Análisis de respuesta temporal de sistemas lineales. Representación en espacio de estado

jalopez@uao.edu.co

Doctorado en Ingeniería

DOCTORADO EN INGENIERÍA

Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnologíca

Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.

#SoyInnovador

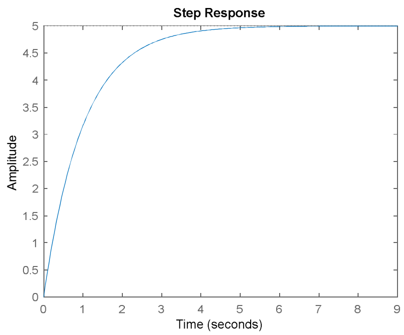
Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden

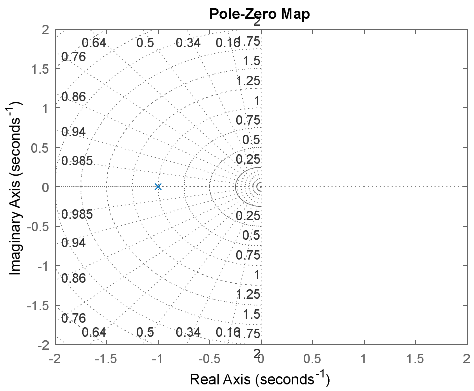
Sistema de primer orden

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

K = Ganancia
τ = Constante de Tiempo

Respuesta temporal y ubicación de polos

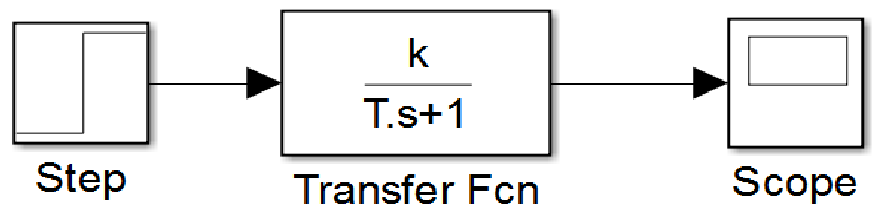




Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden

¿Cuál es el efecto de variar la constante de tiempo?

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$



K = Ganancia
τ = Constante de Tiempo

Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

Sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia

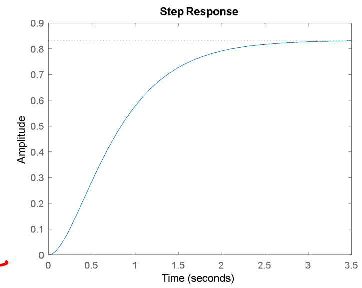
ξ= Coeficiente de amortiguamiento

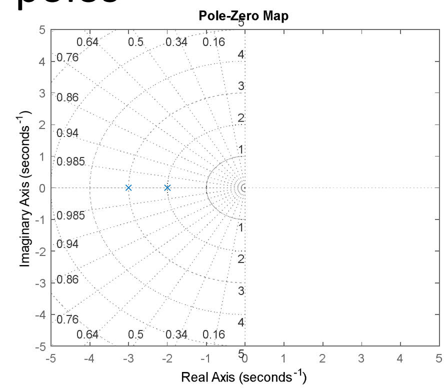
ω_n = Frecuencia natural

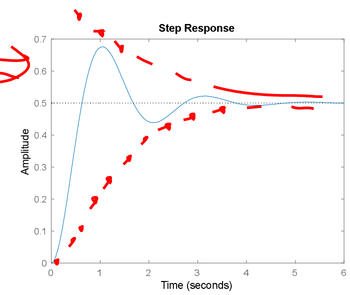
¿Cuál es el efecto de variar el coeficiente de amortiguamiento?

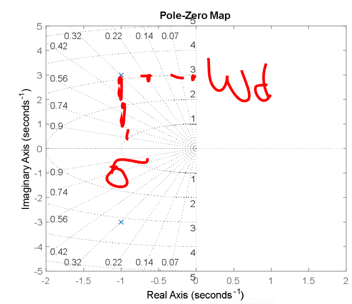
¿Cuál es el efecto de variar la frecuencia?

