

FIGURA 4.24: Región de Frecuencia máxima de oscilación para un sistema discreto de segundo orden

$$b = e^{-a \cot \phi} = e^{-\frac{a\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \quad (4.9)$$

La ecuación 4.9 permite definir, para el caso discreto, curvas análogas a las que generan la región de sobrepico máximo de los sistemas continuos (figura 4.17). La figura 4.25 muestra las curvas generadas por la ecuación (4.9) para distintos valores de ξ .

Por su parte, la figura 4.26) muestra la región definida por (4.9) al fijar un valor de ξ (o de ϕ), es decir, al establecer un factor de amortiguamiento. Esta región no es la región de sobrepico máximo, sino la *región de amortiguamiento mínimo*. El sobrepico máximo es más difícil de obtener debido a que el tiempo es discreto.

4.4.5. Región de diseño

Al combinar las regiones definidas en las figuras 4.22 a 4.26 se obtiene la *región de diseño* que se muestra en la figura 4.27. Su significado es análogo a la región de diseño del caso continuo.

4.5. Efecto de los ceros. Sistemas de fase mínima

Pese a que en las secciones anteriores se ha hecho énfasis en el efecto que tiene sobre la respuesta natural la ubicación de los polos en el plano, no debe desconocerse que los ceros también influyen en la respuesta.

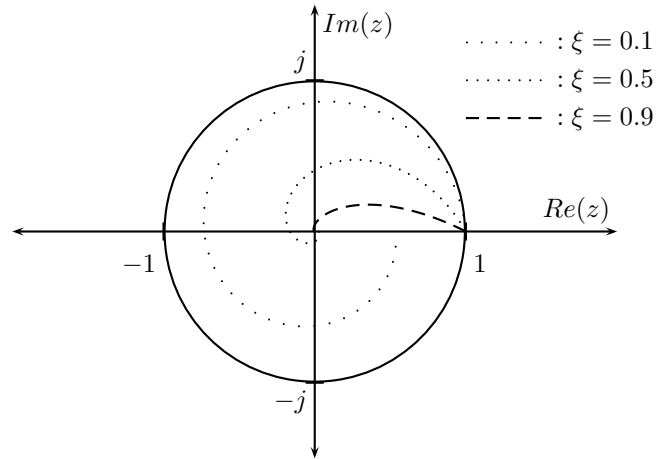


FIGURA 4.25: Curvas de Amortiguamiento fijo para un sistema discreto de segundo orden

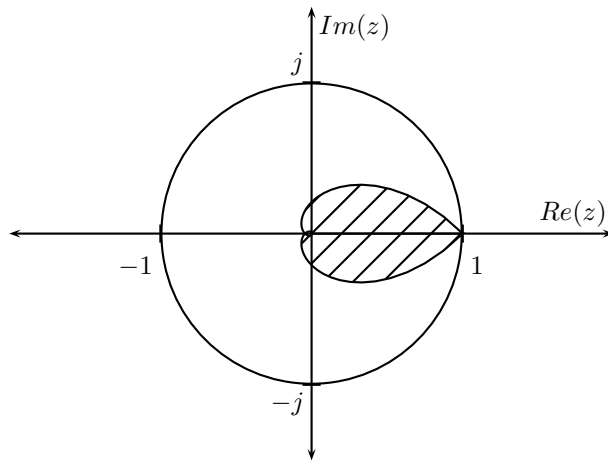


FIGURA 4.26: Región de Amortiguamiento mínimo para un sistema discreto de segundo orden

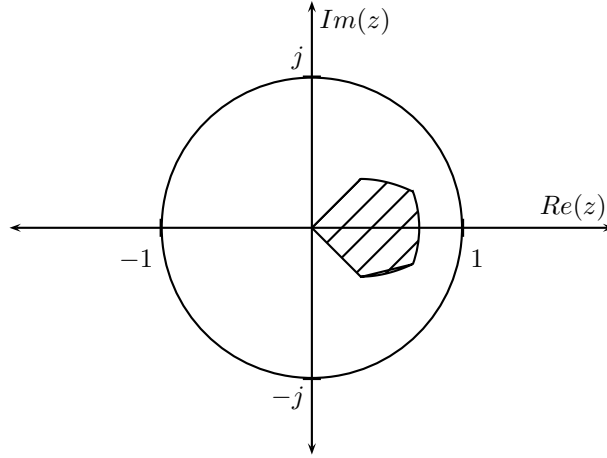


FIGURA 4.27: Región de Diseño para un sistema discreto de segundo orden

Supóngase un sistema continuo de segundo orden, con un cero real:

$$F(s) = \frac{\frac{(b^2 + \omega^2)}{a}(s + a)}{(s + b)^2 + \omega^2} \quad (4.10)$$

La respuesta al escalón del sistema definido por (4.10) es :

$$y(t) = \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{a} \sqrt{(b^2 + \omega^2)[(a - b)^2 + \omega^2]} e^{-bt} \sin(\omega t + \phi)\right) \mu(t) \\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{b}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a - b}\right) \end{cases} \quad (4.11)$$

La figura 4.28 muestra la gráfica de (4.11), para tres valores distintos de a , con unos valores fijos de $b = 1$ y $\omega = 1$; es decir, lo que se está modificando es la posición del cero de la función de transferencia. Allí puede verse que la ubicación del cero afecta directamente la forma de la respuesta.

