Doble Grado en
Matemáticas y Estadística

TRABAJO FIN DE GRADO

Teoría de Juegos aplicada a los juegos de azar

Carlos Manzano Díaz

Sevilla, Enero de 2025

Índice general

Prólogo

Escrito colocado al comienzo de una obra en el que se hacen comentarios sobre la obra o su autor, o se introduce en su lectura; a menudo está realizado por una persona distinta del autor.

También se podrían incluir aquí los agradecimientos.

Resumen

Resumen...

Abstract

Abstract…

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Conocer la Teoría de Juegos

1.1. ¿Qué es un juego?

Cuando en la vida cotidiana llamamos juego a algo nos referimos a un divertimento en el que una o varias personas participan (véase el solitario, ajedrez o el poker). En estos juegos los participantes tienen que cumplir una serie de reglas, y como resultado de sus decisiones pueden ganar, pero también perder. En este proyecto nos centraremos en los juegos con una o mas personas

En ellos los jugadores intentan maximizar sus resultados, es decir, en el caso del poker ganar el mayor dinero posible, en ajedrez vencer al rival lo mas rápido que puedan, etc. Todo esto los jugadores lo hacen sabiendo que el resultado del juego depende no solo de ellos sino de lo que hagan los demás jugadores. Pero estas situaciones no solo se da en los juegos que conocemos como tal, sino en situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, cuando salimos del trabajo un viernes y cogemos el coche para volver a casa, queremos hacerlo en el menor tiempo posible, pero tenemos otros jugadores (no somos los únicos que queremos volver a casa una vez terminado ese dia) y una serie de reglas, como no saltarnos los limites de velocidad y respetar los semáforos.

Así pues, en adelante nos referiremos como juego a una situación en la que varias personas interaccionan entre ellas y en la que el resultado de cada uno no dependen solo de la estrategia que sigan ellos sino de la de los demás jugadores.

A continuación definiremos una serie de términos que nos acompañarán a lo largo del trabajo:

- **Jugadores**

Son los participantes del juego. Supondremos que actuan como seres racionales

- **Reglas**

Son las condiciones en las que participan los jugadores. Podemos diferenciar en:

Acciones de los jugadores: Son las decisiones que puede tomar cada jugador en su turno de juego

Información: Conjunto de saberes que los jugadores tienen sobre las acciones ya realizadas durante el juego

Estrategia: Definimos estrategia como el conjunto completo de movimientos que tomaría el jugador en cada instante del juego.

Pagos: Utilidad o valoración que recibe cada jugador al terminar el juego. Puede ser económica o no.

1.2. Principio de racionalidad

Al comienzo se ha comentado que suponíamos que los agentes o jugadores actuaban de forma racional. En esta sección se estudiara que significa que un jugador actúe de tal manera.

Partimos del supuesto de que los agentes o jugadores, ya sean personas, empresas o gobiernos tienen deseos y preferencias de que tanto quieren obtener del juego. Una vez que estos jugadores han establecido cuales son sus preferencias, el principio de racionalidad establece que actuará en función de las mismas, es decir estaríamos en todo momento buscando nuestro máximo beneficio posible. De esta manera el agente actua únicamente en función de sus preferencias y no se deja influir por la de los demás.

Esto no significa que el agente siempre actue en contra de los demás jugadores del juego necesariamente. Por ejemplo si su máxima preferencia es el bienestar por igual para todos los jugadores esto no es negativo para el resto. No obstante, el comportamiento usual es el egoísta, en el que cada agente busca su máximo beneficio sin importarle las consecuencias para los otros jugadores. A este comportamiento lo llamaremos comúnmente auto-interesado que aunque no sean lo mismo en muchas ocasiones llegan a coincidir

Las preferencias de cada agente son privadas y este las revela con sus acciones y no previamente, para así evitar beneficiar a otros. Las preferencias podemos establecerlas como relaciones binarias entre las distintas alternativas o acciones que maneja cada jugador.

Con certidumbre, tendremos un conjunto de acciones $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, un conjunto de resultados que se derivan de tales acciones $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, y una función $x : A \rightarrow R$ estableciendo que a cada opción le corresponde un único resultado (aplicación binaria) así tenemos una correspondencia biunívoca entre ambas e identificamos la decisión con el resultado. Cuando trabajamos en ambientes de incertidumbre las preferencias solo se identifican con acciones puesto que no estamos seguros de que resultado podemos obtener de ellas.

