

# Respuesta Temporal de Sistemas Lineales Dada la Función de Transferencia

jalopez@uao.edu.co

**Doctorado en Ingeniería**



DOCTORADO EN  
**INGENIERÍA**

Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnológica  
Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.



#SoyInnovador



Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
10740 del 24 de agosto de 2017, vigencia 4 años



Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
10020 del 25 de mayo de 2017, vigencia 6 años



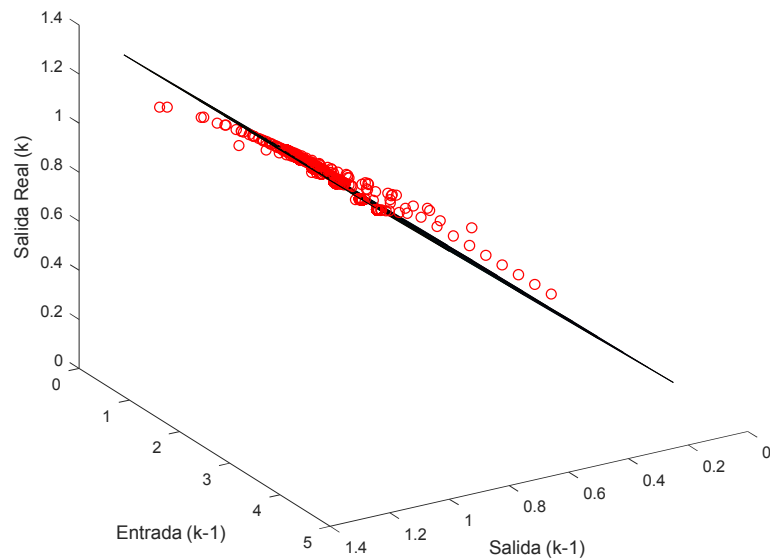
Resolución de Acreditación de Alta Calidad  
08676 del 17 de junio de 2015, vigencia 4 años



Vigiladas Mineducación

# Ejemplo Identificación: Sistema No Lineal

Modelo Obtenido vs Datos Originales

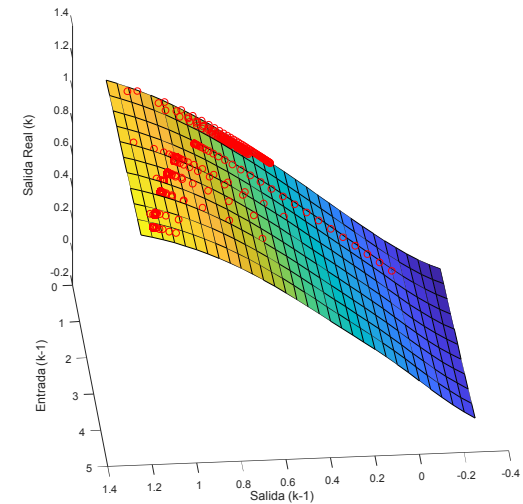
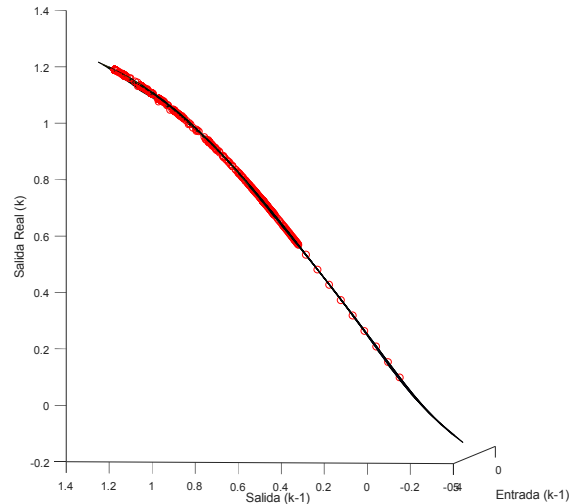
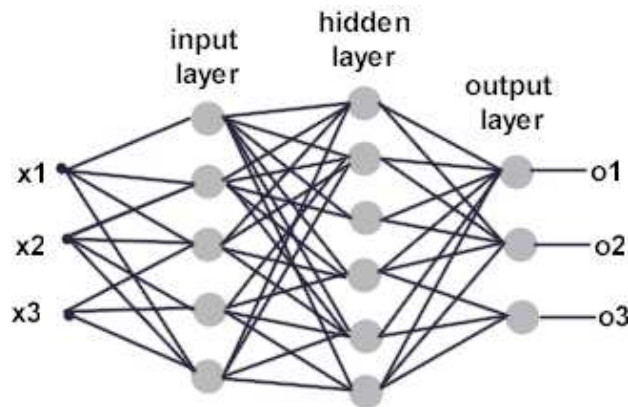


