Análisis de Sistemas Lineales y no Lineales. Conceptos de Modelado

jalopez@uao.edu.co

Doctorado en Ingeniería

DOCTORADO EN INGENIERÍA

Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnológica

Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.

#SoyInnovador

Universidad AUTÓNOMA de Occidente
Resolución de Acreditación de Alta Calidad 16740 del 24 de agosto de 2017, vigencia 4 años

unab
Resolución de Acreditación de Alta Calidad 10820 del 25 de mayo de 2017, vigencia 6 años

UAM
Resolución de Acreditación de Alta Calidad 08676 del 17 de junio de 2015, vigencia 4 años

Vigiladas Mineducación

Sistema Dinámico

SISO

MIMO

Ecuación Diferencial (Modelo en tiempo continuo)

$$y^n = f(y^{n-1}, y^{n-2}, \dots y', y, u)$$

Ecuación en Diferencias (Modelo en tiempo discreto)

$$y(k) = f\begin{pmatrix} y(k-1), y(k-2), \dots, & y(k-n_a) \\ u(k-1), u(k-2), \dots, & u(k-n_b) \end{pmatrix}$$

Modelo de un Sistema

- Modelar es el arte de crear representaciones o descripciones matemáticas de fenómenos físicos, químicos, sociales, financieros, etc.
- Tipos de Modelos
  - Modelos Matemáticos
  - Modelos Icónicos o a Escala

