

# DECISIONES MULTICRITERIO DISCRETAS: PROCESO ANALITICO JERARQUICO

FACULTAD DE INGENIERIA I UNMDP  
Esp. Ing. Luciana Tabone



## Decisión Multicriterio

Introducción

## Decisión Multicriterio

Frente a un problema de decisión es común suponer:



### **Decisor Racional**

Comportamiento optimizador, no se conformará con alternativas que no sean óptimas.



Alternativa Óptima

El problema se presenta al tratar de aplicar el concepto de decisión racional en situaciones reales donde los problemas son complejos y reducen las posibilidades de encontrar la alternativa óptima.



### **Decisor con Racionalidad Limitada**

Busca una alternativa que satisfaga suficientemente sus niveles de aspiración para los objetivos que se ha propuesto.



Alternativa Satisfactoria

## Decisión Multicriterio

En situaciones reales, el decisor utiliza varios objetivos para evaluar alternativas, algunos de ellos, difíciles de medir en términos de beneficios o costos.



### **METODOLOGÍA MULTIOBJETIVO O MULTICRITERIO**

Problemas de optimización con varias FO simultaneas, donde es imposible que exista una solución que alcance su valor óptimo simultáneamente, en todas las FO.



El decisor elegirá la mejor entre un conjunto de alternativas consideradas satisfactorias.

## Decisión Multicriterio

Ramas de la metodología multicriterio:



### DM Continua

Decisión Multiobjetivo o Programación por Objetivos/Metas  
Se ocupa de problemas con objetivos múltiples, en los cuales las alternativas pueden tomar infinitos valores



### DM Discreta

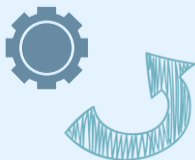
Analiza problemas en los que el conjunto de alternativas de decisión está formado por un número finito y generalmente pequeño de variables.



## Decisión Multicriterio Discreta

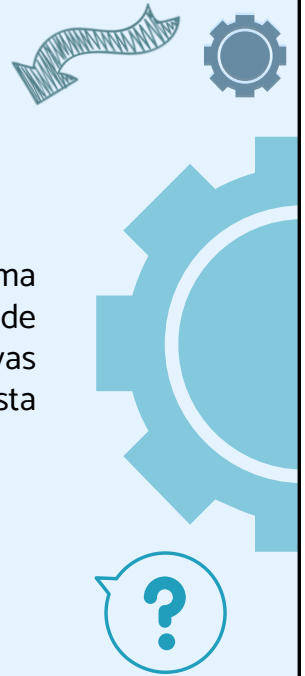
---

(DMD)



## Decisión Multicriterio Discreta

El análisis multicriterio discreto es una metodología de toma de decisiones útil en una gran cantidad de campos de aplicación, cuando hay que decidir entre varias alternativas teniendo en cuenta diversos objetivos o puntos de vista generalmente en conflicto.



## Conceptos Básicos

- ✓ Decisor o experto: proporciona el juicio de valor para evaluar las alternativas y realizar la selección final.
- ✓ Analista: modeliza el problema y realiza recomendaciones respecto a la selección final.
- ✓ Conjunto de elección: es el conjunto finito y discreto de alternativas que se denomina  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ . Las alternativas son diferentes, exhaustivas y excluyentes.
- ✓ Atributos: representan las propiedades, características, capacidades de satisfacer necesidades y/o deseos de cada alternativa.



## Conceptos Básicos

- ✓ Criterio: función que refleja las preferencias del decisor en relación a un atributo.
- ✓ Al conjunto de todos los criterios considerados se denomina  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ . Este conjunto es finito y discreto.

Pueden ser cuantitativos y cualitativos y deben cumplir con las siguientes propiedades:

- Coherencia: Las preferencias globales del decisor deben ser coherentes con las preferencias en cada criterio
- Exhaustividad: Deben considerarse todos los criterios necesarios que permitan la discriminación entre alternativas.
- No redundancia entre criterios: Esta propiedad es deseable, pero no esencial. Se corre el riesgo de otorgar duplicada importancia a un atributo.

