Modelación de Sistemas I: Representaciones

Representación en Espacio de Estados y Linealización

Una clasificación de sistemas se basa en si son lineales o no-lineales. En forma general la ecuación de estado de un sistema queda representada por,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$$
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})$$

donde $\dot{\boldsymbol{x}} = [\dot{x}_1 ... \dot{x}_n]^T$ es un vector de derivadas de primer orden (derivadas de las variables de estado), $\boldsymbol{x} = [x_1 ... x_n]^T$ es el vector de variables de estado, $\boldsymbol{u} = [u_1 .. u_p]^T$ es el vector de entradas, $\boldsymbol{y} = [y_1 ... y_q]^T$ es el vector de salidas, $\boldsymbol{p} = [p_1 ... p_m]^T$ es el vector de perturbaciones, $\boldsymbol{f}()$ es la función que describe las derivadas y $\boldsymbol{h}()$ es la función que describe las salidas. Para un sistema lineal conviene representar las ecuaciones de estado de la siguiente forma,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \mathbf{B}\boldsymbol{u} + \mathbf{E}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\boldsymbol{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{u} + \mathbf{F}\boldsymbol{p}$$

donde $\mathbf{A}_{n\cdot n}$, $\mathbf{B}_{n\cdot p}$, $\mathbf{C}_{q\cdot n}$, $\mathbf{D}_{q\cdot p}$, $\mathbf{E}_{n\cdot m}$, $\mathbf{F}_{q\cdot m}$ son matrices.

Por otro lado, un sistema no lineal no puede ser expresado de la forma anterior, para esto se debe *linealizar* en torno a un punto de operación (o de equilibrio). Supongamos que tenemos el caso monovariable descrito por la siguiente EDO de primer orden:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x),$$

Y consideremos un punto de equilibrio, x_0, del sistema tal que $f(x_0) = 0$ (un punto donde el sistema no varía, i.e. las derivadas son cero en dicho punto), entonces, por expansión de series de Taylor de $f(x)$ al considerar solo el término lineal, tenemos:

$$\dot{x} = f(x) \approx \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} \cdot \Delta x = a(x_0) \cdot \Delta x$$

Donde se define la variable desviación como $\Delta x = x - x_0$. El siguiente ejemplo demuestra algunos hechos importantes al proceder de esta forma.

Ejercicio resuelto 1. supongamos que tenemos un sistema continuo con un modelo dado por:

$$\frac{dx}{dt} = g(x(t), u(t)) = -\sqrt{x(t)} + \frac{u(t)^2}{3}$$

Asumir que la entrada $u(t)$ fluctúa alrededor de $u = 2$ (en la práctica este valor estará definido por las restricciones del proceso o el conocimiento previo que exista acerca de este). Encontrar el punto de operación considerando $u_0 = 2$ y linealizar el modelo alrededor de este punto. Graficar la respuesta $y(t) = x(t)$ para una señal de prueba como se muestra en la Figura 1.

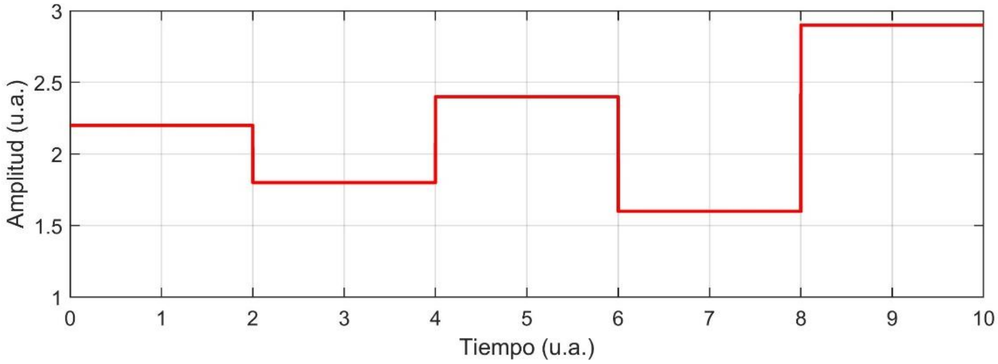


Figura 1. Señal de entrada al sistema (u.a.: unidades arbitrarias).

