

Control 1- Compensadores mediante el método del LGR

Carlos Mario Paredes

Septiembre 2021

Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requerimientos impuestos sobre el sistema de control se detallan como especificaciones de desempeño. Por lo general se refieren a la precisión, la estabilidad relativa y la velocidad de respuesta.

1 Compensación del sistema

Establecer la ganancia es el primer paso encaminado para ajustar el sistema y cumplir con un desempeño satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, ajustar solamente la ganancia tal vez no proporcione una alteración suficiente del comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estable pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) a fin de alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se requiere. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina compensación. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina compensador. El compensador modifica el desempeño con déficit del sistema original.

La Fig 1 muestra el esquema de compensación en serie.

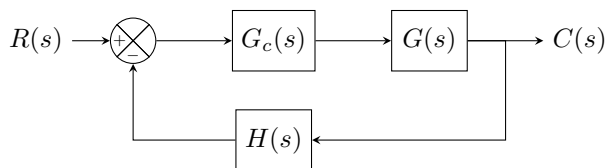


Fig. 1: Sistema en lazo cerrado, compensación en serie

Al analizar los compensadores, solemos utilizar términos como red de adelanto, red de atraso, y red de atraso-adelanto. Si se aplica una entrada senoidal e_i a la entrada de una red, y la salida en estado estable e , (que también es

senoidal) tiene un adelanto de fase, el sistema se denomina red de adelanto. Si la salida en estado estable e , tiene un atraso de fase, la red se denomina red de atraso. En una red de atraso-adelanto, ocurren tanto un atraso de fase como un adelanto de fase en la salida, pero en diferentes regiones de frecuencia; el atraso de fase ocurre en la región de baja frecuencia y el adelanto de fase ocurre en la región de alta frecuencia. Un compensador que tenga la característica de una red de adelanto, una red de atraso, o una red de atraso-adelanto se denomina compensador de adelanto, compensador de atraso, o compensador de atraso-adelanto, respectivamente.

1.1 Compensadores

Si se necesita un compensador para cumplir las especificaciones de desempeño, el diseñador debe planear un dispositivo físico que tenga prescrita la función de transferencia del compensador.

Entre los muchos tipos de compensadores, los de mayor uso son los compensadores de adelanto, los de atraso, los de atraso-adelanto y los de realimentación de velocidad (tacómetros). En este capítulo limitaremos nuestro análisis a estos tipos. Los compensadores de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto pueden ser dispositivos electrónicos (tales como circuitos que usen amplificadores operacionales), redes RC (eléctricas, mecánicas, neumáticas, hidráulicas o una combinación de ellas) o amplificadores. En el diseño real de un sistema de control, el que se use un compensador electrónico, neumático o hidráulico debe decidirse parcialmente con base en la naturaleza de la planta que se controla. Por ejemplo, si la planta que se controla contiene fluidos inflamables, debe optarse por los componentes neumáticos (tanto un compensador como un actuador) para eliminar la posibilidad de que salten chispas. Sin embargo, si no existe el riesgo de incendio, los que se usan con mayor frecuencia son los compensadores electrónicos. (De hecho, es común transformar las señales no eléctricas en señales eléctricas, debido a la sencillez de la transmisión, mayor precisión, mayor confiabilidad, más facilidad de compensación, etcétera.)

1.2 Consideraciones preliminares de diseño

Al desarrollar un sistema de control, sabemos que la modificación adecuada de la dinámica de la planta puede ser una forma sencilla de cumplir las especificaciones de desempeño. Sin embargo, tal vez esto no sea posible en muchas situaciones prácticas, debido a que la planta esté fija y no pueda modificarse.

Por tanto, los problemas de diseño son aquellos que implican la mejora del desempeño de un sistema mediante la inserción de un compensador. La compensación de un sistema de control se reduce al diseño de un filtro cuyas características tiendan a compensar las características inconvenientes o inalterables de la planta.

1.2.1 Enfoque del LGR para el diseño de un sistema de control

En la práctica, una gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema indica que el desempeño deseado no puede obtenerse con sólo el ajuste de la ganancia. De hecho, en algunos casos, tal vez el sistema no sea estable para todos los valores de ganancia. En este caso, es necesario volver a construir los lugares geométricos de las raíces para cumplir las especificaciones de desempeño. Cuando se diseña un sistema de control, si se requiere de un ajuste diferente al de la ganancia, debemos modificar los lugares geométricos de las raíces originales insertando un compensador conveniente. Una vez comprendidos los efectos de la adición de los polos y/o ceros sobre el lugar geométrico de las raíces, podemos determinar con facilidad las ubicaciones de los polos y los ceros del compensador que volverán a dar una forma conveniente al lugar geométrico de las raíces. En esencia, en el diseño realizado mediante el método del lugar geométrico de las raíces, los lugares geométricos de las raíces del sistema se vuelven a construir mediante el uso de un compensador, a fin de poder colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado en la posición deseada. (A menudo se especifican el factor de amortiguamiento y la frecuencia no amortiguada natural de un par de polos dominantes en lazo cerrado.)