## Conceptos Básicos

- ✓ En la DMD el número máximo de criterios posibles a usar, puede estar limitado por el método de resolución a emplear.
- ✓ Algunos métodos de DMD no aconsejan emplear más de 7 criterios, por a la limitación del cerebro humano para comparar simultáneamente más de 7 cosas. No se aconseja trabajar con más de 20 criterios.
- ✓ Ante la existencia de numerosos criterios, se recomienda estructurarlos en una jerarquía de criterios y subcriterios.

## Decisión Multicriterio Discreta

**Matriz de decisión:** El decisor es capaz de dar un valor numérico  $a_{ij}$ , que expresa una evaluación de la alternativa  $A_i$  respecto al criterio  $C_j$ .

Estas evaluaciones se pueden resumir bajo la forma de una matriz  $A = [a_{ij}]$

Cada fila indica las cualidades de la alternativa  $i$  respecto de los  $n$  criterios considerados, mientras que cada columna  $j$  muestra las evaluaciones que el decisor hizo de todas las alternativas respecto al criterio  $j$ .

	Criterios			
Alternativas	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1n}$
	$a_{21}$	$a_{22}$	...	$a_{2n}$
	...	...	...	...
	$a_{m1}$	$a_{m2}$	...	$a_{mn}$

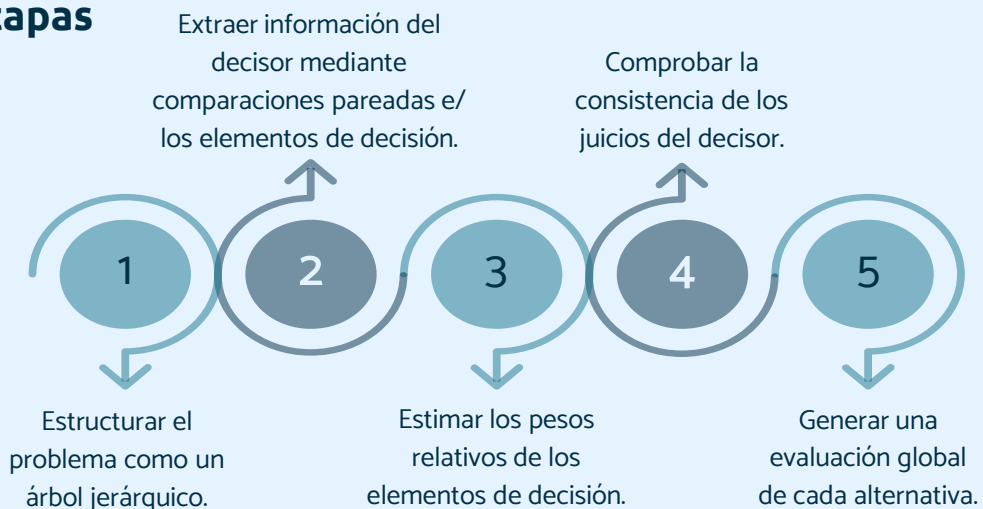
## Proceso Analítico Jerárquico

PAJ o AHP (Analytic Hierarchy Process)

## Proceso Analítico Jerárquico

- ✓ Fue desarrollado por Thomas L. Saaty (1980), está diseñado para resolver problemas complejos que tienen criterios múltiples.
- ✓ El decisor proporciona evaluaciones subjetivas respecto a la importancia relativa de cada uno de los criterios y especifica su preferencia con respecto a cada una de las alternativas de decisión para cada criterio.
- ✓ El resultado del AHP es una jerarquización con prioridades que muestra la preferencia global para cada una de las alternativas de decisión.

## Etapas



## Ejemplo AHP

Una empresa de desarrollo de software está considerando externalizar parte de su equipo de desarrollo a través de la contratación de servicios de terceros. Sin embargo, la empresa se enfrenta a la difícil tarea de seleccionar el proveedor más adecuado entre tres alternativas posibles (S1, S2 y S3).