Solución. Notar que en este caso tenemos en el sistema la acción forzada de una entrada $u(t)$, por lo que la linealización en torno al punto de operación (o equilibrio) tendrá la forma:

$$\dot{x} = \left.\frac{dg(x,u)}{dx}\right|_{(x_0,u_0)} \cdot \Delta x + \left.\frac{dg(x,u)}{du}\right|_{(x_0,u_0)} \cdot \Delta u$$

siendo el punto de operación para la variable de estado x igual a $x_0 = u_0{}^4/9 = 16/9$ (despejado de la ecuación $g(x\,,u) = 0$), así, el modelo linealizado tiene la forma:

$$\dot{x} = -\frac{3}{8}\cdot \Delta x + \frac{4}{3}\cdot \Delta u$$

Para simular la respuesta con ambos modelos se implementa el siguiente código en Matlab:

```
clc;clear;close all
% Modelo: x' = -sqrt(x) + u^2/3
% Asumimos como C.I. el valor del punto de operación
% Señal de prueba:
U        = @(t) double(t>=0);% señal escalón unitario
u        = @(t) 2.2*U(t)-0.4*U(t-2)+0.6*U(t-4)-0.8*U(t-6)+1.3*U(t-8);
t        = linspace(0,10,1e4);

% Punto de equilibrio:
x0       = 16/9;
u0       = 2;

% Solución EDO modelo no lineal:
[~,ynl]  = ode45(@(t,x) -sqrt(x) + (u(t).^2)/3,t,x0);
% Solución EDO modelo linealizado:
[~,ylin] = ode45(@(t,x) -3*(x-x0)/8 + 4*(u(t)-u0)/3,t,x0);

figure
plot(t,u(t),'-r',t,ynl,'-b',t,ylin,':b','LineWidth',1.5);grid on;
xlabel('Tiempo (u.a.)');ylabel('Amplitud (u.a.)'); axis([0 10 1 3]);
legend('Señal de entrada u(t)','y(t) Modelo No-Lin.','y(t) Modelo Lin.')
```

La Figura 2 muestra el resultado de la simulación, se aprecia claramente como a medida que la entrada se aleja del punto de equilibrio, la respuesta simulada del modelo linealizado también lo hace de la salida exacta.

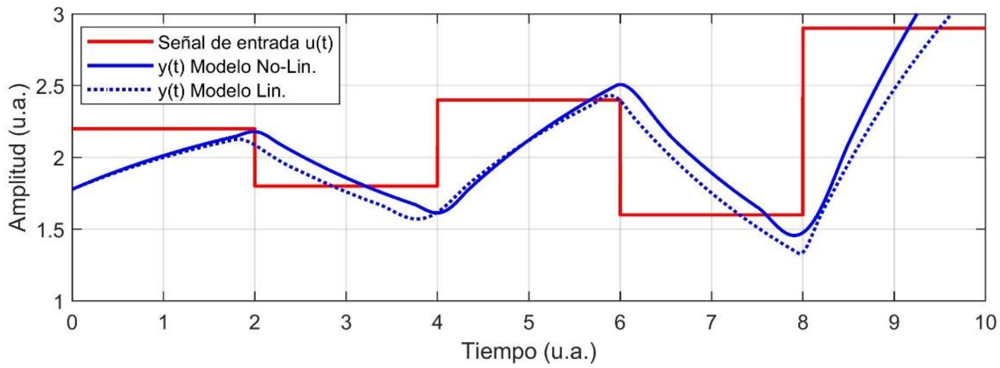


Figura 2. Simulación del sistema para el modelo no lineal y su versión linealizada (u.a.: unidades arbitrarias).

Práctica extra: Simular el mismo problema usando Simulink.