Definimos la relación binaria R de preferencia entre dos resultados $x_i R x_j$ para dos resultados cualesquiera x_i, x_j (x_i se prefiere a x_j), es decir que el resultado x_i es mejor o igual que el resultado x_j. A este tipo de preferencia se le conoce como preferencia débil, mientras que si no solo se cumple esta relación, sino que no se da la reciproca (no ocurre que $x_j R x_i$) entonces hablamos de de preferencia estricta que se representa con una P. También podemos la relación de indiferencia si da igual preferir un resultado que otro: $x_i I x_j$ si y solo si $x_i R x_j$ y $x_j R x_i$.

Por lo tanto consideramos que el agente es racional cuando actúa en función de sus preferencias y estas tienen una jerarquía interna. Estas deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Completitud:
$$\forall x_i, x_j, \quad x_iRx_j \text{ ó } x_jRx_i \text{ ó } (x_iRx_j \text{ y } x_jRx_i)$$
2. Reflexividad:
$$\forall x_i,\ x_iRx_i$$
3. Transitividad:
$$\forall x_i, x_j, x_k \text{ tenemos que si: } x_iRx_j \text{ y } x_jRx_k \quad \rightarrow x_iRx_k$$
Con esta propiedad evitamos la inconsistencia de las elecciones

1.3. Utilidad

Ya tenemos establecidas las relaciones de preferencia entre las distintas alternativas de manera racional como hemos explicado en el apartado anterior. Una vez tenemos esto, para simplificar las operaciones, traducimos estas preferencias a un orden cuantitativo mediante una función $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ que le asigna un valor real a cada una de las preferencias. Así, en vez de hablar por ejemplo de $\exists\ x_i/\ \forall x_j \in X,\ x_j \neq x_i$ se tiene que: x_iRx_j hablamos de manera cuantitativa como $\exists x_i/\ \forall x_j \in X, x_j \neq x_i,\ U(x_i) \geq U(x_j)$ Este hecho (de que se cumpla que la utilidad de la alternativa preferida es mayor que la del resto de alternativas) solo lo tenemos en el caso de que trabajemos en un ámbito de certidumbre:

Ejemplo Imaginemos que nos encontramos con 3 alternativas: $X = \{\text{coche gratis}, 2 \text{ semanas de vacac}$ para simplificar, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ con las siguientes preferencias: $x_2Rx_3,\ x_2Rx_1\ y\ x_1Rx_3$ les asignamos un valor o utilidad a cada una de estas alternativas (una utilidad) que exprese de manera numérica estas preferencias: $U : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $U(x_2) = 10,\ U(x_1) = 5\ y\ U(x_3) = 0$

Si nos encontramos en un ámbito de incertidumbre no podemos asegurarnos de que una vez establecidas las preferencias, estas tengan una utilidad que exprese esa preferencia. En este caso nos encontramos una serie de estados de la naturaleza $E = \{e_1, \cdots, e_p\}$ tal que en función de la alternativa que decidamos $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ tendremos unos resultados $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ que dependen de ambos.

Ejemplo Tenemos los siguientes estados de la naturaleza $E = \{e_1 = \text{Sequía}, e_2 = \text{Lluvia}\}$ las alternativas $A = \{a_1 = \text{Recolectar ahora}, a_2 = \text{Recolectar en un mes}\}$ y se pueden producir los siguientes resultados $X = \{x_1 = \text{Ganancias}, x_2 = \text{Pérdidas}\}$ que siguen la siguiente relación:

	Sequía e_1	*Lluvia* e_2
a_1	*Ganancias*	*Pérdidas*
a_2	*Pérdidas*	*Ganancias*

Así pues el resultado que obtendremos dependerá de la decisión que tomemos y el estado de la naturaleza que se presente. Por tanto, para calcular la utilidad esperada de una acción cualquiera tendremos que calcular:

Sea a una acción cualquiera,
$$U(a) = \sum_{e \in E} p(e)U(x(a,e)),\ \sum_{e \in E} p(e) = 1$$

donde e son los estados de la naturaleza y $U(x(a,e))$ es la utilidad de elegir la alternativa a cuando ocurre el estado e de la naturaleza.

1.4. Utilidad de Von Neumann-Morgenstern y actitudes ante el riesgo

Venimos buscando asociar a cada alternativa un orden de preferencia. Las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern tenemos un metodo no arbitrario para asignar valores numéricos a los resultados. Para explicar esto comentamos una serie de definiciones básicas en este aspecto

Definición

Una lotería simple en X es una distribución de probabilidad en X. Es decir, se dice que L es una lotería simple en X si:

$L = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \ p_i \geq 0, \ para\ cada\ i = 1, 2, \cdots, n, \ y \ \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 0\}$, donde p_i es la probabilidad de que ocurra la alternativa $a_i, \ i = 1, \cdots, n$

A partir de esta definición podemos definir el siguiente conjunto:

$$L_A = \{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, i = 1, \cdots, n \ y \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 1\}$$

Conjunto de todas las loterías simples sobre un conjunto de alternativas A.