Los criterios clave que la empresa desea evaluar son:

- Costo del servicio (↓)
- Experiencia y competencias técnicas (↑)
- Seguridad de la información (↑)
- Flexibilidad y escalabilidad (↑)

## Ejemplo AHP

Etapla 1 : Estructurar el problema como un árbol jerárquico.

Consiste en elaborar una representación gráfica del problema en términos de la meta global, los criterios y las alternativas de decisión.

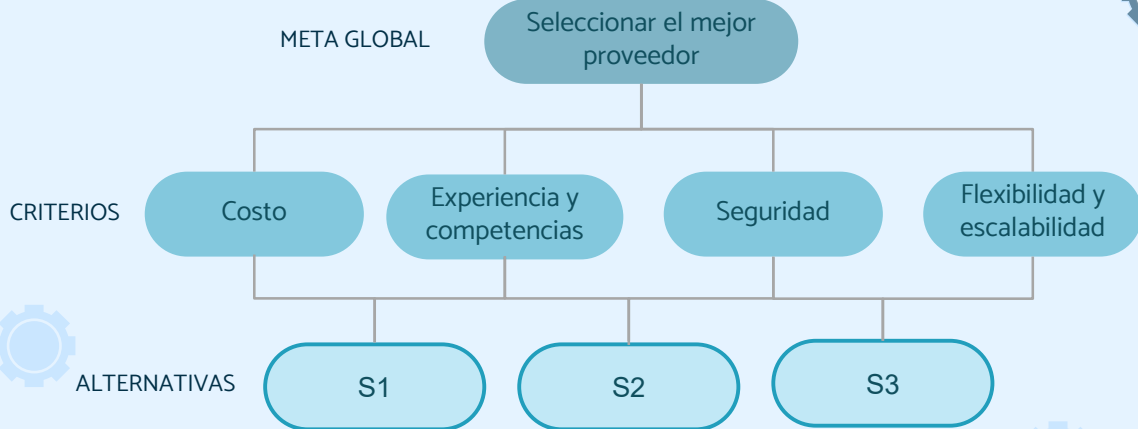
La construcción del árbol jerárquico puede realizarse de alguna de las siguientes formas.

- ✓ De arriba-abajo: de lo más general a lo más particular.
- ✓ De abajo-arriba: de lo particular a lo general.



## Ejemplo AHP

### ARBOL JERÁRQUICO



## Ejemplo AHP

Etapa 2: Realizar comparaciones pareadas entre los elementos de decisión.  
Comparación de criterios entre sí y entre alternativas con respecto a cada criterio.



### Escala Fundamental (Saaty)

Planteamiento verbal de la preferencia	Calificación Numérica
Importancia o preferencia absoluta	9
Importancia o preferencia muy fuerte o demostrada	7
Notablemente más importante ó preferible	5
Moderadamente importante o preferible	3
Igualmente importante ó preferible	1
Valores intermedios	2,4,6,8



## Ejemplo AHP

Comparación pareada entre criterios

	C	EC	S	FE
C	1	3	1	5
EC	1/3	1	1/3	2
S	1	3	1	4
FE	1/5	1/2	1/4	1

Si la importancia de C con respecto a EC es 3 (moderadamente más importante), entonces, 1/3 será la medida que refleja el juicio del decisor al comparar EC con C.

## Ejemplo AHP

Comparación pareada de alternativas frente a cada criterio

Prioridades de los tres proveedores en términos de cada criterio.

C	S1	S2	S3
S1	1	2	3
S2	1/2	1	2
S3	1/3	1/2	1

EC	S1	S2	S3
S1	1	1/2	1/4
S2	2	1	1/3
S3	4	3	1

S	S1	S2	S3
S1	1	1/6	1/3
S2	6	1	3
S3	3	1/3	1

FE	S1	S2	S3
S1	1	1/4	1/7
S2	4	1	1
S3	7	1	1

## Ejemplo AHP

Etapa 3: Estimar las ponderaciones o pesos relativos de los elementos de decisión.

