Doble Grado en
Matemáticas y Estadística

TRABAJO FIN DE GRADO

Teoría de Juegos aplicada a los juegos de azar

Carlos Manzano Díaz

Sevilla, Enero de 2025

Índice general

Prólogo

Escrito colocado al comienzo de una obra en el que se hacen comentarios sobre la obra o su autor, o se introduce en su lectura; a menudo está realizado por una persona distinta del autor.

También se podrían incluir aquí los agradecimientos.

Resumen

Resumen. . .

Abstract

Abstract…

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Conocer la Teoría de Juegos

1.1. ¿Qué es un juego?

Cuando en la vida cotidiana llamamos juego a algo nos referimos a un divertimento en el que una o varias personas participan (véase el solitario, ajedrez o el poker). En estos juegos los participantes tienen que cumplir una serie de reglas, y como resultado de sus decisiones pueden ganar, pero también perder. En este proyecto nos centraremos en los juegos con una o mas personas

En ellos los jugadores intentan maximizar sus resultados, es decir, en el caso del poker ganar el mayor dinero posible, en ajedrez vencer al rival lo mas rápido que puedan, etc. Todo esto los jugadores lo hacen sabiendo que el resultado del juego depende no solo de ellos sino de lo que hagan los demás jugadores. Pero estas situaciones no solo se da en los juegos que conocemos como tal, sino en situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, cuando salimos del trabajo un viernes y cogemos el coche para volver a casa, queremos hacerlo en el menor tiempo posible, pero tenemos otros jugadores (no somos los únicos que queremos volver a casa una vez terminado ese dia) y una serie de reglas, como no saltarnos los limites de velocidad y respetar los semáforos.

Así pues, en adelante nos referiremos como juego a una situación en la que varias personas interaccionan entre ellas y en la que el resultado de cada uno no dependen solo de la estrategia que sigan ellos sino de la de los demás jugadores.

A continuación definiremos una serie de términos que nos acompañarán a lo largo del trabajo:

- **Jugadores**

Son los participantes del juego. Supondremos que actuan como seres racionales

- **Reglas**

Son las condiciones en las que participan los jugadores. Podemos diferenciar en:

Acciones de los jugadores: Son las decisiones que puede tomar cada jugador en su turno de juego

Información: Conjunto de saberes que los jugadores tienen sobre las acciones ya realizadas durante el juego

Estrategia: Definimos estrategia como el conjunto completo de movimientos que tomaría el jugador en cada instante del juego.

Pagos: Utilidad o valoración que recibe cada jugador al terminar el juego. Puede ser económica o no.

1.2. Principio de racionalidad

Al comienzo se ha comentado que suponíamos que los agentes o jugadores actuaban de forma racional. En esta sección se estudiara que significa que un jugador actúe de tal manera.

Partimos del supuesto de que los agentes o jugadores, ya sean personas, empresas o gobiernos tienen deseos y preferencias de que tanto quieren obtener del juego. Una vez que estos jugadores han establecido cuales son sus preferencias, el principio de racionalidad establece que actuará en función de las mismas, es decir estaríamos en todo momento buscando nuestro máximo beneficio posible. De esta manera el agente actua únicamente en función de sus preferencias y no se deja influir por la de los demás.

Esto no significa que el agente siempre actue en contra de los demás jugadores del juego necesariamente. Por ejemplo si su máxima preferencia es el bienestar por igual para todos los jugadores esto no es negativo para el resto. No obstante, el comportamiento usual es el egoísta, en el que cada agente busca su máximo beneficio sin importarle las consecuencias para los otros jugadores. A este comportamiento lo llamaremos comúnmente auto-interesado que aunque no sean lo mismo en muchas ocasiones llegan a coincidir

Las preferencias de cada agente son privadas y este las revela con sus acciones y no previamente, para así evitar beneficiar a otros. Las preferencias podemos establecerlas como relaciones binarias entre las distintas alternativas o acciones que maneja cada jugador.

Con certidumbre, tendremos un conjunto de acciones $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, un conjunto de resultados que se derivan de tales acciones $R = \{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$, y una función $x : A \rightarrow R$ estableciendo que a cada opción le corresponde un único resultado (aplicación binaria) así tenemos una correspondencia biunívoca entre ambas e identificamos la decisión con el resultado. Cuando trabajamos en ambientes de incertidumbre las preferencias solo se identifican con acciones puesto que no estamos seguros de que resultado podemos obtener de ellas.

Definimos la relación binaria R de preferencia entre dos resultados $x_i R x_j$ para dos resultados cualesquiera x_i, x_j (x_i se prefiere a x_j), es decir que el resultado x_i es mejor o igual que el resultado x_j. A este tipo de preferencia se le conoce como preferencia débil, mientras que si no solo se cumple esta relación, sino que no se da la reciproca (no ocurre que $x_j R x_i$) entonces hablamos de de preferencia estricta que se representa con una P. También podemos la relación de indiferencia si da igual preferir un resultado que otro: $x_i I x_j$ si y solo si $x_i R x_j$ y $x_j R x_i$.

Por lo tanto consideramos que el agente es racional cuando actúa en función de sus preferencias y estas tienen una jerarquía interna. Estas deben cumplir las siguientes propiedades:

1. Completitud:
$$\forall x_i, x_j, \quad x_iRx_j \text{ ó } x_jRx_i \text{ ó } (x_iRx_j \ y \ x_jRx_i)$$
2. Reflexividad:
$$\forall x_i, \ x_iRx_i$$
3. Transitividad:
$$\forall x_i, x_j, x_k \ \text{ tenemos que si: } \ x_iRx_j \ y \ x_jRx_k \quad \to x_iRx_k$$

   Con esta propiedad evitamos la inconsistencia de las elecciones

1.3. Utilidad

Ya tenemos establecidas las relaciones de preferencia entre las distintas alternativas de manera racional como hemos explicado en el apartado anterior. Una vez tenemos esto, para simplificar las operaciones, traducimos estas preferencias a un orden cuantitativo mediante una función $U : X \to \mathbb{R}$ que le asigna un valor real a cada una de las preferencias. Así, en vez de hablar por ejemplo de $\exists \ x_i / \ \forall x_j \in X, \ x_j \neq x_i$ se tiene que: x_iRx_j hablamos de manera cuantitativa como $\exists x_i / \ \forall x_j \in X, x_j \neq x_i, \ U(x_i) \geq U(x_j)$ Este hecho (de que se cumpla que la utilidad de la alternativa preferida es mayor que la del resto de alternativas) solo lo tenemos en el caso de que trabajemos en un ámbito de certidumbre:

Ejemplo Imaginemos que nos encontramos con 3 alternativas: $X = \{\text{coche gratis}, 2 \text{ semanas de vacac}$ para simplificar, $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ con las siguientes preferencias: $x_2Rx_3, \ x_2Rx_1 \ y \ x_1Rx_3$ les asignamos un valor o utilidad a cada una de estas alternativas (una utilidad) que exprese de manera numérica estas preferencias: $U : X \to \mathbb{R}$ tal que $U(x_2) = 10, \ U(x_1) = 5 \ y \ U(x_3) = 0$

Si nos encontramos en un ámbito de incertidumbre no podemos asegurarnos de que una vez establecidas las preferencias, estas tengan una utilidad que exprese esa preferencia. En este caso nos encontramos una serie de estados de la naturaleza $E = \{e_1, \cdots, e_p\}$ tal que en función de la alternativa que decidamos $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ tendremos unos resultados $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ que dependen de ambos.

Ejemplo Tenemos los siguientes estados de la naturaleza $E = \{e_1 = \text{Sequía}, e_2 = \text{Lluvia}\}$ las alternativas $A = \{a_1 = \text{Recolectar ahora}, a_2 = \text{Recolectar en un mes}\}$ y se pueden producir los siguientes resultados $X = \{x_1 = \text{Ganancias}, x_2 = \text{Pérdidas}\}$ que siguen la siguiente relación:

	Sequía e_1	*Lluvia* e_2
a_1	*Ganancias*	*Pérdidas*
a_2	*Pérdidas*	*Ganancias*

Así pues el resultado que obtendremos dependerá de la decisión que tomemos y el estado de la naturaleza que se presente. Por tanto, para calcular la utilidad esperada de una acción cualquiera tendremos que calcular:

Sea a una acción cualquiera,
$$U(a) = \sum_{e \in E} p(e)U(x(a, e)), \ \sum_{e \in E} p(e) = 1$$

donde e son los estados de la naturaleza y $U(x(a,e))$ es la utilidad de elegir la alternativa a cuando ocurre el estado e de la naturaleza.

1.4. Utilidad de Von Neumann-Morgenstern y actitudes ante el riesgo

Venimos buscando asociar a cada alternativa un orden de preferencia. Las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern tenemos un metodo no arbitrario para asignar valores numéricos a los resultados. Para explicar esto comentamos una serie de definiciones básicas en este aspecto

Definición

Una lotería simple en X es una distribución de probabilidad en X. Es decir, se dice que L es una lotería simple en X si:

$L = \{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \ p_i \geq 0, \ para \ cada \ i = 1, 2, \cdots, n, \ y \ \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 0\}$, donde p_i es la probabilidad de que ocurra la alternativa $a_i, \ i = 1, \cdots, n$

A partir de esta definición podemos definir el siguiente conjunto:

$$L_A = \{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n : p_i \geq 0, i = 1, \cdots, n \ y \sum_{i=1,\cdots,n} p_i = 1\}$$

Conjunto de todas las loterías simples sobre un conjunto de alternativas A.