Ahora ya estamos en condiciones de definir las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Definición

Así pues, una función $U : \ L_A \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (VN-M) si existen n números $u_1, \cdots, u_n$, asociados a $a_1, \cdots, a_n$ tales que para cada lotería $L \in L_A$ se verifica: $U(L) \ = \ u_1 p_1 \ + u_2 p_2 \ + \ \cdots \ u_n p_n$

A continuación enunciamos el Teorema de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Teorema

Supongamos la relación de preferencia R sobre L_A en las condiciones estudiadas. Entonces R admite una representación en forma de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, es decir, existen $u(a_1), \cdots, u(a_n)$, tales que

$$\forall L, L' \in L_A, \ L = (p_1, \cdots, p_n) \ y \ L' = (p'_1, \cdots, p'_n) \iff \sum_{i=1,\cdots,n} p_i u(a_i) \geq \sum_{i=1,\cdots,n} p'_i u(x_i)$$

1.4.1. Actitudes ante el riesgo

En este Apartado trabajaremos suponiendo que $A = \mathbb{R}$

Decimos que un agente es si el valor esperado de cualquier lotería L es tan preferida o mas que dicha lotería. Si ocurre al contrario, que la lotería sea igual o mas preferida que su valor esperado decimos que el agente es propenso al riesgo. Si tenemos una situación de indiferencia, decimos que el agente es neutral.

En términos de la función de utilidad u tenemos el siguiente teorema:

Sea una función de utilidad $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente creciente y de clase $C^2(\mathbb{R})$ entonces:

1. Si $u''(x) \leq 0, \ \forall \ x \in \ [a, b]$, es decir, u es cóncava, entonces el jugador es conservador.
2. Si $u''(x) \geq 0, \ \forall \ x \in \ [a, b]$, es decir, u es convexa, entonces el jugador es arriesgado.
3. Si $u''(x) = 0, \ \forall \ x \in \ [a, b]$, es decir, u es lineal, entonces el jugador es indiferente al riesgo.

Capítulo 2

Tipos y formas de un juego. Equilibrio de Nash

2.1. Tipos de juego

Juegos según el número de jugadores

Según el numero de jugadores nos encontramos con los juegos bipersonales, de 2 personas como puede ser el ajedrez, o n-personales en el que participan mas de 2 jugadores como en el poker.

Juegos cooperativos y no cooperativos

Los juegos cooperativos son aquellos en los que entre varios jugadores acuerdan no competir entre ellos sino buscar un mismo objetivo ganando o perdiendo a la misma vez. En los juegos no cooperativos, que son los casos mas generales, los jugadores deciden de forma independiente buscando sacar un beneficio máximo de las distintas situaciones.

Juegos de información completa e incompleta

En los juegos de información completa, todos los jugadores tienen tienen la misma información, conocen las estrategias que pueden seguir el resto de jugadores y las recompensas que recibirían.

Juegos simultáneos y secuenciales

En los juegos simultáneos, los jugadores toman sus decisiones a la vez, y por tanto desconocen la estrategia que va a seguir el resto de jugadores. Por otro lado los secuenciales los jugadores toman las decisiones uno tras otros, pudiendo modificar sus estrategias en función de las del resto de jugadores. La información que tengan del resto de los otros jugadores no tiene porque ser perfecta.

Juegos en función de la suma de los beneficios de los jugadores

Dependiendo de la suma de los beneficios entre todos los jugadores encontramos tres casos:

*Suma cero: En esta clase de juegos, uno de los jugadores se beneficia del resto de jugadores obteniendo como beneficio las pérdidas de los otros jugadores.

*Suma no nula: En ellos el balance entre pérdidas y beneficios de los jugadores no tiene porque ser 0 por lo que la ganancia o pérdida de los jugadores no se compensa.

Juegos simétricos y asimétricos

En los juegos simétricos los jugadores pueden tomar las mismas decisiones, por lo que los beneficios solo dependen de las estrategias empleadas y no de los jugadores. Mientras tanto, en los juegos asimétricos las estrategias no tienen por que reportar el mismo beneficio a un jugador que a otro.

Juegos discretos y continuos

En los juegos discretos los jugadores toman sus decisiones en un conjunto finito de estrategias. En los juegos continuos extendemos esta idea permitiendo conjunto de ideas infinito no numerable.