1.3 Efectos de adición de polos

La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de halar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y volver más lento el tiempo de respuesta. En la Fig. 2 se observa el efecto en el LGR al adicionar polos.

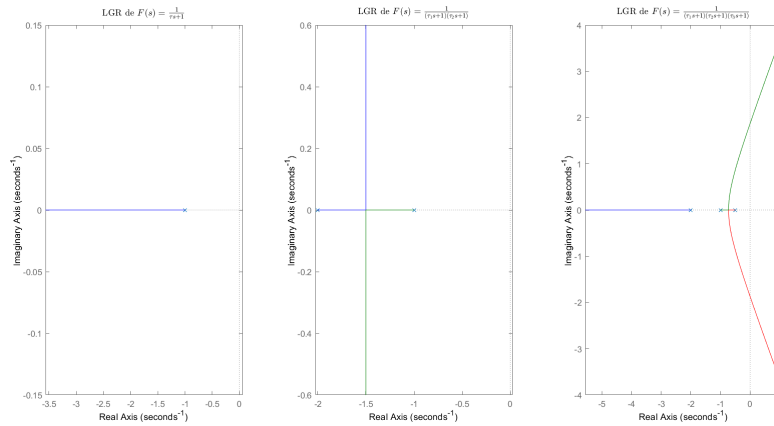


Fig. 2: Efecto de adicionar polos en el LGR

1.4 Efectos de adición de ceros

La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de halar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, con lo cual el sistema tiende a ser más estable, y se acelera el asentamiento de la respuesta. (Físicamente, la adición de un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa significa agregar al sistema un control derivativo. El efecto de tal control es introducir un grado de previsión al sistema y acelerar la respuesta transitoria. En la Fig. 3 se observa el efecto en el LGR al adicionar ceros.

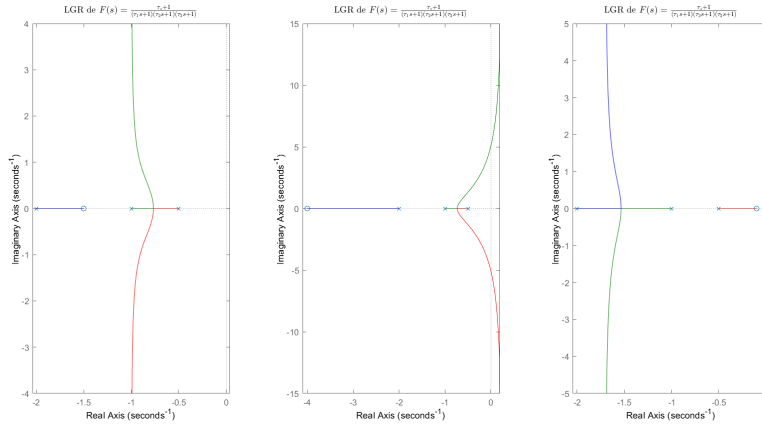


Fig. 3: Efecto de adicionar ceros en el LGR

2 Compensación de adelanto

Existen muchas formas de obtener compensadores de adelanto en tiempo continuo (o analógicos), tales como redes electrónicas que usan amplificadores operacionales, redes RC eléctricas y sistemas de amortiguadores mecánicos. En la práctica, suelen usarse compensadores que involucran amplificadores operacionales. La Fig. 4 es un circuito electrónico que puede funcionar como una red adelanto o de atraso dependiendo de los valores de los parámetros.

La respectiva función de transferencia del sistema es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K \frac{s + z}{s + p} \quad (1)$$

Donde:

$$K = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \quad (2)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad p = \frac{1}{R_2 C_2}$$