Ahora ya estamos en condiciones de definir las funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Definición

Así pues, una función $U : \ L_A \to \mathbb{R}$ es una función de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern (VN-M) si existen n números $u_1, \cdots, u_n$, asociados a $a_1, \cdots, a_n$ tales que para cada lotería $L \in L_A$ se verifica: $U(L) \ = \ u_1 p_1 \ + u_2 p_2 \ + \ \cdots \ u_n p_n$

A continuación enunciamos el Teorema de utilidad de Von Neumann-Morgenstern:

Teorema

Supongamos la relación de preferencia R sobre L_A en las condiciones estudiadas. Entonces R admite una representación en forma de utilidad esperada de Von Neumann-Morgenstern, es decir, existen $u(a_1), \cdots, u(a_n)$, tales que

$$\forall L, L' \in L_A, \ L = (p_1, \cdots, p_n) \ y \ L' = (p'_1, \cdots, p'_n) \iff \sum_{i=1,\cdots,n} p_i u(a_i) \geq \sum_{i=1,\cdots,n} p'_i u(x_i)$$

1.4.1. Actitudes ante el riesgo

En este Apartado trabajaremos suponiendo que $A = \mathbb{R}$

Decimos que un agente es si el valor esperado de cualquier lotería L es tan preferida o mas que dicha lotería. Si ocurre al contrario, que la lotería sea igual o mas preferida que su valor esperado decimos que el agente es propenso al riesgo. Si tenemos una situación de indiferencia, decimos que el agente es neutral.

En términos de la función de utilidad u tenemos el siguiente teorema:

Sea una función de utilidad $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ que es estrictamente creciente y de clase $C^2(\mathbb{R})$ entonces:

1. Si $u^{''}(x) \leq 0,\ \forall\, x \in\ [a, b]$, es decir, u es cóncava, entonces el jugador es conservador.
2. Si $u^{''}(x) \geq 0,\ \forall\, x \in\ [a, b]$, es decir, u es convexa, entonces el jugador es arriesgado.
3. Si $u^{''}(x) = 0,\ \forall\, x \in\ [a, b]$, es decir, u es lineal, entonces el jugador es indiferente al riesgo.

Capítulo 2

Tipos y formas de un juego. Equilibrio de Nash

2.1. Tipos de juego

Juegos según el número de jugadores

Según el numero de jugadores nos encontramos con los juegos bipersonales, de 2 personas como puede ser el ajedrez, o n-personales en el que participan mas de 2 jugadores como en el poker.

Juegos cooperativos y no cooperativos

Los juegos cooperativos son aquellos en los que entre varios jugadores acuerdan no competir entre ellos sino buscar un mismo objetivo ganando o perdiendo a la misma vez. En los juegos no cooperativos, que son los casos mas generales, los jugadores deciden de forma independiente buscando sacar un beneficio máximo de las distintas situaciones.

Juegos de información completa e incompleta

En los juegos de información completa, todos los jugadores tienen tienen la misma información, conocen las estrategias que pueden seguir el resto de jugadores y las recompensas que recibirían.

Juegos simultáneos y secuenciales

En los juegos simultáneos, los jugadores toman sus decisiones a la vez, y por tanto desconocen la estrategia que va a seguir el resto de jugadores. Por otro lado los secuenciales los jugadores toman las decisiones uno tras otros, pudiendo modificar sus estrategias en función de las del resto de jugadores. La información que tengan del resto de los otros jugadores no tiene porque ser perfecta.

Juegos en función de la suma de los beneficios de los jugadores

Dependiendo de la suma de los beneficios entre todos los jugadores encontramos tres casos:

*Suma cero: En esta clase de juegos, uno de los jugadores se beneficia del resto de jugadores obteniendo como beneficio las pérdidas de los otros jugadores.

*Suma no nula: En ellos el balance entre pérdidas y beneficios de los jugadores no tiene porque ser 0 por lo que la ganancia o pérdida de los jugadores no se compensa.

Juegos simétricos y asimétricos

En los juegos simétricos los jugadores pueden tomar las mismas decisiones, por lo que los beneficios solo dependen de las estrategias empleadas y no de los jugadores. Mientras tanto, en los juegos asimétricos las estrategias no tienen por que reportar el mismo beneficio a un jugador que a otro.

Juegos discretos y continuos

En los juegos discretos los jugadores toman sus decisiones en un conjunto finito de estrategias. En los juegos continuos extendemos esta idea permitiendo conjunto de ideas infinito no numerable.

Juegos de longitud finita o infinita

Si el juego termina tras un número finito de movimientos sera de longitud finita. En los juegos de longitud infinita hay infinitos movimientos y el ganador no se conoce hasta que se conocen todos los movimiento.

Juegos repetidos o iterados

Cuando los jugadores tras un movimiento de cada jugador vuelven a tener que decidir en un escenario similar varias veces seguidas, observando las estrategias y recompensas que han han obtenido el resto. En cada etapa los jugadores pueden modificar su estrategia anterior.

2.2. Formas de representacion de un juego

2.2.1. Forma normal o estratégica

Comenzamos con la manera mas sencilla de representar un juego. En ella asumimos que los jugadores toman sus decisiones a la vez sin conocer las decisiones de los otros jugadores. Se asume como comentamos anteriormente en la sección 1.2 que los jugadores actúan racionalmente y que siguen la estrategia (concepto que se definió también al final del subapartado 1.1) que mas les beneficie sin poder acordar con los adversarios estrategias beneficiosas para ambos.

Vamos a comenzar un ejemplo que iremos desarrollando a lo largo de esta sección conforme sigamos ampliando en el concepto de forma normal de un juego **Ejemplo** Supongamos que en un barrio de una ciudad se encuentran dos locales amplios disponibles para poder montar un negocio. Dos hamburgueserías distintas, llamemoslas A y B están interesadas en montar un negocio en ellas. Tienen que tomar las siguientes decisiones: Montar negocio y no montar negocio. Como es lógico, las ganancias dependerán de si la otra empresa decide montar el negocio al final

Esta forma suele venir representada en forma de tabla que muestra el umero de jugadores, las posibles estrategias de cada uno y los pagos o utilidades que recibe cada jugador en función de las decisiones que ha tomado cada uno. Lo ilustramos con el ejemplo anterior.

	Montar	No Montar
Montar	$1, 1$	$4, 0$
No Montar	$0, 4$	$0, 0$

Así de un vistazo tenemos claro que el juego consiste de dos jugadores con dos posibles decisiones en ambas estrategias (montar o no montar el negocio) y los pagos o ganancias que tendrían cada uno en función de su decisión y la del adversario. A continuación pasamos a definir de una manera rigurosa el concepto de forma normal de un juego estratégico.

Definición Podemos caracterizar un juego en forma normal a partir de:

- Un conjunto de jugadores $N = \{1, \cdots, n\}$.
- Un conjunto de estrategias $S = (S_1, \cdots, S_n)$ tal que S_i es el conjunto de estrategias de cada jugador $i \in N$.
- Unas funciones de utilidad de Von Neumann-Morgenstern $U_i : S = S_1 x \cdots x S_n \to \mathbb{R}$ que asigna a cada una de las estrategias el pago que el jugador i recibe.

Así pues podemos formalizar nuestro ejemplo como hemos explicado: Tenemos dos jugadores A y B (las dos empresas) por lo que $N = \{1, 2\}$. Cada uno de ellos tiene dos posibles decisiones, que son montar o no montar el negocio, por lo que $S = (S_1, S_2),\ S_i = (M, NM),\ i = 1, 2$. Y tenemos los respectivos pagos o utilidades que reciben en función de las estrategias seguidas: $U_1(M, NM) = 4$, $U_1(M, M) = 1$, $U_1(NM, NM) = 0$, $U_1(NM, M) = 0$, $U_2(M, NM) = 0$, $U_2(M, M) = 1$, $U_2(NM, NM) = 0$ y $U_2(NM, M) = 4$

2.2.2. Forma extensiva

Al contrario de la suposición que hemos realizado en el apartado anterior de que los jugadores tomaban las decisiones a la vez, en este caso obviamos este hecho y abrimos la posibilidad de que los jugadores tomen las decisiones de manera secuencial. Con esta forma dejamos de limitarnos a ese hecho y podemos fijar las distintas secuencias de jugadas que tiene un juego como la información de la que dispone cada jugador antes de tomar la decisión. Al igual que hemos hecho en la sección 2.2.1 vamos a acompañar la explicación de esta forma con un ejemplo

Ejemplo Supongamos que tenemos una baraja clásica, con 4 palos (oros, bastos, copas y espadas) con 12 cartas cada uno de los palos (del 1 al9, sota, caballo y rey) y que está barajada. Sean dos jugadores Pepe y Ana. Para participar, cada uno de los jugadores apuesta 1 euro. Pepe saca una carta del mazo ve cual es, y tiene dos posibles opciones, retirarse o apostar poniendo otro euro. Si se retira con la carta siendo un oro o una espada, el dinero que hay en la mesa es para él, mientras que si la carta es una copa o un basto el dinero es para Ana. En cambio, si apuesta un euro más, le toca a Ana jugar, y ella puede pasar, en cuyo caso el dinero se lo lleva Pepe o puede decidir jugar. Para ello, apuesta un euro más y saca una carta. Si es un oro o una espada, se lleva todo el dinero Pepe, y si es una copa o un basto se lo lleva todo Ana.

La forma mas común de representación es mediante un árbol de decisión. En el que en cada nodo aparece el jugador que toma la decisión, del cual salen aristas hacia otros nodos que representan las posibles estrategias de ese jugador en dicho nodo y que situaciones del juego se derivan. Al final, nos encontramos con los nodos terminales donde una vez los jugadores ya han tomado todas las posibles decisiones se representan las utilidades o pagos que reciben cada uno de los jugadores. Hay que entender que esta representación tiene limitaciones en el hecho de que las estrategias pueden ser continuas o tener infinidad de etapas como ocurre con el ajedrez.

