Índice general

Capítulo 1

Conocer la Teoría de Juegos

1.1. ¿Qué es un juego?

Cuando en la vida cotidiana llamamos juego a algo nos referimos a un divertimento en el que una o varias personas participan (véase el solitario, ajedrez o el poker). En estos juegos los participantes tienen que cumplir una serie de reglas, y como resultado de sus decisiones pueden ganar, pero también perder. En este proyecto nos centraremos en los juegos con una o mas personas

En ellos los jugadores intentan maximizar sus resultados, es decir, en el caso del poker ganar el mayor dinero posible, en ajedrez vencer al rival lo mas rápido que puedan, etc. Todo esto los jugadores lo hacen sabiendo que el resultado del juego depende no solo de ellos sino de lo que hagan los demás jugadores. Pero estas situaciones no solo se da en los juegos que conocemos como tal, sino en situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, cuando salimos del trabajo un viernes y cogemos el coche para volver a casa, queremos hacerlo en el menor tiempo posible, pero tenemos otros jugadores (no somos los únicos que queremos volver a casa una vez terminado ese dia) y una serie de reglas, como no saltarnos los limites de velocidad y respetar los semáforos.

Así pues, en adelante nos referiremos como juego a una situación en la que varias personas interaccionan entre ellas y en la que el resultado de cada uno no dependen solo de la estrategia que sigan ellos sino de la de los demás jugadores.

A continuación definiremos una serie de términos que nos acompañarán a lo largo del trabajo:

- **Jugadores**

Son los participantes del juego. Supondremos que actuan como seres racionales

- **Reglas**

Son las condiciones en las que participan los jugadores. Podemos diferenciar en:

Acciones de los jugadores Son las decisiones que puede tomar cada jugador en su turno de juego

Información Conjunto de saberes que los jugadores tienen sobre las acciones ya realizadas durante el juego

Estrategia Definimos estrategia como el conjunto completo de movimientos que tomaría el jugador en cada instante del juego.

Pagos Utilidad o valoración que recibe cada jugador al terminar el juego. Puede ser económica o no.

1.2. Principio de racionalidad

Al comienzo se ha comentado que suponíamos que los agentes o jugadores actuaban de forma racional. En esta sección se estudiara que significa que un jugador actúe de tal manera.

Partimos del supuesto de que los agentes o jugadores, ya sean personas, empresas o gobiernos tienen deseos y preferencias de que tanto quieren obtener del juego. Una vez que estos jugadores han establecido cuales son sus preferencias, el principio de racionalidad establece que actuará en función de las mismas, es decir estaríamos en todo momento buscando nuestro máximo beneficio posible. De esta manera el agente actua únicamente en función de sus preferencias y no se deja influir por la de los demás.

Esto no significa que el agente siempre actue en contra de los demás jugadores del juego necesariamente. Por ejemplo si su máxima preferencia es el bienestar por igual para todos los jugadores esto no es negativo para el resto. No obstante, el comportamiento usual es el egoísta, en el que cada agente busca su máximo beneficio sin importarle las consecuencias para los otros jugadores. A este comportamiento lo llamaremos comúnmente auto-interesado que aunque no sean lo mismo en muchas ocasiones llegan a coincidir

Las preferencias de cada agente son privadas y este las revela con sus acciones y no previamente, para así evitar beneficiar a otros. Las preferencias podemos establecerlas como relaciones binarias entre las distintas alternativas o acciones que maneja cada jugador.

Con certidumbre, tendremos un conjunto de acciones $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, un conjunto de resultados que se derivan de tales acciones $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, y una función $x : A \to R$ estableciendo que a cada opción le corresponde un único resultado (aplicación binaria) así tenemos una correspondencia biunívoca entre ambas e identificamos la decisión con el resultado. Cuando trabajamos en ambientes de incertidumbre las preferencias solo se identifican con acciones puesto que no estamos seguros de que resultado podemos obtener de ellas.

Definimos la relación binaria R de preferencia entre dos resultados x_iRx_j para dos resultados cualesquiera x_i, x_j (x_i se prefiere a x_j), es decir que el resultado x_i es mejor o igual que el resultado x_j. A este tipo de preferencia se le conoce como preferencia débil, mientras que si no solo se cumple esta relación, sino que no se da la reciproca (no ocurre que x_jRx_i) entonces hablamos de de preferencia estricta que se representa con una P. También podemos la relación de indiferencia si da igual preferir un resultado que otro: x_iIx_j si y solo si x_iRx_j y x_jRx_i.

Por lo tanto consideramos que el agente es racional cuando actúa en función de sus preferencias y estas tienen una jerarquía interna. Estas deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Completitud:
$$\forall x_i, x_j, \quad x_iRx_j \text{ ó } x_jRx_i \text{ ó } (x_iRx_j \ y \ x_jRx_i)$$
2. Reflexividad:
$$\forall x_i,\ x_iRx_i$$
3. Transitividad:
$$\forall x_i, x_j, x_k \ \text{ tenemos que si: } \ x_iRx_j \ y \ x_jRx_k \quad \to x_iRx_k$$
Con esta propiedad evitamos la inconsistencia de las elecciones