En el caso general de tener más de una variable de estado, un sistema no lineal posee la forma,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \\ \vdots \\ f_n(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \\ \vdots \\ h_q(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p}) \end{bmatrix}$$

Una representación lineal en torno a un punto de operación dado por $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ es:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}\Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{B}\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{E}\Delta\boldsymbol{p}$$
$$\Delta\boldsymbol{y} = \mathbf{C}\Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{D}\Delta\boldsymbol{u} + \mathbf{F}\Delta\boldsymbol{p}$$

Donde:

$$\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}} \qquad \mathbf{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}} \qquad \mathbf{E} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}}$$

$$\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}} \qquad \mathbf{D} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}} \qquad \mathbf{F} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{p})}{\partial \boldsymbol{p}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0 \\ \boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0}}$$

y $\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, $\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0$, $\Delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0$, $\Delta\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}_0$, son variaciones de $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{y}$ respectivamente. Notar que en el caso no-lineal $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ satisfacen las ecuaciones:

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{p}_0),$$
$$\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{p}_0).$$

Notar además que las matrices **A**, **B**, **C**, **D**, **E** y **F**, tienen coeficientes constantes, dado que todas las derivadas parciales son evaluadas en los valores numéricos ($\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{y}_0$).

Hay que recordar siempre que el modelo linealizado es una aproximación, y que será válido solo cuando el sistema opere en un rango lo suficientemente pequeño alrededor del punto de equilibrio. En la práctica, habrá sistemas cuyos modelos linealizados serán tolerantes (producirán menos errores en la salida) al introducir entradas alejadas del punto de operación, mientras que otros pueden causar que el sistema se inestabilice (concepto que analizaremos en las próximas unidades).

En todos estos casos, el proceso particular bajo análisis será el que demandará mayor o menor exactitud en la respuesta y determinará que tanto podemos alejarnos de la solución real.

Finalmente, notar que las herramientas que veremos en el curso están diseñadas para analizar y diseñar controladores sobre sistemas dinámicos lineales, sin embargo, para el caso no lineal aún serán válidas al trabajar con modelos linealizados, asumiendo ciertas restricciones como las vistas en este capítulo.

Ejercicio 1. Transformada de Laplace y Función de Transferencia[1].

1. Encuentre la ecuación de la respuesta temporal de los siguientes sistemas caracterizados por su función de transferencia. Asuma que se aplicó una entrada de tipo escalón unitario. Además, use el teorema del valor final para encontrar el valor en estado estacionario de la función de interés y grafique la respuesta.

   a) $F(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{10}{(s+1)}$

   b) $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{6(s+50)}{s^2+40s+300}$

   c) $H(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{25s+5}{s^3+5s+25s+5}$

2. Determinar la F. de T. de un sistema de segundo orden del tipo:

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_n\dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t)$$

3. Usando la Transformada de Laplace, resolver la siguiente ecuación diferencial para $y(t)$:

$$\dot{y}(t) - y(t) = e^{3t}$$

   Dado que la condición inicial es $y(0) = 2$, graficar la respuesta en un rango temporal adecuado.

Ejercicio 2. Representación en Variables de Estado y Linealización.

1. La dinámica simplificada del ascenso vertical del cohete Space X puede ser modelada como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -g\left(\dfrac{D}{x_1(t)+D}\right)^2 + \dfrac{\ln(u)}{m} \end{bmatrix}$$

   donde D es la distancia desde la tierra a la superficie del cohete (asumida como constante) m es la masa del cohete, g es la constante de gravedad, y u es el empuje que se asume como constante. Se pide encontrar el punto de equilibrio (x_1^*, x_2^*) del sistema dinámico y formular la representación linealizada del sistema en torno al punto de equilibrio (operación), encontrando las matrices **A**, **B** y **C**. Para la representación linealizada asuma que la salida es x_2.

2. Asumiendo que α, β, γ y δ son todas constantes positivas, encontrar el punto de equilibrio del siguiente modelo que representa la dinámica entre depredadores y presas (x representa la población de presas e y la población de depredadores):

