Índice general

1. VNM-Póker y Khun-Póker **3**

1.1. VNM-Póker. Explicación, estrategias y equilibrios 3

1.1.1. Estrategias 5

1.1.2. Análisis del juego 7

1.2. Khun-Póker. Cambios respecto al VNM-Póker 8

1.2.1. Estrategia 9

Capítulo 1

VNM-Póker y Khun-Póker

En este último apartado comentaremos otro juego de azar que introdujeron Von Newmann y Morgenstern, el VNM-Póker, junto con una variante que amplía este juego y que se conoce como Khun-Poker. El primero fue introducido en *Theory of Games and Economic Behavior*, mientras uqe el segundo se introdujo en *A simplified two-person poker.Contributions to the Theory of Games* .

Los dos juegos costan de dos jugadores, comunmente llamados ANN y Beth. Cada una de ellas coge al azar una carta de la baraja sin enseñarsela a la otra. Asi podriamos decir que los juegos presentan 4 parámetros:

1. Hay una baraja con cartas de valores q van de 1 a S.
2. Cada carta está representada r veces en la baraja.
3. Una apuesta inicial de m uds. monetarias q cada jugador realiza antes de empezar la partida.
4. Un valor final de la apuesta total de cada jugador, que denotamos como n, al cual el jugador puede llegar añadiendo $n - m$ uds. monetarias adicionales

Como regla general se considera que $m < n$.

1.1. VNM-Póker. Explicación, estrategias y equilibrios

$VNM - Póker(S, r, m, n)$. El juego comienza repartiendo una carta a cada jugador, y a continuación, Ann mueve primero y elige si pasar, jugando así por m, o subir, jugando así por n. Ahora nos encontramos con dos posibles situaciones:

- Si Ann pasa, ambas jugadores revelan sus dos cartas, y el jugador que tenga la carta mas alta gana el bote, que como no se ha subido la apuesta es de $2m$ uds. monetarias. Si hubiera empate, cada jugador recupera su dinero.

- Si Ann elige subir, incrementa su apuesta hasta n. Le toca el turno a Beth que tiene dos posibles movimientos, retirarse o seguir.

** Si Beth se retira, Ann se lleva el bote encima de la mesa que consta de los n suyos mas los m de Beth, por lo que gana m. La carta de Beth no se levanta en este caso.

** Si Beth decide seguir la apuesta, ella también incrementa su apuesta hasta n. Entonces cada una revela su carta y el que tenga la carta de mayor valor se lleva el bote completo de $2n$ ganando así n. De la misma manera que antes, en caso de empate los jugadores recuperan su dinero.

El juego podemos clasificarlo dentro de los de suma cero, puesto las ganancias de uno viene de las perdidas del otro y al final el dinero que se reparte es el dinero que proviene de las apuestas de los dos jugadores. Procedemos ahora a representar la forma extensiva de este juego.