Procedimiento de calculo de 2 pasos:

1. Para cada una de las matrices obtenidas en la etapa anterior -  $A[ij]$  - obtener la matriz normalizada -  $Anorm$  - dividiendo cada elemento de la columna  $j$  por la suma de los elementos de la columna  $j$ .
2. Estimar cada peso ( $w_i$ ) como el promedio de los elementos de la fila  $i$  de la matriz normalizada. Estos promedios proporcionan una estimación de las prioridades relativas de los elementos que se comparan.

## Ejemplo AHP

Paso 1: Sumar los valores de cada columna

	C	EC	S	FE
C	1	3	1	5
EC	1/3	1	1/3	2
S	1	3	1	4
FE	1/5	1/2	1/4	1
SUMA	2,53	7,50	2,58	12,00

Dividir cada elemento de la matriz entre el total de su columna ( $Anorm$ )

$Anorm$	C	EC	S	FE
C	0,3947	0,4000	0,3871	0,4167
EC	0,1316	0,1333	0,1290	0,1667
S	0,3947	0,4000	0,3871	0,3333
FE	0,0789	0,0667	0,0968	0,0833

$$\frac{1}{2,53}$$

## Ejemplo AHP

Paso 2 : Promediar los elementos de cada fila (vector de prioridades)

	C	EC	S	FE	Pesos (wi)
C	0,3947	0,4000	0,3871	0,4167	0,3996
EC	0,1316	0,1333	0,1290	0,1667	0,1402
S	0,3947	0,4000	0,3871	0,3333	0,3788
FE	0,0789	0,0667	0,0968	0,0833	0,0814

## Ejemplo AHP

Matriz Normalizada y Pesos de las comparaciones entre alternativas

C	S1	S2	S3	Wi
S1	0,5455	0,5714	0,5000	0,5390
S2	0,2727	0,2857	0,3333	0,2973
S3	0,1818	0,1429	0,1667	0,1638

EC	S1	S2	S3	Wi
S1	0,1429	0,1111	0,1579	0,1373
S2	0,2857	0,2222	0,2105	0,2395
S3	0,5714	0,6667	0,6316	0,6232

S	S1	S2	S3	Wi
S1	0,1000	0,1111	0,0769	0,0960
S2	0,6000	0,6667	0,6923	0,6530
S3	0,3000	0,2222	0,2308	0,2510

FE	S1	S2	S3	Wi
S1	0,0833	0,1111	0,0667	0,0870
S2	0,3333	0,4444	0,4667	0,4148
S3	0,5833	0,4444	0,4667	0,4981

## Ejemplo AHP

Etapa 4: Comprobar la consistencia de los juicios del decisor.

Se debe determinar la calidad final de la decisión, es decir, la consistencia de los juicios que muestra el decisor en el transcurso de la serie de comparaciones pareadas.



Se calcula la relación de consistencia (RC) de cada matriz de comparaciones pareadas (dim > 2x2).

$$RC = \frac{IC}{IA}$$

IC = Índice de consistencia

IA = Índice aleatorio

→ Si  $RC \leq 0,10$  entonces la matriz considerada no presenta inconsistencias serias.

## Ejemplo AHP

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}$$

n = número de elementos que se comparan

$\lambda_{\max}$  = valor propio de la matriz

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(Aw_i)}{w_i}$$

IA calculado para matrices cuadradas de orden n:

N° de Alternativas	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor IA	0	0,58	0,9	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

## Ejemplo AHP

**Paso 1:** Cálculo del Vector de suma ponderada (matriz de criterios)

$$AW = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/2 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3996 \\ 0,1402 \\ 0,3788 \\ 0,0814 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6060 \\ 0,5625 \\ 1,5246 \\ 0,3261 \end{bmatrix}$$

$$AW = 0,3996 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix} + 0,1402 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix} + 0,3788 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} + 0,0814 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,6060 \\ 0,5625 \\ 1,5246 \\ 0,3261 \end{bmatrix}$$

