

# Aplicación de Sistemas Numéricos y Redes Neuronales para el Análisis de los Atractores de Chua y Lorenz

Francisco José Mercado Rivera.<sup>1</sup>

*Estudiante Doctorado en Ingeniería, Universidad Autónoma de Occidente, Cali, Colombia  
(e-mail: francisco.mercado@uao.edu.co).*

---

**Resumen:** El presente informe expone el análisis numérico que describe el comportamiento del circuito de chua. Para esto se desarrollan diferentes algoritmos en la plataforma Matlab y Arduino en donde se estudia el comportamiento de cada uno de los estados de este circuito, como su diagrama de bifurcación. Adicionalmente el informe muestra el modelamiento del comportamiento del modelo matemático de Lorenz por medio de una red neuronal, siendo esta última entrenada por medio de parámetros obtenidos del modelo matemático original.

---

## 1. INTRODUCCIÓN

En contramos que los sistemas dinámicos caóticos son aquellos sistemas que presentan un comportamiento irregular y poco determinista, Estos comportamientos son producidos y son sensibles por las condiciones iniciales del sistema, un pequeño cambio en estas condiciones puede generar que el sistema presenta grandes diferencias en el comportamiento futuro, lo cual impide la predicción y determinación de su comportamiento en el futuro[1].

Un ejemplo de estos sistemas es el circuito eléctrico denominado circuito de chua, este circuito fue diseñado por Leon O. Chua en 1983. Este circuito está compuesto por 4 elementos de modelamiento lineal (dos capacitores, una inductancia y una elemento resistivo) y adicionalmente presenta un elemento no lineal denominado diodo de chua [2], como se muestra en la figura 1 donde se expone el diagrama del circuito de chua.

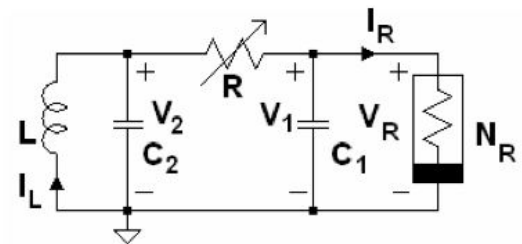


Figura 1. Esquema de Circuito de Chua

Analizando el circuito por medio de las leyes de Kirchhoff se llega las ecuaciones planteadas a continuación.

$$C2 \frac{dv(t)}{dt} = G (V_2 - V_1) + iL$$

$$C1 \frac{dv(t)}{dt} = G (V_1 - V_2) + iV_{NR}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = + \frac{V}{L}$$

Ecuación (1).

Estas ecuaciones fueron reescaladas de las variables Vc1, Vc2 y iL a ecuaciones de tres variables de estados y dos variables de control como se muestra en las siguientes ecuaciones.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha(y - \phi(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y\end{aligned}$$

Ecuación (2).

Donde  $x$ ,  $y$ ,  $z$  representan los estados del sistema,  $\alpha$  y  $\beta$  parámetros de control y  $\phi(x)$  una función no lineal que depende del estado  $x$ . Originalmente Chua definió esta función no lineal  $\phi(x)$  como se muestra en la ecuación (3), sin embargo esta ha venido siendo estudiada por diversas personas de tal manera que ha llegado a tener múltiples representaciones. Para este caso de estudio la función no lineal  $\phi(x)$  está definida de la forma que muestra la ecuación (4), el cual es un polinomio cúbico propuesto por Khibnik et al. en 1993 [3].

$$\phi(x) \triangleq x + g(x) = m_1 x + \frac{1}{2} (m_0 - m_1)[|x + 1| - |x - 1|]$$

Ecuación (3).

$$\phi(x) \triangleq = \frac{1}{16} x^3 - \frac{1}{6} x$$

Ecuación (4).

Para el modelamiento de un sistema caótico por medio de una red neuronal, se utilizara otro atractor caótico denominado atractor de Lorenz. Este fenómeno simplifica las ecuaciones que describen la dinámica de la atmósfera terrestre, llevándolas a ser un sistema tridimensional no lineal de tres estados, este comportamiento fue descrito por Edward Lorenz en 1963 [4].