Modelos Matemáticos

Modelo de caja blanca

Electrónica

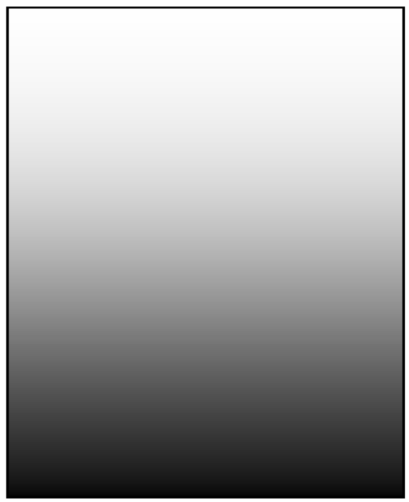
Mecánica

Química

Ecología

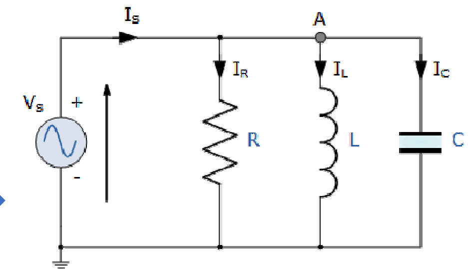
Economía

Sicología



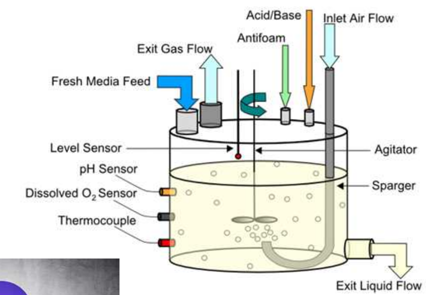
Modelo de caja negra

Circuitos Electrónicos



Dispositivos Mecánicos

Reactores Químicos



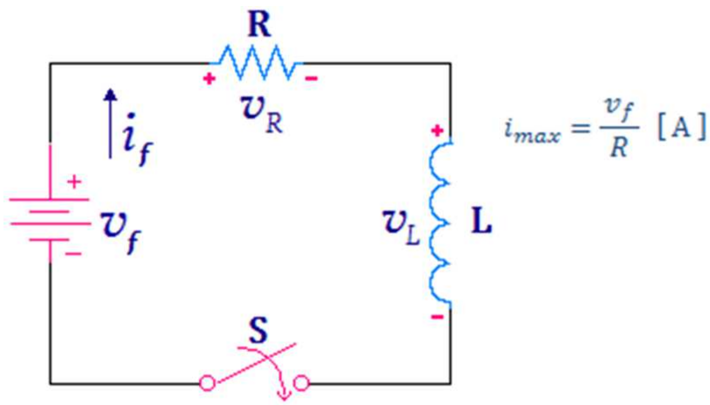
Corrientes de agua

Modelos Económicos

Dinámicas del Hombre

Modelos Matemáticos. Ejemplo

Circuito R-L



$$V_f = V_R + V_L$$

$$V_f = Ri + L\frac{di}{dt}$$

Modelos Matemáticos. Ejemplo

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformada de Laplace de la derivada

$\mathcal{L}\{f\} = F(S)$

$$L\{f'\} = sF(s) - f\cancel{(0)}$$

$$L\{f''\} = s^2F(s) - sf\cancel{(0)} - f'\cancel{(0)}$$

$$L\{f'''\} = s^3F(s) - s^2\cancel{f}(0) - sf'\cancel{(0)} - f''\cancel{(0)}$$

$$L\{f^n\} = s^nF(s) - s^{\cancel{n-1}}f(0) - s^{n-2}f'\cancel{(0)} - \ldots - s\cancel{f}^{n-2}\cancel{(0)} - f^{n-1}\cancel{(0)}$$

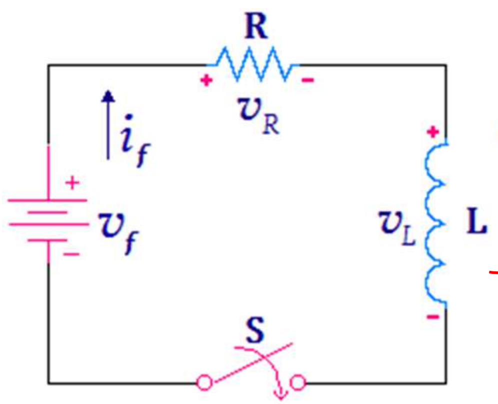
Tabla de Transformada de Laplace

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

$\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\operatorname{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

Modelos Matemáticos. Ejemplo

Función de Transferencia



$i_{max} = \frac{v_f}{R}$ [A]

$$G(S) = \frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{I(S)}{V(S)}$$

$t_{est} = 5\tau$

$$\mathcal{L}\left\{ v_f = Ri + L\frac{di}{dt} \right\} \quad ||$$

$$V_f(s) = RI(s) + LsI(s) = I(R+Ls)$$

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_f(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

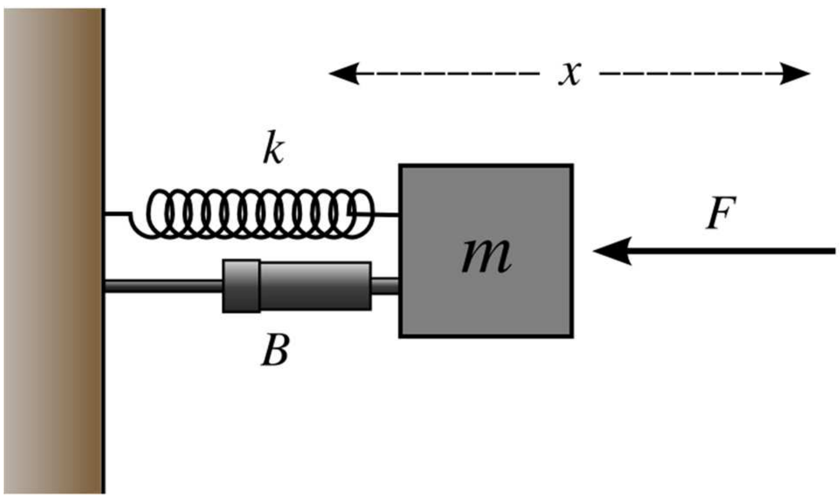
$$\boxed{G(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}}} \Rightarrow \frac{K}{\tau s + 1}$$

