

# Puntos de Equilibrio y Análisis en el Plano de Fase.

jaloquez@uao.edu.co

**Doctorado en Ingeniería**



Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnológica  
Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.



#SoyInnovador



Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
10740 del 24 de agosto de 2017, vigencia 4 años



Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
10020 del 25 de mayo de 2017, vigencia 6 años



Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
08676 del 17 de junio de 2015, vigencia 4 años



Vigiladas Mineducación

# Puntos de Equilibrio

Valores del estado donde el mismo es constante.

Se considera que la entrada es nula

Punto de equilibrio para un sistema lineal

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

...

$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dot{X} = AX$$

$$AX = 0$$

$$X = 0$$

# Puntos de Equilibrio. Sistemas de Segundo Orden

Punto de equilibrio para un sistema lineal de segundo orden

$$X_{Eq} = \begin{bmatrix} x_{1eq} \\ x_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

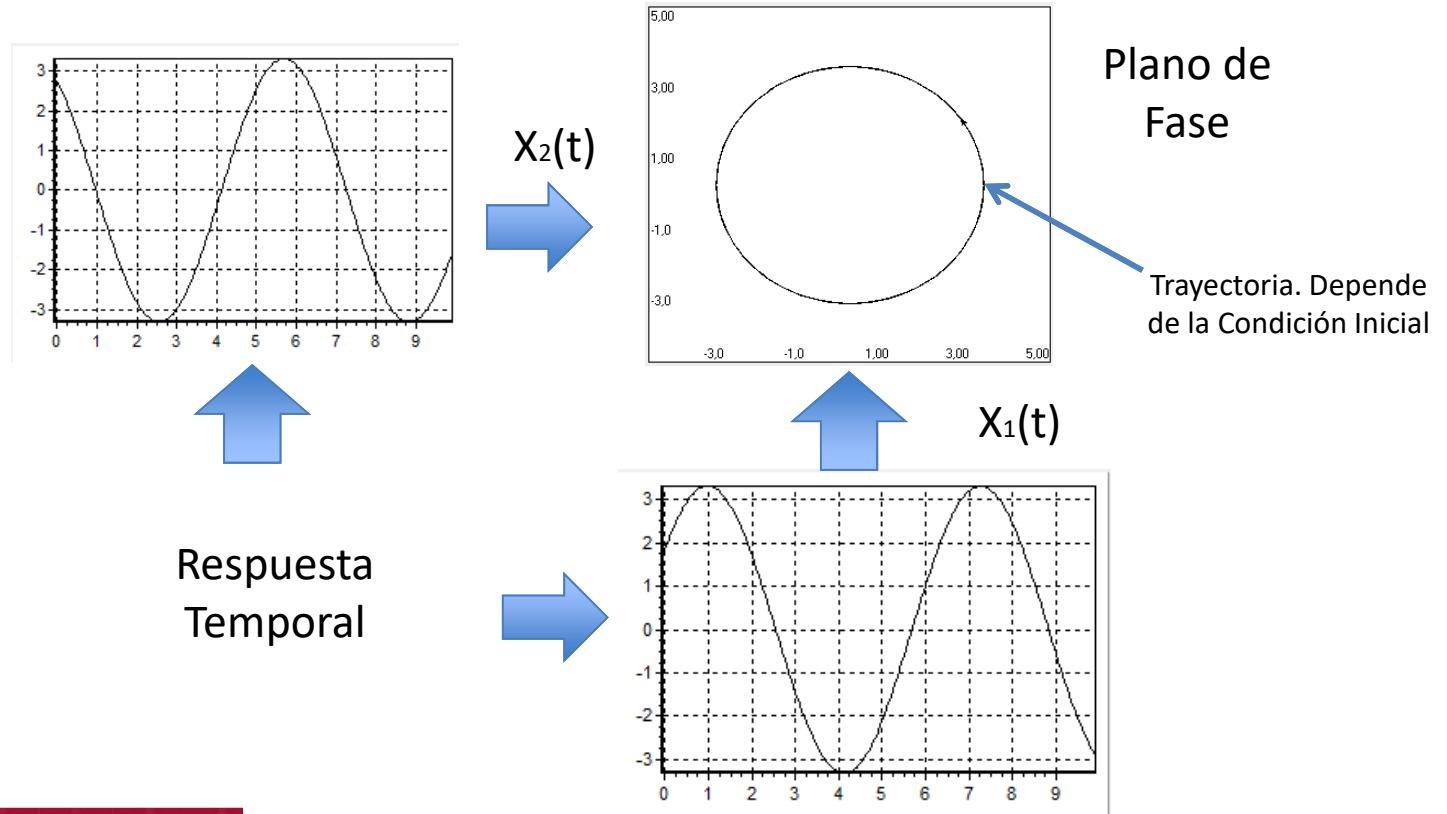
Tipo del puntos de equilibrio depende de los autovalores del sistema

$$\begin{bmatrix} x_{1eq} \\ x_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1eq} \\ x_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{1eq} \\ x_{2eq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & -\omega_d \\ \omega_d & \sigma \end{bmatrix}$$