Respuesta temporal y ubicación de polos









Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

Sistema de segundo orden

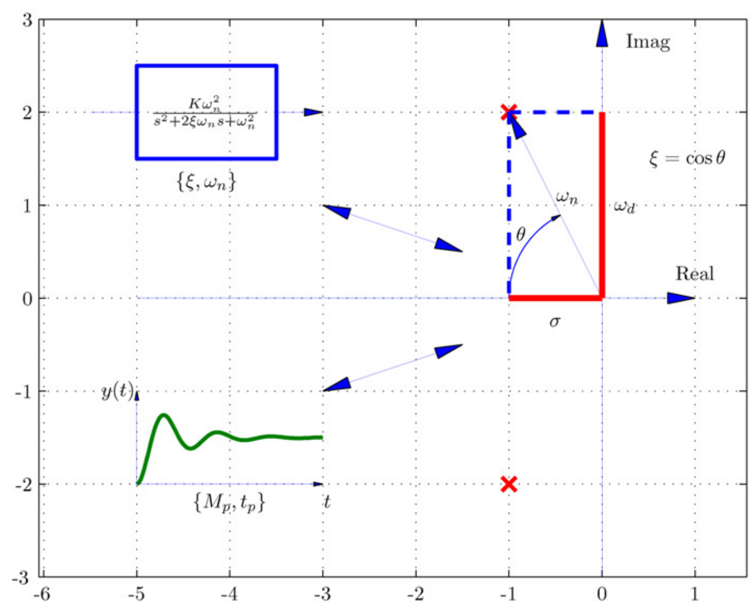
$$G(s) = \frac{k\,\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia

ξ= Coeficiente de amortiguamiento

ω_n = Frecuencia natural

Interpretación de los polos

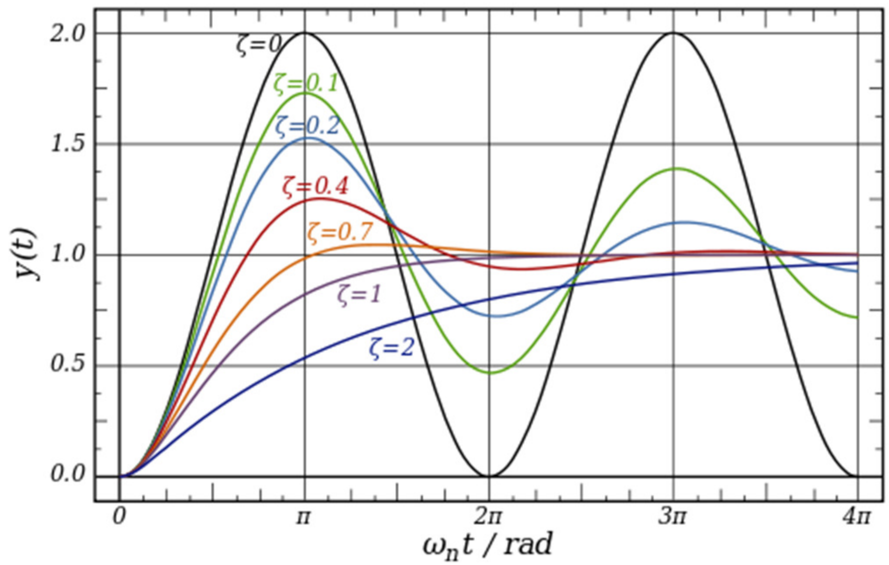


Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia
ξ= Coeficiente de amortiguamiento
ω_n = Frecuencia natural

¿Cuál es el efecto de variar el coeficiente de amortiguamiento?



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de Orden Superior. Polos Dominantes

Sistema original

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

(S+5)

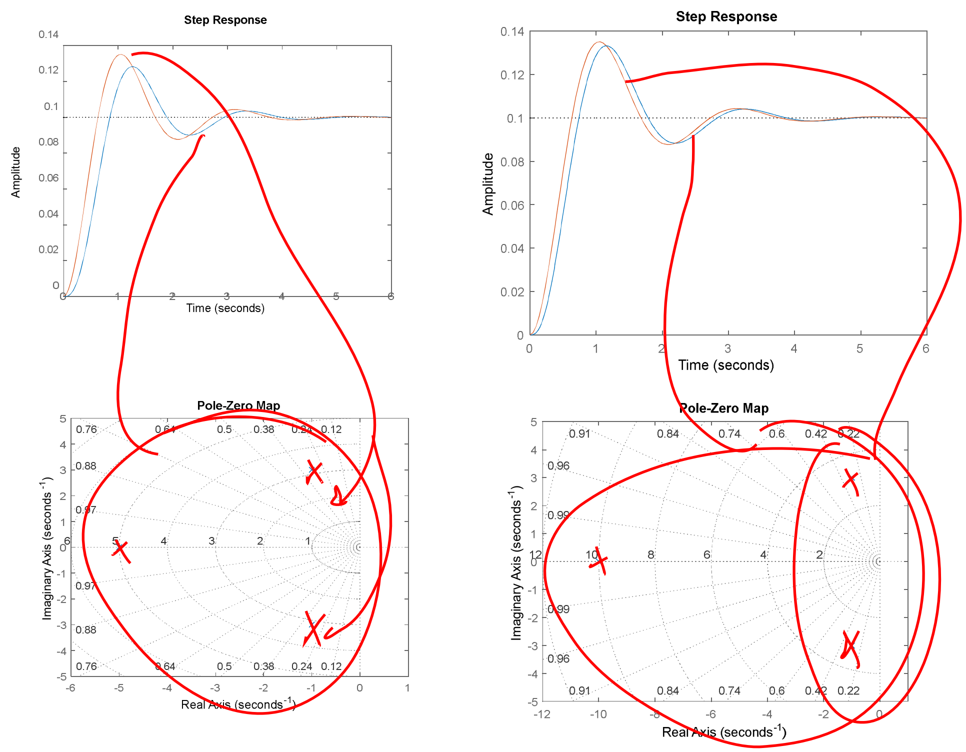
(S+10)