$\tau_1 = \frac{2}{1} = 2$

$\tau_2 = \frac{0.5}{1} = 0.5$ $t_{est} = 2.5 \Rightarrow \frac{1/R}{\frac{L}{R}s + 1}$

Modelos Matemáticos. Ejercicio

Obtenga la función de transferencia del
Sistema Masa-Amortiguador-Resorte



Fuerza externa	Fuerza resorte	Fuerza amortiguador
F	kx	$b\dot{x}$

Segunda ley de Newton

$$ma = m\ddot{x} = \sum Fuerzas$$

Identificación de Sistemas

- Proceso para determinar, con base en datos obtenidos por medición directa en el sistema un modelo que, bajo un criterio, representa al sistema bajo análisis. (*Zadeh, Eykoff y Astrom)*
- Aplicación en Control, Predicción y Simulación
- Métodos clásicos de representación de un sistema:
  - Métodos Paramétricos
  - Métodos No-Paramétricos

Identificación de Sistemas

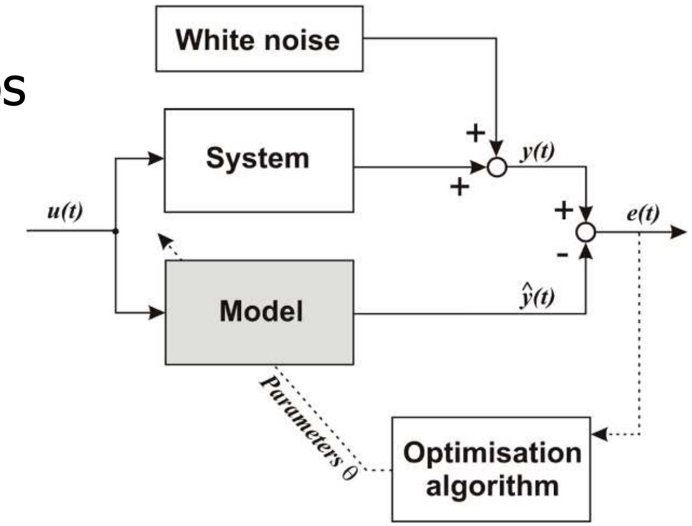
- **Método Paramétrico.** Modelo conformado por un número finito de parámetros.

  Modelos polinómicos.

  Coeficientes de los polinomios

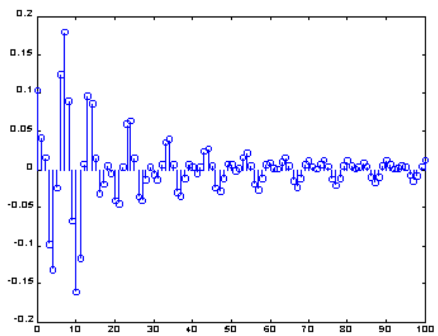
  Redes neuronales artificiales.