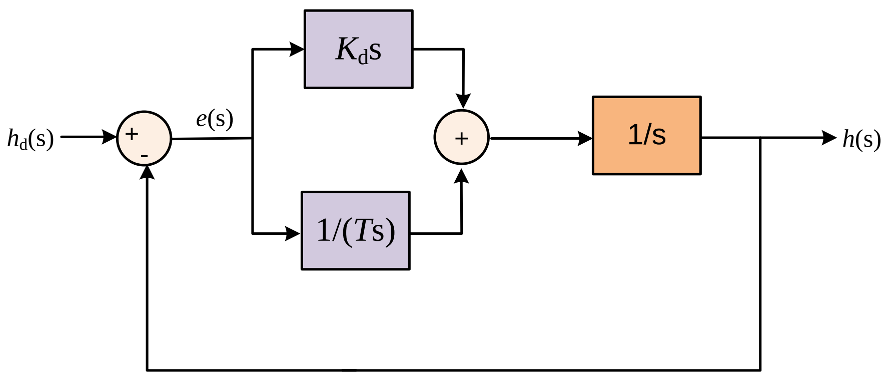
---

[1] La función `step()` de Matlab puede ayudar a graficar directamente la respuesta escalón de un sistema descrito por su FdeT.

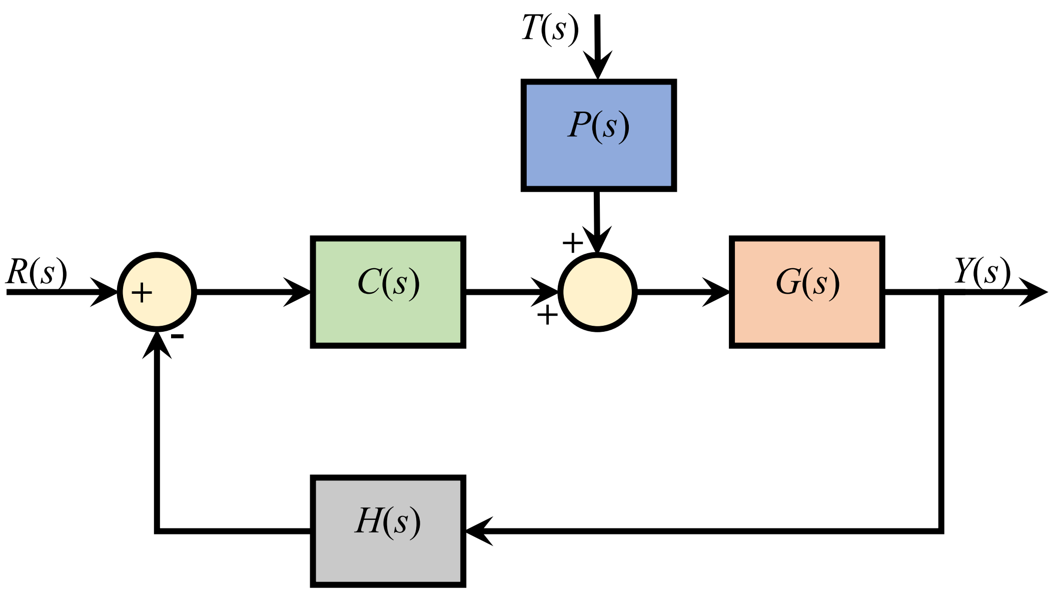
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \\ \delta x(t) y(t) - \gamma y(t) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4. Representación en Diagramas de Bloques. Dadas las siguientes representaciones en diagramas de bloques de sistemas con realimentación, encontrar las FdeT. Pedidas:

a) $H_{lc}(s) = h(s)/h_d(s)$ (K_d y T son constantes).
b) $H_{YT}(s) = Y(s)/T(s)$



a)



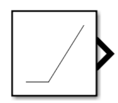
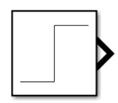
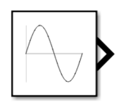
b)

Figura 3. Diagrama en bloques de un sistema realimentado.