Modelo Discreto Obtenido

$$y(k) = 0.9048 * y(k-1) + 0.0476 * u(k-1)$$

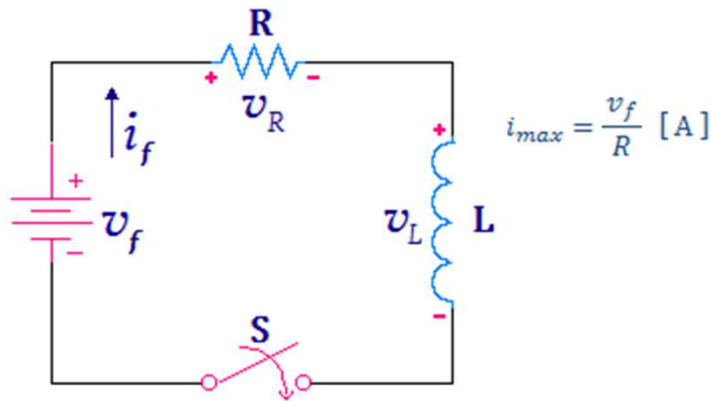
# Ejemplo Identificación: Sistema No Lineal

Modelo Obtenido vs Datos Originales  
Red Neuronal Artificial



# Modelado Circuito R-L.

## Circuito R-L



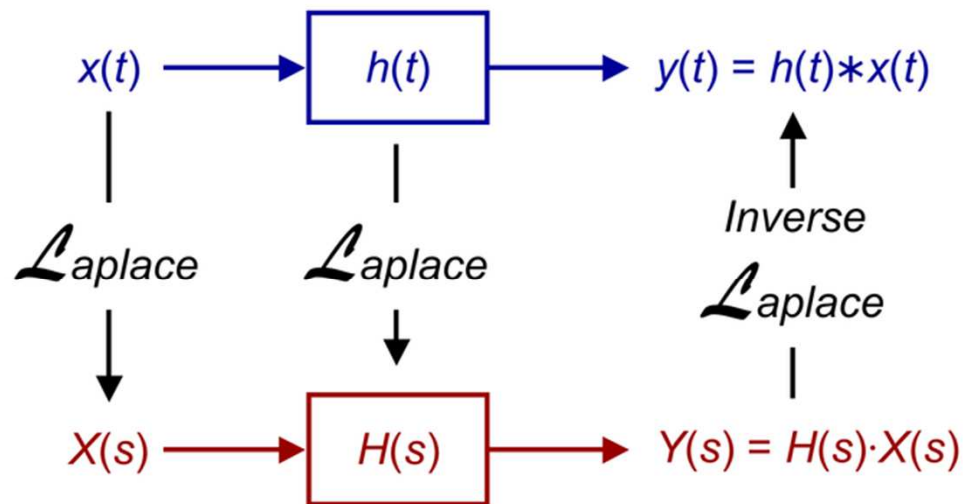
## Ecuación Diferencial

$$V_f = V_R + V_L$$

$$V_f = Ri + L \frac{di}{dt}$$

# Interpretación Transformada de Laplace.

Time domain



Frequency domain

# Transformada de Laplace.

Tabla de Transformada de Laplace

Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt$$

$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$

$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

# Cálculo de la Respuesta Temporal.

Función de Transferencia

$$L \left\{ v_f = Ri + L \frac{di}{dt} \right\}$$

$$V_f(s) = RI(s) + LsI(s)$$

$$G(s) = \frac{I(s)}{V_f(s)} = \frac{1}{Ls + R}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

Cálculo de la Salida Usando la Función de Transferencia

$$I(s) = V_f(s) \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}} = \frac{1}{s} \frac{\frac{1}{L}}{s + \frac{R}{L}}$$