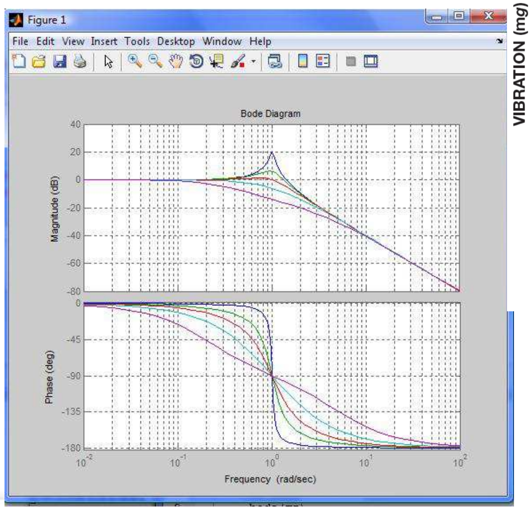
  Pesos de la red neuronal

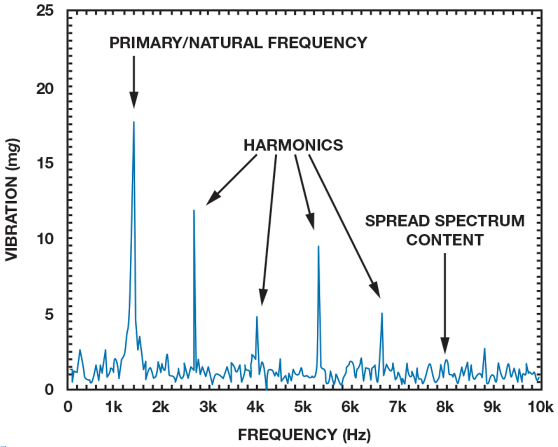


Identificación de Sistemas

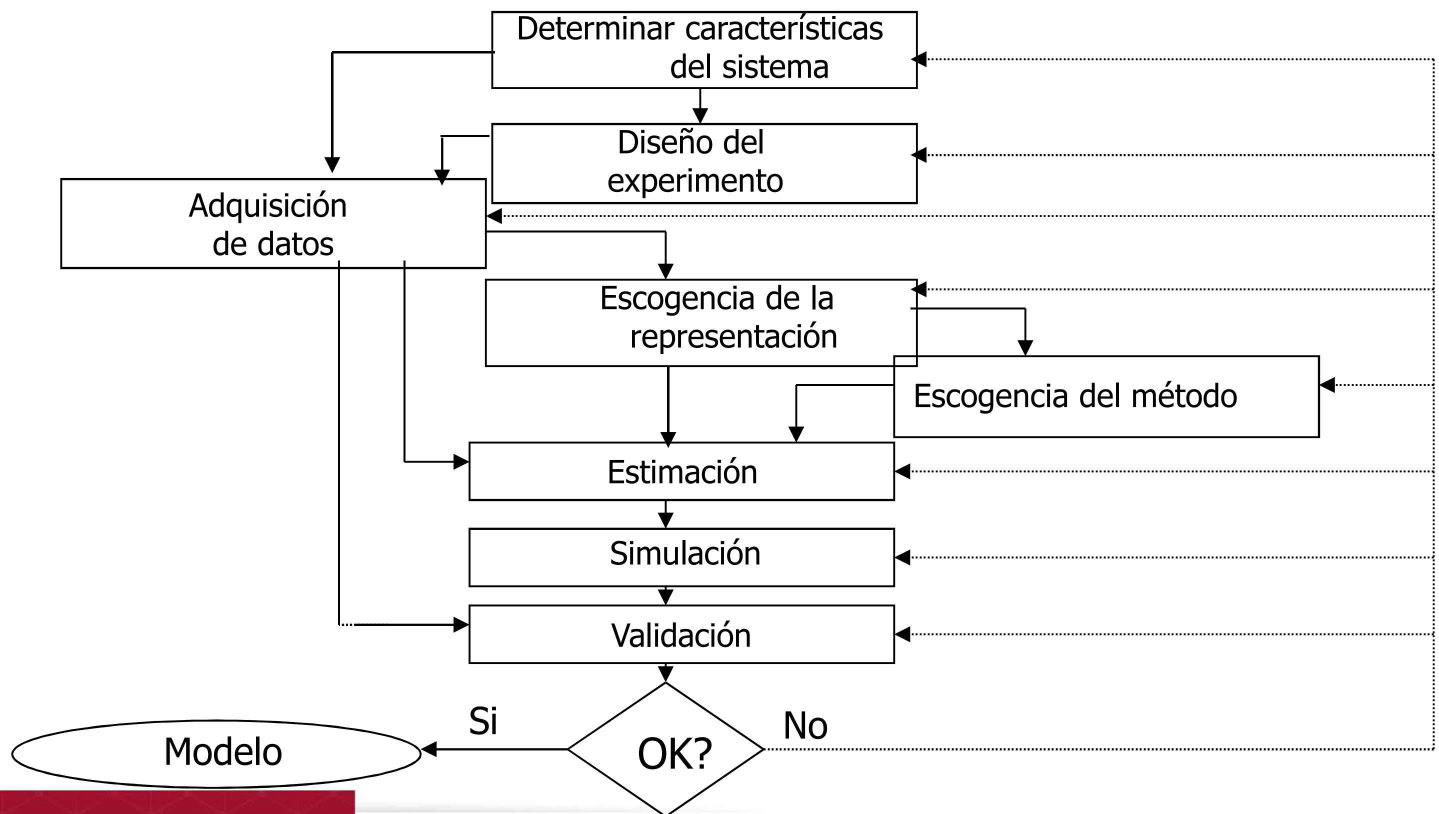
- **Método No – Paramétrico.** El número de parámetros del modelo del sistema no es finito.
  - **Respuesta al impulso**
  - **Respuesta en Frecuencia.**
  - **Análisis de Fourier.**