**Paso 2:** Dividir los elementos del vector de sumas ponderadas AW por el correspondiente valor de prioridad.

$$\begin{pmatrix} \frac{1,6060}{0,3996} & \frac{0,5625}{0,1402} & \frac{1,5246}{0,3788} & \frac{0,3261}{0,0814} \end{pmatrix}$$

## Ejemplo AHP

**Paso 3:**

$$\lambda_{\max} = \frac{1}{4} \left( \frac{1,6060}{0,3996} + \frac{0,5625}{0,1402} + \frac{1,5246}{0,3788} + \frac{0,3261}{0,0814} \right) = 4,0155$$

Calcular el Índice de Consistencia para n=4

$$IC = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} = \frac{4,0155 - 4}{3} = 0,0052$$



$$RC = \frac{IC}{IA} = \frac{0,0052}{0,9} = 0,0058 < 0,10$$

## Ejemplo AHP

Etapla 5: Generar la evaluación global de cada alternativa por medio de una ponderación lineal con los valores obtenidos en la etapa 3.

- ✓ De esta evaluación global surgirá la “mejor alternativa” para el decisor
- ✓ Con los vectores prioridades de las alternativas construimos una matriz que resume las prioridades de cada una de ellas con respecto a cada uno de los criterios, a la que llamaremos matriz de prioridades P[rij]

P[rij]	C	EC	S	FE
S1	0,5390	0,1373	0,0960	0,0870
S2	0,2973	0,2395	0,6530	0,4148
S3	0,1638	0,6232	0,2510	0,4981

## Ejemplo AHP

Etapla 5: Generar la evaluación global de cada alternativa por medio de una ponderación lineal con los valores obtenidos en la etapa 3.

- ✓ Luego a través de una ponderación lineal con el vector de prioridades de los criterios, obtenemos la ponderación global de las alternativas.

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot w_j$$

	C	EC	S	FE		
S1	0,5390	0,1373	0,0960	0,0870	$= \begin{bmatrix} 0,2781 \\ 0,4335 \\ 0,2884 \end{bmatrix}$	
S2	0,2973	0,2395	0,6530	0,4148		
S3	0,1638	0,6232	0,2510	0,4981		

## Ejemplo AHP

La prioridad global para cada alternativa de decisión se obtiene sumando el producto de la prioridad del criterio por la prioridad de la alternativa de decisión con respecto a ese criterio.



Prioridad global S1

$$0,5390(0,3996)+0,1373(0,1402)+0,0960(0,3788)+0,0870(0,0814)=0,2781$$

Prioridad global S2

$$0,2973(0,3996)+0,2395(0,1402)+0,6530(0,3788)+0,4148(0,0814)=0,4335$$

Prioridad global S3

$$0,1638(0,3996)+0,6232(0,1402)+0,2510(0,3788)+0,4981(0,0814)=0,2884$$

## Ejemplo AHP

### Jerarquización final de las alternativas

Con la prioridad global de cada alternativa se puede construir una jerarquización final.

