String Matching

Algoritmos y Estructuras de Datos I

Strings

- Llamamos un string a una secuencia de **Char**.
- Los strings no difieren de las secuencias sobre otros tipos, dado que habitualmente no se utilizan operaciones particulares de los **Char**s.
- Los strings aparecen con mucha frecuencia en diversas aplicaciones.
  1. Palabras, oraciones y textos.
  2. Nombres de usuario y claves de acceso.
  3. Secuencias de ADN.
  4. Código fuente!
  5. ...
- El estudio de algoritmos sobre strings es un tema muy importante.

Búsqueda de un patrón en un texto

- **Problema:** Dado un string t (texto) y un string p (patrón), queremos saber si p se encuentra dentro de t.
- **Notación:** La función $subseq(t, d, h)$ es el al substring de d entre i y $h-1$ (inclusive). Lo abreviamos como $subseq(t, d, h)$
- proc $contiene(\text{in } t, p : seq\langle Char\rangle, \text{out } result : \text{Bool})\{$

  Pre $\{True\}$
  Post $\{result = true \leftrightarrow (\exists i : \mathbb{Z})(0 \leq i \leq |t| - |p| \wedge_L subseq(t, i, i + |p|) = p)\}$

  $\}$
- ¿Cómo resolvemos este problema?

Función Auxiliar `matches`

- Implementemos una función auxiliar con la siguiente especificación:
- proc $matches(\text{in } s : seq\langle Char\rangle, \text{in } i : \mathbb{Z}, \text{in } r : seq\langle Char\rangle, \text{out } result : \text{Bool})\{$

  Pre $\{0 \leq i < |s| - |p| \wedge |r| \leq |s|\}$
  Post $\{result = true \leftrightarrow subseq(s, i, i + |r|) = r\}$

  $\}$

Función Auxiliar `matches`

```
1  bool matches(string &s, int i, string &r) {
2    bool result = true;
3    for (int k = 0; k < r.size() ; k++) {
4      if (s[i+k]!=r[k]) {
5        result = false;
6      }
7    }
8    return result;
9  }
```

¿Se puede hacer que sea más eficiente?

Función Auxiliar `matches`

```
1  bool matches(string &s, int i, string &r) {
2      int k = 0;
3      while (k < r.size() && s[i+k]==r[k]) {
4          k++;
5      }
6      return k == r.size();
7  }
```

Este programa se interrumpe tan pronto como detecta una desigualdad.

Función Auxiliar `matches`

```
1  bool matches(string &s, int i, string &r) {
2
3      for (k = 0; k < r.size() && s[i+k]==r[k]; k++) {
4          // skip
5      }
6      return k == r.size();
7  }
```

Este programa se interrumpe tan pronto como detecta una desigualdad.

Búsqueda de un patrón en un texto

- **Algoritmo sencillo:** Recorrer todas las posiciones i de t, y para cada una verificar si $subseq(t, i, i + |p|) = p$.
-
```
1  bool contiene(string &t, string &p) {
2
3    for (int i = 0; i + p.size() <= t.size() && !matches(t,i,p); i++) {
4      // skip
5    }
6    return i + p.size() < t.size() && matches(t,i,p);
7  }
```

- `matches` es una función auxiliar definida anteriormente.

Búsqueda de un patrón en un texto

- ¿Es eficiente este algoritmo?
- El ciclo principal realiza $|t| - |p|$ iteraciones. Sin embargo, la comparación de los substrings de t puede ser costosa si p es grande
  1. La comparación `matches(t,i,p)` requiere realizar $|p|$ comparaciones entre chars.
  2. Por cada iteración del ciclo "for", se realizan $|p|$ de estas comparaciones.
  3. En por caso, realizamos $(|t| - |p|) * |p|$ iteraciones.
- Aunque el algoritmo es eficiente si $|p|$ se aproxima a $|t|$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- En 1977, Donald Knuth, James Morris y Vaughan Pratt propusieron un algoritmo más eficiente.
- **Idea:** Tratar de no re analizar todo el patrón cada vez que avanzamos en el texto.
- Mantenemos dos índices l y r a la secuencia, con el siguiente invariante:
  1. $0 \leq l \leq r \leq |t|$
  2. $subseq(t, l, r) = subseq(p, 0, r - l)$
  3. No hay apariciones de p en $subseq(t, 0, r)$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Planteamos el siguiente esquema para el algoritmo.

```
1  bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
2    int l = 0, r = 0;
3    while( r < t.size() ) {
4      // Aumentar l o r
5      // Verificar si encontramos p
6    }
7    return result;
8  }
```

- ¿Cómo aumentamos l o r preservando el invariante?

