

Análisis de respuesta temporal de sistemas lineales.

Representación en espacio de estado

jalopez@uao.edu.co

Doctorado en Ingeniería



DOCTORADO EN
INGENIERÍA

Con enfoque hacia la innovación y el emprendimiento de base tecnológica
Resolución No. 363 DEL 14 de enero de 2016 y 06296 del 6 de abril del 2016 Vigencia 7 años.



Resolución de Acreditación de Alta Calidad
10740 del 24 de agosto de 2017, vigencia 4 años



Resolución de Acreditación de Alta Calidad
10020 del 25 de mayo de 2017, vigencia 6 años



Resolución de Acreditación de Alta Calidad
08676 del 17 de junio de 2015, vigencia 4 años



Vigiladas Mineducación

Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden

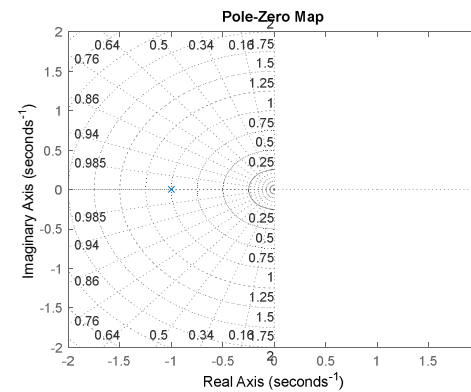
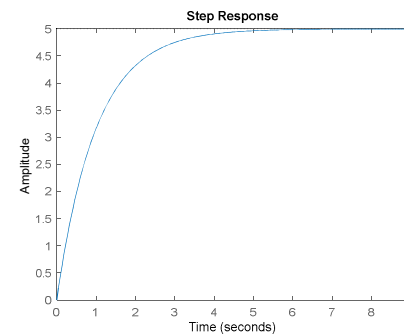
Sistema de primer orden

Respuesta temporal y ubicación de polos

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

K = Ganancia

τ = Constante de Tiempo



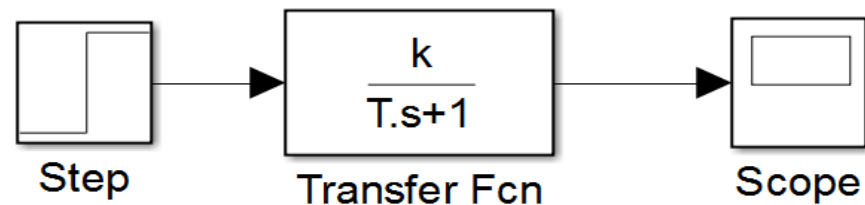
Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden

¿Cuál es el efecto de variar la constante de tiempo?

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1}$$

K = Ganancia

τ = Constante de Tiempo



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

Sistema de segundo orden

$$G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia

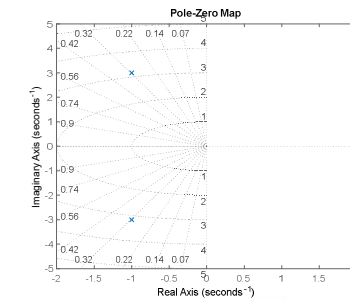
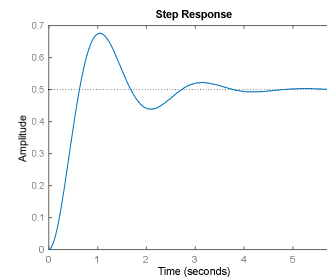
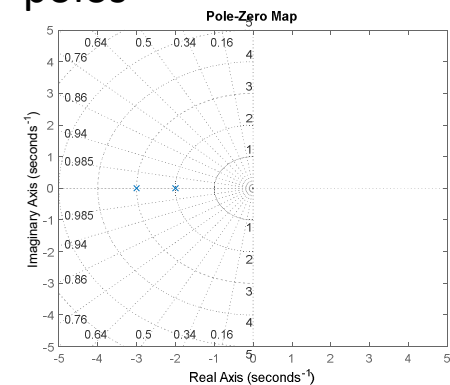
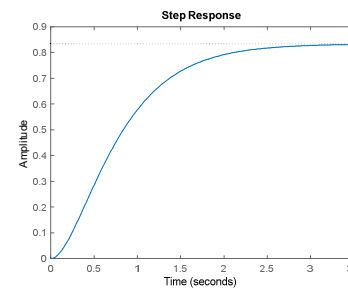
ζ = Coeficiente de amortiguamiento