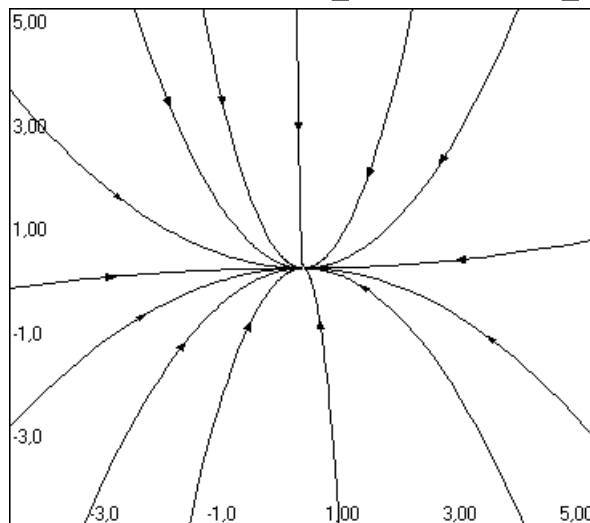
## Plano o Retrato de Fase



## Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

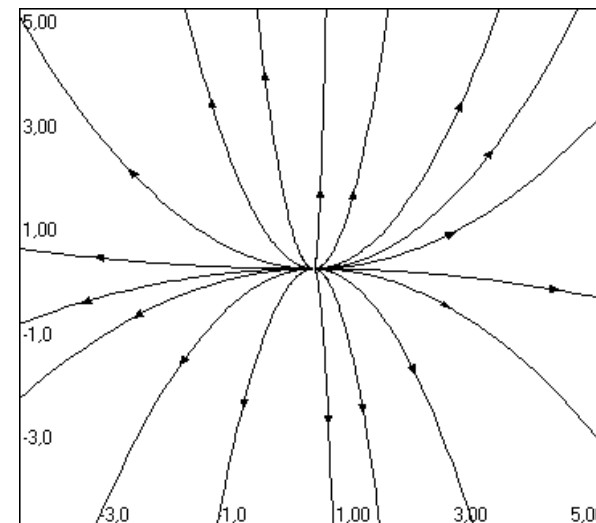
Autovalores Reales Diferentes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$



Nodo Estable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

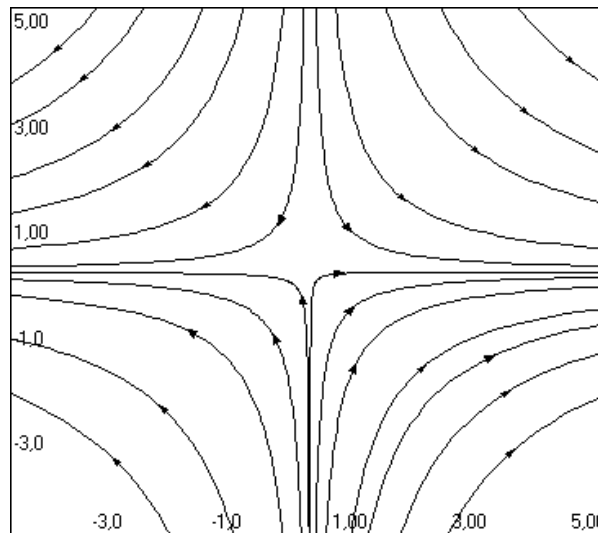


Nodo Inestable

# Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

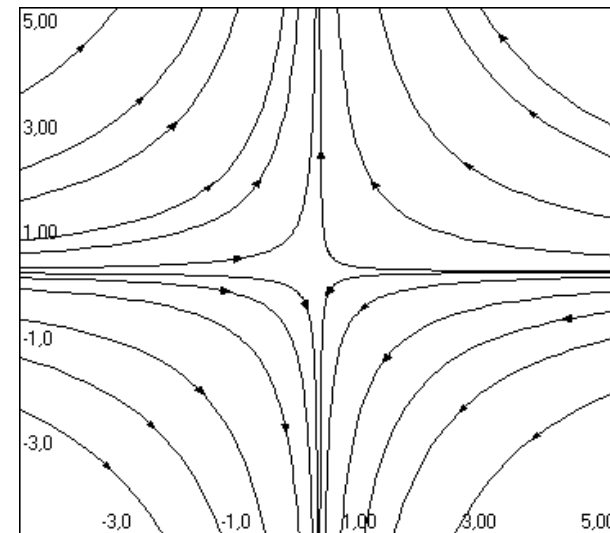
Autovalores Reales  
Diferentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Punto de Silla