Juegos de longitud finita o infinita

Si el juego termina tras un número finito de movimientos sera de longitud finita. En los juegos de longitud infinita hay infinitos movimientos y el ganador no se conoce hasta que se conocen todos los movimiento.

Juegos repetidos o iterados

Cuando los jugadores tras un movimiento de cada jugador vuelven a tener que decidir en un escenario similar varias veces seguidas, observando las estrategias y recompensas que han han obtenido el resto. En cada etapa los jugadores pueden modificar su estrategia anterior.

2.2. Formas de representacion de un juego

2.2.1. Forma normal o estratégica

Comenzamos con la manera mas sencilla de representar un juego. En ella asumimos que los jugadores toman sus decisiones a la vez sin conocer las decisiones de los otros jugadores. Se asume como comentamos anteriormente en la sección 1.2 que los jugadores actúan racionalmente y que siguen la estrategia (concepto que se definió también al final del subapartado 1.1) que mas les beneficie sin poder acordar con los adversarios estrategias beneficiosas para ambos.

Vamos a comenzar un ejemplo que iremos desarrollando a lo largo de esta sección conforme sigamos ampliando en el concepto de forma normal de un juego **Ejemplo** Supongamos que en un barrio de una ciudad se encuentran dos locales amplios disponibles para poder montar un negocio. Dos hamburgueserías distintas, llamemoslas A y B están interesadas en montar un negocio en ellas. Tienen que tomar las siguientes decisiones: Montar negocio y no montar negocio. Como es lógico, las ganancias dependerán de si la otra empresa decide montar el negocio al final

Esta forma suele venir representada en forma de tabla que muestra el umero de jugadores, las posibles estrategias de cada uno y los pagos o utilidades que recibe cada jugador en función de las decisiones que ha tomado cada uno. Lo ilustramos con el ejemplo anterior.

	Montar	No Montar
Montar	$1, 1$	$4, 0$
No Montar	$0, 4$	$0, 0$

Así de un vistazo tenemos claro que el juego consiste de dos jugadores con dos posibles decisiones en ambas estrategias (montar o no montar el negocio) y los pagos o ganancias que tendrían cada uno en función de su decisión y la del adversario. A continuación pasamos a definir de una manera rigurosa el concepto de forma normal de un juego estratégico.

Definición Podemos caracterizar un juego en forma normal a partir de:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, \cdots, n\}$.
- Un conjunto de estrategias $S = (S_1, \cdots, S_n)$ tal que S_i es el conjunto de estrategias de cada jugador $i \in N$.
- Unas funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U_i : S = S_1 x \cdots x S_n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada una de las estrategias el pago que el jugador i recibe.

Así pues podemos formalizar nuestro ejemplo como hemos explicado: Tenemos dos jugadores A y B (las dos empresas) por lo que $N = \{1, 2\}$. Cada uno de ellos tiene dos posibles decisiones, que son montar o no montar el negocio, por lo que $S = (S_1, S_2),\ S_i = (M, NM),\ i = 1, 2$. Y tenemos los respectivos pagos o utilidades que reciben en función de las estrategias seguidas: $U_1(M, NM) = 4$, $U_1(M, M) = 1$, $U_1(NM, NM) = 0$, $U_1(NM, M) = 0$, $U_2(M, NM) = 0$, $U_2(M, M) = 1$, $U_2(NM, NM) = 0$ y $U_2(NM, M) = 4$

2.2.2. Forma extensiva

Al contrario de la suposición que hemos realizado en el apartado anterior de que los jugadores tomaban las decisiones a la vez, en este caso obviamos este hecho y abrimos la posibilidad de que los jugadores tomen las decisiones de manera secuencial. Con esta forma dejamos de limitarnos a ese hecho y podemos fijar las distintas secuencias de jugadas que tiene un juego como la información de la que dispone cada jugador antes de tomar la decisión. Al igual que hemos hecho en la sección 2.2.1 vamos a acompañar la explicación de esta forma con un ejemplo

Ejemplo Supongamos que tenemos una baraja clásica, con 4 palos (oros, bastos, copas y espadas) con 12 cartas cada uno de los palos (del 1 al9, sota, caballo y rey) y que está barajada. Sean dos jugadores Pepe y Ana. Para participar, cada uno de los jugadores apuesta 1 euro. Pepe saca una carta del mazo ve cual es, y tiene dos posibles opciones, retirarse o apostar poniendo otro euro. Si se retira con la carta siendo un oro o una espada, el dinero que hay en la mesa es para él, mientras que si la carta es una copa o un basto el dinero es para Ana. En cambio, si apuesta un euro más, le toca a Ana jugar, y ella puede pasar, en cuyo caso el dinero se lo lleva Pepe o puede decidir jugar. Para ello, apuesta un euro más y saca una carta. Si es un oro o una espada, se lleva todo el dinero Pepe, y si es una copa o un basto se lo lleva todo Ana.