ω_n = Frecuencia natural

¿Cuál es el efecto de variar el coeficiente de amortiguamiento?

¿Cuál es el efecto de variar la frecuencia?

Respuesta temporal y ubicación de polos



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

Sistema de segundo orden

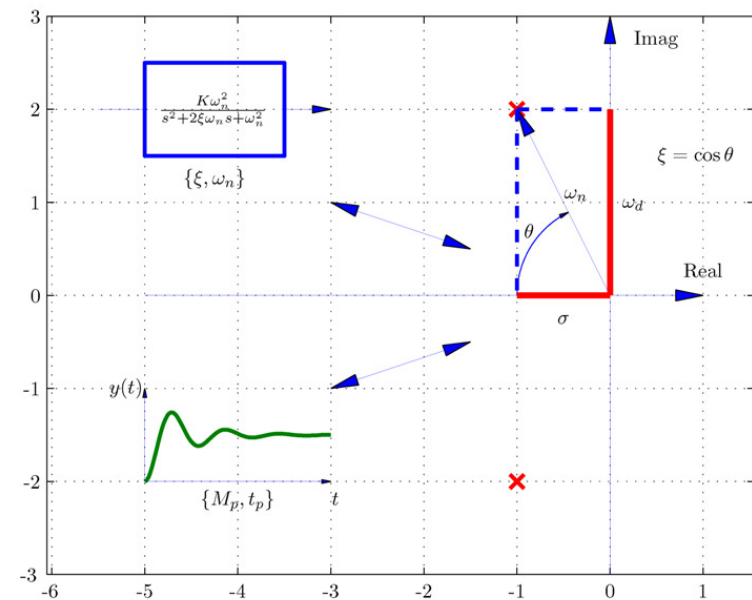
$$G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia

ξ = Coeficiente de amortiguamiento

ω_n = Frecuencia natural

Interpretación de los polos



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden

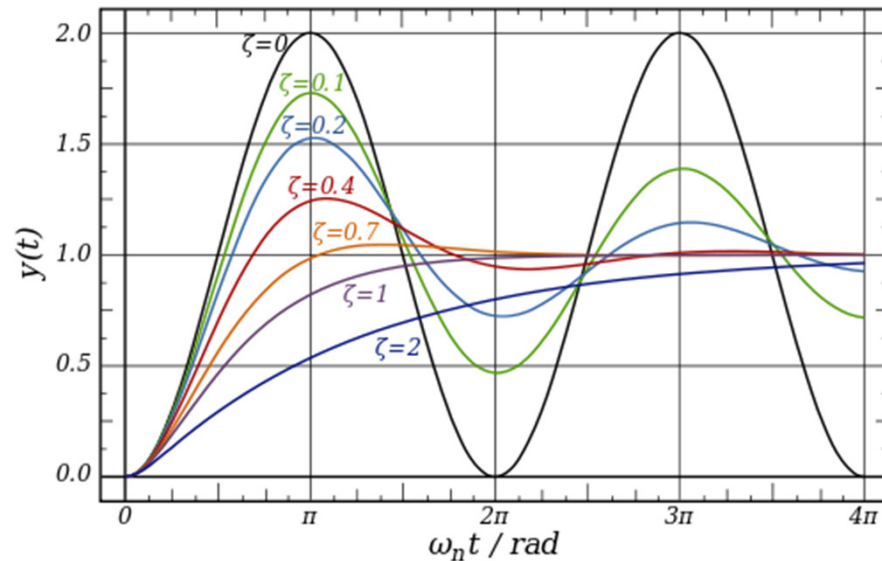
¿Cuál es el efecto de variar el coeficiente de amortiguamiento?