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

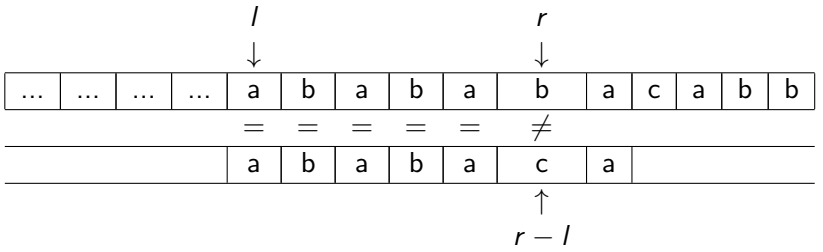
- Si $r - l = |p|$, entonces encontramos p en t.
- Si $r - l < |p|$, consideramos los siguientes casos:
  1. Si $t[r] = p[r - l]$, entonces encontramos una nueva coincidencia, y entonces incrementamos r para reflejar esta nueva situación.
  2. Si $t[r] \neq p[r - l]$ y $l = r$, entonces no tenemos un prefijo de p en el texto, y pasamos al siguiente elemento de la secuencia avanzando l y r.
  3. Si $t[r] \neq p[r - l]$ y $l < r$, entonces debemos avanzar l. ¿Cuánto avanzamos l en este caso? ¡Tanto como podamos! (más sobre este punto a continuación)

Algoritmo (parcial) de Knuth, Morris y Pratt

```
1  bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
2    int l = 0, r = 0;
3    while( r < t.size() && r−l < p.size()) {
4      if( t[r] == p[r−l] ){
5        r++;
6      } else if( l == r ) {
7        r++;
8        l++;
9      } else {
10       l = // avanzar l
11     }
12   }
13   return r−l == p.size();
14 }
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¿Cuánto podemos avanzar `l` en el caso que $t[r] \neq p[r-l]$ y $l < r$?
- El invariante implica que $subseq(t, l, r) = subseq(p, 0, r-l)$, pero esta condición dice que $subseq(t, l, r+1) \neq subseq(p, 0, r-l+1)$.
- Ejemplo:



- ¿Hasta donde puedo avanzar l?

Bifijos: Prefijo y Sufijo simultáneamente

- **Definición:** Una cadena de caracteres b es un *bifijo* de s si $b \neq s$, b es un prefijo de s y b es un sufijo de s.
- Ejemplos:

s	bifijos
a	$\langle\rangle$
ab	$\langle\rangle$
aba	$\langle\rangle$,a
abab	$\langle\rangle$,ab
ababc	$\langle\rangle$
aaaa	$\langle\rangle$,a, aa, aaa, aaa
abc	$\langle\rangle$
ababaca	$\langle\rangle$,a

- **Observación:** Sea una cadena s, su máximo bifijo es único.

KMP: Función π

- **Definición:** Sea $\pi(i)$ la longitud del máximo bifijo de $subseq(p, 0, i)$
- Por ejemplo, sea p=abbabbaa:

i	$subseq(p, 0, i)$	Máx. bifijo	$\pi(i)$
1	a	$\langle\rangle$	0
2	ab	$\langle\rangle$	0
3	abb	$\langle\rangle$	0
4	abba	a	1
5	abbab	ab	2
6	abbabb	abb	3
7	abbabba	abba	4
8	abbabbaa	a	1

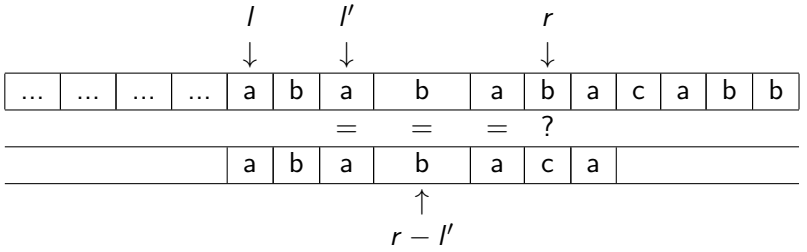
KMP: Función π

- **Definición:** Sea $\pi(i)$ la longitud del máximo bifijo de $subseq(p, 0, i)$
- Otro ejemplo, sea p=ababaca:

i	$subseq(p,0,i)$	Máx. bifijo	$\pi(i)$
1	a	$\langle\rangle$	0
2	ab	$\langle\rangle$	0
3	aba	a	1
4	abab	ab	2
5	ababa	aba	3
6	ababac	$\langle\rangle$	0
7	ababaca	a	1

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

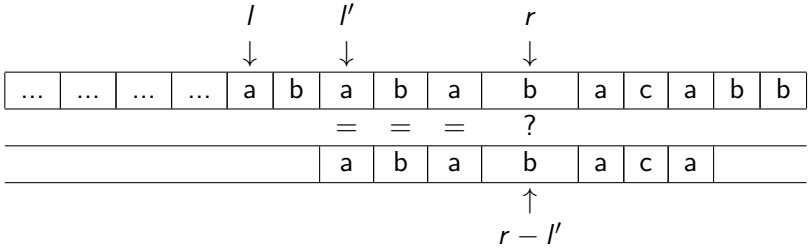
- **Ejemplo:** Supongamos que ...



- En este caso, podemos avanzar l hasta la posición *ababa* ($\pi(r-l) = \pi(5) = 3$), dado que no tendremos coincidencias en las posiciones anteriores.
- Por lo tanto, en este caso fijamos $l' = r - \pi(r-l)$.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- **Ejemplo:** Supongamos que ...



- En este caso, podemos avanzar l hasta la posición *ababa* ($\pi(r-l) = \pi(5) = 3$), dado que no tendremos coincidencias en las posiciones anteriores.
- Por lo tanto, en este caso fijamos $l' = r - \pi(r-l)$.

Algoritmo (parcial) de Knuth, Morris y Pratt