Así pues el ejemplo anterior podríamos representarlo en forma de árbol de la siguiente forma:

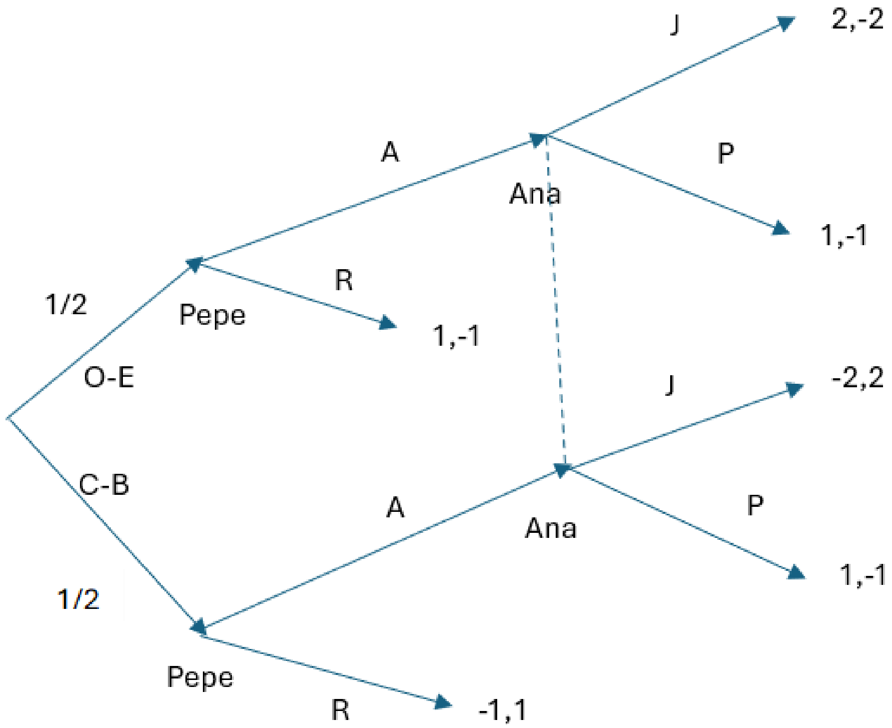

Figura 2.1: Diagrama Juego

La linea discontinua uniendo los dos nodos donde participa la jugadora Ana denotan que no sabe en que parte del árbol se encuentra, es decir, hace si apuesta o se retira sin saber de que palo es la carta que saca

Al igual que hicimos en la forma normal de un juego, vamos a caracterizar la forma extensiva de un juego por los distintos elementos que intervienen en tal representación

Definición Un juego en forma extensiva Γ viene caracterizado por una 7-tupla:

$$\Gamma = \{J, X, A, \{X_i\}_{i \in J}, H, P, U\}$$

Los elementos que lo forman son:

*Conjunto de jugadores que participan en el juego $J = \{1, \cdots, N\}$. También es común denotar como jugador 0 a los movimientos que se realizan aleatoriamente.

*X, conjunto de nodos, que significan una posible situación del juego. El nodo inicial se representa por o. A partir de este conjunto podemos diferenciar dos: $T(X)$ conjunto de nodos terminales del juego, y $D(X) = X - T(X)$ los nodos donde algún jugador tiene que tomar una decisión (no final)

*A, conjunto de todas las posibles acciones del juego

*Para cada jugador $i \in J$, sea X_i los nodos en los que el jugador i tiene que tomar una decisión

*H, familia de conjuntos de información que son la información que conoce el jugador en cada nodo.

*Una función de probabilidad

$$\begin{array}{rccc} P: & H_o \times A & \to & [0,1] \\ & (h,a) & \to & P(h,a) \end{array}$$

que proporciona una probabilidad a las acciones en los que interviene el azar.

*Función de pagos o utilidad

$$\begin{array}{rccc} U: & T(X) & \to & \mathbb{R}^N \\ & x & \to & U(x) = (U_1(x), \cdots, U_N(x)) \end{array}$$

donde $U_i(x)$ representa la utilidad que recibe el jugador i. Podemos suponer que estas funciones son de Von Newmann-Morgenstern

Al igual que hicimos en el apartado anterior, vamos a formalizar el ejemplo que hemos propuesto en forma extensiva: Tenemos los jugadores $J = \{0, Pepe, Ana\} = 0, 1, 2$; el conjunto de nodos $X = \{0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_7, x_8, x_9\}$; el conjunto de acciones $A = \{Ac_1, Ac_2, Ac_3, Ac_4, Ac_5, Ac_6, Ac_7, Ac_8\}$; los conjuntos de decisión para cada jugador $X_i,\ i \in J = \{0, 1, 2\}$, $X_0 = \{o\}$, $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_5\}$; el conjunto de información de la que disponen los jugadores $H = \{\{o\}, \{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3, x_5\}\}$; la funcion de probabilidad para cada una de las acciones en las que interviene el azar, $P(\{o\}, a) = \frac{1}{2}$ y $P(\{o\}, b) = \frac{1}{2}$; y las funciones de pagos que reciben los jugadores en los distintos nodos finales, $U(x_4) = (1, -1)$, $U(x_6) = (-1, 1)$, $U(x_7) = (2, -2)$, $U(x_8) = (1, -1)$, $U(x_9) = (-2, 2)$, $U(x_10) = (1, -1)$. Así pues, vamos a ver el diagrama del juego con esta forma de escribirlo mas rigurosa:

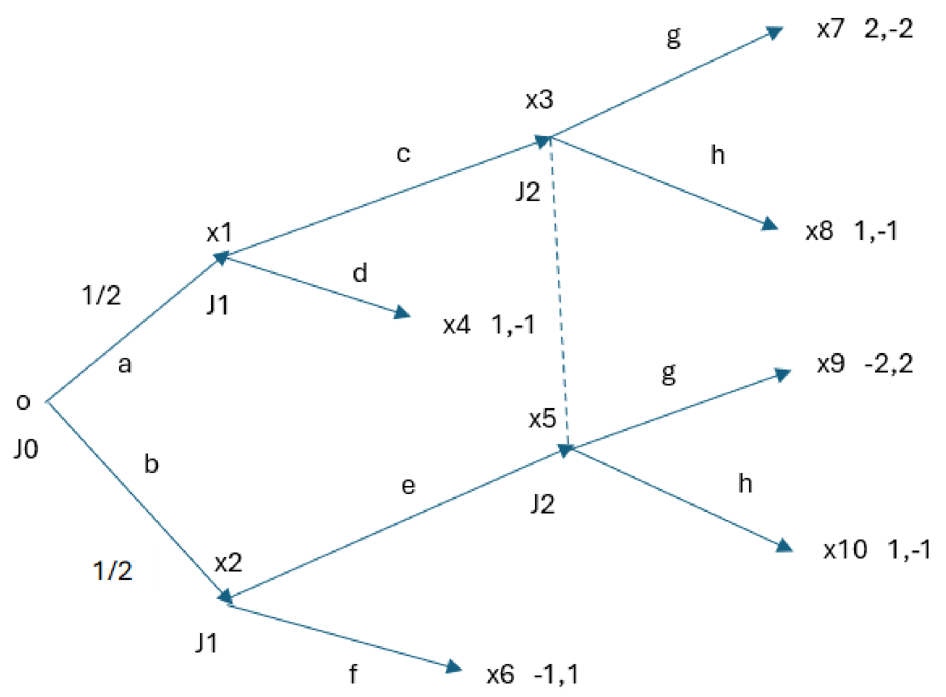

Figura 2.2: Diagrama Juego

2.3. Equilibrio de Nash

De manera coloquial diríamos que un juego se encuentra en equilibrio si ningún jugador obtiene mas utilidad al cambiar su estrategia de manera unilateral, es decir, cada elección es la mejor respecto al resto de elecciones de los adversarios, así ningún jugador tiene razones para cambiar du elección y por tanto el juego se encuentra en equilibrio. Pasamos a aportar una definición formal de este concepto.

Definición: Equilibrio de Nash en estrategias puras Dado un juego $G = \{S_1, \cdots, S_n, U_1, \cdots, U_n\}$, un perfil de estrategias puras $(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*)$ es un Equilibro de Nash si

$$\forall i \in N,\ U_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*) \geq U_i(s_1^*, \cdots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \cdots, s_n^*),\ \forall s_i \text{ de } S_i$$

A continuación resolveremos los ejemplos que hemos seccionado en las secciones 2.2.1 y 2.2.2

2.3.1. Resolución de un juego en forma normal

Recordamos que tenemos el juego con la siguiente matriz:

	Montar	No Montar
Montar	$1, 1$	$4, 0$
No Montar	$0, 4$	$0, 0$

En este juego tenemos las siguiente soluciones posibles: ($Montar$,$Montar$), ($Montar$,$No\ Montar$), ($No\ Montar$,$Montar$) y ($No\ Montar$,$No\ Montar$).

Comenzamos analizando la solución ($No\ Montar$,$No\ Montar$) suponiendo que es un Equilibrio de Nash. Si la empresa A piensa que la empresa B no montará el negocio es claro que no le interesa mantener su decisión en no montar el negocio puesto que su utilidad aumenta de 0 a 4. De esta forma cualquiera de las dos empresas (ocurre lo mismo porque son simétricas) cambiará su estrategia a montar el negocio.

Ahora analicemos el caso ($Montar$,$No\ Montar$), que tiene un razonamiento similar al caso ($No\ Montar$,$Montar$), y volvemos a suponer que es un Equilibrio de Nash. En esta situación, si la empresa B supiese que la empresa A va a decidir montar el negocio esta cambiara su estrategia y montaría también el negocio aumentando así su utilidad de 0 a 1. Por lo tanto estas dos opciones ($Montar$,$No\ Montar$) y ($No\ Montar$,$Montar$) no son un equilibrio de Nash.