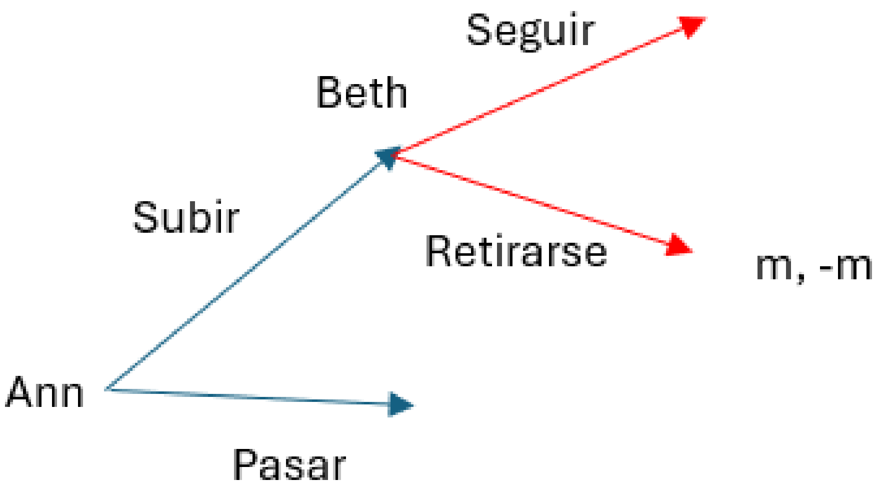

Figura 1.1: VNM-Póker

Como hemos comentado, el juego comienza dándole una carta al azar a cada jugador. Ann puede coger una carta cualquiera de $1, \cdots, S$, y en función del valor del parámetro r Beth podrá tomar también una carta de $1, \cdots, S$ dando S^2 posibles combinaciones si $r > 1$ y en caso de $r = 1$, habría $S(S-1)$ posibles combinaciones.

Con esto nos damos cuenta de que los parámetros intervienen de forma distinta: mientras que m y n intervienen en el aspecto de apuesta y reparto del dinero, los parámetros S y r tienen influencia en la forma y tamaño del árbol del juego y las probabilidades de los movimientos que dependen del azar.

Las alternativas para el movimiento aleatorio de recibir una determinada carta no son igualmente probables. Por ejemplo, si fijamos una carta determinada llamemosle C, la probabilidad de obtener C es $\frac{r}{rS} = \frac{1}{S}$. una vez se saca dicha carta del mazo, quedan $r-1$ cartas C de un total de $rS-1$, por lo que la probabilidad de obtener otra carta C es $\frac{r-1}{rS-1}$. Como resumen:

- Si Ann y Beth tienen cartas de igual valor c, esto tiene una probabilidad

$$p_{cc} = \frac{1}{S}\text{ů}\frac{r-1}{rS-1} = \frac{r-1}{S(rS-1)}$$

- Si Ann y Beth tienen cartas de distinto valor c y d, esto tiene una probabilidad

$$p_{cd} = \frac{1}{S}\text{ů}\frac{r}{rS-1} = \frac{r}{S(rS-1)}$$

Ejemplo VNM-Póker(2,2,1,1)