$$G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

K = Ganancia

ζ = Coeficiente de amortiguamiento

ω_n = Frecuencia natural



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de Orden Superior. Polos Dominantes

Sistema original

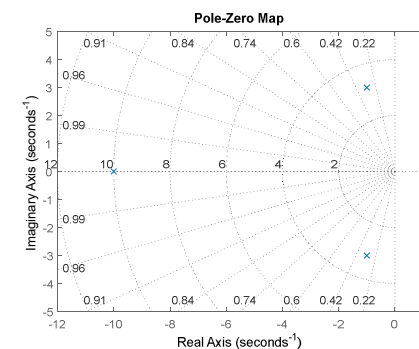
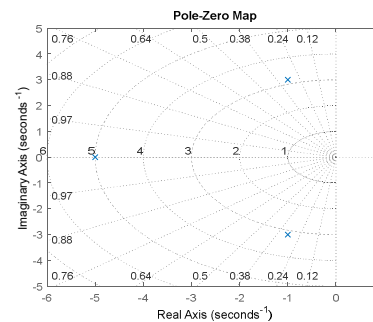
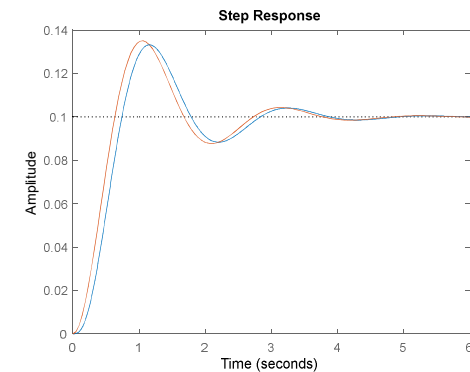
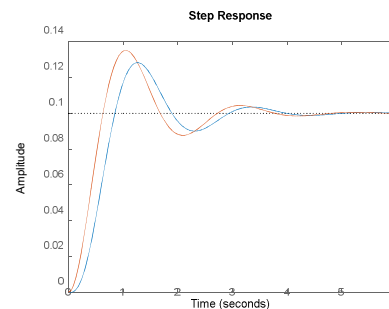
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

Un polo adicional 5 veces más alejado

$$G(s) = \frac{5}{s^3 + 7s^2 + 20s + 50}$$

Un polo adicional 10 veces más alejado

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 12s^2 + 30s + 100}$$



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de primer orden discreto.

Respuesta temporal y ubicación de polos

Discretización sistema de primer orden

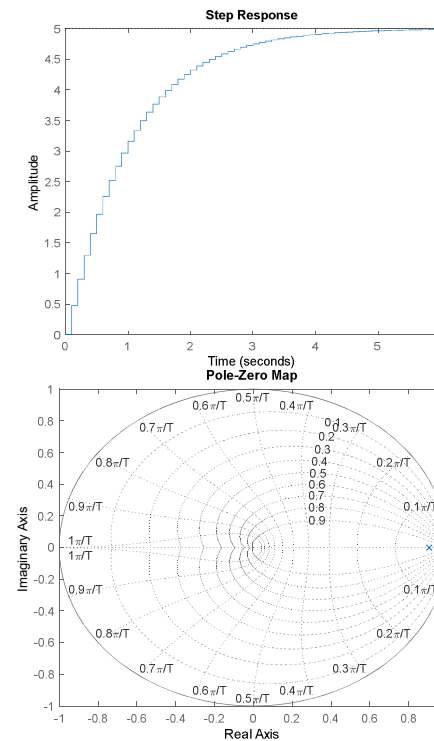
$$G(s) = \frac{k_c}{\tau s + 1}$$

$$Z = e^{T^*S}$$

$$p_c = -\frac{1}{\tau}$$

$$p_d = e^{-\frac{T}{\tau}}$$

$$G(z) = \frac{k_d}{z - p_d} \quad Kd = k_c (1 - e^{-\frac{T}{\tau}})$$



Análisis Respuesta Temporal. Sistema de segundo orden discreto.