De esta forma solo nos quedaría la siguiente solución posible ($Montar$,$Montar$) que si es un Equilibrio de Nash puesto que ambas empresas disminuyen la utilidad que perciben si alguna de ellas cambia a no montar el negocio. De manera gráfica podemos representarlo con la matriz anterior

	Montar	No Montar
Montar	$\underline{1}, \underline{1}$	$\underline{4}, 0$
No Montar	$0, \underline{4}$	$0, 0$

y ($Montar$,$Montar$) es el equilibrio de Nash

2.3.2. Resolución de un juego en forma extensiva

Recordemos que hemos llegado al siguiente esquema del juego:

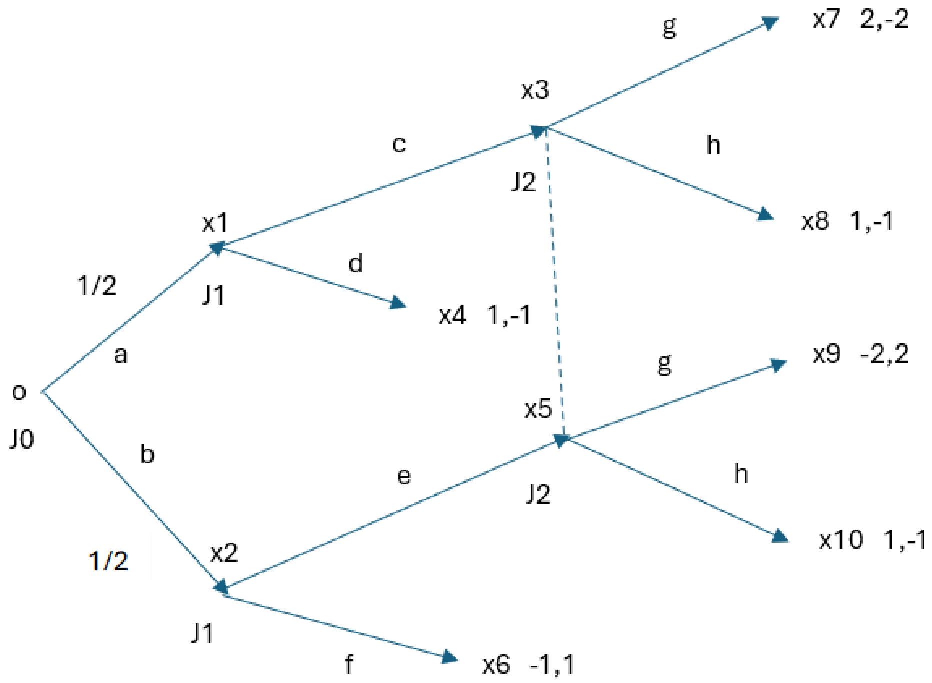

Figura 2.3: Diagrama Juego

En cuanto al jugador 2, este no sabe en cual de los nodos x_3 o x_5 se encuentra pues no ve la carta que se saca de la baraja. Así, se encuentra con una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de estar en x_3 o en x_5. Si decidimos apostar, el valor esperado a ganar es $\frac{1}{2} * (-2) + \frac{1}{2} * 2 = 0$, mientras que si decide no apostar y plantarse el valor esperado a ganar es $\frac{1}{2} * (-1) + \frac{1}{2} * (-1) = -1$, por lo que el jugador 2 decidirá apostar pues el valor esperado de la utilidad que recibe es mayor en ese caso.

Por otra parte, el jugador 1 si sabe en cual de los nodos de decisión x_1 o x_2 pues el si ve la carta que saca del mazo. De esta forma si se encuentra en el nodo de decisión x_1 puede decidir plantarse y de esta forma se lleva con probabilidad 1 1 euro, mientras que si decide apostar, como el jugador 2 siempre decide apostar (g), tiene un valor esperado de utilidad de $\frac{1}{2} * (-2) + \frac{1}{2} * 2 = 0$ por lo que siempre decidirá plantarse (d). Si se encuentra en x_2, si decide plantarse (f) tiene probabilidad 1 de perder 1 euro, mientras que si decide apostar, al saber igual que antes que el jugador 2 siempre decide g, el valor esperado de utilidad de $\frac{1}{2} * 2 + \frac{1}{2} * (-2) = 0$ que es mayor así que en este nodo siempre decide e.

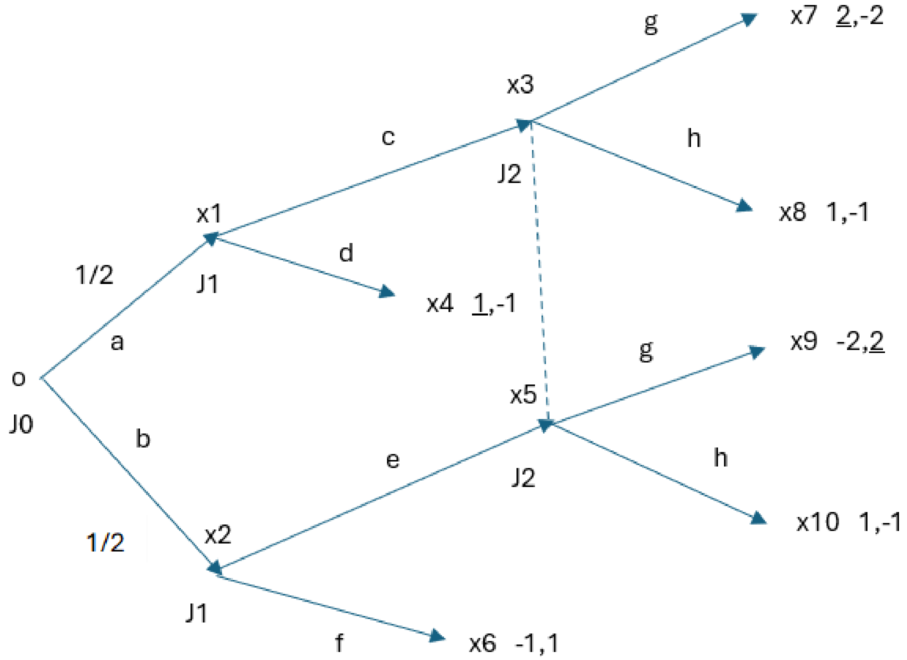

Figura 2.4: Diagrama Juego Equilibrio

Capítulo 3

Aplicación práctica: el blackjack

3.1. Cómo se juega al blacjack y qué tipo de juego es

El BlackJack, también conocido en lenguaje castellano como veintiuno, es uno de los juegos mas populares en los casinos de todo el mundo junto con el poker y la ruleta. A lo largo de estos últimos capítulos buscaremos estudiar en profundidad este juego para encontrar la estrategia optima con la que jugar para maximizar beneficios (o minimizar pérdidas). La característica mas importante que convierte la búsqueda de esta estrategia óptima en algo mas sencillo de lo que pudiera parecer en un principio, es el hecho de que el crupier (persona que reparte las cartas y asegura la normalidad del juego en cada mesa) está obligado a jugar de manera fija y conocida por todos los jugadores. Solo son los jugadores los que pueden ir tomando decisiones a lo largo del juego siempre y cuando se sigan las reglas que ahora pasamos a comentar.

Reglas del BlackJack

- Usamos una baraje francesa de 52 cartas, es decir, 4 palos con 13 cartas cada uno, del 1 al 10 y 3 figuras (las conocidas en España como sota, caballo y rey). Las cartas tienen unos valores: las figuras valen 10, y el resto de cartas tienen el mismo valor que su número, por ejemplo un 6 vale 6, menos el as que puede tomar los valores 1 u 11 dependiendo de lo que prefiera el jugador (ya comentaremos en que situaciones preferirá que valga una cosa u otra.)
- En el juego, a parte del crupier, participan como mucho 7 jugadores. Estos jugadores tienen que apostar el dinero antes de recibir la primera carta, lo que le da un atractivo al juego distinto al poker, en el que una vez recibamos cartas podemos aumentar la apuesta.
- **Desempeño y estrategia del crupier.** En primer lugar, una vez todos los jugadores han hecho su apuestas, el crupier procede a repartir las cartas a los jugadores. Una vez que estos han hecho su juego, el crupier empieza a darse cartas a si mismo y está obligado a plantarse cuando la suma de las cartas que se haya dado sume al menos 17. Cuando este tenga un as, que ya comentamos que pueden valer 1 u 11 a gusto, deberá contarlo como 11 si al recibir el as y contarlo con valor 11 la suma de sus cartas es al menos 17. Para aclararlo, si tiene un 7 y la carta siguiente es un as, este contará como 11 puesto que la suma de los dos cartas sumarían 18, mientras

que si por ejemplo tuviera un 3 y recibiera un as, no lo contará como 11 y su suma será 4.

- **Pagos.** Los pagos se basan en el hecho de "ganar" o no al crupier. Si el crupier se pasa y el jugador no lo hace, recibe una cantidad igual a su apuesta. Si no se pasan ninguno, quien mas se aproxime a 21 (de ahí el nombre del juego en español), si es el jugador recibe otra vez una cantidad igual a lo que ha apostado y si es el crupier se queda con el dinero apostado por el jugador. En caso de que empaten, no se producen juegos y el jugador recupera su dinero.

- **BlackJack.** Esta jugada es la más famosa y la que da nombre al juego. Es la mano más poderosa y gana a cualquier otra mano que tenga el crupier. Si el jugador posee un blackjack y el crupier no, este último deberá pagarle al jugador el 150 % de su apuesta.