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

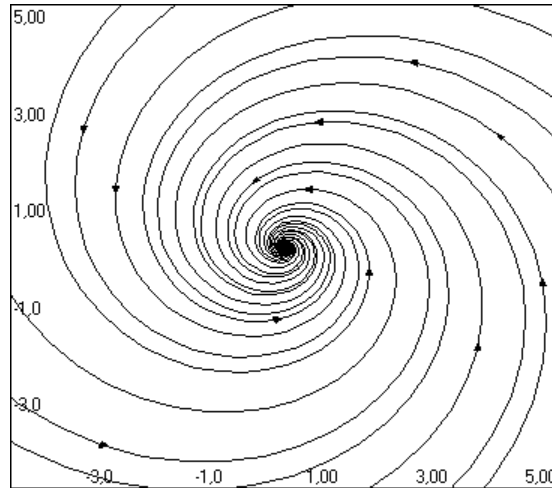


Punto de Silla

## Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

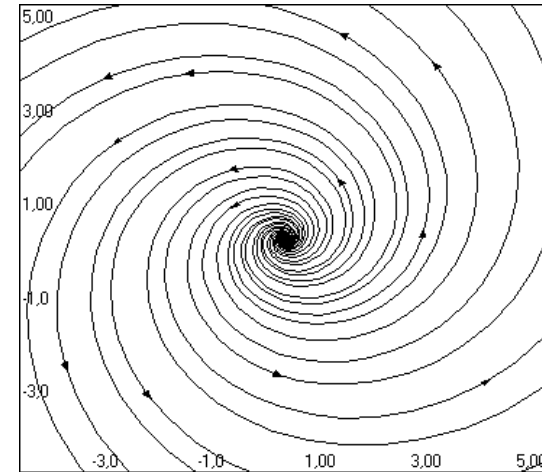
Autovalores  
Complejos  
Conjugados

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$



Foco Estable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

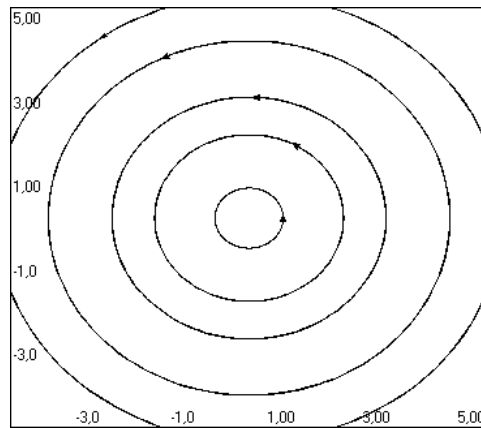


Foco Inestable

# Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

Autovalores  
Complejos  
Conjugados puros

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$



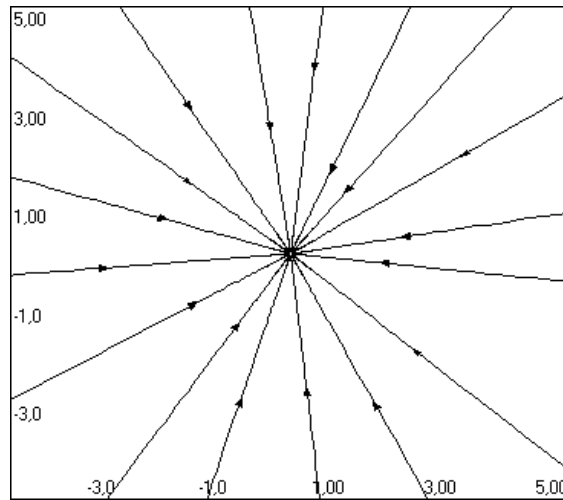
Centro



# Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

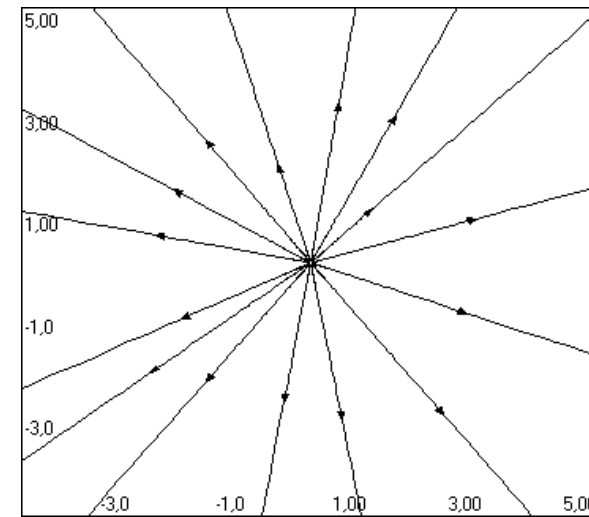
Autovalores Reales Repetidos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Nodo Estable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