1.3. Utilidad

Ya tenemos establecidas las relaciones de preferencia entre las distintas alternativas de manera racional como hemos explicado en el apartado anterior. Una vez tenemos esto, para simplificar las operaciones, traducimos estas preferencias a un orden cuantitativo mediante una función $U \ : \ X \to \mathbb{R}$ que le asigna un valor real a cada una de las preferencias. Así, en vez de hablar por ejemplo de $\exists\ x_i/\ \forall x_j \in X,\ x_j \neq x_i$ se tiene que: x_iRx_j hablamos de manera cuantitativa como $\exists x_i/\ \forall x_j \in X, x_j \neq x_i,\ U(x_i) \geq U(x_j)$ Este hecho (de que se cumpla que la utilidad de la alternativa preferida es mayor que la del resto de alternativas) solo lo tenemos en el caso de que trabajemos en un ámbito de certidumbre:

Ejemplo Imaginemos que nos encontramos con 3 alternativas: $X = \{\text{coche gratis}, 2 \text{ semanas de vacac}$ para simplificar, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ con las siguientes preferencias: $x_2Rx_3,\ x_2Rx_1 \ y \ x_1Rx_3$ les asignamos un valor o utilidad a cada una de estas alternativas (una utilidad) que exprese de manera numérica estas preferencias: $U \ : \ X \to \mathbb{R}$ tal que $U(x_2) = 10,\ U(x_1) = 5 \ y \ U(x_3) = 0$

Si nos encontramos en un ámbito de incertidumbre no podemos asegurarnos de que una vez establecidas las preferencias, estas tengan una utilidad que exprese esa preferencia. En este caso nos encontramos una serie de estados de la naturaleza $E = \{e_1, \cdots, e_p\}$ tal que en función de la alternativa que decidamos $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ tendremos unos resultados $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ que dependen de ambos.

Ejemplo Tenemos los siguientes estados de la naturaleza $E = \{e_1 = \text{Sequía}, e_2 = \text{Lluvia}\}$ las alternativas $A = \{a_1 = \text{Recolectar ahora}, a_2 = \text{Recolectar en un mes}\}$ y se pueden producir los siguientes resultados $X = \{x_1 = \text{Ganancias}, x_2 = \text{Pérdidas}\}$ que siguen la siguiente relación:

	Sequía e_1	*Lluvia* e_2
a_1	*Ganancias*	*Pérdidas*
a_2	*Pérdidas*	*Ganancias*

Así pues el resultado que obtendremos dependerá de la decisión que tomemos y el estado de la naturaleza que se presente. Por tanto, para calcular la utilidad esperada de una acción cualquiera tendremos que calcular:

Sea a una acción cualquiera,
$$U(a) = \sum_{e \in E} p(e)U(x(a,e)),\ \sum_{e \in E} p(e) = 1$$

donde e son los estados de la naturaleza y $U(x(a,e))$ es la utilidad de elegir la alternativa a cuando ocurre el estado e de la naturaleza.

1.4. Utilidad de Von Neumann-Morgenstern y actitudes ante el riesgo

Venimos buscando asociar a cada alternativa un orden de preferencia. Las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern tenemos un metodo no arbitrario para asignar valores numéricos a los resultados. Para explicar esto comentamos una serie de definiciones básicas en este aspecto

Definición

Una lotería simple en X es una distribución de probabilidad en X. Es decir, se dice que L es una lotería simple en X si:

$L = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \ p_i \geq 0, \ para\ cada\ i = 1, 2, \cdots, n, \ y \ \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 0\}$, donde p_i es la probabilidad de que ocurra la alternativa $a_i, \ i = 1, \cdots, n$

A partir de esta definición podemos definir el siguiente conjunto:

$$L_A = \{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, i = 1, \cdots, n \ y \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 1\}$$

Conjunto de todas las loterías simples sobre un conjunto de alternativas A.

Ahora ya estamos en condiciones de definir las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Definición

Así pues, una función $U : \ L_A \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (VN-M) si existen n números $u_1, \cdots, u_n$, asociados a $a_1, \cdots, a_n$ tales que para cada lotería $L \in L_A$ se verifica: $U(L) \ = \ u_1 p_1 \ + u_2 p_2 \ + \ \cdots \ u_n p_n$

A continuación enunciamos el Teorema de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Teorema

Supongamos la relación de preferencia R sobre L_A en las condiciones estudiadas. Entonces R admite una representación en forma de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, es decir, existen $u(a_1), \cdots, u(a_n)$, tales que

$$\forall L, L' \in L_A, \ L = (p_1, \cdots, p_n) \ y \ L' = (p'_1, \cdots, p'_n) \iff \sum_{i=1,\cdots,n} p_i u(a_i) \geq \sum_{i=1,\cdots,n} p'_i u(x_i)$$

1.4.1. Actitudes ante el riesgo

En este Apartado trabajaremos suponiendo que $A = \mathbb{R}$

Decimos que un agente es si el valor esperado de cualquier lotería L es tan preferida o mas que dicha lotería. Si ocurre al contrario, que la lotería sea igual o mas preferida que su valor esperado decimos que el agente es propenso al riesgo. Si tenemos una situación de indiferencia, decimos que el agente es neutral.

En términos de la función de utilidad u tenemos el siguiente teorema:

Sea una función de utilidad $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente creciente y de clase $C^2(\mathbb{R})$ entonces:

1. Si $u^{''}(x) \leq 0, \; \forall \, x \in \; [a, b]$, es decir, u es cóncava, entonces el jugador es conservador.
2. Si $u^{''}(x) \geq 0, \; \forall \, x \in \; [a, b]$, es decir, u es convexa, entonces el jugador es arriesgado.
3. Si $u^{''}(x) = 0, \; \forall \, x \in \; [a, b]$, es decir, u es lineal, entonces el jugador es indiferente al riesgo.