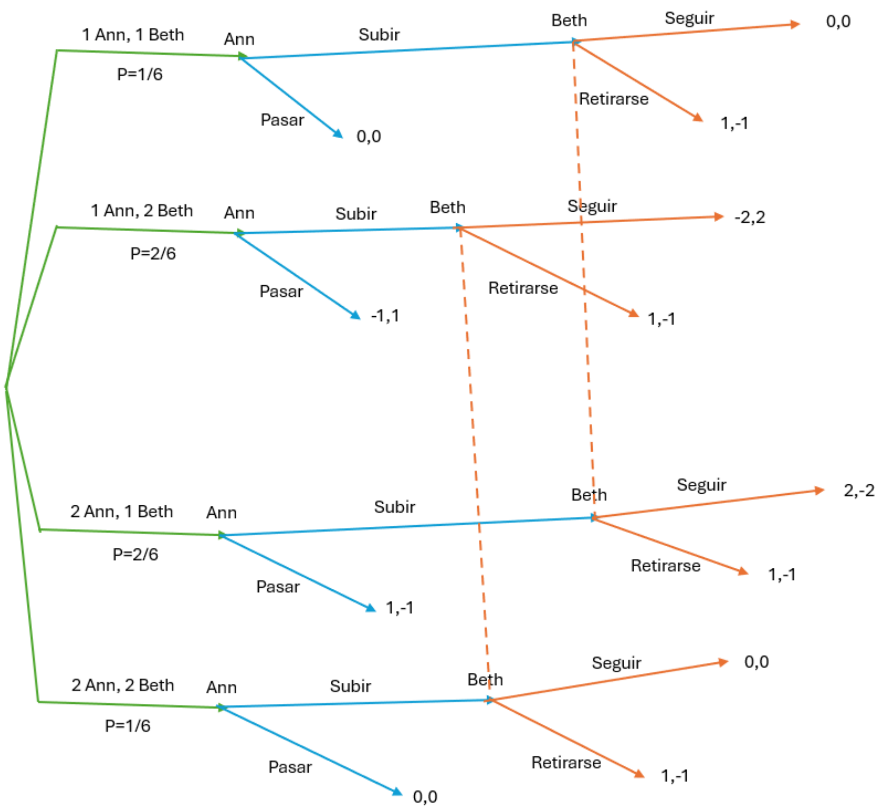

Figura 1.2: VNM-Póker

1.1.1. Estrategias

Si $r > 1$ hay $S * S$ diferentes combinaciones para repartir un valor a Ann y otro a Beth. Ann como hemos dicho solo puede ver su carta por lo que tiene S conjuntos de información. En cada uno de esos conjuntos tiene las opciones de subir o pasar. Así pues, Ann tiene 2^S estrategias puras. Codificamos las estrategias por secuencias de R y C (de check y raise, traducción de pasar y subir). Por ejemplo, para $S = 4$ seria $RCCR$ una posibilidad, que significa que Ann sube la apuesta con las cartas mas alta y mas baja y pasa en las dos cartas intermedias. De la misma manera, Beth tiene S conjuntos de información con dos opciones y por lo tanto también tiene 2^S estrategias puras que están codificadas por C y F (traducciones de seguir y retirarse).

De esta manera los posibles pagos son:

- Ann elige pasar $\rightarrow m$, 0 ó $-m$.
- Ann elige subir y Beth elige retirarse $\rightarrow m$.
- Ann elige subir y Beth elige seguir $\rightarrow n$, 0 ó n.

En adelante supondremos $S = 2$ y $r \geq 2$. Suponiendo esto, tenemos los siguientes conjuntos de estrategias puras para Ann es $\{CC\ (conservadora), CR\ (equilibrada), RC\ (inútil), RR\ (arries$ y para Beth $\{FF\ (conservadora), FC\ (equilibrada), CF\ (inútil), CC\ (arriesgada)\}$

Al igual que antes hicimos con la forma extensiva representamos la forma normal del juego con $S = 2$

	FF	FC	CF	CC
CC	0	0	0	0
CR	$\frac{m(r-1)}{4r-2}$	0	$\frac{nr-m}{4r-2}$	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RC	$\frac{m(3r-1)}{4r-2}$	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	$\frac{2mr}{4r-2}$	$\frac{r(m-n)}{4r-2}$
RR	m	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	$\frac{m(2r-1)+rn}{4r-2}$	0

Pasamos a comentar como hemos obtenido las expresiones para esta tabla. Para cada par de estrategias, definimos $u_{x,y}$ el pago que recibe Ann cuando los jugadores siguen sus estrategias y Ann tiene una carta de valor x y Beth una de valor y, así la utilidad esperada para Ann es la siguiente:

$$p_{xx}u_{1,1} + p_{xy}u_{1,2} + p_{xy}u_{2,1} + p_{xx}u_{2,2}$$

donde $p_{xx} = \frac{r-1}{4r-2}$ y $p_{xy} = \frac{r}{4r-2}$

Así, si Ann juega la estrategia RR y Beth juega FC tendríamos las utilidades $u_{1,1} = m$,$u_{1,2} = -n$,$u_{2,1} = m$ y$u_{2,2} = 0$ y la utilidad que recibe Ann es:

$$\begin{aligned} & p_{xx}\text{ů}m + p_{xx}\text{ů}(-n) + p_{xx}\text{ů}m + p_{xx}\text{ů}0 \\ = & \tfrac{r-1}{4r-2}\text{ů}m + \tfrac{r}{4r-2}\text{ů}(-n) + \tfrac{r}{4r-2}\text{ů}m + \tfrac{r-1}{4r-2}\text{ů}0 \\ = & \tfrac{(r-1)m-rn+rm}{4r-2} \\ = & \tfrac{(2r-1)m-rn}{4r-2}\text{ů}m \end{aligned}$$

Aunque hemos puesto en la tabla todas las estrategias posibles, somos conscientes de que en algunos casos hay estrategias que están dominadas por otras:

- Cuando Ann tiene una carta de mayor valor que Beth, subir domina a pasar.
- Cuando Beth tiene una carta mas alta que la de Ann, seguir domina a retirarse.

Podemos extender esto a casos mas generales con el suiguiente teorema:

Teorema

Todas las estrategias de Beth, menos las de la forma $C \cdots C$ y las de la forma $F \cdots FC \cdots C$ están debilmente dominadas.