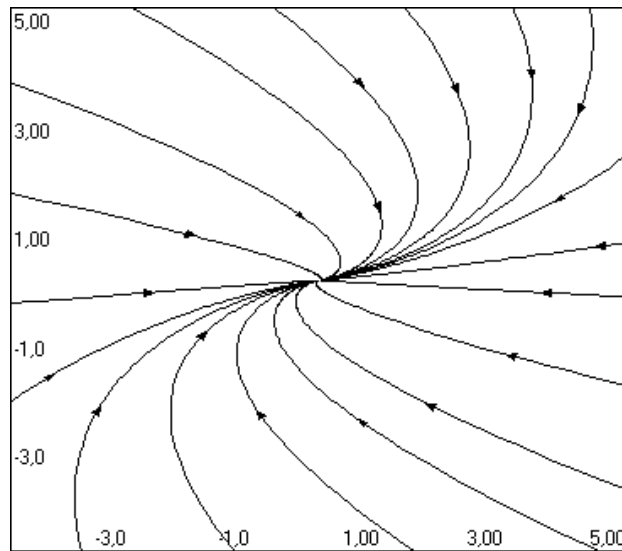


Nodo Estable

## Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

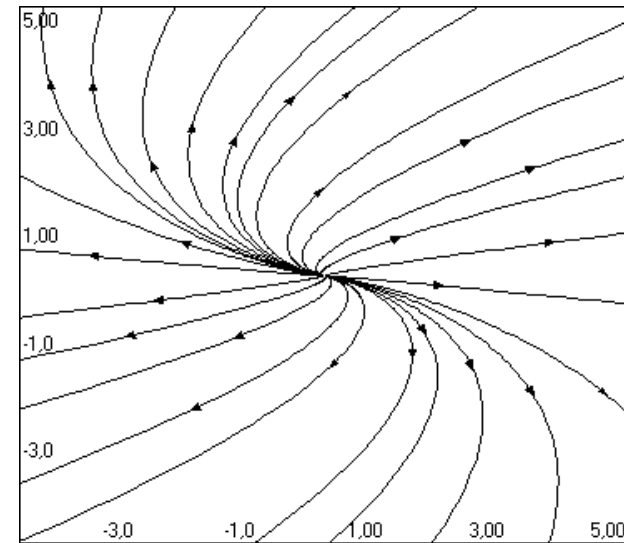
Autovalores Reales Repetidos

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Nodo Estable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

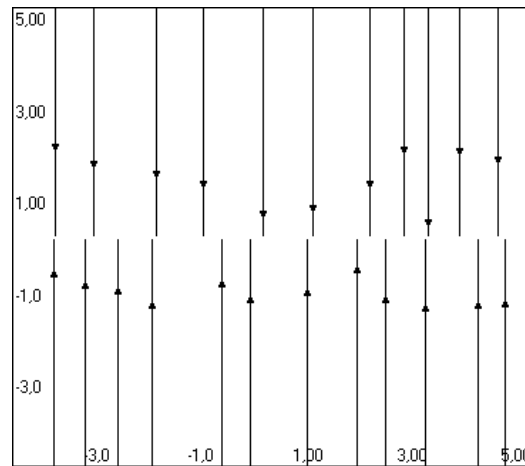


Nodo Inestable

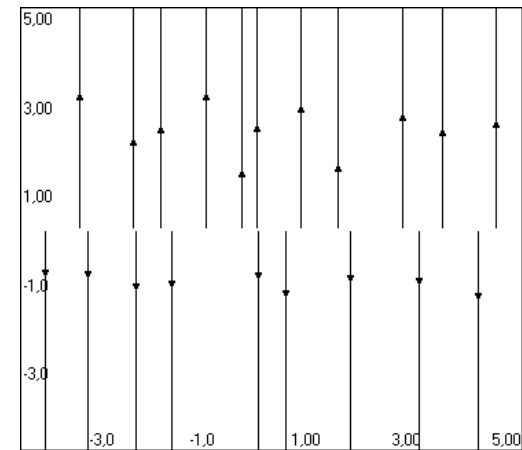
# Plano o Retrato de Fase para Sistemas Lineales

Autovalores Reales  
con uno igual a  
cero

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Ciclo Límite

Oscilador de Van der Pol

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + \mu(1 + x_1^2)x_2$$

Es un centro? No

Es un foco inestable? No

Es un ciclo límite!!!

