Introducción a la Estabilidad de Lyapunov

jalopez@uao.edu.co

Doctorado en Ingeniería

DOCTORADO EN INGENIERÍA

Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnológica

Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.

#SoyInnovador

Vigiladas Mineducación

Introducción

Representación en Espacio de Estado

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$
$$\ldots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Cómo determinar la estabilidad de un sistema no lineal?

Solucionando la ecuación diferencial

Estabilidad de Lyapunov. Permite estudiar la estabilidad de un sistema sin solucionar la ecuación diferencial

Métodos de Lyapunov

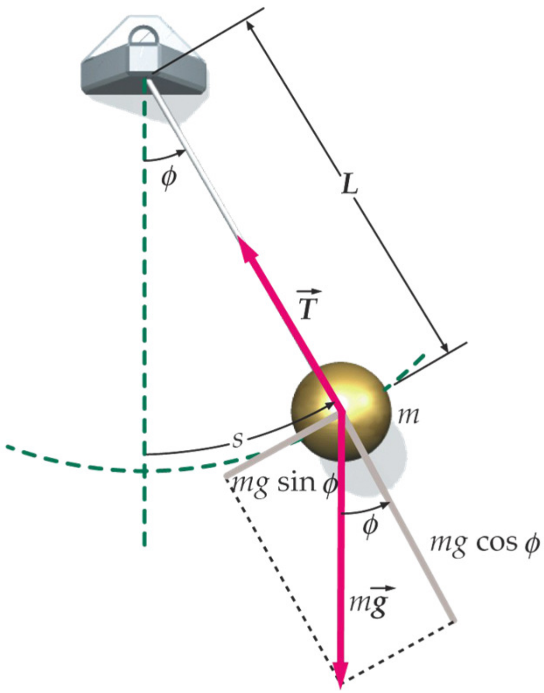
Alexander Mijailovich
Lyapunov 1857-1918

Tesis "Problema general de la estabilidad del movimiento” 1892

Primer Método o de Linealización: Estabilidad local

Segundo Método o Directo: Estabilidad global

Estabilidad en Función de la Energía



Idea intuitiva

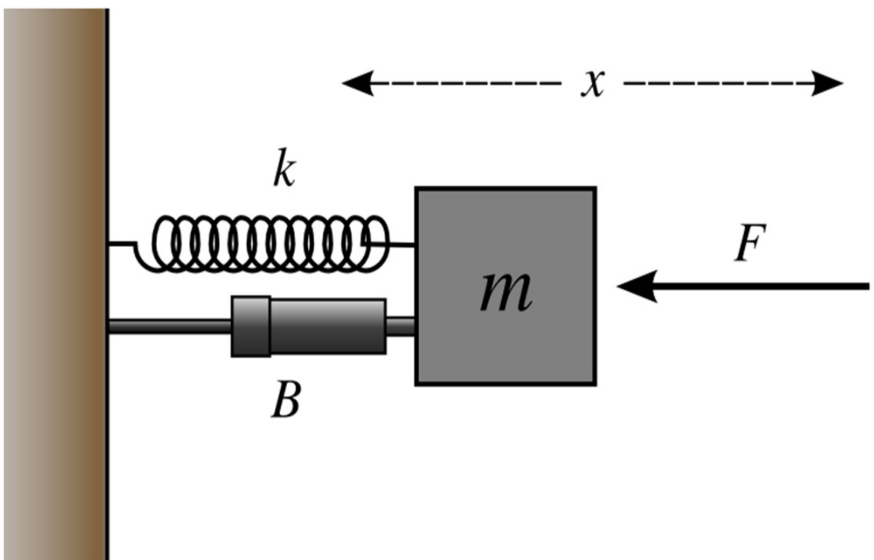
🤔

Un sistema es estable si la energía se disipa

⬇

Trabajar con funciones de energía!!!