Es importante resaltar que las regiones de diseño de las figuras 4.18 y 4.27 fueron desarrolladas para sistemas *prototipo* de segundo orden, sin ceros. Estas regiones pueden emplearse para el análisis y control de sistemas de segundo orden con ceros, pero sólo como una guía de carácter general.

Más importante aún es resaltar que para ceros en el semiplano derecho (este es el caso $a = -1$ en la figura 4.28) la respuesta al escalón presenta en sus inicios valores de signo contrario a los de la respuesta de estado estacionario; este fenómeno, conocido como *subpico* (en inglés *undershoot*) puede llegar a ser muy peligroso en algunos sistemas físicos, y constituye una gran dificultad para su control.

Los sistemas que no poseen ceros en el semiplano derecho, se conocen como sistemas de *fase mínima*, o simplemente *minifase* ².

²Esta denominación está relacionada con la respuesta de frecuencia del sistema

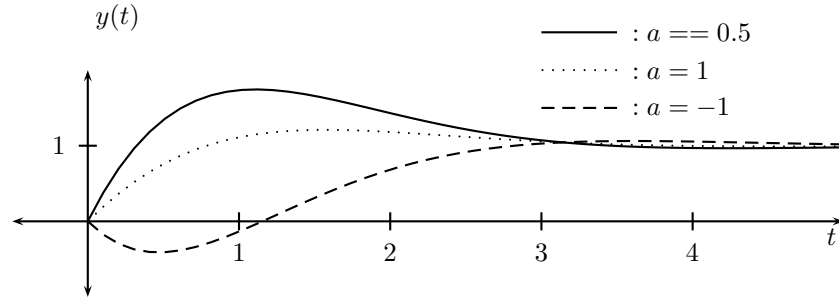


FIGURA 4.28: Respuesta al paso de un sistema continuo de segundo orden, con cero real $b = \omega = 1$

La presencia de subpicos ante una entrada escalón es fácil de demostrar para un sistema de segundo orden con polos reales y un cero real³, tal como

$$F(s) = \frac{(s + a)}{(s + b)(s + c)} \quad (4.12)$$

La respuesta al escalón será:

$$Y(s) = \frac{(s + a)}{s(s + b)(s + c)} = \frac{a/(b + c)}{s} + \frac{(a - b)/(c - b)(-b)}{(s + b)} + \frac{(a - c)/(c - b)(c)}{(s + c)}$$

$$y(t) = \left(\frac{a}{bc} + \frac{(a - b)}{(c - b)(-b)}e^{-bt} + \frac{(a - c)}{(c - b)(c)}e^{-ct} \right) \mu(t)$$

El signo de la derivada de $y(t)$ evaluada en $t = 0$ nos indica si la respuesta crece o decrece en ese momento:

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{a - b}{c - b} = \frac{a - c}{c - b} = \frac{c - b}{c - b} = 1$$

La derivada siempre es positiva, por lo tanto, para valores cercanos a $t = 0$, $y(t)$ será siempre positiva. Por otra parte, la respuesta de estado estacionario de $y(t)$ será a/bc ; para sistemas estables, tanto b como c son positivos, y por lo tanto el signo de la respuesta estacionaria es el mismo signo de a .

En conclusión, para valores negativos de a (ceros positivos), la respuesta en sus inicios tendrá un signo diferente al de la respuesta de estado estacionario y sucederá el subpico.