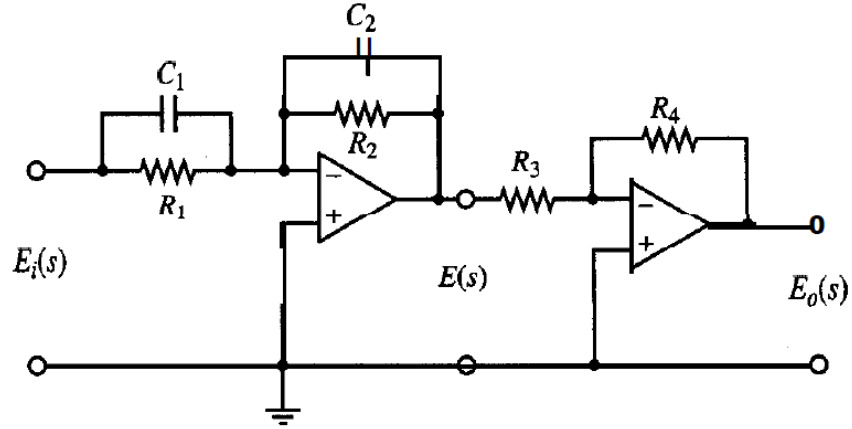


Fig. 4: Circuito electrónico para una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ y una red de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$

La red es de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ y de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$. Las configuraciones de los polos de este sistema se muestran en la Fig. 5.

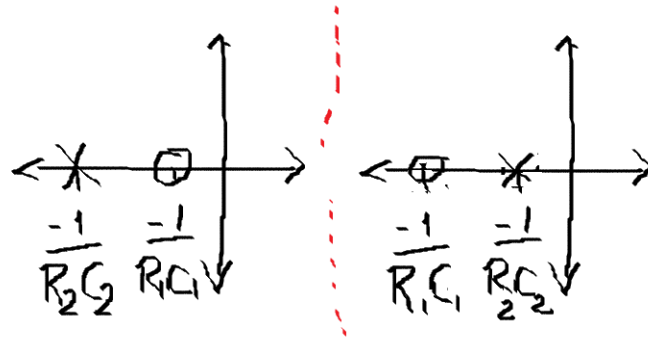


Fig. 5: Mapa de polos y ceros del compensador. Lado izquierdo: red de adelanto. Lado derecho: Red de atraso

Procedimiento para diseñar un compensador de adelanto, considerar $H(s) = 1$

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Graficar el LGR y comprobar si con solo ajustar la ganancia, se pasa por los raíces deseadas. Si esto no es así obtener el ángulo faltante, usando el criterio del ángulo. Este ángulo será compensado con la red de adelanto,

y esto modificará el LGR para que las raíces deseadas pasen por el nuevo LGR.

3. Suponer o ubicar el polo y el cero del compensador $G_c(s)$ de modo que contribuya con el ángulo faltante. Esto siempre y cuando no se especifiquen la constantes de error estático.
4. Determinar la ganancia en lazo abierto del sistema compensado a partir de la condición de magnitud

Una vez diseñado el compensador/controlador, verificar que se cumplan todas las especificaciones de diseño. Si se requiere de una constante de error estático grande, enlace en cascada una red de atraso o convierta el compensador de adelanto en un compensador de atraso-adelanto.

Si los polos dominantes en lazo cerrado seleccionados no son realmente dominantes, será necesario modificar la ubicación del par de polos dominantes en lazo cerrado. (Los polos en lazo cerrado diferentes de los dominantes modifican la respuesta obtenida de los polos dominantes en lazo cerrado. El grado de modificación depende de la ubicación de los polos en lazo cerrado restantes.) Asimismo, los ceros en lazo cerrado afectan la respuesta si se localizan cerca del origen

Ejemplo:

Considerar el siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s(s+2)} \quad (3)$$

En lazo abierto el sistema es inestable. Si se realimenta el sistema, Fig. 6

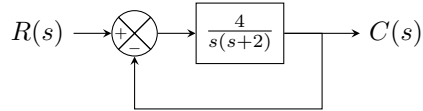


Fig. 6

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s(s+2) + 4} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \quad (4)$$

Los polos de este sistema en lazo cerrado son:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}j \quad (5)$$

Esto da un sistema de segundo orden con $\zeta = 0.5$ y una $\omega_n = 2$. Lo que quiere decir que el $SO(\%) = 16.3\%$ y que el sistema presenta un tiempo de estabilización de $T_s = 4seg$. Se desea aumentar la frecuencia natural no amortiguada a $\omega_n = 4$ sin afectar el factor de amortiguamiento ζ . Esto permitiría

que el sistema se estabilice más rápido, $T_s = 2\text{seg}$, manteniendo el mismo sobreimpulso. De este modo los polos deseados del sistema en lazo cerrado son:

$$s^2 + 4s + 16 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j \quad (6)$$