La forma mas común de representación es mediante un árbol de decisión. En el que en cada nodo aparece el jugador que toma la decisión, del cual salen aristas hacia otros nodos que representan las posibles estrategias de ese jugador en dicho nodo y que situaciones del juego se derivan. Al final, nos encontramos con los nodos terminales donde una vez los jugadores ya han tomado todas las posibles decisiones se representan las utilidades o pagos que reciben cada uno de los jugadores. Hay que entender que esta representación tiene limitaciones en el hecho de que las estrategias pueden ser continuas o tener infinidad de etapas como ocurre con el ajedrez.

Así pues el ejemplo anterior podríamos representarlo en forma de árbol de la siguiente forma:

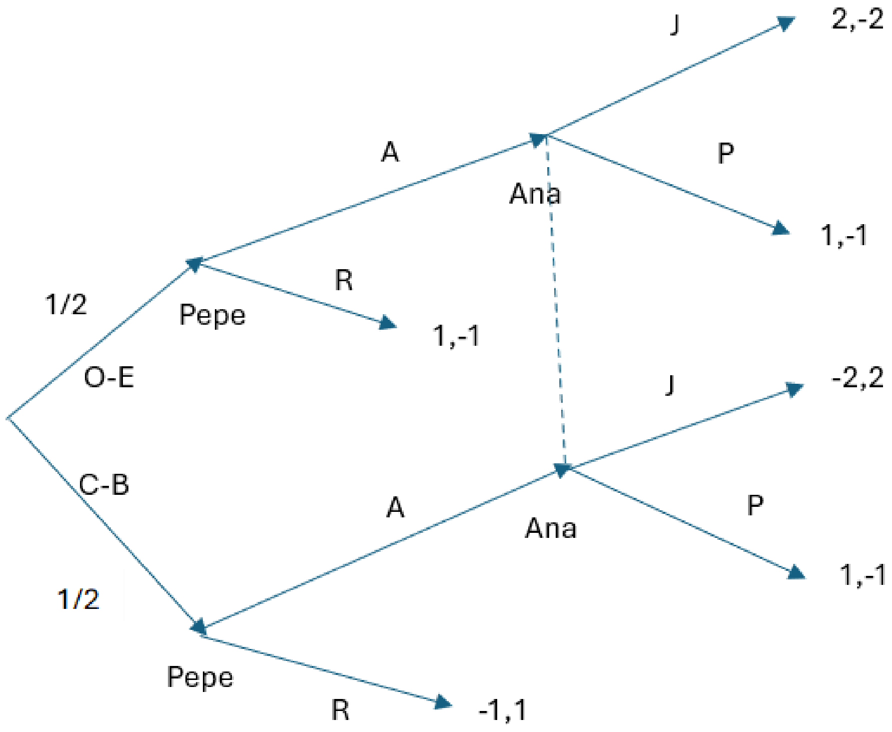

Figura 2.1: Diagrama Juego

La linea discontinua uniendo los dos nodos donde participa la jugadora Ana denotan que no sabe en que parte del árbol se encuentra, es decir, hace si apuesta o se retira sin saber de que palo es la carta que saca

Al igual que hicimos en la forma normal de un juego, vamos a caracterizar la forma extensiva de un juego por los distintos elementos que intervienen en tal representación

Definición Un juego en forma extensiva Γ viene caracterizado por una 7-tupla:

$$\Gamma = \{J, X, A, \{X_i\}_{i\in J}, H, P, U\}$$

Los elementos que lo forman son:

*Conjunto de jugadores que participan en el juego $J = \{1, \cdots, N\}$. También es común denotar como jugador 0 a los movimientos que se realizan aleatoriamente.

*X, conjunto de nodos, que significan una posible situación del juego. El nodo inicial se representa por o. A partir de este conjunto podemos diferenciar dos: $T(X)$ conjunto de nodos terminales del juego, y $D(X) = X - T(X)$ los nodos donde algún jugador tiene que tomar una decisión (no final)

*A, conjunto de todas las posibles acciones del juego

*Para cada jugador $i \in J$, sea X_i los nodos en los que el jugador i tiene que tomar una decisión

*H, familia de conjuntos de información que son la información que conoce el jugador en cada nodo.

*Una función de probabilidad

$$\begin{array}{rccc} P: & H_o \times A & \rightarrow & [0,1] \\ & (h,a) & \rightarrow & P(h,a) \end{array}$$

que proporciona una probabilidad a las acciones en los que interviene el azar.