- Otras posibilidades que tiene el jugador.
    - **Doblarse.** Si la suma de las dos primeras cartas es igual a 9, 10 u 11, el jugador tiene la posibilidad de doblar su apuesta inicial, pero como desventaja solo podrá recibir una carta más.
    - **Abrirse.** Cuando las dos primeras cartas que recibe el jugador tienen el mismo valor, un 10 y una figura o dos 7 por ejemplo, este puede separarlas y jugar a dos manos, teniendo que apostar en cada una la cantidad inicial que apostó. Si separamos un dos ases, al igual que pasaba antes cuando nos podíamos doblar, solo recibiremos una carta más en cada mano. Este apartado aunque parece ventajoso tiene el inconveniente de no poder abrirnos mas de una vez en cada jugada y en el caso de abrirnos con un as, en caso de recibir una carta que valga 10 puntos (figura o un 10) esto no contará como blackjack y en el caso de que el crupier lo obtuviese el jugador perdería el dinero de las dos manos.
    - **Asegurarse.** En caso de que la primera carta que el crupier se reparta a si mismo sea un as, los jugadores tendrán la opción de asegurarse y prevenir un posible blackjack del crupier con una apuesta adicional de a lo mas el 50 % de la apuesta inicial. Si efectivamente ocurre que el crupier obtiene un blackjack, el jugador recibe por el seguro el doble de lo que apostó. Este seguro los jugadores deberán obtenerlo si así lo desean antes de que el crupier reparta la tercera carta al primer jugador que lo desee.

3.2. Estudio riguroso. Como jugar según la mano que tengamos

Llamemos x al valor total de las cartas que posee el jugador. Consideramos dos tipos de manos que puede poseer un jugador: la que el total del jugador es único y menor a 21, llamadas "manos duras", y la que el jugador tiene uno o mas ases de manera que el jugador posee dos cartas con valores menores a 21. A este último tipo de mano la llamaremos "manos blandas" y requieren diferentes estudios a las manos duras.

Definamos D como el valor de la carta mas alta que posee el crupier. Así tomará los valores $D = 2, \cdots, 10, (1, 11)$. Sea $M(D)$ un entero tal que si la carta mas alta del crupier es D y el valor x es menor que $M(D)$, el jugador debería pedir una carta más. Mientras que dicho valor x sea al menos el valor de $M(D)$, el jugador deberá plantarse. De la misma manera definimos $M^*(D)$ para el caso de las manos blandas.

La suposición que hacemos es que una buena manera de saber cuando dejamos de pedir cartas se da cuando tenemos al menos estos números $M(D)$ y $M^*(D)$. Es decir, si hemos dicho que es bueno para cualquier jugador dejar de pedir cartas si llegamos a ese valor, también será correcto hacerlo cuando el valor de la mano sea incluso mayor. Esta suposición suele ser correcta la mayoría de veces salvo en casos especiales como cuando el hecho de dejar de pedir cartas se da cuando los jugadores tienen manos bajas con un numero de cartas restantes a repartir en el mazo bajo.

El primer paso es comparar la esperanza matemática de elegir $M(D) = x$ o $M(D) = x+1$, con x tomando un valor único sin exceder 21. Para las manos blandas comparamos $M^*(D) = x$ con $M^*(D) = x + 1$. En ambos casos empleamos la misma estrategia con la diferencia de que para el primer caso una vez llegamos al valor nos paramos y para el otro pedimos una carta mas. Para el caso de manos duras, comparar las dos esperanzas es equivalente a comparar $E_{p,x}$ la esperanza de pararse en un total de x, con $E_{d,x}$, la esperanza de un jugador que con un total de x pide una carta mas.Para el caso de las manos blandas, en el primer caso el jugador se para mientras que en el otro pide una o más cartas. Por ejemplo, en el caso de que tengamos una mano blanda con un valor de 17 en el primer caso nos plantaríamos, mientras que en el segundo caso pediríamos una carta mas. Pongamos que es un 5 por lo tanto nos pasaríamos pero como el valor del as puede ser 1 u 11, seria de valor 1 en este caso y obtenemos un total de 12, en cuyo caso deberíamos pedir una carta mas en la mayoría de ocasiones.

A partir de ahora nos centramos en la diferencia de esas dos esperanzas antes comentadas, $E_{p,x} - E_{d,x}$ para ver si es mayor o menor que 0. Si fijamos un valor x, la diferencia $E_{p,x} - E_{d,x}$ es una función decreciente en x, $M(D)$ se obtiene como el menor valor de x para el que $E_{p,x} - E_{d,x} < 0$. Esta función es no creciente siempre salvo casos excepcional como comentamos anteriormente en los que crece con x.

Definamos ahora T variable aleatoria como el valor final del crupier. Sabemos por las reglas que comentamos en la apartado 3.1 que si ocurre que $T > 21$ o $T < x$, el jugador gana (en el caso de que se haya plantado con ese valor x en sus cartas), mientras que si $T = x$ cada uno recupera el dinero apostado, y si $x < T \leq 21$ el jugador pierde la apuesta. Así podemos definir mejor la esperanza antes comentada:

$$\begin{aligned} E_{p,x} &= P(T > 21) + P(T < x) - P(x < T \leq 21) \\ &= 2P(T > 21) - 1 \end{aligned}$$

Para el caso de la esperanza $E_{d,x}$ definimos una nueva variable aleatoria J, que es la suma que le queda al jugador después de pedir una carta mas (solo una). En caso de que el total pueda tener dos valores sin exceder de 21 (caso de tener un as), J toma el mayor de los dos valores.

Sabemos por las reglas que la mano del crupier siempre tiene un valor mayor que 17 por lo que $T \geq 17$, así que si $J < 17$, solo ganaríamos en caso de que $T > 21$ y perderíamos para el resto de los valores de la variable T. Para este caso la esperanza sería:

$$P(T > 21) - P(T \leq 21) = 2P(T > 21) - 1$$

Si el valor de las cartas del jugador es $17 \leq J \leq 21$, la esperanza quedaría como:

$$P(T > 21) + P(T < J) - P(J < T \leq 21)$$

Lógicamente si el valor de la mano del jugador es $J > 21$ siempre vamos a perder y por tanto esa esperanza sería -1, es decir perderíamos cada euro apostado.

Una pregunta que podríamos hacernos es si estas variables T y J son independientes. Analizando, El valor que tome la variable J afecta a la variable T en solo si descartamos la posibilidad de que el crupier desvele una carta de valor $J - x$. Por lo tanto, si asumimos la independencia de estas dos variables estaríamos cometiendo un pequeño sesgo en el calculo de la esperanza. De esta manera:

$$\begin{aligned} E_{d,x} &= P(J < 17)[2P(T > 21) - 1] - P(J > 21) \\ &\quad + \Sigma_{j=17}^{2} 1P(J = j)[P(T > 21) + P(T < j) - P(j < T \leq 21)] \end{aligned}$$

Ya tenemos calculadas las dos esperanzas. Restándolas nos queda:

$$\begin{aligned} E_{d,x} - E_{p,x} &= -2P(T < x) - P(T = x) - 2P(T > 21)P(J > 21) \\ &\quad + 2P(T < J \leq 21) + P(T = J \leq 21) \end{aligned}$$

Si $T \geq 17$, los primeros dos términos son cero para el caso en que $x < 17$. Además, $P(J > 21)$ es también cero para el caso de una mano dura y menos de 12 para valores de una mano blanda. Por lo tanto esa diferencia de esperanza $E_{d,x} - E_{p,x} \geq 0$ para manos duras con $x < 12$ y para manos blandas con $x < 17$, de lo que sacamos que $M(D) > 11$ y $M^*(D) > 16$, $\forall D$

Consideremos ahora esta diferencia de esperanzas para el caso de valores $12 \leq x \geq 16$ en el caso de manos duras. Los dos primeros términos vuelven a ser ceros, mientras que el ultimo lo podemos reescribir usando la independencia entre J y T como usamos anteriormente.

$$E_{d,x} - E_{p,x} = -2P(T > 21)P(J > 21) + \sum_{t=17}^{21} P(T = t)[2P(t < J \leq 21) + P(J = t)]$$

Ahora introducimos un supuesto, y es que la distribución de probabilidad de $J - x$, la única carta que pide el jugador está dada por:

- $P(J - x = 10) = 4/13$, del hecho de que tenemos 3 figuras más el 10 por cada palo en la baraja.
- $P(J - x = i) = 1/13, i = 2, \cdots, 9, (1, 11)$

De esta manera asumimos la suposición de que obtener una carta es equiprobable. De primera mano podríamos danos cuenta de que esta suposición es incorrecta en manos individuales, pero es cierta cuando nos damos cuenta de que tenemos 52! permutaciones posibles de cartas en la baraja. Así pues, tendríamos lo siguiente:

$P(J > 21) = \frac{1}{13}(x-8)$, para $x \geq 12$ en manos duras y $P(t < J \leq 21) = \frac{1}{13}(21-t)$, $P(J = t) = \frac{1}{13}$ con t tal que $17 \leq t \leq 21$. Entonces:

$$E_{d,x} - E_{p,x} = -2/13(x-8)P(T > 21) + \sum_{t=17}^{21} 1/13(43-2t)P(T = t)$$

Para valores de x, $12 \leq x \leq 16$ no necesitamos hacer esta diferencia y ahora explicamos el porqué. Si la diferencia anterior la igualamos a 0, y teniendo en cuenta que como comentamos la función es decreciente en x, se obtiene una única solución x_0

$$x_0 = 8 + \frac{\sum_{t=17}^{21}(21\frac{1}{2} - t)P(T = t)}{P(T > 21)}$$

Así, si $x_0 < 12$ entonces $M(D) = 12$. Si $x_0 > 16 entonces M(D) > 16$ y si $12 \leq x_0 \leq 16$ entonces $M(D) = [x_0] + 1$ (parte entera de x_0). Para un valor dado de $P(T > 17)$, mas probabilidad tiene el crupier de tener una buena mano, mas bajo sea el numero en el que el jugador se pare. Por ejemplo, si $P(T > 21) = 2/5$ y $P(T = 18) = 3/5$ entonces $M(D) = 14$ mientras que si $P(T > 21) = 2/5$ y $P(T = 19) = 3/5$, entonces $M(D) = 12$.