En la ecuación (5) podemos observar las ecuaciones que describen el comportamiento del atractor de Lorenz, en donde se aprecia los estados  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y adicionalmente tres parámetros tridimensionales,  $\sigma$ ,  $b$ ,  $r$ . Estos tres parámetros son los que determinan el comportamiento del atractor de Lorenz [5].

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \sigma[y(t) - x(t)] \\ \frac{dy(t)}{dt} &= x(t)[r - z(t)] - y(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} &= x(t)y(t) - bz(t)\end{aligned}$$

Ecuación (5).

## 2. DESARROLLO Y RESULTADOS

### Análisis del Circuito de Chua

Para entender el comportamiento del sistema del circuito de chua, se realizó un código en Matlab el cual permitiera observar el comportamiento de cada uno de sus estado respecto al tiempo, como su comportamiento en el gráfico de espacio estado a medida que se fueran cambiando los parámetros de control. Es importante recalcar que para el análisis de este atractor se utilizó como componente no-lineal la ecuación descrita en la ecuación (4), donde el valor de  $d1=1/6$  y  $d3= 1/16$ .

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales se hizo uso del comando **ode45** disponible en la plataforma MatLab, El cual permite resolver un sistema de ecuaciones diferenciales de mediano orden por medio de la integración numérica en un tiempo específico de integración. Para el uso de este método es indispensable conocer las condiciones iniciales con el cual queremos solucionar el sistema, puesto que estas son las que marcan la dinámica de dicho sistema.

Para entender el comportamiento del sistema se resolvió el sistema tres veces con unas condiciones iniciales  $x=0.1$ ,  $y=0.1$  y  $z=0.1$ , con un parámetro  $\beta=14$  y un parámetro  $\alpha$  que cambia para cada una de las soluciones.

Para la primera solución se establece un parámetro  $\alpha=4$  y un tiempo de integración de 50. En la figura 2 se observa el comportamiento de los estados respecto al tiempo, en donde se aprecia que estos estados llegan a la estabilidad después de un tiempo

determinado. Adicionalmente en la figura 3 se expone el diagrama de espacio estado, en donde se observa que los estados llegan a un punto de estabilidad.

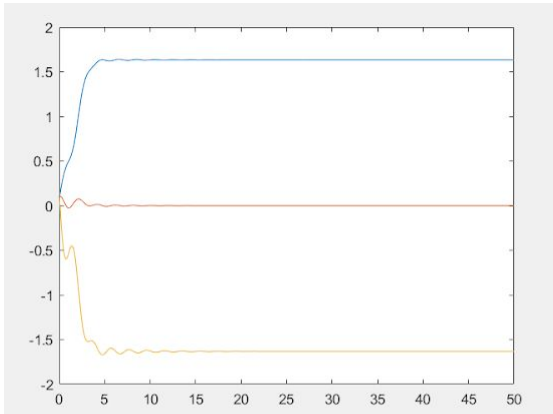


Figura 2. Respuesta temporal de los estados de chua para condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=4$ .

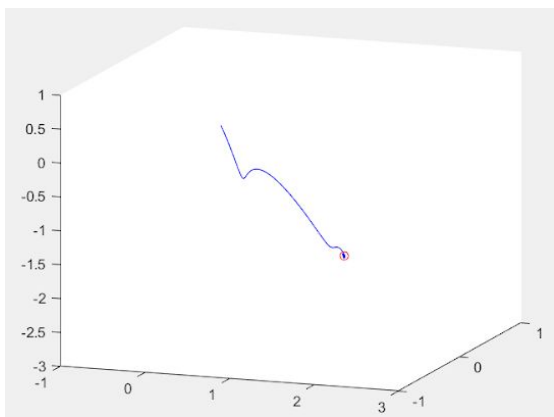


Figura 3. Diagrama de espacio estado para circuito de chua con condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=4$ .