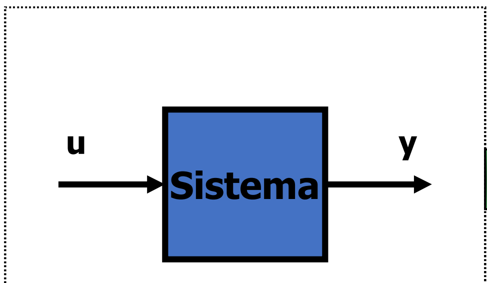




Pasos Para La Identificación De Un Sistema



Cuál es el problema?



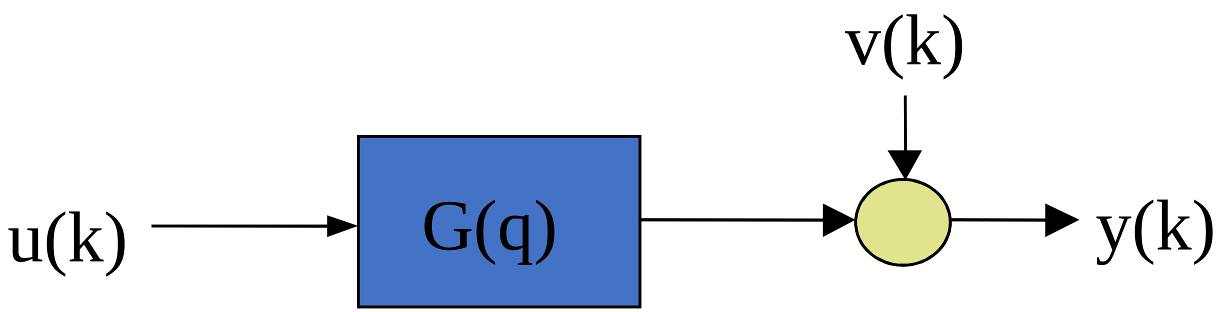
$$z^{N} = \{u(k),\ y(k) \quad k = 1,2,\dots,\ N\}$$