En el caso de que $x = 17$ (en mano dura):

$$E_{d,17} - E_{p,17} = -18/13P(T > 21) - 5/13P(T = 17) + \sum_{t=18}^{21} 1/13(43-2t)P(T = t)$$

Evaluando para cada t la probabilidad $P(T = t)$ muestra que esa diferencia en negativa para todo D y por tanto, $M(D) \leq 17$.

Para el caso de manos blandas nos queda también el estudio cuando $x = 17$. En esa situación,

$$E_{d,17} - E_{p,17} = -1/13P(T = 17) + \sum_{t=18}^{21} 1/13(43-2t)P(T = t)$$

donde evaluando para cada t otra vez $P(T = t)$, muestra que la diferencia es positiva para todo D y por lo tanto $M^*(D) > 17$.

A partir de ahora, dado que siempre estamos comparando los estudios de las manos duras con las manos blandas junto con los hechos de doblarse y jugar a dos bandas, etc. Vamos a continuar el estudio por separado, analizando bien cada situación para después sintetizar ambos resultados en uno de carácter general.

Capítulo 4

Estudios individuales en el BlackJack. Diferenciamos por casos

Hacemos un breve recordatorio de varios puntos que comentamos en el apartado anterior y que vamos a utilizar individualmente en este apartado

Mano dura: son aquellas manos del jugador que teniendo un as, si este vale 11 podemos pasarnos de 21.

Mano blanda: son las manos del jugador que pueden tener un as valiendo 11 sin excederse del total de 21. Si tomamos la decisión de pedir una carta mas y con ella pasamos el límite, ese as pasa a tener valor de 1.

Suma de las cartas: que notaremos por x.

Carta del crupier: que notaremos por D.

Valor final del crupier: que es una variable aleatoria notada por T.

Suma del jugador: es una variable aleatoria notada por J que representa la suma del jugador tras pedir una única carta mas.

De aquí en adelante dejamos claro que la cantidad apostada por el jugador es una unidad monetaria, ya sea euro o dolar, para asi simplificar los calculos

4.1. Manos duras

Notemos por b la carta que se sirve el crupier. $b = 2, \cdots, 10, (1, 11)$. Así pues en cada momento tenemos el para (x, b) en la que el jugador tiene la información de x puesto que es el valor total de sus cartas y ve la carta que se sirve el crupier. En esta situación el jugador debe decidir si parar y plantarse o pedir mas cartas.

Definimos entonces $G^*(x, b)$ como la máxima ganancia esperada por el jugador dado una situación (x, b) suponiendo que el jugador actúa de forma optima y juega de manera racional.

De igual manera definimos $G_0(x, b)$ como la ganancia esperada por el jugador si este decide plantarse ante la situación del juego (x, b).

Recordamos también que suponemos que la probabilidad de tener una determinada carta de un valor es equiprobable es decir, la probabilidad (notemos la como P_c) de obtener una carta de valor c es:

$$P_c = \begin{cases} 4/13 & \text{si } c = 10 \\ 1/13 & \text{si } c \neq 10 \end{cases}$$

Con esta información podemos caracterizar $G^*(x, b)$ como:

$$G^*(x, b) = Max\{G_0(x, b), \sum_{c=1}^{10} P_c G^*(x + c, b)\}$$

Es decir, tenemos el máximo entre la opción de plantarnos en ese instante o de la situación en la que nos encontraríamos si pidiéramos una carta mas. Así nos plantaremos cuando el máximo lo alcancemos el $G_0(x, b)$.

Nos queda evaluar ese máximo para cada x y cada b posibles. Para poder hacerlo necesitamos lo siguiente:

1. $G_0(x, b)$, $\forall x = 4, \cdots$ y $\forall b = 2, \cdots, 10, (1, 11)$
2. Algunos valores finales de $G^*(x, b)$ para iniciar el la inducción hacia atrás, $\forall x, b$

Calculo de $G_0(x, b)$

De lo que obtuvimos en la sección anterior sabemos que:

$$G_0(x, b) \;=\; Pr(T > 21) \;+\; Pr(T < x) \;-\; Pr(x < T \leq 21)$$

Así pues el siguiente paso es calcular las probabilidades del crupier que dada una carta de valor b, la variable T tenga un determinado valor final

Cálculo de las probabilidades de la variable T dada una carta conocida b

Tabla 4.1: Probabilidades de resultado final del crupier según carta visible

	17	18	19	20	21	BlackJack	Se pasa
1	0.15448	0.13629	0.13141	0.12676	0.16452	0.00000	0.28654
2	0.14746	0.13280	0.12776	0.12325	0.11598	0.00000	0.35275
3	0.14163	0.12972	0.12410	0.11934	0.11387	0.00000	0.37134
4	0.13889	0.12509	0.12016	0.11478	0.10840	0.00000	0.39268
5	0.13873	0.11932	0.11409	0.11103	0.10498	0.00000	0.41185
6	0.20502	0.10758	0.10267	0.09717	0.09303	0.00000	0.39453
7	0.36200	0.15079	0.08223	0.07644	0.07119	0.00000	0.25735
8	0.13543	0.33580	0.14531	0.07118	0.06912	0.00000	0.24316
9	0.12667	0.11813	0.33155	0.13545	0.06437	0.00000	0.22383
Figura	0.11741	0.11119	0.10950	0.32294	0.05600	0.07104	0.21192
As	0.13996	0.12769	0.12758	0.12890	0.05723	0.28396	0.13468

Ahí tenemos las probabilidades calculadas en función de cada carta inicial que veamos. Si las comparamos con las de la biografía

b \ B	17	18	19	20	21	BL.JACK	SE PASA
1	.130967	.130867	.130926	.130593	.053895	.307919	.114833
2	.139866	.134672	.129167	.124510	.118795	.000000	.352990
3	.135020	.130546	.125441	.120473	.114699	.000000	.373821
4	.130407	.126073	.121832	.116268	.111227	.000000	.394193
5	.121943	.121931	.117990	.112953	.108040	.000000	.417143
6	.165071	.106337	.106072	.101458	.097660	.000000	.423402
7	.368573	.137726	.078497	.078528	.074030	.000000	.262646
8	.128650	.359020	.128543	0.70008	.069280	.000000	.244499
9	.120016	.120380	.351065	.119597	.060732	.000000	.228210
10	.111998	.111416	.111418	.341491	.034456	.076816	.212405

Figura 4.1: Diagrama Juego

D \ t	17	18	19	20	21	natural 21	>21
2	.141781	.134885	.131432	.123829	.119581	.000000	.348492
3	.133533	.133052	.126197	.122563	.114903	.000000	.369751
4	.132206	.116037	.122553	.117930	.114292	.000000	.396983
5	.121374	.124511	.117753	.105446	.107823	.000000	.423092
6	.167625	.107233	.108018	.101260	.098364	.000000	.417499
7	.372743	.139017	.077841	.079409	.073437	.000000	.257552
8	.131202	.363359	.129634	.068457	.070026	.000000	.237322
9	.122256	.104217	.357550	.122256	.061079	.000000	.232643
10	.114756	.113186	.114756	.328873	.036324	.078431	.213674
(1, 11)	.128147	.131284	.129716	.131284	.051284	.313725	.114560

Figura 4.2: Diagrama Juego

Podemos ver que los resultados son muy similares, por lo que podemos deducir que los calculos que hemos realizado son correctos. Una vez conocidas las probabilidades, ya estamos en disposición de calcular $G_0(x, b)$ como detallabamos al comienzo, $\forall\ x = 4, \cdots$ y $\forall\ b = 2, \cdots, 10, (1, 11)$

4.2. Manos blandas

Capítulo 5

VNM-Póker y Khun-Póker

En este último apartado comentaremos otro juego de azar que introdujeron Von Newmann y Morgenstern, el VNM-Póker, junto con una variante que amplía este juego y que se conoce como Khun-Poker. El primero fue introducido en *Theory of Games and Economic Behavior*, mientras uqe el segundo se introdujo en *A simplified two-person poker.Contributions to the Theory of Games* .

Los dos juegos costan de dos jugadores, comunmente llamados ANN y Beth. Cada una de ellas coge al azar una carta de la baraja sin enseñarsela a la otra. Asi podriamos decir que los juegos presentan 4 parámetros:

1. Hay una baraja con cartas de valores q van de 1 a S.
2. Cada carta está representada r veces en la baraja.
3. Una apuesta inicial de m uds. monetarias q cada jugador realiza antes de empezar la partida.
4. Un valor final de la apuesta total de cada jugador, que denotamos como n, al cual el jugador puede llegar añadiendo $n - m$ uds. monetarias adicionales

Como regla general se considera que $m < n$.

5.1. VNM-Póker. Explicación, estrategias y equilibrios

$VNM - Póker(S, r, m, n)$. El juego comienza repartiendo una carta a cada jugador, y a continuación, Ann mueve primero y elige si pasar, jugando así por m, o subir, jugando así por n. Ahora nos encontramos con dos posibles situaciones:

- Si Ann pasa, ambas jugadores revelan sus dos cartas, y el jugador que tenga la carta mas alta gana el bote, que como no se ha subido la apuesta es de $2m$ uds. monetarias. Si hubiera empate, cada jugador recupera su dinero.