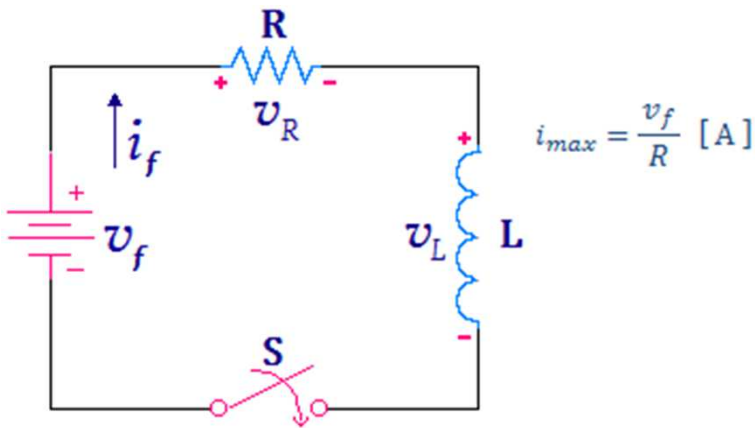
Fracciones Parciales

$$I(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{R}{L}}$$

$$I(s) = \frac{\frac{1}{R}}{s} - \frac{\frac{1}{R}}{s + \frac{R}{L}}$$

Respuesta temporal  
(Transformada inversa)

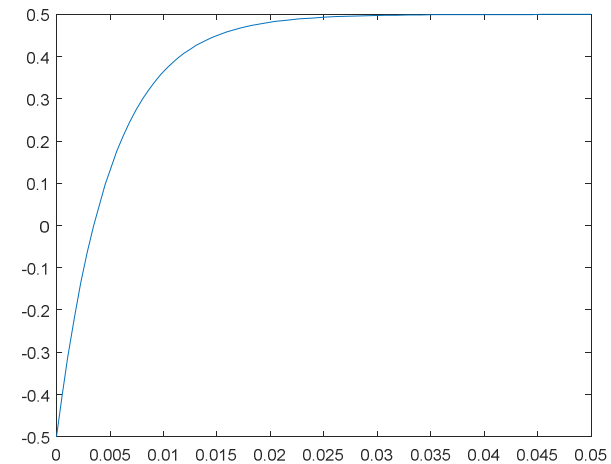
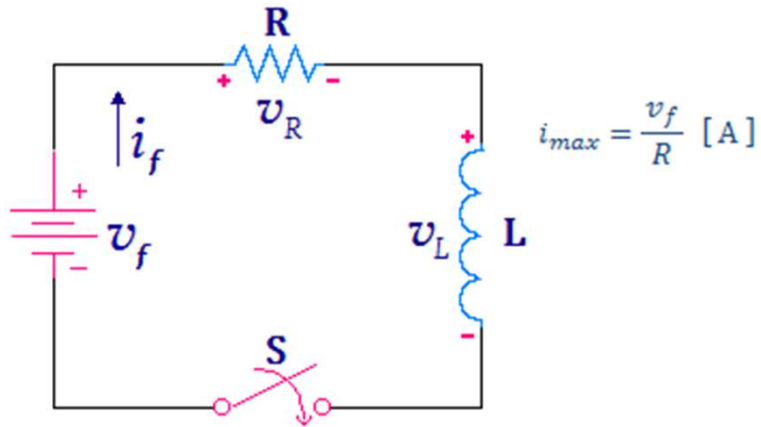
$$i(t) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$