Estabilidad en Función de la Energía



Energía Potencial

$$V_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Energía Cinética

$$V_C = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

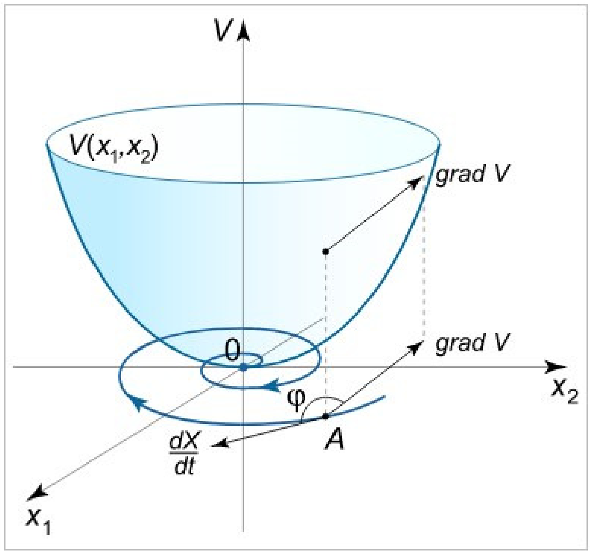
Energía Disipativa

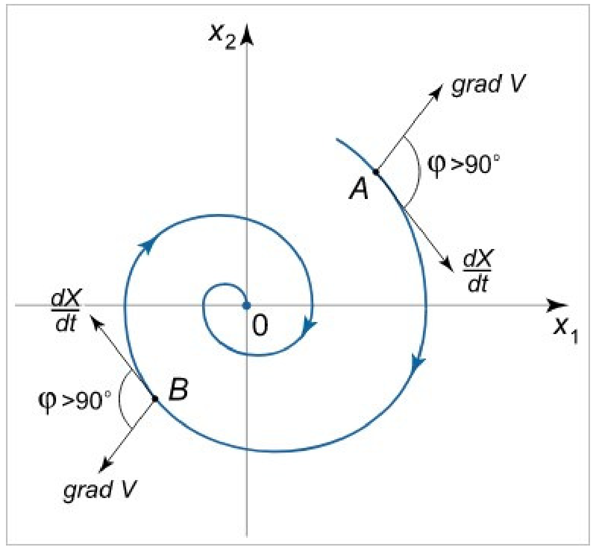
$$V_D = \frac{1}{2} b \dot{x}^2$$

Problema encontrar una función de Energía para el sistema

Función de Lyapunov

Comportamiento Función de energía de Lyapunov





Dado un sistema

$$\dot{X} = F(X)$$

Función de Lyapunov

$$V(X) > 0 \quad X \in U$$

$$V(0) = 0$$

$$\dot{V}(X) < 0 \quad X \in U$$

Definida positiva

Definida negativa

https://www.math24.net/method-lyapunov-functions/

Estabilidad de Lyapunov para Sistemas Lineales Continuos

Función de Lyapunov (Forma Cuadrática)

$$V(X) = X^T PX$$

P = Matriz Simétrica

Criterio de Sylvester

$V(X) = X^T PX$ es definida positiva si

$$D_1 = p_{11} > 0$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} > 0$$

$$D_n = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & \\ \cdots & & & \\ p_{n1} & & & p_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Estabilidad de Lyapunov para Sistemas Lineales Continuos

Dado el sistema

$$\dot{X} = AX$$

Función de Lyapunov (Forma Cuadrática)