Para la segunda solución se estableció un  $\alpha=8$  y un tiempo de integración de 100. En la figura 4 se aprecia el comportamiento de los estados respecto al tiempo, en donde se aprecia que estos estados entran en una oscilación sin embargo aún presenta un comportamiento estable. Por otro lado en la figura 5 se expone el gráfico de espacio estado para estos parámetros, donde se aprecia que este toma el comportamiento de un atractor, sin llegar a un punto de estabilización.

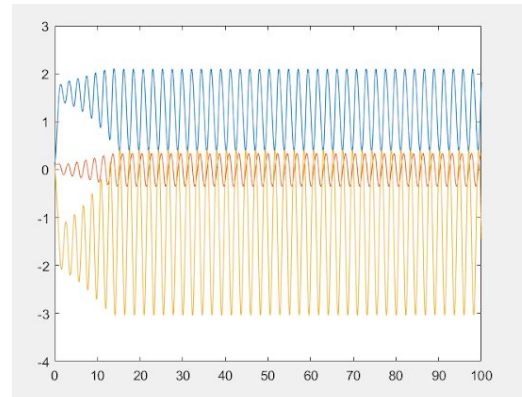


Figura 3. Respuesta temporal de los estados de chua para condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=8$ .

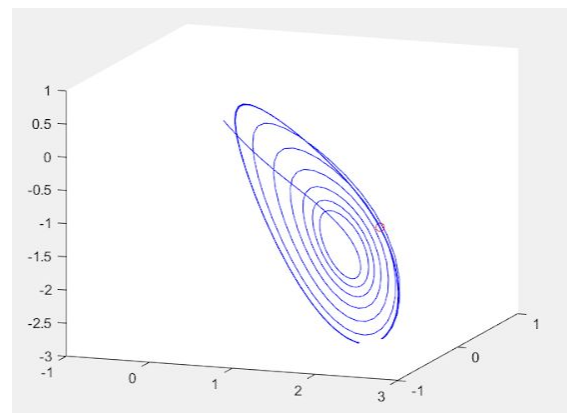


Figura 3. Diagrama de espacio estado para circuito de chua con condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=8$ .

Para la segunda solución se estableció un  $\alpha=10$  y un tiempo de integración de 500. En la figura 6 se observa que los estados entran en un comportamiento caótico, mientras que la figura 7 ilustra el diagrama de espacio estado, el cual permite corroborar que el sistema entra en un comportamiento de atractor extraño, llevando al sistema a un comportamiento caótico.

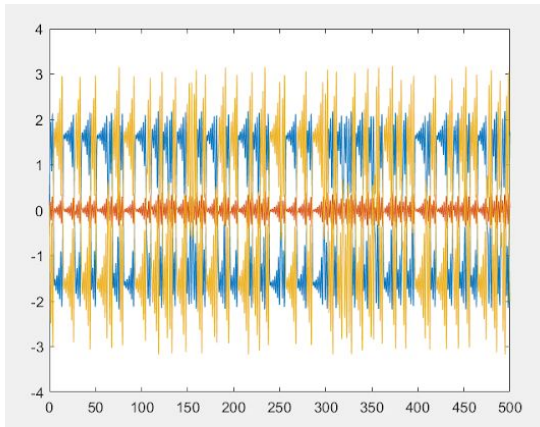


Figura 6. Respuesta temporal de los estados de chua para condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=10$ .

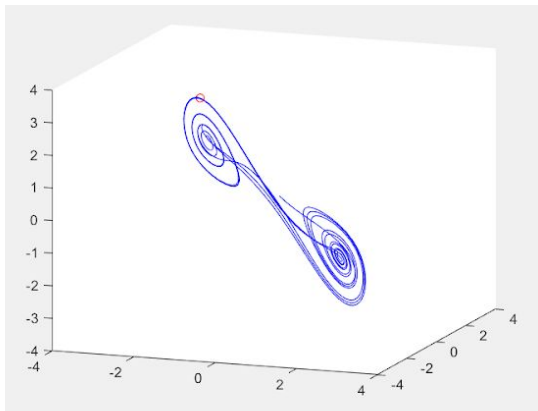


Figura 7. Diagrama de espacio estado para circuito de chua con condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=10$ .