$$G(k, \phi(k), \theta)$$

$$y(k) \approx \hat{y}(k) = G(k, \phi(k), \theta)$$

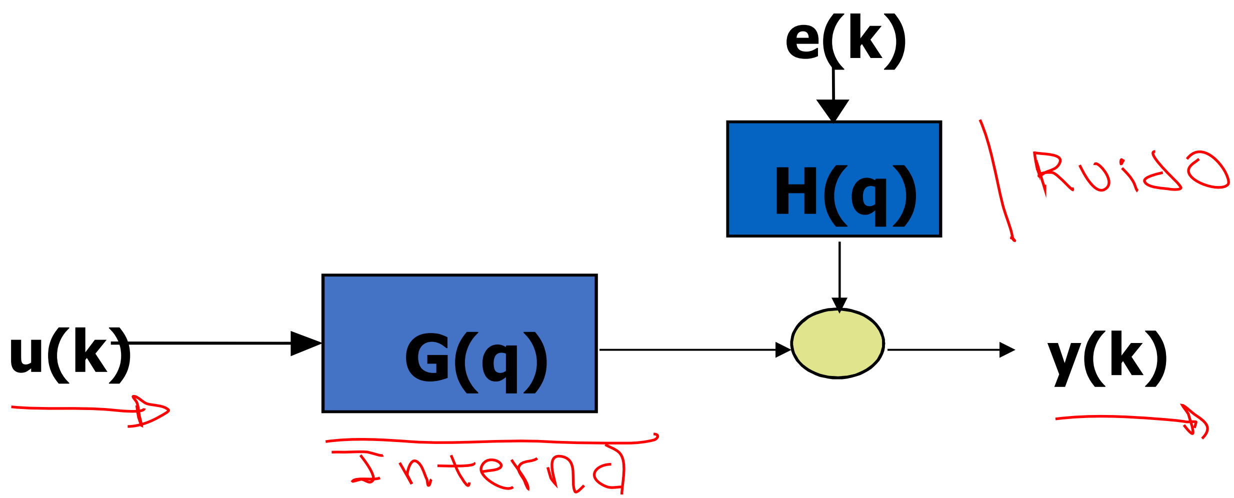
$$V_{n}(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\big(y(k) - \underbrace{G(k, \phi(k), \theta)\big)}_{\hat{y}(k)}{}^{2}$$

Perturbaciones



Tipos de Perturbaciones:
- **Ruido de Medición**
- **Entradas No-Controladas**

Modelo con Caracterización de las Perturbaciones



$$y(k) = \underline{G(q)u(k)} + \underline{H(q)e(k)}$$

Modelo Paramétrico en el Tiempo

Modelo Polinómico

$$A(q)\,y(k) = \overbrace{\frac{B(q)}{F(q)}}^{G(q)}u(k) + \overbrace{\frac{C(q)}{D(q)}}^{H(q)}e(k)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_{n_b} q^{-n_b}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + d_2 q^{-2} + \ldots + d_{n_d} q^{-n_d}$$

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + f_2 q^{-2} + \ldots + f_{n_f} q^{-n_{fa}}$$

ARX: Autoregresivo con Entrada Exógena

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{1}{A(q)}e(k)$$

ARMAX: Promedio de Movimiento Autoregresivo con Entrada Exógena

$$y(k) = \frac{B(q)}{A(q)}u(k) + \frac{C(q)}{A(q)}e(k)$$

Mínimos Cuadrados

- El objetivo es encontrar «la línea» que minimice las sumas de los errores al cuadrado

$$V_n(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(y(k) - G(k,\phi(k),\theta)\right)^2$$

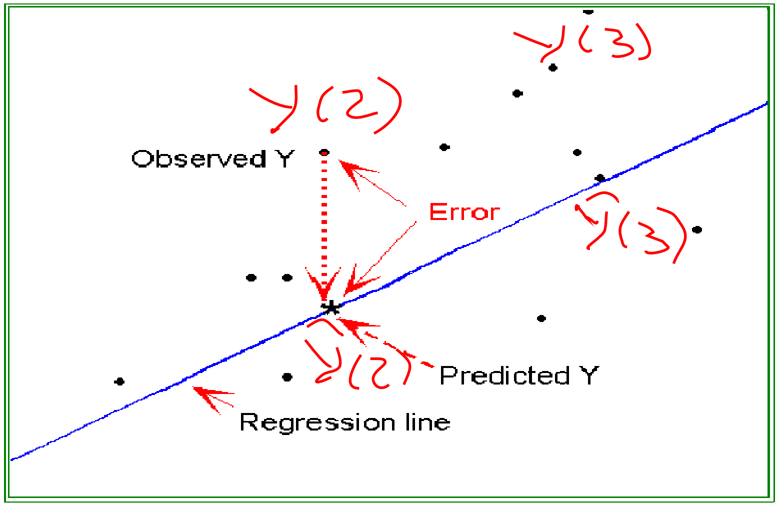
$$V_n(\theta) = \left\|Y - \Phi\theta\right\|_2^2$$

$$\frac{\partial V_n(\theta)}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial V_n(\theta)}{\partial\theta} = 2\Phi^T\left(Y - \Phi\theta\right) = 0$$