*Función de pagos o utilidad

$$\begin{array}{rccc} U: & T(X) & \rightarrow & \mathbb{R}^N \\ & x & \rightarrow & U(x) = (U_1(x), \cdots, U_N(x)) \end{array}$$

donde $U_i(x)$ representa la utilidad que recibe el jugador i. Podemos suponer que estas funciones son de Von Newmann-Morgenstern

Al igual que hicimos en el apartado anterior, vamos a formalizar el ejemplo que hemos propuesto en forma extensiva: Tenemos los jugadores $J = \{0, Pepe, Ana\} = 0, 1, 2$; el conjunto de nodos $X = \{0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_7, x_8, x_9\}$; el conjunto de acciones $A = \{Ac_1, Ac_2, Ac_3, Ac_4, Ac_5, Ac_6, Ac_7, Ac_8\}$; los conjuntos de decisión para cada jugador $X_i,\ i \in J = \{0, 1, 2\}$, $X_0 = \{o\}$, $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_5\}$; el conjunto de información de la que disponen los jugadores $H = \{\{o\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_5\}\}$; la funcion de probabilidad para cada una de las acciones en las que interviene el azar, $P(\{o\}, a) = \frac{1}{2}$ y $P(\{o\}, b) = \frac{1}{2}$; y las funciones de pagos que reciben los jugadores en los distintos nodos finales, $U(x_4) = (1, -1)$, $U(x_6) = (-1, 1)$, $U(x_7) = (2, -2)$, $U(x_8) = (1, -1)$, $U(x_9) = (-2, 2)$, $U(x_10) = (1, -1)$. Así pues, vamos a ver el diagrama del juego con esta forma de escribirlo mas rigurosa:

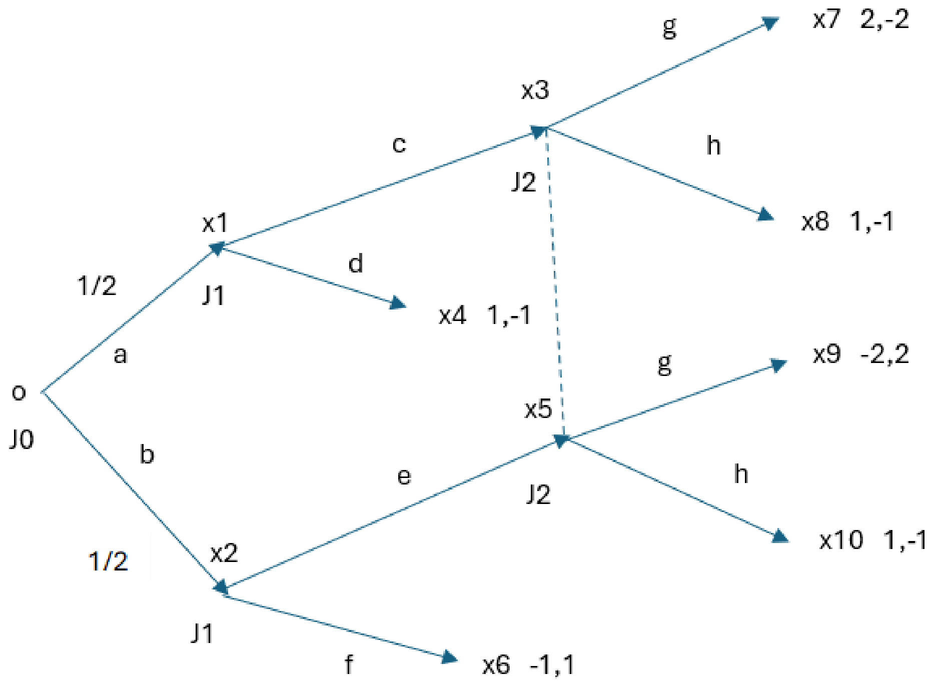

Figura 2.2: Diagrama Juego

2.3. Equilibrio de Nash

De manera coloquial diríamos que un juego se encuentra en equilibrio si ningún jugador obtiene mas utilidad al cambiar su estrategia de manera unilateral, es decir, cada elección es la mejor respecto al resto de elecciones de los adversarios, así ningún jugador tiene razones para cambiar du elección y por tanto el juego se encuentra en equilibrio. Pasamos a aportar una definición formal de este concepto.