Adicionalmente para entender el comportamiento de este circuito de chua se realizó un código el cual permita el diagrama de bifurcación del estado  $X$  a medida que se varía el parámetro  $\alpha$ . Para esto se realiza la solución para cada uno  $\alpha$  y las siguientes condiciones  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y  $\beta=14$  y un tiempo de integración determinado. Posterior a la solución del sistema para cada uno de los  $\alpha$  se encuentran los valores máximos y mínimos a los cuales llega el estado  $x$ , con el fin de graficarlos en el diagrama de bifurcación.

En la figura 8, se aprecia el diagrama de bifurcación para el estado  $x$ , generado por el código desarrollado. En este se aprecia que el este estado presenta un valor de estabilización igual a 0 para los valores de  $\alpha$  entre 0 y aproximadamente 6.5, un valor estable igual a 0.5

entre valores de  $\alpha$  aproximados entre 6.5 y 8. A partir del valor de  $\alpha$  igual a 8 este estado empieza a bifurcarse hasta llegar a un estado caótico.

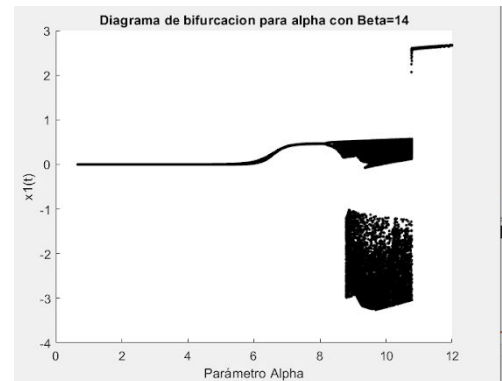


Figura 8. Diagrama de bifurcación para el estado  $x$  del sistema de chua para condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parámetros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha$  alfa variable..

Uno de los métodos de análisis numéricos más conocidos es el método de Runge Kutta, para poner en práctica este método de análisis numéricos se crea un algoritmo basado en el método de Runge Kutta de cuarto orden que pueda solucionar y representar la dinámica de los estados del circuito de chua. Dicho algoritmo fue implementado en la plataforma arduino.

En la figura 9 observamos la salida del sistema implementada en arduino para unos valores iniciales del sistemas iguales a:  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y unas parámetros de control iguales a:  $\alpha=4$ ,  $\beta=14$ . Esta gráfica nos muestra que los estados del sistema se estabilizan, lo cual nos lleva a pensar que la implementación está correcta debido a que si se compara los valores de estabilización con los datos obtenidos anteriormente con la solución numérica de MatLab son coincidentes y adicionalmente el diagrama de bifurcación nos indica que para estos valores de parámetros al menos el esta  $x$  debe presentar un valor estable.

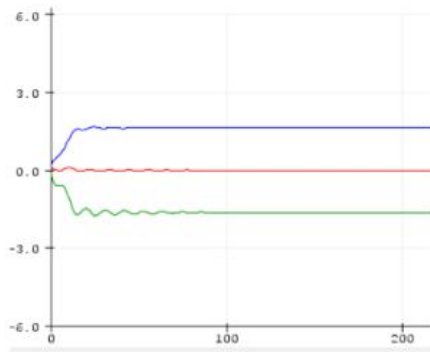


Figura 9. Respuesta temporal de los estados de chua para condiciones iniciales de  $x=0.1$ ,  $y=0.1$ ,  $z=0.1$  y parametros iguales a  $\beta=14$  y  $\alpha=4$ , en la plataforma arduino.