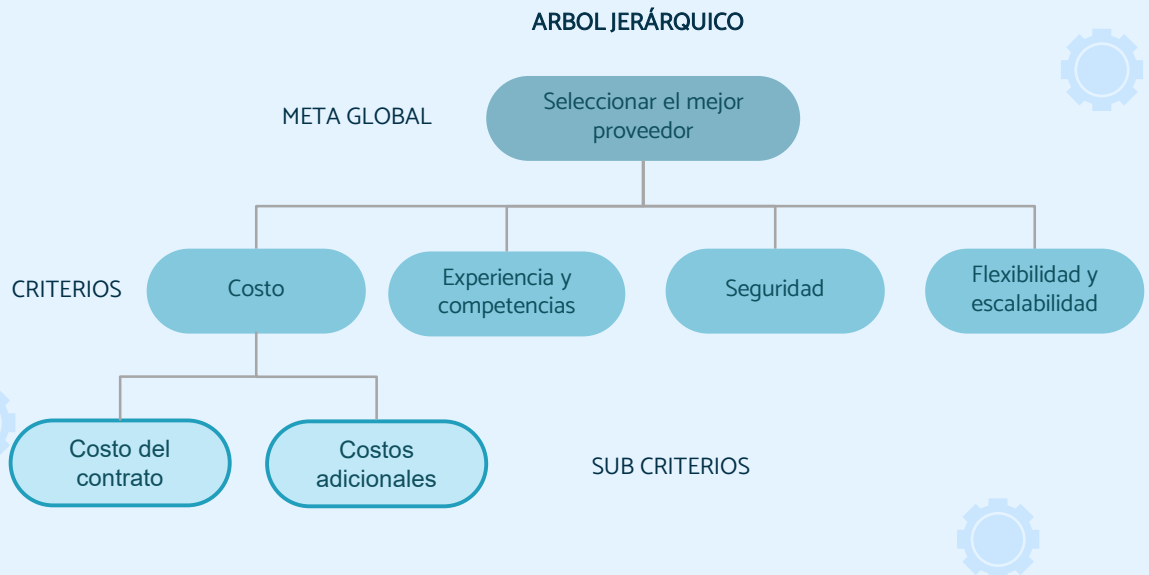
Alternativa	Prioridad global
S1	0.2788
S2	0.4335
S3	0.2884
	$\Sigma=1.000$



El proveedor S2 tiene la mejor prioridad global (selección final)



## AHP con Subcriterios



## Ejemplo AHP con Subcriterios

Comparación pareada entre criterios

	C	EC	S	FE	Pesos (wi)
C	1	3	1	5	0,3996
EC	1/3	1	1/3	2	0,1402
S	1	3	1	4	0,3788
FE	1/5	1/2	1/4	1	0,0814

## Ejemplo AHP con Subcriterios

Comparación pareada entre sub criterios (costo)

COSTO	CA	CE	Pesos (wi)
CC	1	1	0,5
CA	1	1	0,5

## Ejemplo AHP con Subcriterios

Comparación pareada de alternativas frente a cada criterio

EC	S1	S2	S3	Wi
S1	1	1/2	1/4	0,1373
S2	2	1	1/3	0,2395
S3	4	3	1	0,6232

S	S1	S2	S3	Wi
S1	1	1/6	1/3	0,0960
S2	6	1	3	0,6530
S3	3	1/3	1	0,2510

FE	S1	S2	S3	Wi
S1	1	1/4	1/7	0,0870
S2	4	1	1	0,4148
S3	7	1	1	0,4981

## Ejemplo AHP con Subcriterios

Comparación pareada de alternativas frente a cada sub criterio (costo)

CC	S1	S2	S3	Wi
S1	1	3	1	0,4286
S2	1/3	1	1/3	0,1429
S3	1	3	1	0,4286

CA	S1	S2	S3	Wi
S1	1	6	3	0,6530
S2	6	1	1/3	0,0960
S3	3	1	1	0,2510

## Ejemplo AHP con Subcriterios

Eta 5: Generar la evaluación global de cada alternativa

$$U(A_i) = \sum_{j=1}^n r_{ij} \cdot w_j$$

PESO CRITERIO x PESO SUBCRITERIO

	CC	CA	EC	S	FE		
						$0,3996 \times 0,5$ $0,3996 \times 0,5$	
S1	0,4286	0,6530	0,1373	0,0960	0,0870	0,1402	0,2788
S2	0,1429	0,0960	0,2395	0,6530	0,4148	0,3788	0,3624
S3	0,4286	0,2510	0,6232	0,2510	0,4981	0,0814	0,3588



## Referencias

---

Alberto C. L., Carignano C E. (2013) “Apoyo Cuantitativo a las Decisiones”. Cuarta Edición. Asociación Cooperadora de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNC

---

Anderson David R., Sweeney Dennis J., Williams Thomas A. (2004) “Introducción a los Modelos Cuantitativos para Administración”. Grupo Editorial Iberoamericana.

---

Taha. H. A. “Investigación de Operaciones” (9°ed). México: Pearson Education, 2012.