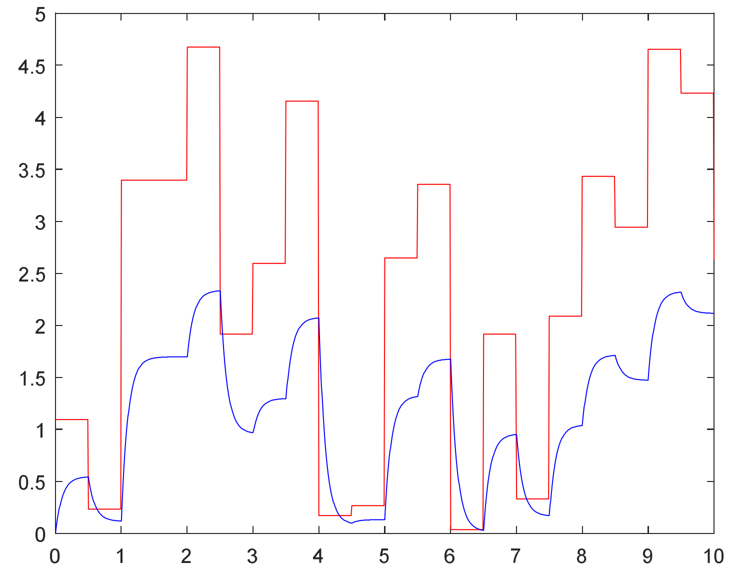
$$\frac{\partial V_n(\theta)}{\partial\theta} = \Phi^T Y - \Phi^T\Phi\theta = 0$$

$$\theta = [\Phi^T\Phi]^{-1}\Phi^T Y$$



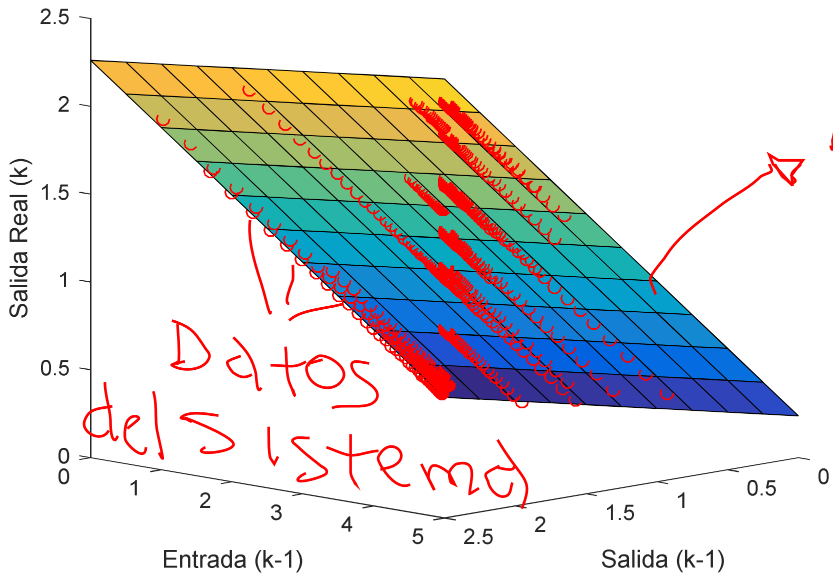
Ejemplo Demostrativo

- Para realizar el ejemplo se trabajará sobre unos datos ya generados en MATLAB



Ejemplo Demostrativo

Modelo Obtenido vs Datos Originales



Modelo

Modelo Discreto Obtenido

$$y(k) = 0.9048 \; * y(k-1) + 0.0476 \; * u(k-1)$$