Por otro lado si se simula el mismo sistema con valores de parámetros que hagan llevar al sistema a el caos, el algoritmo implementado en la plataforma arduino no es capaz de generar una gráfica del comportamiento de los estados y le asigna como valor un valor infinito.

### Implementación de red Neuronal para el atractor de Lorenz

Para la creación de la red neural que modele el comportamiento de los estados del atractor de Lorenz se partió de un esquema implementado en Simulink que se muestra en la figura 10, el cual permite solucionar las ecuaciones diferenciales de dicho sistema con unas condiciones iniciales iguala a:  $x=1$ ,  $y=1$ ,  $z=1$  y unos parámetros iguales a:  $\sigma=10$ ,  $b=8/3$ ,  $r=28$ . Adicionalmente este diagrama permite la obtención de datos que servirán para el entrenamiento de la red neuronal, como las gráficas del comportamiento de los estados en función del tiempo, como el plano de espacio estado para dos estados, estas gráficas se ilustran en las figuras 11 y 12.

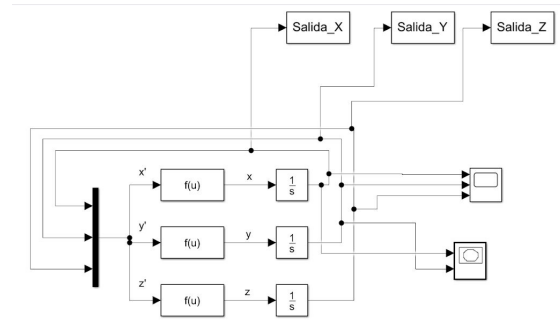


Figura 10. Esquema de simulink de implementación de atractor de Lorenz.

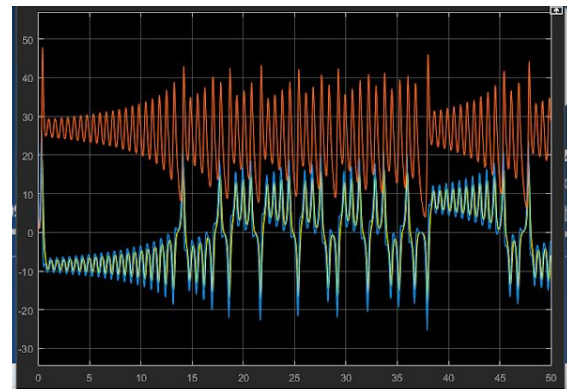


Figura 11. Respuesta temporal de los tres estados del atractor de lorenz.

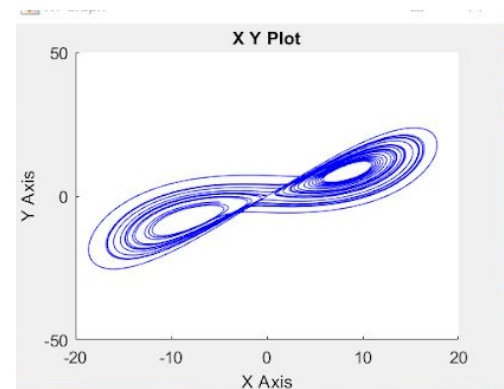


Figura 12. Plano de fase de los estados  $x$  y  $y$  del atractor de Lorenz.

Para el modelamiento del sistema únicamente se trabajará con un único estado de la salida del atractor de Lorenz siendo este el estado  $x$ . Para el entrenamiento de la red neuronal se tomaron 500.000 datos del comportamiento de este estado.

Debido a que estos sistemas no presentan una entrada al sistema y su comportamiento depende exclusivamente de las condiciones iniciales y los



parámetros establecidos, para la generación de la red se plantea inicialmente una red NNAR con un regresor [8 8 1], 8 neuronales tipo perceptrón y un método de entrenamiento trainbr disponible en las librerías de MatLab. En la figura 13 se muestra el esquema de la implementación de la red ya entrenada.