Un polo adicional 5 veces más alejado

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 7s^2 + 20s + 50}$$

Un polo adicional 10 veces más alejado

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 12s^2 + 30s + 100}$$



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden discreto.

Respuesta temporal y ubicación de polos

Discretización sistema de primer orden

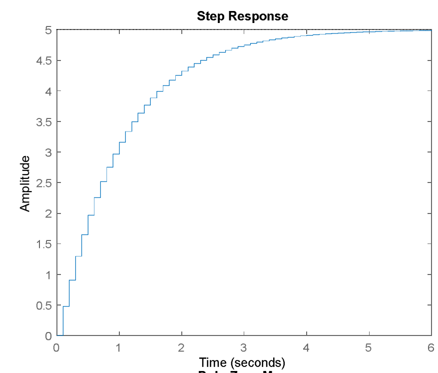
$$G(s) = \frac{k_c}{\tau s + 1}$$

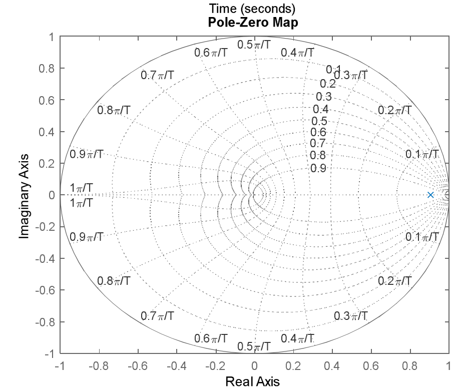
$$\boxed{Z = e^{T*S}}$$

$$p_c = -\frac{1}{\tau}$$

$$p_d = e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$G(z) = \frac{k_d}{z - p_d} \qquad Kd = k_c\left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)$$





Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden discreto.

Sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Discretización sistema de segundo orden

$$Z = e^{T*S}$$

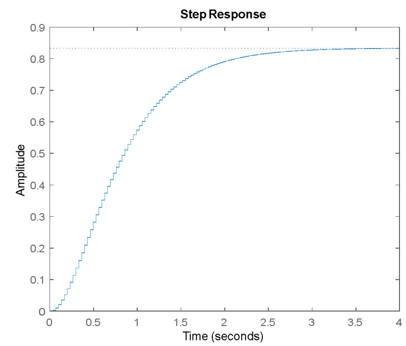
$$S = \sigma + j\omega$$

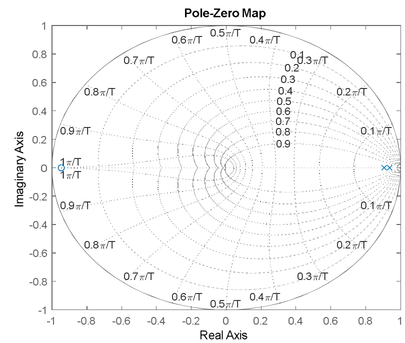
$$Z = e^{T(\sigma + j\omega)}$$

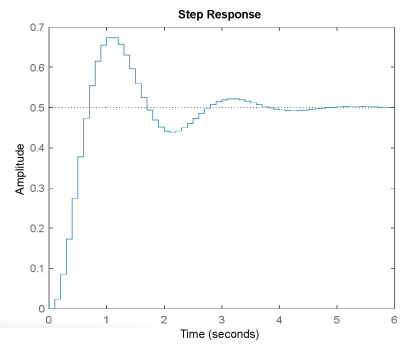
$$Z = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

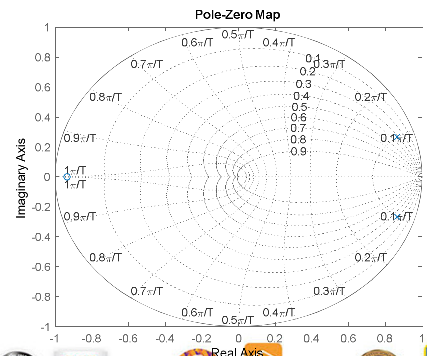
$$Z = e^{T\sigma}(\cos(T\omega) + jsen(T\omega))$$

Respuesta temporal y ubicación de polos









Representación en Espacio de Estado.
Tiempo Continuo

Ecuación diferencial

$$y^{n}+a_{1}y^{n-1}+a_{2}y^{n-2}+a_{3}y^{n-3}+\ldots+a_{n-2}\ddot{y}+a_{n-1}\dot{y}+a_{n}y=b_{1}u$$

N ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\ldots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - a_{n-2}x_3 - \ldots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + b_1 u
\end{aligned}$$

Representación Matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ldots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n x_1 & -a_{n-1}x_2 & \ldots & -a_2 x_{n-1} & -a_1 x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

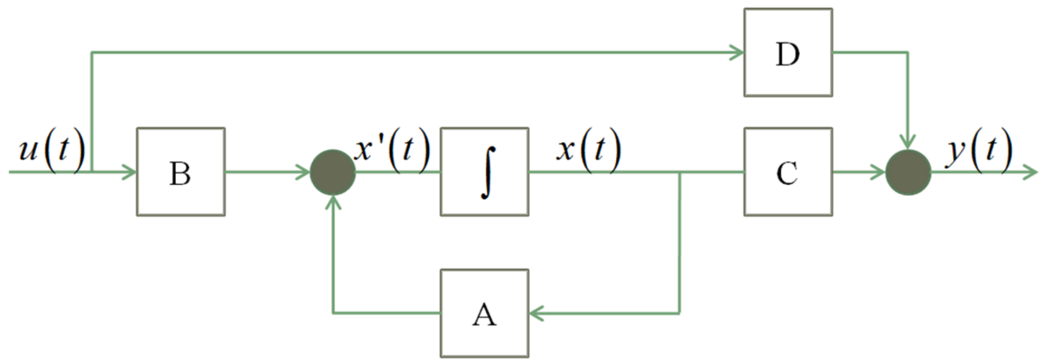
Representación en Espacio de Estado.
Tiempo Continuo

Representación Matricial

$$\dot{X} = AX + BU$$

$$Y = CX + DU$$

Diagrama de Bloques

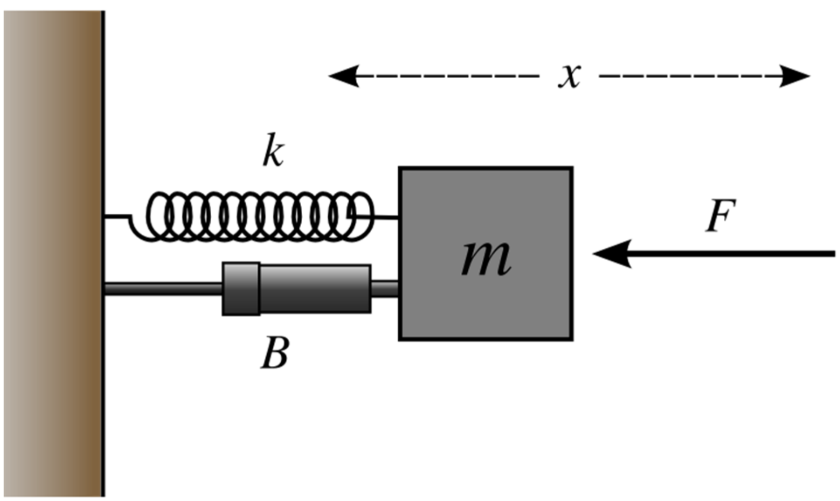


Representación en espacio de estado. Ejemplo

Ecuación diferencial $m\ddot{x} + bx + k\dot{x} = F$

$x_1 = x$

$x_2 = \dot{x}$



$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

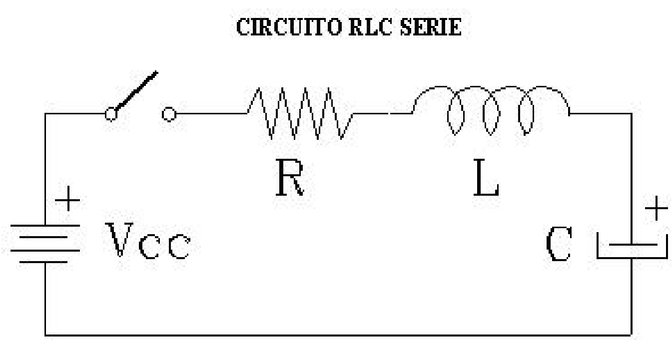
$$\dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representación en espacio de estado. Ejercicio

Ecuación diferencial



$$V_L = L\frac{di}{dt} \qquad i_C = C\frac{dv}{dt}$$

$$i_L = \frac{1}{L}\int V_L dt \qquad V_C = \frac{1}{C}\int i_c dt$$

$$x_1 = i_L$$
$$x_2 = v_C$$

Análisis de Respuesta Temporal. Representación en Espacio de Estado

Autovalores

$$\det\left|\lambda I - A\right| = 0$$

La ubicación de los autovalores se puede asimilar a los polos de la función de transferencia y determinan el comportamiento del sistema