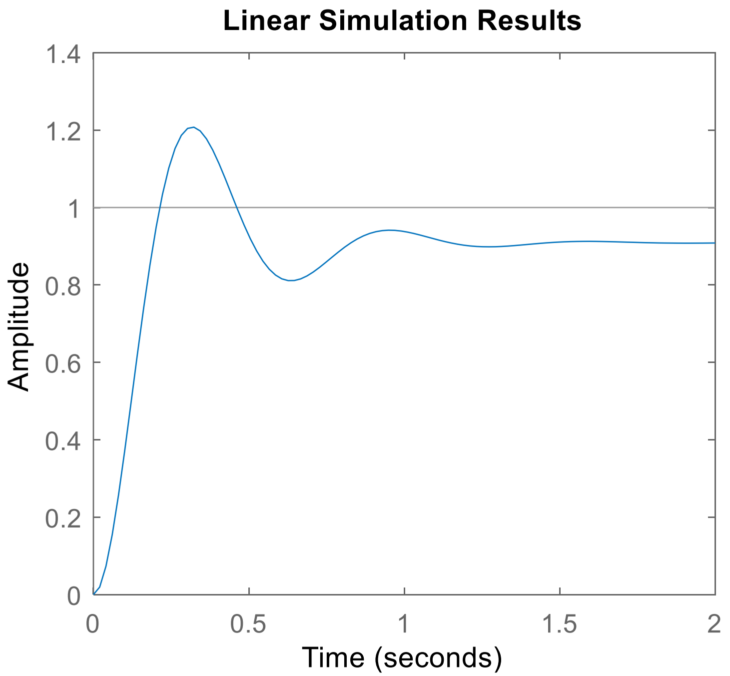
Ejemplo (cont.)

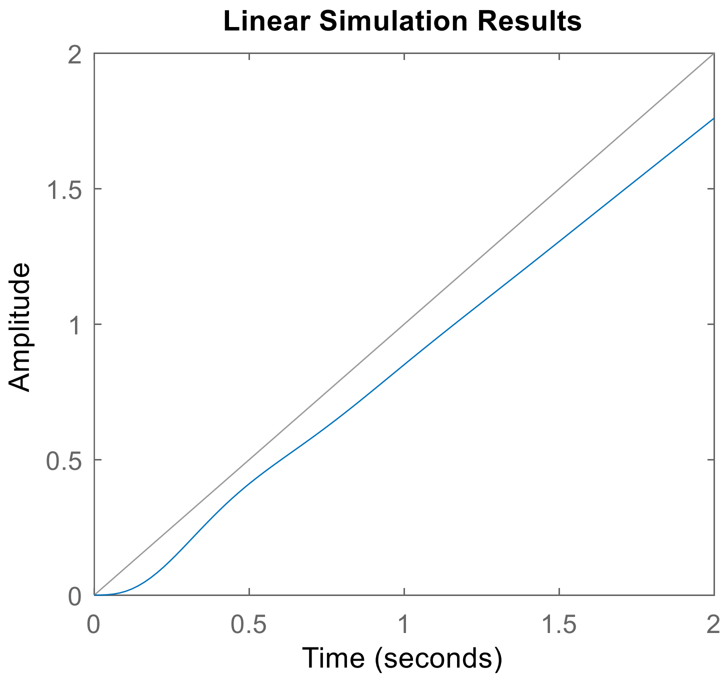
Para entrada parabólica (aceleración)

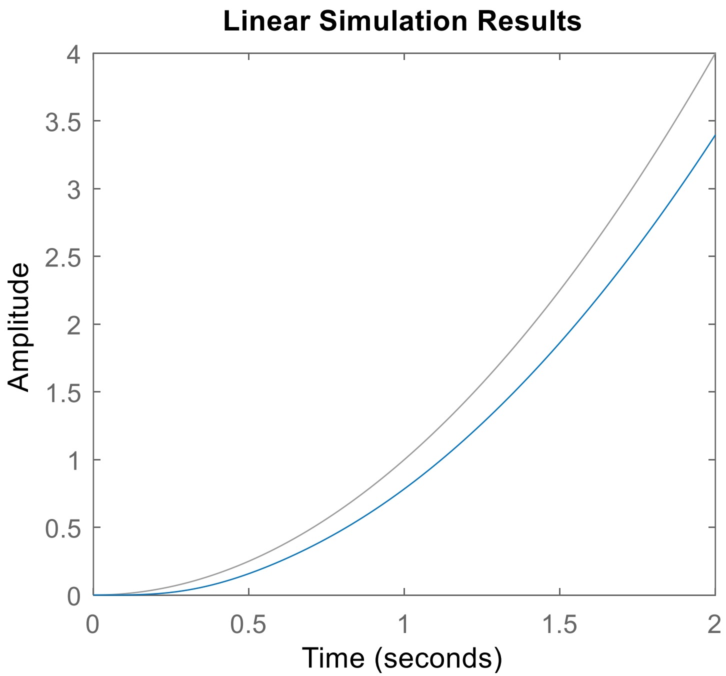
$$k_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s) \Rightarrow k_a = \lim_{s\to 0} \frac{10s^2}{(0.2s+1)(0.5s+1)} = 0$$

$$\Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{k_a} = \infty$$

Gráficamente tendremos







Ejemplo (cont.)

Código de las simulaciones

```
% Ejemplo simulación de respuesta de un sistema y errores ante entrada % escalón, rampa y parábola
clear;clc;close

% definición del sistema
s   = tf('s');
G   = 10/((0.2*s+1)*(0.5*s+1));% FdeT lazo directo en este ejemplo
LC  = feedback(G,1);% FdeT sistema realimentado

% simulaciones
t = linspace(0,2,100);
u = double(t>=0);% entrada escalón
r = t.*u;% entrada rampa
p = (t.^2).*u;% entrada parabólica

figure; lsim(LC,u,t);
figure; lsim(LC,r,t);
figure; lsim(LC,p,t);
```

Próximas Clases

1. Análisis de Sistemas Realimentados II: Análisis de la respuesta dinámica o transiente
2. Estabilidad de Sistemas Realimentados
3. Respuesta en Frecuencia
4. ...

Referencias

[1] R.C. Dorf, R.H. Bishop, Modern Control Systems, 13th ed., Pearson, 2017.

[2] Prof. J.R. Espinoza y Prof. D.G. Sbárbaro, Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos (543214), DIE, Universidad de Concepción, 19ava ed., 2020. [Disponible Online]: link.

[3] Prof. J.R. Espinoza, Apuntes Sistemas de Control (543244), DIE, Universidad de Concepción, 18ava ed., 2019. [Disponible Online]: link.

[4] Prof. B. Messner, Prof. D. Tilbury, Prof. R. Hill y PHD. student JD. Taylor, Control Tutorials for Matlab & Simulink. [Disponible Online]: link.