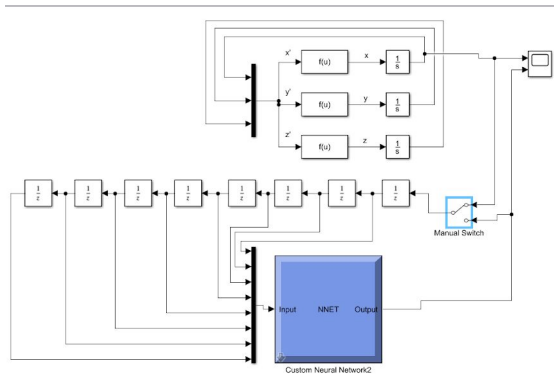


Figura 13. Implementación de red neuronal tipo NNAR.

En la figura 14 se aprecia la salida de la red neural aun paso, en donde se aprecia que la red neural copia exactamente la salida del estado  $x$  del atractor de Lorenz, sin embargo al momento de generar la salida de la red neuronal partiendo desde su misma salida el sistema entra en caos.

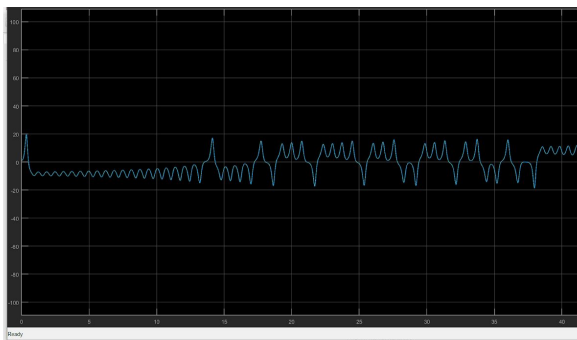


Figura 14. Respuesta temporal de la salida de la red NNAR en primer paso.

Por esta razón se decide implementar una red que tenga en cuenta el error entre la señal deseada y la señal generada por la red. Para esto se implementa un red tipo NNARMA con un regresor [8 8 1], 8 neuronas en la capa oculta de tipo perceptrón y un método de entrenamiento trainbr. En la figura 15 se muestra la implementación de la red tip NNARMA.

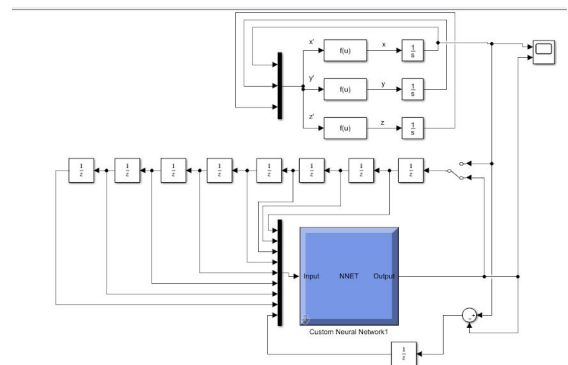


Figura 15. Implementación de red neuronal tipo NNARMA.

En la figura 16, observamos la salida del sistema a un paso, en donde se aprecia que está aún presenta el comportamiento deseado y esperado, mientras que en la figura 17 observamos la salida del sistema tomando en cuenta la salida de la red neuronal, esta salida aún no se comporta de igual forma que el estado  $x$ , sin embargo presenta rasgos y características similares, estas diferencias se pueden presentar a que el sistema es altamente no lineal y cualquier cambio en los parámetros o en las condiciones iniciales hace que el sistema varía su dinámica y ocasione que la red no se comporte como lo esperado.

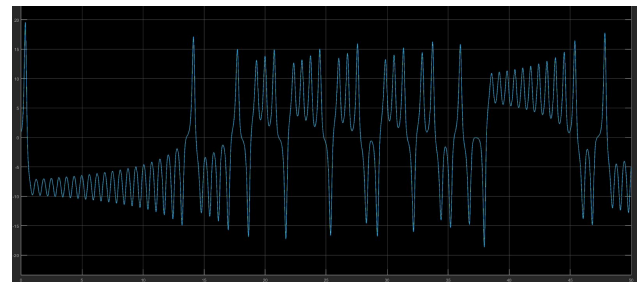


Figura 16. Respuesta temporal de la salida de la red NNARMA en primer paso.