- Si Ann elige subir, incrementa su apuesta hasta n. Le toca el turno a Beth que tiene dos posibles movimientos, retirarse o seguir.

** Si Beth se retira, Ann se lleva el bote encima de la mesa que consta de los n suyos mas los m de Beth, por lo que gana m. La carta de Beth no se levanta en este caso.

** Si Beth decide seguir la apuesta, ella también incrementa su apuesta hasta n. Entonces cada una revela su carta y el que tenga la carta de mayor valor se lleva el bote completo de $2n$ ganando así n. De la misma manera que antes, en caso de empate los jugadores recuperan su dinero.

El juego podemos clasificarlo dentro de los de suma cero, puesto las ganancias de uno viene de las perdidas del otro y al final el dinero que se reparte es el dinero que proviene de las apuestas de los dos jugadores. Procedemos ahora a representar la forma extensiva de este juego.

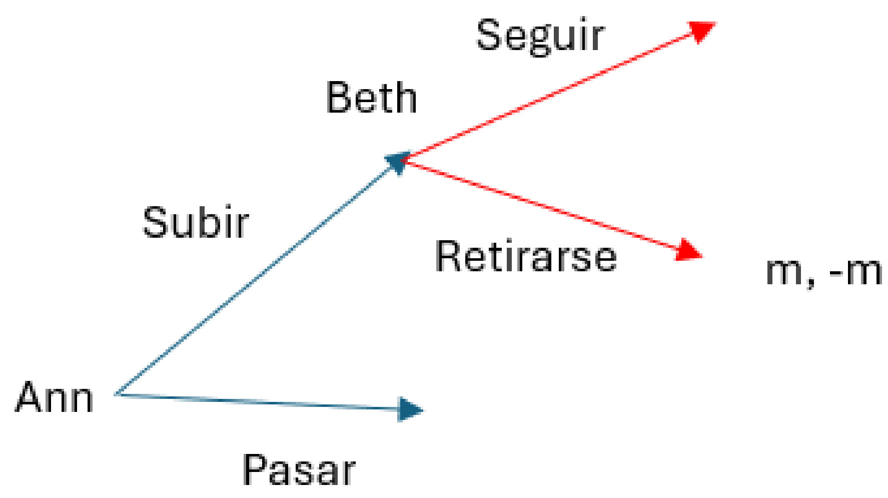

Figura 5.1: VNM-Póker

Como hemos comentado, el juego comienza dándole una carta al azar a cada jugador. Ann puede coger una carta cualquiera de $1, \cdots, S$, y en función del valor del parámetro r Beth podrá tomar también una carta de $1, \cdots, S$ dando S^2 posibles combinaciones si $r > 1$ y en caso de $r = 1$, habría $S(S-1)$ posibles combinaciones.

Con esto nos damos cuenta de que los parámetros intervienen de forma distinta: mientras que m y n intervienen en el aspecto de apuesta y reparto del dinero, los parámetros S y r tienen influencia en la forma y tamaño del árbol del juego y las probabilidades de los movimientos que dependen del azar.

Las alternativas para el movimiento aleatorio de recibir una determinada carta no son igualmente probables. Por ejemplo, si fijamos una carta determinada llamemosle C, la probabilidad de obtener C es $\frac{r}{rS} = \frac{1}{S}$. una vez se saca dicha carta del mazo, quedan $r-1$ cartas C de un total de $rS-1$, por lo que la probabilidad de obtener otra carta C es $\frac{r-1}{rS-1}$. Como resumen:

- Si Ann y Beth tienen cartas de igual valor c, esto tiene una probabilidad

$$p_{cc} = \frac{1}{S}\text{ů}\frac{r-1}{rS-1} = \frac{r-1}{S(rS-1)}$$

- Si Ann y Beth tienen cartas de distinto valor c y d, esto tiene una probabilidad

$$p_{cd} = \frac{1}{S}\text{ů}\frac{r}{rS-1} = \frac{r}{S(rS-1)}$$

Ejemplo VNM-Póker(2,2,1,1)

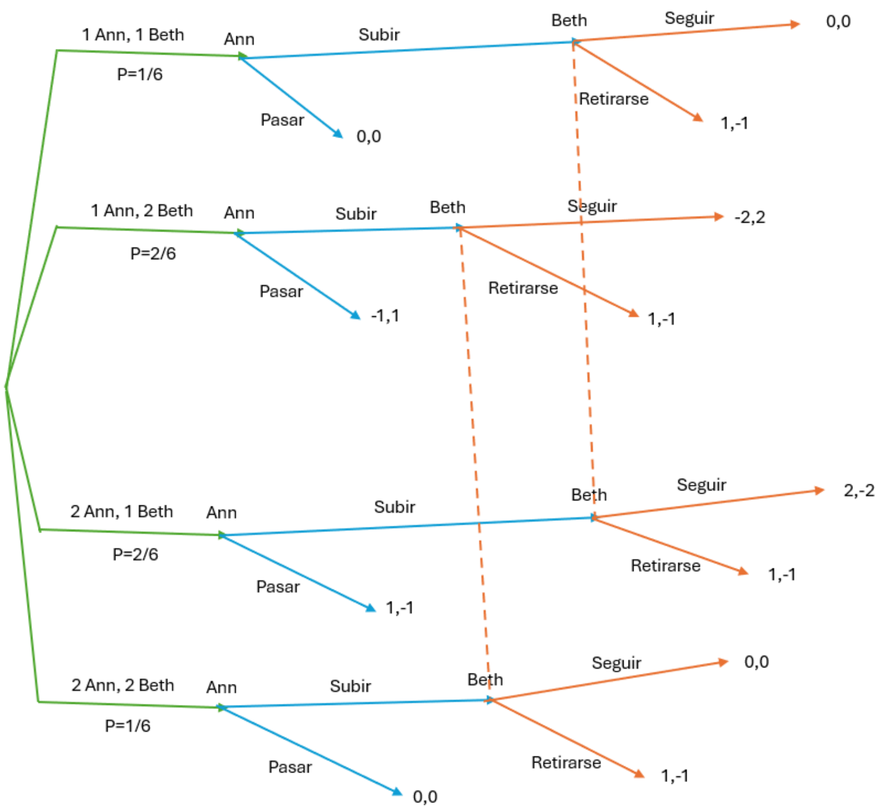

Figura 5.2: VNM-Póker

5.1.1. Estrategias

Si $r > 1$ hay $S * S$ diferentes combinaciones para repartir un valor a Ann y otro a Beth. Ann como hemos dicho solo puede ver su carta por lo que tiene S conjuntos de información. En cada uno de esos conjuntos tiene las opciones de subir o pasar. Así pues, Ann tiene 2^S estrategias puras. Codificamos las estrategias por secuencias de R y C (de check y raise, traducción de pasar y subir). Por ejemplo, para $S = 4$ seria $RCCR$ una posibilidad, que significa que Ann sube la apuesta con las cartas mas alta y mas baja y pasa en las dos cartas intermedias. De la misma manera, Beth tiene S conjuntos de información con dos opciones y por lo tanto también tiene 2^S estrategias puras que están codificadas por C y F (traducciones de seguir y retirarse).

De esta manera los posibles pagos son:

- Ann elige pasar $\rightarrow m$, 0 ó $-m$.
- Ann elige subir y Beth elige retirarse $\rightarrow m$.
- Ann elige subir y Beth elige seguir $\rightarrow n$, 0 ó n.

En adelante supondremos $S = 2$ y $r \geq 2$. Suponiendo esto, tenemos los siguientes conjuntos de estrategias puras para Ann es $\{CC\ (conservadora), CR\ (equilibrada), RC\ (inútil), RR\ (arries$ y para Beth $\{FF\ (conservadora), FC\ (equilibrada), CF\ (inútil), CC\ (arriesgada)\}$

Al igual que antes hicimos con la forma extensiva representamos la forma normal del juego con $S = 2$

	FF	FC	CF	CC
CC	0	0	0	0
CR	$\frac{m(r-1)}{4r-2}$	0	$\frac{nr-m}{4r-2}$	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RC	$\frac{m(3r-1)}{4r-2}$	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	$\frac{2mr}{4r-2}$	$\frac{r(m-n)}{4r-2}$
RR	m	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	$\frac{m(2r-1)+rn}{4r-2}$	0

Pasamos a comentar como hemos obtenido las expresiones para esta tabla. Para cada par de estrategias, definimos $u_{x,y}$ el pago que recibe Ann cuando los jugadores siguen sus estrategias y Ann tiene una carta de valor x y Beth una de valor y, así la utilidad esperada para Ann es la siguiente:

$$p_{xx}u_{1,1} + p_{xy}u_{1,2} + p_{xy}u_{2,1} + p_{xx}u_{2,2}$$

donde $p_{xx} = \frac{r-1}{4r-2}$ y $p_{xy} = \frac{r}{4r-2}$

Así, si Ann juega la estrategia RR y Beth juega FC tendríamos las utilidades $u_{1,1} = m$,$u_{1,2} = -n$,$u_{2,1} = m$ y$u_{2,2} = 0$ y la utilidad que recibe Ann es:

$$\begin{aligned} & p_{xx}\text{ů}m + p_{xx}\text{ů}(-n) + p_{xx}\text{ů}m + p_{xx}\text{ů}0 \\ = & \frac{r-1}{4r-2}\text{ů}m + \frac{r}{4r-2}\text{ů}(-n) + \frac{r}{4r-2}\text{ů}m + \frac{r-1}{4r-2}\text{ů}0 \\ = & \frac{(r-1)m-rn+rm}{4r-2} \\ = & \frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}\text{ů}m \end{aligned}$$

Aunque hemos puesto en la tabla todas las estrategias posibles, somos conscientes de que en algunos casos hay estrategias que están dominadas por otras:

- Cuando Ann tiene una carta de mayor valor que Beth, subir domina a pasar.
- Cuando Beth tiene una carta mas alta que la de Ann, seguir domina a retirarse.