³Para otro tipo de sistemas la demostración es más complicada, y se omite aquí

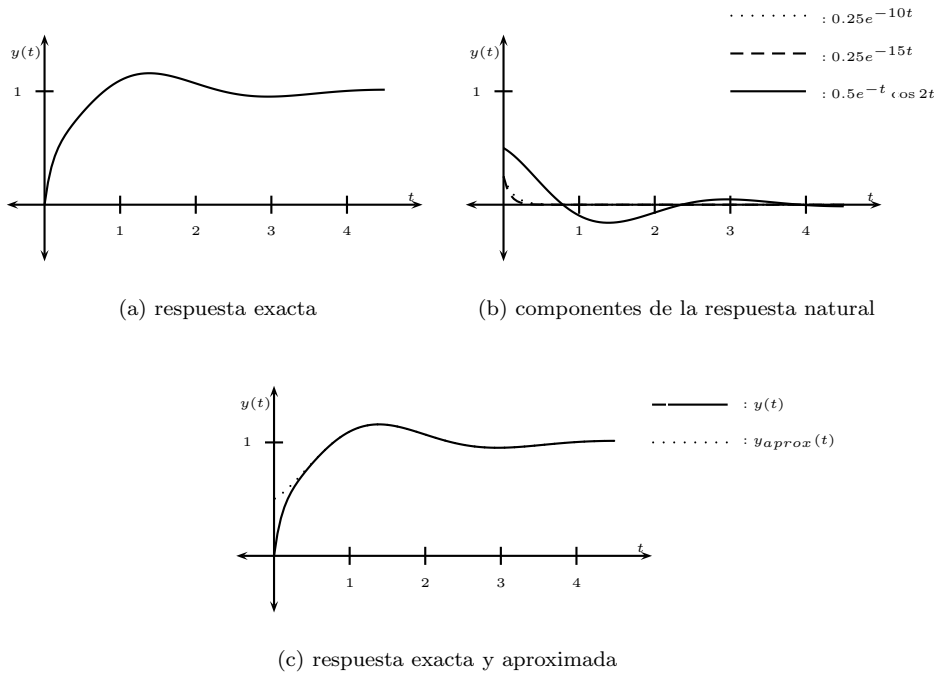


FIGURA 4.29: Sistema continuo de orden 4 con polos dominantes

4.6. Polos dominantes

Supongamos ahora un sistema continuo de orden superior a 2, como por ejemplo uno cuya función de transferencia sea

$$F(s) = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{(s + 10)(s + 15)(s^2 + 2s + 5)}$$

Al estimular ese sistema con un escalón unitario la respuesta será

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{6.75s^3 + 102.5s^2 + 318.75s + 750}{s(s + 10)(s + 15)(s^2 + 2s + 5)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{0.25}{(s + 10)} - \frac{0.25}{(s + 15)} - \frac{0.5(s + 1)}{(s^2 + 2s + 5)}$$

$$y(t) = (1 - 0.25e^{-10t} - 0.25e^{-15t} - 0.5e^{-t} \cos 2t) \mu(t) \quad (4.13)$$

La figura 4.29(a) muestra la gráfica de $y(t)$, mientras que la figura 4.29(b) muestra por separado los tres componentes de la respuesta natural, $-0.25e^{-10t}$, $-0.25e^{-15t}$ y $-0.5e^{-t} \cos 2t$.

En la figura 4.29(b) se observa que el aporte a la respuesta natural debido a los polos $p_1 = -10$ y $p_2 = -15$ es considerablemente más pequeño que el

debido a los polos $p_{3,4} = -1 \pm j2$. Lo anterior se debe a que los aportes de p_1 y p_2 decaen mucho más rápidamente que el aporte de $p_{3,4}$, ya que e^{-10t} y e^{-15t} decaen más rápidamente que e^{-t} .

Se dice entonces que los polos $p_{3,4}$ *dominan* el comportamiento del sistema, o simplemente que son los *polos dominantes*. La figura 4.29(c) compara la respuesta exacta $y(t)$ calculada según (4.13) y una respuesta aproximada $y_{aprox}(t)$ que se obtendría eliminando de $y(t)$ los aportes de los polos p_1 y p_2 , es decir:

$$y(t) = (1 - 0.5e^{-t} \cos 2t) \mu(t)$$

Se observa cómo el aporte de los polos p_1 y p_2 sólo es significativo al comienzo de la respuesta, cuando la componente de la respuesta natural asociada a ellos aún no ha decaído, pero este aporte se desvanece rápidamente, y la respuesta aproximada resulta ser prácticamente la misma respuesta exacta.

En conclusión, se dice que un sistema continuo estable tiene (1 o 2) *polos dominantes* si la parte real de dichos polos es suficientemente mayor (está más hacia la derecha, en el semiplano izquierdo) que la de los demás polos del sistema, como para que el aporte de éstos últimos se desvanezca mucho antes de que haya desaparecido el aporte debido a los polos dominantes.

En estos casos, las regiones de diseño, que fueron desarrolladas para sistemas de segundo orden, pueden ser una herramienta muy útil para analizar el sistema, aunque éste sea de un orden superior.

Algo análogo sucede con los sistemas discretos, sólo que aquí el tiempo de decaimiento no depende de la parte real de los polos, sino de su distancia al origen.

En conclusión, se dice que un sistema discreto estable tiene (1 o 2) *polos dominantes* si la magnitud de dichos polos es suficientemente mayor (está más lejos del origen, dentro del círculo unitario) que la de los demás polos del sistema, como para que el aporte de éstos últimos se desvanezca mucho antes de que haya desaparecido el aporte debido a los polos dominantes.