# Simulación Respuesta Temporal.

$$i(t) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

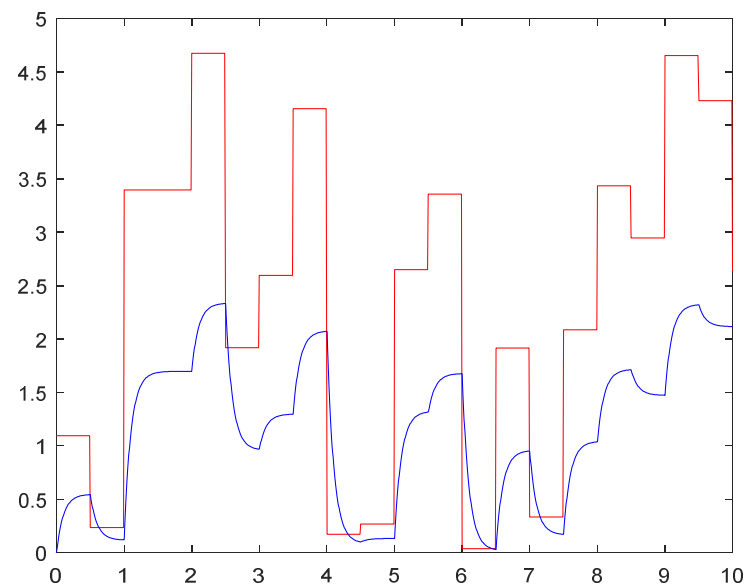
Con  $R=2$  y  $L=0.001$





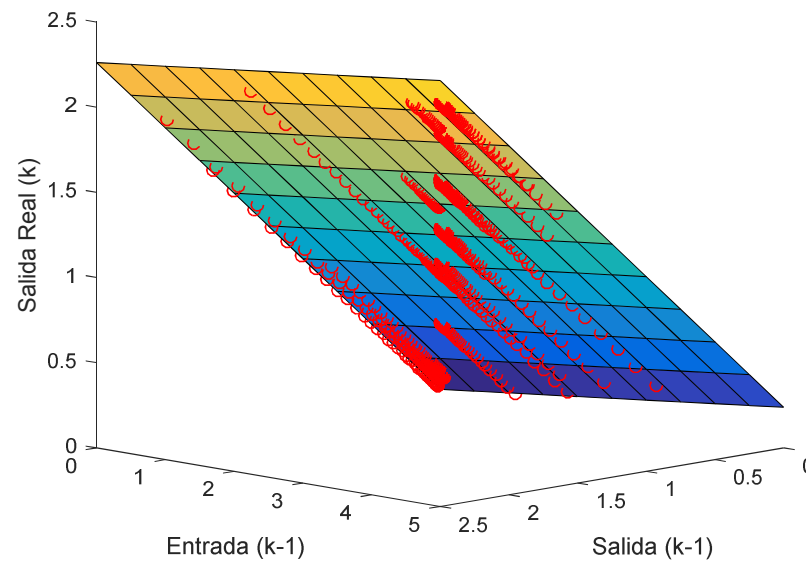
# Respuesta Temporal. Caso Discreto

- # Para realizar el ejemplo se trabajará sobre unos datos ya generados en MATLAB



# Modelo Discreto.

Modelo Obtenido vs Datos Originales



$$y(k) = 0.9048 * y(k-1) + 0.0476 * u(k-1)$$

# Transformada Zeta.

Transformada zeta

$$Z\{f(kT)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}$$

Teorema del corrimiento

$$Z\{f(k+n)\} = z^n F(z) - z^n f(0) - z^{n-1} f(1) - \dots - z f(n-1)$$

$$Z\{f(k-n)\} = z^{-n} F(z)$$

Tabla de Transformada Zeta

$\delta(n)$	1	$\forall z$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  > 1$
$u(-n-1)$	$-\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z  < 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z  >  a $
$b^n u(-n-1)$	$-\frac{1}{1-bz^{-1}}$	$ z  <  b $
$a^n \sin(n\omega_0) u(n)$	$\frac{a \sin(\omega_0) z^{-1}}{1-2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$a^n \cos(n\omega_0) u(n)$	$\frac{1-a \cos(\omega_0) z^{-1}}{1-2a \cos(\omega_0) z^{-1} + a^2 z^{-2}}$	$ z  >  a $
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z  >  a $
$nb^n u(-n-1)$	$-\frac{bz^{-1}}{(1-bz^{-1})^2}$	$ z  <  b $

# Función de Transferencia Discreta.

Función de transferencia discreta

$$y(k) = 0.9048 * y(k-1) + 0.0476 * u(k-1)$$

$$Y(z) = 0.9048 * z^{-1}Y(z) + 0.0476 * z^{-1}U(z)$$

$$Y(z)(1 - 0.9048 * z^{-1}) = 0.0476 * z^{-1}U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.0476 * z^{-1}}{(1 - 0.9048 * z^{-1})} = \frac{0.0476}{(z - 0.9048)}$$

# Cálculo de Respuesta Temporal Discreta.

Cálculo de la respuesta temporal discreta

Fracciones Parciales

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.0476}{(z - 0.9048)}$$

$$Y(z) = U(z) \frac{0.0476}{z - 0.9048}$$

$$Y(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{0.0476}{z - 0.9048}$$

$$Y(z) = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z - 0.9048}$$

$$Y(z) = \frac{0.5}{z - 1} - \frac{0.4524}{z - 0.9048}$$

Respuesta temporal  
(Transformada inversa)

$$y(k) = 0.5 - 0.4524 * (0.9048)^k$$

# Simulación Respuesta Temporal Discreta

Comparación Salida Real vs Salida Estimada

$$y(k) = 0.5 - 0.4524 * (0.9048)^k$$