Sistema de segundo orden

Respuesta temporal y ubicación de polos

$$G(s) = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Discretización sistema de segundo orden

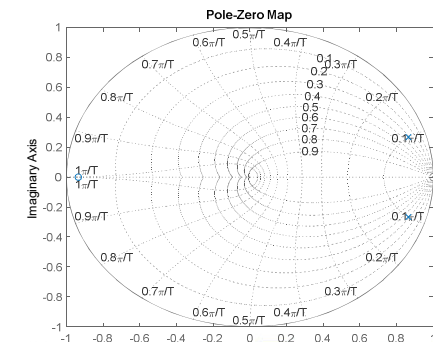
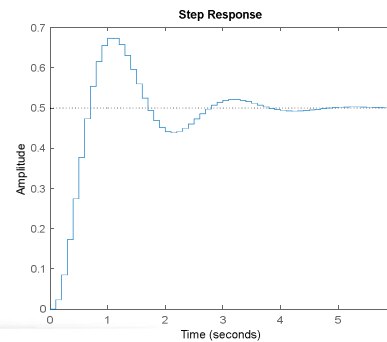
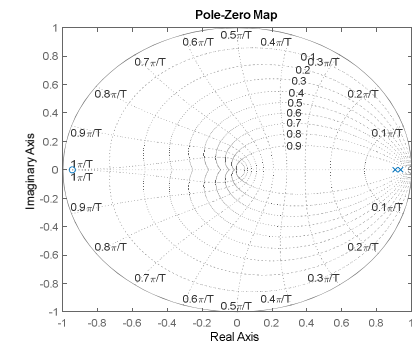
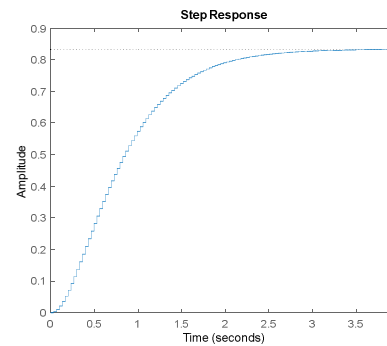
$$Z = e^{T^*S}$$

$$S = \sigma + j\omega$$

$$Z = e^{T(\sigma + j\omega)}$$

$$Z = e^{T\sigma} e^{jT\omega}$$

$$Z = e^{T\sigma} (\cos(T\omega) + j\sin(T\omega))$$



Representación en Espacio de Estado. Tiempo Continuo

Ecuación diferencial

$$y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + a_3 y^{n-3} + \dots + a_{n-2} \ddot{y} + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_1 u$$

N ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

...

$$\dot{x}_{n-1} = x_n$$

$$\dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - a_{n-2} x_3 - \dots - a_2 x_{n-1} - a_1 x_n + b_1 u$$

Representación Matricial

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n x_1 & -a_{n-1} x_2 & \dots & -a_2 x_{n-1} & -a_1 x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