```
1  bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
2    int l = 0, r = 0;
3    while( r < t.size() && r−l < p.size()) {
4      if( t[r] == p[r−l] ){
5        r++;
6      } else if( l == r ) {
7        r++;
8        l++;
9      } else {
10       l = r − calcular_pi(r−l);
11     }
12   }
13   return r−l == p.size();
14 }
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¿Se cumplen los tres puntos del teorema del invariante?
  1. El invariante vale con $l = r = 0$.
  2. Cada caso del `if...` preserva el invariante.
  3. Al finalizar el ciclo, el invariante permite retornar el valor correcto.
- ¿Cómo es una función variante para este ciclo?
  - Notar que en cada iteración se aumenta l o r (o ambas) en al menos una unidad.
  - Entonces, una función variante puede ser:

$$fv = (|t| - l) + (|t| - r) = 2 * |t| - l - r$$

  - Es fácil ver que se cumplen los dos puntos del teorema de terminación del ciclo, y por lo tanto el ciclo termina.

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- Para completar el algoritmo debemos calcular $\pi(i)$.
- Podemos implementar una función auxiliar, pero una mejor idea es precalcular estos valores y guardarlos en un vector (¿por qué?).
- Para este precálculo, recorremos p con dos índices i y j, con el siguiente invariante:
  1. $0 \leq i < j \leq |p|$
  2. $pi[k] = \pi(k+1)$ para $k = 0, \ldots, j-1$ (vector empieza en 0)
  3. i es la longitud del máximo bifijo para $subseq(p, 0, j)$.
  4. $0 \leq \pi(j) \leq i+1$

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

```
1  vector<int> precalcular_pi(string &p) {
2    int i = 0, j = 1;
3    vector<int> pi(p.size()); // inicializado en 0
4    pi[0] = 0; // valor de \pi para 1
5    while( j < p.size()) {
6      // Si no coincide busco bifijo mas chico
7      while(i>0 && p[i] != p[j])
8        i = pi[i-1];
9
10     // Si coincide, aumento tamano bifijo
11     if( p[i] == p[j] )
12       i++;
13
14     pi[j] = i;
15     j++;
16   }
17   return pi;
18 }
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¡Es importante observar que sin el invariante, es muy difícil entender este algoritmo!
- Cómo es una función variante adecuada para el ciclo?
  1. Para el loop interno? $fv = i$
  2. y para el externo? $fv = |p| - j$.
- Y la complejidad?
  1. siempre se incrementa j
  2. i disminuye a lo sumo $|p|$ veces considerando todas las iteraciones!
- O sea, en el peor caso se realizan $O(|p|)$ operaciones.

Algoritmo (completo) de Knuth, Morris y Pratt

```
1  bool contiene_kmp(string &t, string &p) {
2    int l = 0, r = 0;
3    vector<int> pi = precalcular_pi(p);
4    while( r < t.size() && r-l < p.size()) {
5      if( t[r] == p[r-l] ){
6        r++;
7      } else if( l == r ) {
8        r++;
9        l++;
10     } else {
11       l = r - pi[r-l-1];
12     }
13   }
14   return r-l == p.size();
15 }
```

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

¿Es realmente mejor la eficiencia de KMP en comparación con la solución trivial?

Veamos como funciona cada algoritmo en la computadora

`http://whocouldthat.be/visualizing-string-matching/`

Algoritmo de Knuth, Morris y Pratt

- ¿Es realmente mejor la eficiencia de KMP en comparación con la solución trivial?
  - El algoritmo naïve realiza, en peor caso, $|t| * |p|$ iteraciones.
  - El algoritmo kmp realiza, en peor caso, $|t| + |p|$ iteraciones
- Por lo tanto, comparando sus peores casos, el algoritmo KMP es más eficiente (menos iteraciones) que el algoritmo naïve.
- Existen más algoritmos de búsqueda de strings (o string matching):
  - Rabin-Karp (1987)
  - Boyer-Moore (1977)
  - Aho-Corasick (1975)

Bibliografía

- David Gries - The Science of Programming
  - Chapter 16 - Developing Invariants (Linear Search, Binary Search)
- Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, Clifford Stein- Introduction to Algorithms, 3rd edition
  - Chapter 32.1 The naive string-matching algorithm
  - Chapter 32.4 The Knuth-Morris-Pratt algorithm