Definición: Equilibrio de Nash en estrategias puras Dado un juego $G = \{S_1, \cdots, S_n, U_1, \cdots, U_n\}$, un perfil de estrategias puras $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ es un Equilibro de Nash si

$$\forall i \in N,\ U_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*) \geq U_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*),\ \forall s_i \text{ de } S_i$$

A continuación resolveremos los ejemplos que hemos seccionado en las secciones 2.2.1 y 2.2.2

2.3.1. Resolución de un juego en forma normal

Recordamos que tenemos el juego con la siguiente matriz:

	Montar	No Montar
Montar	$1,1$	$4,0$
No Montar	$0,4$	$0,0$

En este juego tenemos las siguiente soluciones posibles: ($Montar$,$Montar$), ($Montar$,$No\ Montar$), ($No\ Montar$,$Montar$) y ($No\ Montar$,$No\ Montar$).

Comenzamos analizando la solución ($No\ Montar$,$No\ Montar$) suponiendo que es un Equilibrio de Nash. Si la empresa A piensa que la empresa B no montará el negocio es claro que no le interesa mantener su decisión en no montar el negocio puesto que su utilidad aumenta de 0 a 4. De esta forma cualquiera de las dos empresas (ocurre lo mismo porque son simétricas) cambiará su estrategia a montar el negocio.

Ahora analicemos el caso ($Montar$,$No\ Montar$), que tiene un razonamiento similar al caso ($No\ Montar$,$Montar$), y volvemos a suponer que es un Equilibrio de Nash. En esta situación, si la empresa B supiese que la empresa A va a decidir montar el negocio esta cambiara su estrategia y montaría también el negocio aumentando así su utilidad de 0 a 1. Por lo tanto estas dos opciones ($Montar$,$No\ Montar$) y ($No\ Montar$,$Montar$) no son un equilibrio de Nash.

De esta forma solo nos quedaría la siguiente solución posible ($Montar$,$Montar$) que si es un Equilibrio de Nash puesto que ambas empresas disminuyen la utilidad que perciben si alguna de ellas cambia a no montar el negocio. De manera gráfica podemos representarlo con la matriz anterior

	Montar	No Montar
Montar	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{4}, 0$
No Montar	$0, \underline{4}$	$0, 0$

y ($Montar$,$Montar$) es el equilibrio de Nash

2.3.2. Resolución de un juego en forma extensiva

Recordemos que hemos llegado al siguiente esquema del juego:

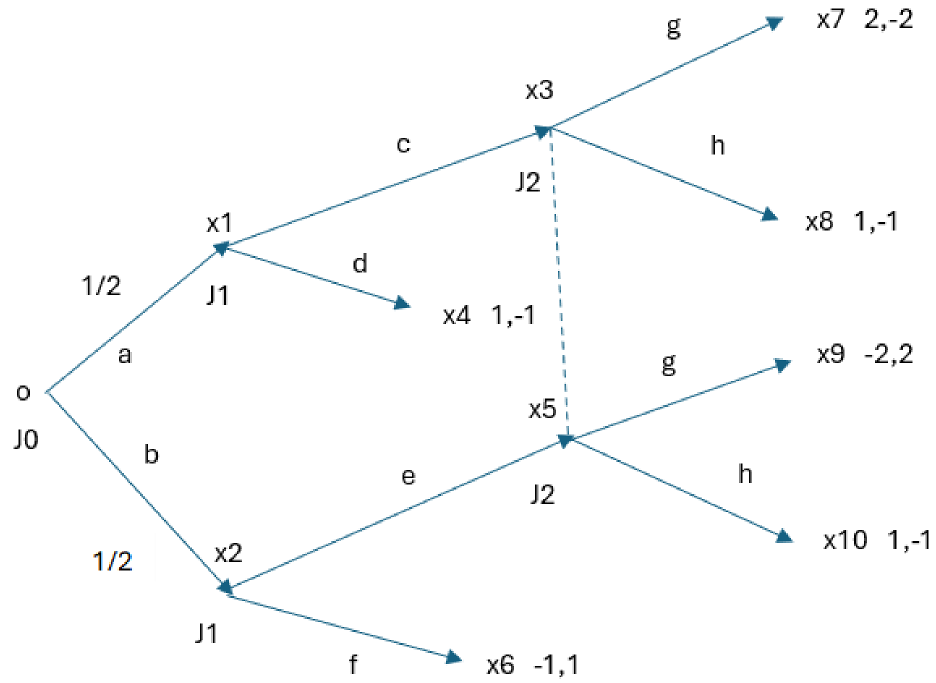

Figura 2.3: Diagrama Juego

En cuanto al jugador 2, este no sabe en cual de los nodos x_3 o x_5 se encuentra pues no ve la carta que se saca de la baraja. Así, se encuentra con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de estar en x_3 o en x_5. Si decidimos apostar, el valor esperado a ganar es $\frac{1}{2} * (-2) + \frac{1}{2} * 2 = 0$, mientras que si decide no apostar y plantarse el valor esperado a ganar es $\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * (-1) = -1$, por lo que el jugador 2 decidirá apostar pues el valor esperado de la utilidad que recibe es mayor en ese caso.