Haciendo uso de este teorema podemos simplificar la forma normal del juego a:

	FC	CC
CR	0	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RR	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	0

Una estrategia alternativa que podría seguir un jugador es la de *tirarse un farol* que consiste en, aun teniendo una carta de valor bajo, este jugador decide subir la apuesta para intentando amedrentar al otro jugador para así este decida retirarse. Desde el comienzo del trabajo hemos supuesto la hipótesis de racionalidad de los jugadores por lo que esta estrategia no tendría sentido. Pasemos ahora a analizar las distintas estrategias.

1.1.2. Análisis del juego

- Equilibrio puro.

La entrada $\frac{(n-m)r}{4r-2}$ siempre es > 0 puesto que $n > m$. Si $\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$ es < 0, la estrategia de Ann CR domina débilmente a RR, y la estrategia de Beth FC domina débilmente a CC. Por lo tanto, hay un equilibrio de Nash puro (CR, FC) con una utilidad esperada para Ann de 0.

- ¿Qué hacer si el adversario no juega de manera optima, sino mezclando estrategias puras no dominadas?

Vamos a suponer que el jugador que juega de esa manera es Beth, que lo hace de esta manera: elige FC con una probabilidad q y elige CC con probabilidad $1-q$, es decir, elige seguir cuando tiene una carta de valor 2 y retirarse con una probabilidad q cuando tiene una carta de valor 1

¿Qué tendría que hacer Ann en cada situación? Por un lado, si miramos los pagos, Ann al jugar CR es $\frac{(1-q)(n-m)r}{4r-2}$ que es mayor o igual a $\frac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2}$ que es el pago al jugar RR si (esto se da puesto que $4r-2>0$ ya que $r \geq 1$):

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1-q)(n-m)r}{4r-2} &\geq \tfrac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2} \\
(1-q)(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn) \\
(n-m)r - q(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn) \\
(n-m)r &\geq q[((2r-1)m-rn)+(n-m)r] \\
(n-m)r &\geq q[(r-1)m]
\end{aligned}$$

Como $r \geq 2$ tenemos que $(r-1)m > 0$, lo podemos pasar dividiendo sin cambiar el signo de la desigualdad y tendríamos:

$$q^* = \frac{(n-m)r}{(r-1)m} \geq q$$

Por lo que Ann debe jugar CR si Beth juega FC, mientras que en otro caso Ann debería jugar RR, jugando así de manera opuesta al comportamiento de Beth. Por su parte, Beth debería copiar las jugadas que haga Ann.

- Equilibrio mixto.

Si $\frac{n}{m} \geq 2 - \frac{1}{2}$ no hay equilibrio de Nash puro y tendríamos q encontrar uno mixto.

Supongamos que Ann juega CR con probabilidad p y RR con probabilidad $1-p$, y Beth juega FC con probabilidad q y CC con probabilidad $1-q$. Cada una de las estrategias puras (CR, FC) y (RR, CC) es una mejor respuesta a ellas y concluimos con:

$$p = \frac{(2r-1)m - rn}{(r-1)m} \ y \ q = \frac{(n-m)r}{(r-1)m}$$

1.2. Khun-Póker. Cambios respecto al VNM-Póker

$Kuhn - Poker(S, r, m, n)$ Este juego extiende el VNM-Póker. Si Ann decide pasar los jugadores juegan un VNM-Póker con los roles cambiados. Ann mueve primero eligiendo entre pasar o subir.

- Si Ann decide pasar, entonces Beth puede pasar o subir:

** Si Beth pasa, ambas cartas se levantan para ser visibles y el que tenga la carta mas alta se lleva el bote, mientras que si empatan los jugadores recuperan su dinero.

** Si Beth elige subir, incrementa su apuesta hasta n. Entonces Ann tiene dos opciones, retirarse o seguir.

*** Si Ann se retira, Beth se lleva la cantidad de $n+m$, y la carta de Ann no se revela.

*** Si Ann sigue, incrementa su apuesta hasta n. Entonces ambas cartas se revelan y el que tenga la carta mas alta se lleva los $2n$ de la apuesta y recuperan su dinero en caso de empate.