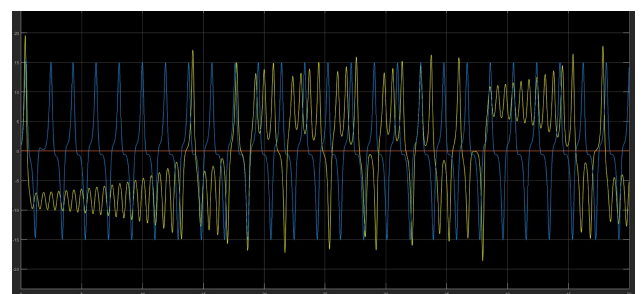


Figura 16. Respuesta temporal de la salida de la red NNARMA en tomando en cuenta salida de la red..

### 3. CONCLUSIONES

Por medio de las soluciones de integración numérica podemos solucionar los diversos sistemas de ecuaciones diferenciales, incluyendo los sistemas no lineales, como los sistemas caóticos.

El circuito de Chua es uno de los pocos sistemas caóticos que tiene representación física y tangible que está al alcance de la sociedad científica, por esta razón se hace uno de los sistemas más estudiados dentro del análisis de sistemas no lineales.

Durante la solución del circuito de Chua por medio de análisis numéricos es importante conocer cuál es el valor de la función no lineal  $\phi(x)$ , los parámetros y las condiciones iniciales, puesto que estos son los que nos marcan la dinámica y el comportamiento del sistema.

Por medio de los diagramas de bifurcación podemos conocer los valores que deben tomar los parámetros de los sistemas, de tal manera que los estados de dicho sistemas no entren en caos. Estos diagramas de bifurcación son herramienta poderosa al momento de trabajar con sistemas caóticos puesto que nos pueden indicar el camino y los parámetros para tener un sistema estable.

El método de Runge Kutta es un método de integración numérica que permite la solución de ecuaciones diferenciales, este método permite su implementación de una manera sencilla a través de la codificación de un algoritmo, que tiene involucrado las ecuaciones diferenciales, los parámetros de control y las condiciones iniciales de los sistemas a resolver.

Las redes neuronales permite el modelamiento de los sistemas no lineales y de los sistemas caóticos, sin embargo para el modelamiento de estos es importante tener en cuenta una buena cantidad de datos para el entrenamiento, la cantidad de neuronas a utilizar, y si la estructura es NNAR o NNARMA, debido a que

esto puede mejorar el comportamiento de dicha neurona.

La red tipo NNARMA que se utilizó para el modelamiento de un estado del atractor de Lorenz presentó mejor comportamiento al momento de tener en cuenta la salida de la misma red neuronal, si la comparamos con la red tipo NNAR, puesto que esta última entra en caos al momento de tener en cuenta la salida de la misma red.

### REFERENCIAS

- [1] Olivares, D. *APLICACIÓN DE SISTEMAS CAOTICOS EN CONTROL AUTOMATICO*. Universidad Autonoma de Nuevo León. Tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en ingeniería eléctrica con especialidad en control. Monterrey, Junio de 1994.
- [2] Minerva, A. Garcia, A. *Circuito de Chua en la sincronización de los sistemas caóticos*. Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. México, septiembre de 2013.
- [3] Phillipson, P. Schuster, P. *Bifurcation Dynamics of Three-Dimensional Systems*. International Journal of Bifurcation and Chaos. Vol 10, No 8. October 1999.
- [4] Dulu, S. *Prediction of a Lorenz Chaotic Attractor using Two-Layer Perceptron Neural Network*. Applied Soft Computing. Vol 5. July 2004.
- [5] Elhadj, Z. Clinton, J. *The unified Chaotics System Describing the Lorenz and Chua Systems*. Facta Universitatis. Elec. Energ. Vol 23, no 3. December 2010.