Matlab Tips: Algunas funciones útiles extra de Matlab para simular y analizar sistemas en base a su FdeT. o modelo en espacio de estados son:

- `tf()`, `ss()`
- `impulse()`,`lsim()`
- `poles()`, `zero()`

Simulink Tips: Algunos bloques útiles que ayudarán a simular sistemas dinámicos modelados con su FdeT. o representación de espacio de estados son:

Bloque	**Símbolo**	**Librería Simulink**
Integrador	$\frac{1}{s}$	*Continuous*
Función de Transferencia	$\frac{1}{s+1}$	*Continuous*
Modelo en espacio de estados	$\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$	*Continuous*
Señal escalón		
Señal rampa		*Sources*
Señal sinusoidal		
Generador de señales		*Sources* (Tip. Dentro del editor de señales, presionar shift + click sobre un segmento para agregar más puntos de quiebre en la señal)

Ejercicio resuelto 2. **Simulink**. Graficar la respuesta a un escalón unitario los siguientes sistemas de segundo orden en lazo abierto descritos por su FdeT.:

a) $H_1(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^2 + 4s + 1}$

b) $H_2(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^2 + 2s + 1}$

c) $H_3(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)} = \dfrac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$

Solución:

Paso 1: Primero abrir el ambiente desde Matlab escribiendo `simulink` en la línea de comandos o presionando su ícono.

Paso 2: Generar un nuevo modelo de Simulink en blanco (*blank model*).

Paso 3: Arrastrar los bloques de función de transferencia, multiplexor, scope y señal escalón y posicionarlos como en la Figura 4.

Paso 4: Hacer doble click en los bloques de función de transferencia para editar los valores de los coeficientes de los polinomios del numerador y denominador.

Paso 5: Conectar los bloques como se muestra en la Figura 4.

Paso 6: Cambiar el tiempo de simulación a 30 segundos y simular. Visualizar las respuestas como se ve en la Figura 5.

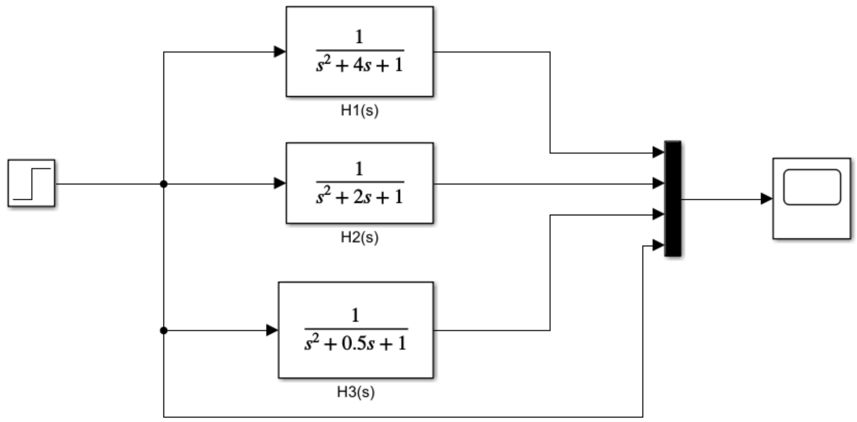


Figura 4. Diagrama en bloques para simular tres sistemas de segundo orden en lazo abierto.

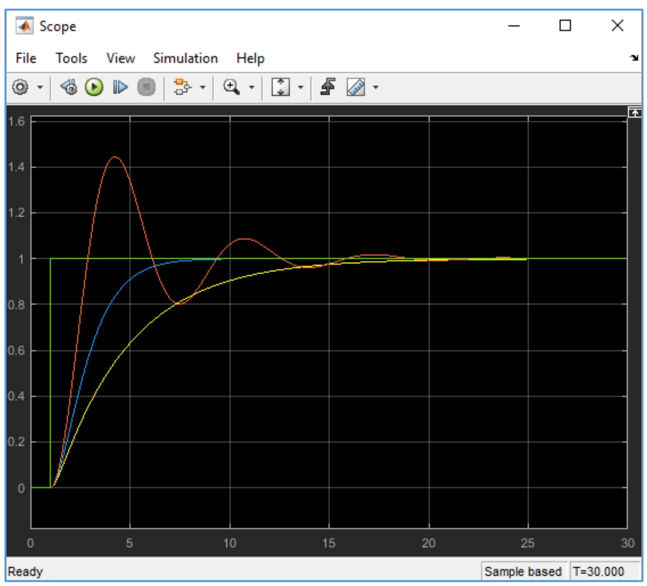


Figura 5. Simulación de los sistemas de segundo orden propuestos (en informes exportar correctamente las imágenes).