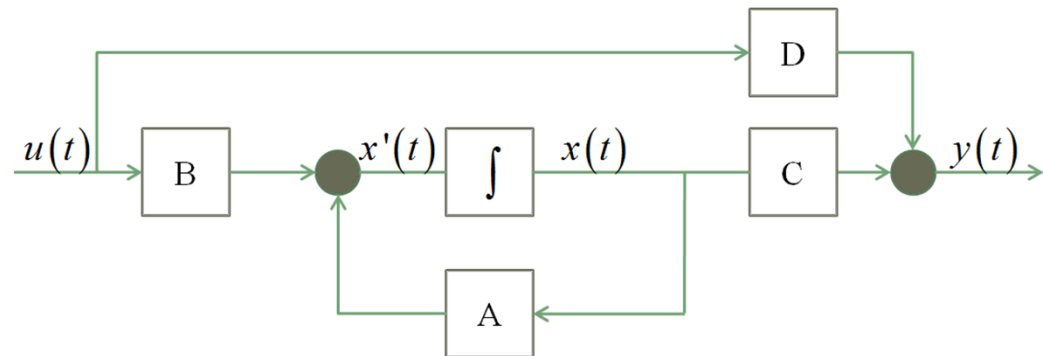
Representación en Espacio de Estado. Tiempo Continuo

Representación Matricial

$$\dot{X} = AX + BU$$

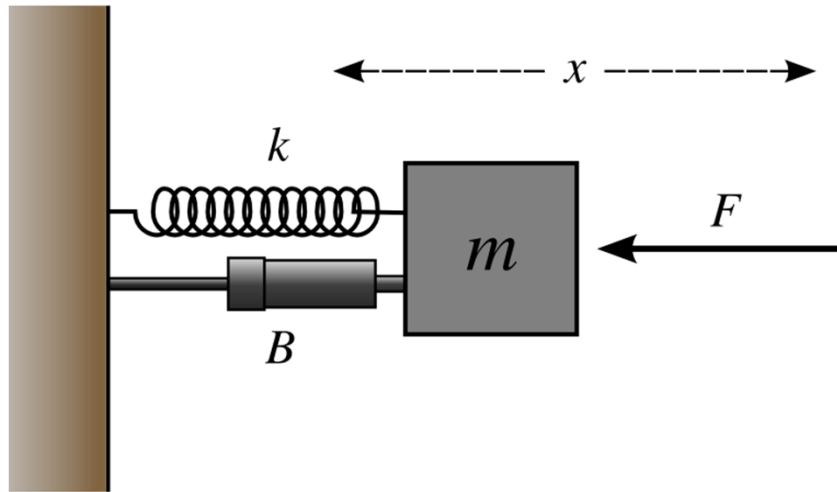
$$Y = CX + DU$$

Diagrama de Bloques



Representación en espacio de estado. Ejemplo

Ecuación diferencial



$$m\ddot{x} + bx + k\dot{x} = F$$

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

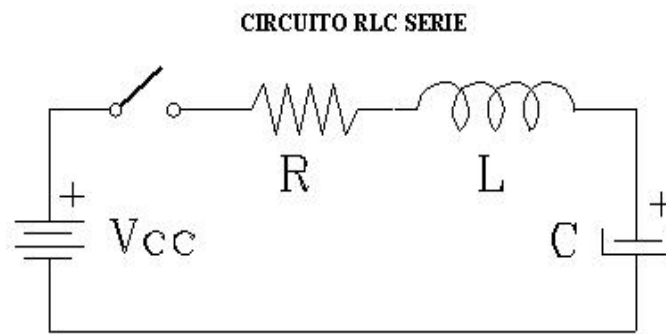
$$\dot{x}_2 = -kx_1 - bx_2 + u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Representación en espacio de estado. Ejercicio

Ecuación diferencial



$$V_L = L \frac{di}{dt}$$

$$i_C = C \frac{dv}{dt}$$

$$i_L = \frac{1}{L} \int V_L dt$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int i_C dt$$

$$x_1 = i_L$$

$$x_2 = v_C$$

Análisis de Respuesta Temporal. Representación en Espacio de Estado

Autovalores

$$\det|\lambda I - A| = 0$$

La ubicación de los autovalores se puede
asimilar a los polos de la función de
transferencia y determinan el
comportamiento del sistema