$$V(X) = X^T PX$$

Ecuación de Lyapunov

$$PA + A^T P = -Q$$

P = Matriz Simétrica
Q= Identidad

Derivada de la Función de Lyapunov

$$\dot{V}(X) = X^T P\dot{X} + \dot{X}^T PX$$

$$\dot{V}(X) = X^T (PA + A^T P)X = -X^T QX < 0$$

Estabilidad Asintótica

$$\text{Si} \quad P = P^T > 0$$

Implica que los autovalores de A debe ser negativos

Estabilidad de Lyapunov para Sistemas Lineales Discretos

Dado el sistema

$$X(k+1) = A_d X(k)$$

Función de Lyapunov

$$V(X(k)) = X^T(k) P X(k)$$

Ecuación de Lyapunov

$$A_d^T P A_d - P = -Q$$

P = Matriz Simétrica
Q= Identidad

Derivada de la Función de Lyapunov

$$\Delta V(X(k)) = V(X(k+1)) - V(X(k))$$

$$\Delta V(X(k)) = X^T(k+1) P X(k+1) - X^T(k) P X(k)$$

$$\Delta V(X(k)) = (A_d X(k))^T P (A_d X(k)) - X^T(k) P X(k)$$

$$\Delta V(X(k)) = X^T(k) A_d^T P A_d X(k) - X^T(k) P X(k)$$

$$\Delta V(X(k)) = X^T(k)(A_d^T P A_d - P) X(k)$$

$$\Delta V(X(k)) = -X^T(k) Q X(k) < 0$$

Estabilidad Asintótica

$$\text{Si } P = P^T > 0$$

Implica que los autovalores de Ad deben estar dentro del círculo unitario

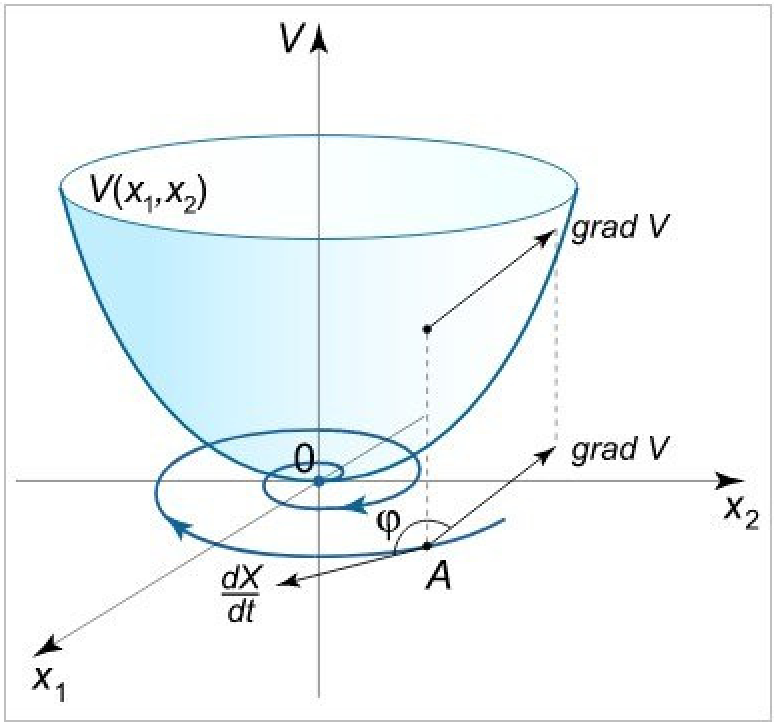
Teorema de Estabilidad Global de Lyapunov

Sea $\dot{X} = F(X)$ y $F(X^*) = 0$

Si existe una función V(x) tal que

$$V(X^*) = 0$$
$$V(X) > 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{X} \neq \mathrm{X}^*$$
$$\dot{V}(X) < 0 \quad \text{para todo} \quad \mathrm{X} \neq \mathrm{X}^*$$
$$V(X) \to \infty \quad \text{cuando} \quad \|X\| \to \infty$$

Entonces X* es un punto de equilibrio asintóticamente estable



Teorema de Estabilidad Global de Lyapunov

Sea $\dot{X} = F(X)$ y $F(X^*) = 0$

Si existe una función V(x) tal que

$$V(X^*) = 0$$

$$V(X) > 0 \quad \text{para todo} \quad X \neq X^*$$

$$\dot{V}(X) \leq \alpha V(X) \quad \text{para todo} \quad X \neq X^*$$

$$V(X) \to \infty \quad \text{cuando} \quad \|X\| \to \infty$$

Entonces X* es un punto de equilibrio exponencialmente estable