- Si Ann sube, el juego funciona como el VNM-Póker cuando Ann sube.

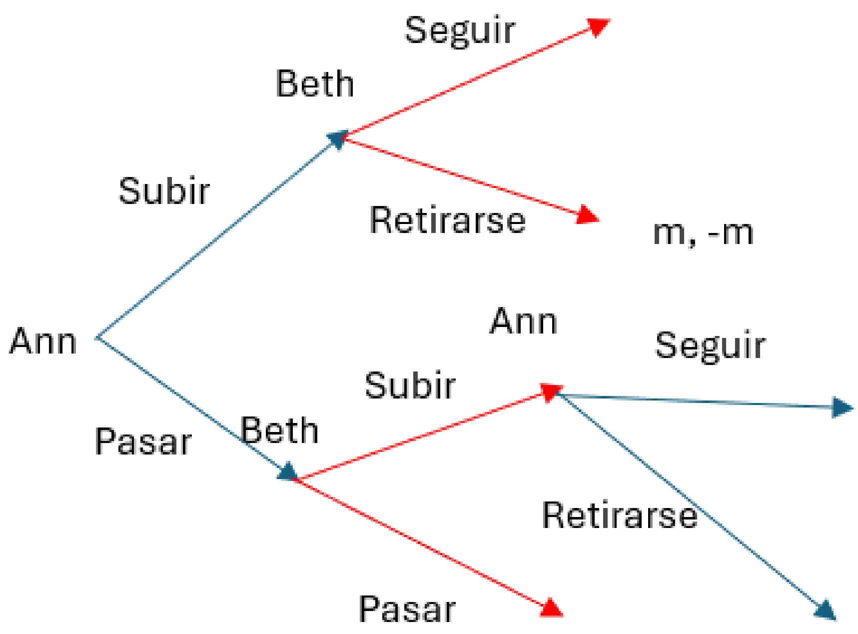

Figura 1.3: Kuhn-Póker

1.2.1. Estrategia

Ann tiene $2S$ conjuntos de información: o bien ella hace su primer movimiento, subir o pasar, o Ann ha pasado en su primer movimiento, Beth ha subido y entonces Ann puede seguir o retirarse. En todos eso casos, ella solo conoce el valor de su carta. Beth tiene $2S$ conjuntos de información, determinados por el valor de su carta y en función de si Ann ha subido o pasado, con S conjuntos de información en cada uno.

Por lo tanto, Ann tiene 2^{2S} estrategias puras, indicadas por S letras que pueden ser como en la sección 1.1.1 R o C para las elecciones de subir o pasar, y también S letras F o C para la elección de retirarse o seguir. Así, para $S = 2$ tenemos 16 estrategias puras, que son $CCFF$, $CCFC$, $CCCF$, $CCCC$, $CRFF$, $CRFR$, $CRCF$, $CRCC$, $RCFF$, $RCFC$, $RCCF$, $RCCC$, $RRFF$,$RRFC$, $RRCF$, y $RRCC$.

De la misma manera, Beth también tiene $2S$ conjuntos de información, S cuando Ann sube y otros S cuando Ann pasa, así para $S = 2$ tendríamos: $FFCC$, $FFCR$, $FFRC$, $FFRR$, $FCCC$, $FCCR$, $FCRC$, $FCRR$, $CFCC$, $CFCR$, $CFRC$, $CFRR$, $CCCC$,$CCCR$, $CCRC$, y $CCRR$.

Hemos podido eliminar algunas estrategias por estar dominadas al igual que antes. Si Ann tiene un valor de carta mayor que el de Beth, y ella pasa cuando Beth sube, siempre es mejor para Ann seguir y no retirarse puesto que retirándose pierde m uds. monetarias mientras que si sigue no puede perder. Si Ann tiene un valor de carta mas alto, subir no domina necesariamente a pasar, ya que depende de la estrategia de Beth. Si Beth tiene una carta de valor mas alto que Ann, seguir domina a retirarse y subir domina a pasar.