Por otra parte, el jugador 1 si sabe en cual de los nodos de decisión x_1 o x_2 pues el si ve la carta que saca del mazo. De esta forma si se encuentra en el nodo de decisión x_1 puede decidir plantarse y de esta forma se lleva con probabilidad 1 1 euro, mientras que si decide apostar, como el jugador 2 siempre decide apostar (g), tiene un valor esperado de utilidad de $\frac{1}{2} * (-2) + \frac{1}{2} * 2 = 0$ por lo que siempre decidirá plantarse (d). Si se encuentra en x_2, si decide plantarse (f) tiene probabilidad 1 de perder 1 euro, mientras que si decide apostar, al saber igual que antes que el jugador 2 siempre decide g, el valor esperado de utilidad de $\frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * (-2) = 0$ que es mayor así que en este nodo siempre decide e.

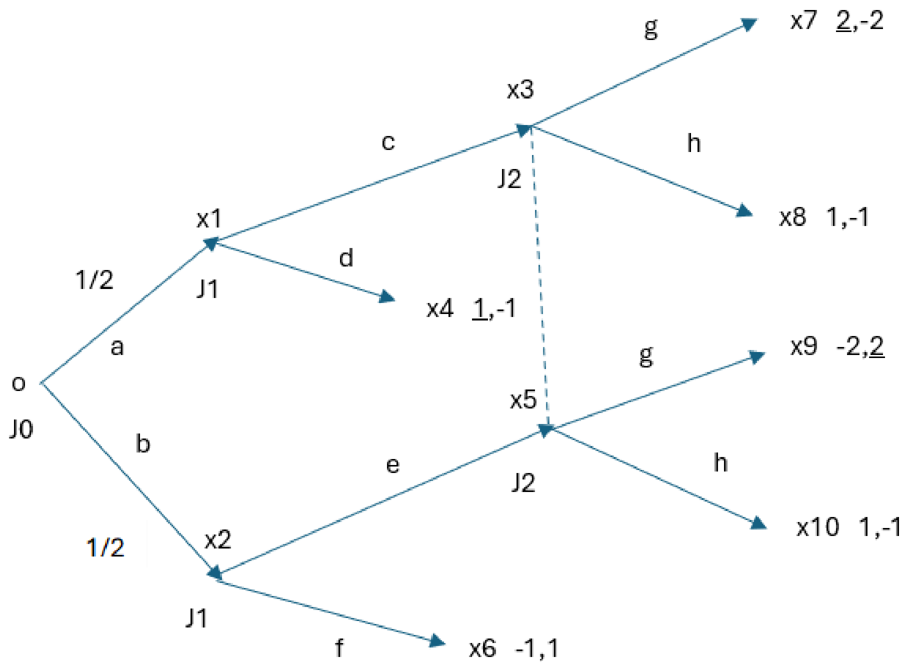

Figura 2.4: Diagrama Juego Equilibrio

Capítulo 3

Título del Capítulo

3.1. Primera sección

Capítulo 4

Título del Capítulo

4.1. Primera sección

Apéndice A

Apéndice: Título del Apéndice

A.1. Primera sección

Apéndice B

Apéndice: Título del Apéndice

B.1. Primera sección

Bibliografía

[1] Casas Méndez, Balbina; Fiestras Janeiro, M. Gloria; García Jurado, Ignacio y Gónzalez Díaz, Julio (2012). *Introducción a la Teoría de Juegos*. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico Campus Vida, first edition reviwed and expanded.ª edición.

[2] Pérez, Joaquín Jimeno; Luis, José y Cerdá, Emilio (2021). *Teoría de Juegos*. Garceta, second edition.ª edición.

[3] Sánchez-Cuenca, Ignacio (2009). *Teoría de Juegos*. Centro de Investigaciones Sociológicas, second edition reviwed and expanded.ª edición.

[4] Torrejón Valenzuela, Alberto (2020). «Teoría de Juegos». https://idus.us.es/server/api/core/bitstreams/90448d24-41f5-462d-8b8c-a6a2be0fb9e7/content.

[5] Álvarez Mozos, Mikel y Martínez de Albéniz Salas, F. Javier (2021). *Teoría de Juegos*. UOC, first edition.ª edición.