Podemos extender esto a casos mas generales con el suiguiente teorema:

Teorema

Todas las estrategias de Beth, menos las de la forma $C \cdots C$ y las de la forma $F \cdots FC \cdots C$ están debilmente dominadas.

Haciendo uso de este teorema podemos simplificar la forma normal del juego a:

	FC	CC
CR	0	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RR	$\frac{m(2r-1)-rn}{4r-2}$	0

Una estrategia alternativa que podría seguir un jugador es la de *tirarse un farol* que consiste en, aun teniendo una carta de valor bajo, este jugador decide subir la apuesta para intentando amedrentar al otro jugador para así este decida retirarse. Desde el comienzo del trabajo hemos supuesto la hipótesis de racionalidad de los jugadores por lo que esta estrategia no tendría sentido. Pasemos ahora a analizar las distintas estrategias.

5.1.2. Análisis del juego

- Equilibrio puro.

La entrada $\frac{(n-m)r}{4r-2}$ siempre es > 0 puesto que $n > m$. Si $\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$ es < 0, la estrategia de Ann CR domina débilmente a RR, y la estrategia de Beth FC domina débilmente a CC. Por lo tanto, hay un equilibrio de Nash puro (CR, FC) con una utilidad esperada para Ann de 0.

- ¿Qué hacer si el adversario no juega de manera optima, sino mezclando estrategias puras no dominadas?

Vamos a suponer que el jugador que juega de esa manera es Beth, que lo hace de esta manera: elige FC con una probabilidad q y elige CC con probabilidad $1-q$, es decir, elige seguir cuando tiene una carta de valor 2 y retirarse con una probabilidad q cuando tiene una carta de valor 1

¿Qué tendría que hacer Ann en cada situación? Por un lado, si miramos los pagos, Ann al jugar CR es $\frac{(1-q)(n-m)r}{4r-2}$ que es mayor o igual a $\frac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2}$ que es el pago al jugar RR si (esto se da puesto que $4r-2>0$ ya que $r \geq 1$):

$$\begin{aligned}
\tfrac{(1-q)(n-m)r}{4r-2} &\geq \tfrac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2}\\
(1-q)(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn)\\
(n-m)r - q(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn)\\
(n-m)r &\geq q[((2r-1)m-rn)+(n-m)r]\\
(n-m)r &\geq q[(r-1)m]
\end{aligned}$$

Como $r \geq 2$ tenemos que $(r-1)m > 0$, lo podemos pasar dividiendo sin cambiar el signo de la desigualdad y tendríamos:

$$q^* = \frac{(n-m)r}{(r-1)m} \geq q$$

Por lo que Ann debe jugar CR si Beth juega FC, mientras que en otro caso Ann debería jugar RR, jugando así de manera opuesta al comportamiento de Beth. Por su parte, Beth debería copiar las jugadas que haga Ann.

- Equilibrio mixto.

Si $\frac{n}{m} \geq 2 - \frac{1}{2}$ no hay equilibrio de Nash puro y tendríamos q encontrar uno mixto.

Supongamos que Ann juega CR con probabilidad p y RR con probabilidad $1-p$, y Beth juega FC con probabilidad q y CC con probabilidad $1-q$. Cada una de las estrategias puras (CR, FC) y (RR, CC) es una mejor respuesta a ellas y concluimos con:

$$p = \frac{(2r-1)m - rn}{(r-1)m} \; y \; q = \frac{(n-m)r}{(r-1)m}$$

5.2. Khun-Póker. Cambios respecto al VNM-Póker

$Kuhn - Poker(S, r, m, n)$ Este juego extiende el VNM-Póker. Si Ann decide pasar los jugadores juegan un VNM-Póker con los roles cambiados. Ann mueve primero eligiendo entre pasar o subir.

- Si Ann decide pasar, entonces Beth puede pasar o subir:

** Si Beth pasa, ambas cartas se levantan para ser visibles y el que tenga la carta mas alta se lleva el bote, mientras que si empatan los jugadores recuperan su dinero.

** Si Beth elige subir, incrementa su apuesta hasta n. Entonces Ann tiene dos opciones, retirarse o seguir.

*** Si Ann se retira, Beth se lleva la cantidad de $n+m$, y la carta de Ann no se revela.

*** Si Ann sigue, incrementa su apuesta hasta n. Entonces ambas cartas se revelan y el que tenga la carta mas alta se lleva los $2n$ de la apuesta y recuperan su dinero en caso de empate.

- Si Ann sube, el juego funciona como el VNM-Póker cuando Ann sube.

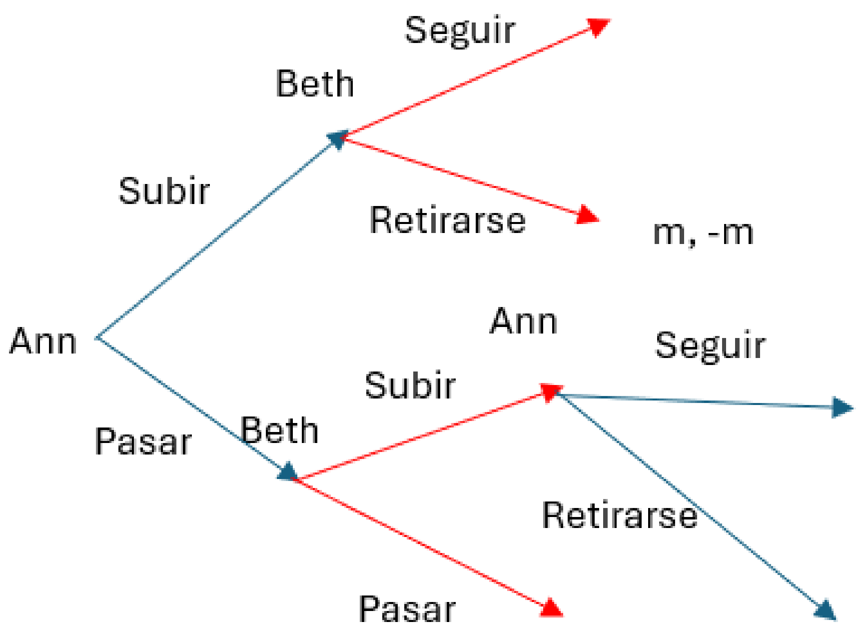

Figura 5.3: Kuhn-Póker

5.2.1. Estrategia

Ann tiene $2S$ conjuntos de información: o bien ella hace su primer movimiento, subir o pasar, o Ann ha pasado en su primer movimiento, Beth ha subido y entonces Ann puede seguir o retirarse. En todos eso casos, ella solo conoce el valor de su carta. Beth tiene $2S$ conjuntos de información, determinados por el valor de su carta y en función de si Ann ha subido o pasado, con S conjuntos de información en cada uno.

Por lo tanto, Ann tiene 2^{2S} estrategias puras, indicadas por S letras que pueden ser como en la sección 5.1.1 R o C para las elecciones de subir o pasar, y también S letras F o C para la elección de retirarse o seguir. Así, para $S = 2$ tenemos 16 estrategias puras, que son $CCFF$, $CCFC$, $CCCF$, $CCCC$, $CRFF$, $CRFR$, $CRCF$, $CRCC$, $RCFF$, $RCFC$, $RCCF$, $RCCC$, $RRFF$,$RRFC$, $RRCF$, y $RRCC$.

De la misma manera, Beth también tiene $2S$ conjuntos de información, S cuando Ann sube y otros S cuando Ann pasa, así para $S = 2$ tendríamos: $FFCC$, $FFCR$, $FFRC$, $FFRR$, $FCCC$, $FCCR$, $FCRC$, $FCRR$, $CFCC$, $CFCR$, $CFRC$, $CFRR$, $CCCC$,$CCCR$, $CCRC$, y $CCRR$.

Hemos podido eliminar algunas estrategias por estar dominadas al igual que antes. Si Ann tiene un valor de carta mayor que el de Beth, y ella pasa cuando Beth sube, siempre es mejor para Ann seguir y no retirarse puesto que retirándose pierde m uds. monetarias mientras que si sigue no puede perder. Si Ann tiene un valor de carta mas alto, subir no domina necesariamente a pasar, ya que depende de la estrategia de Beth. Si Beth tiene una carta de valor mas alto que Ann, seguir domina a retirarse y subir domina a pasar.

Apéndice A

Apéndice: Título del Apéndice

A.1. Primera sección

Apéndice B

Apéndice: Título del Apéndice

B.1. Primera sección

Bibliografía

[1] Casas Méndez, Balbina; Fiestras Janeiro, M. Gloria; García Jurado, Ignacio y Gónzalez Díaz, Julio (2012). *Introducción a la Teoría de Juegos*. Servizo de Publicacións e Intercambio Científico Campus Vida, first edition reviwed and expanded.ª edición.

[2] Pérez, Joaquín Jimeno; Luis, José y Cerdá, Emilio (2021). *Teoría de Juegos*. Garceta, second edition.ª edición.

[3] Sánchez-Cuenca, Ignacio (2009). *Teoría de Juegos*. Centro de Investigaciones Sociológicas, second edition reviwed and expanded.ª edición.

[4] Torrejón Valenzuela, Alberto (2020). «Teoría de Juegos». https://idus.us.es/server/api/core/bitstreams/90448d24-41f5-462d-8b8c-a6a2be0fb9e7/content.

[5] Álvarez Mozos, Mikel y Martínez de Albéniz Salas, F. Javier (2021). *Teoría de Juegos*. UOC, first edition.ª edición.