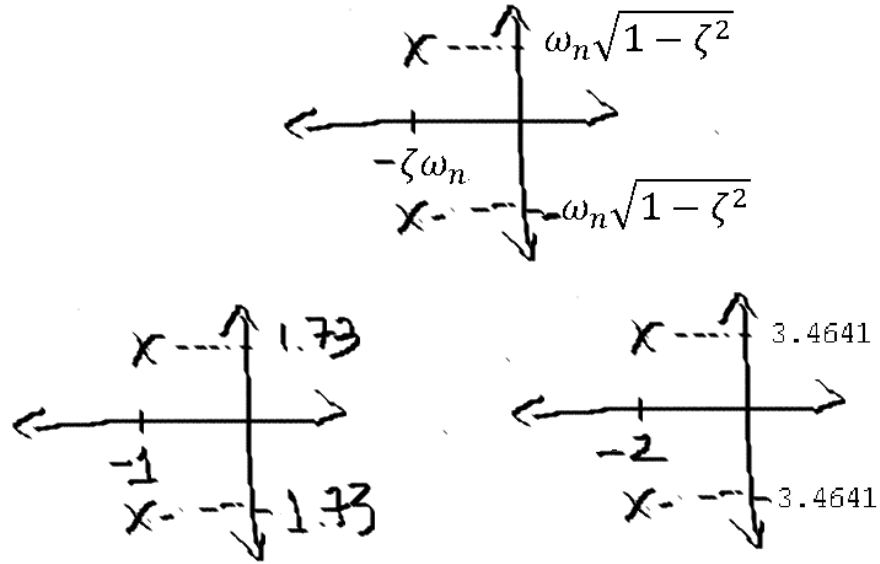


Fig. 7: Mapa de polos y ceros, izquierda:actual, derecha: deseados

Graficar el LGR para el sistema descrito y verificar si con tan solo ajustar la ganancia se pasan por los polos deseados, Fig 8

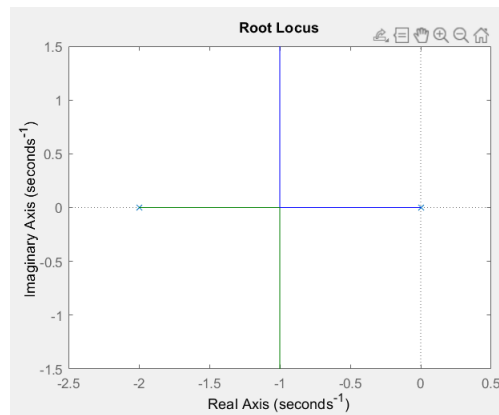


Fig. 8: LGR

Se observa que los polos deseados no pasan por el LGR. De este modo se requiere modificar el LGR. Se usará una red de adelanto en este caso. De este modo el diseño del controlador $G_c(s)$ se debe realizar de tal forma que cumpla con las especificaciones deseadas, Fig 9.

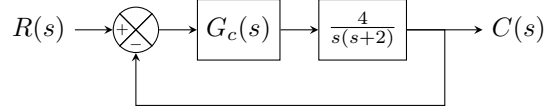


Fig. 9: Sistema de control

Para esto, primero hay que obtener el ángulo faltante.

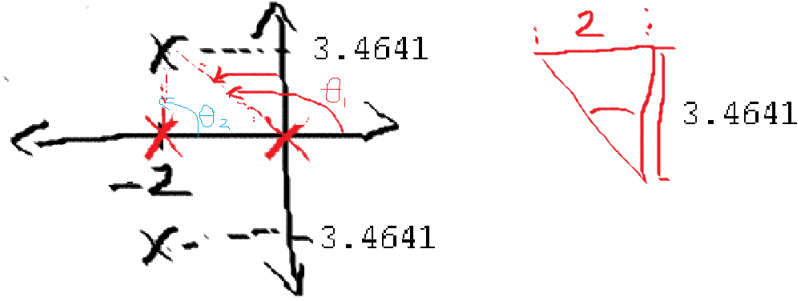


Fig. 10: Ángulo faltante

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 90^\circ + \operatorname{atan} \frac{2}{2\sqrt{3}} \\ \theta_2 &= 90^\circ \\ \theta_1 + \theta_2 &= 210^\circ\end{aligned}\tag{7}$$

Estos ángulos provienen de polos por lo tanto el resultado real es $\theta_1 + \theta_2 = -210^\circ$.

Para cumplir la condición del ángulo se requiere sumar 30° . Estos 30° deben ser la contribución de la red de adelanto. Para esto se plantea la siguiente ubicación de polo y cero de la red de adelanto $G_c(s)$, con respecto al polo deseado, Fig. 11

Recordar que los ángulos de los ceros suman(porque está en el numerador) y el del polo resta(porque está en el denominador). Entonces se tiene que la contribución del compensador debe aportar 30° :

$$\phi_1 - \theta_3 = 30^\circ \longrightarrow \phi_1 = 70^\circ \text{ y } \theta_3 = 40^\circ\tag{8}$$

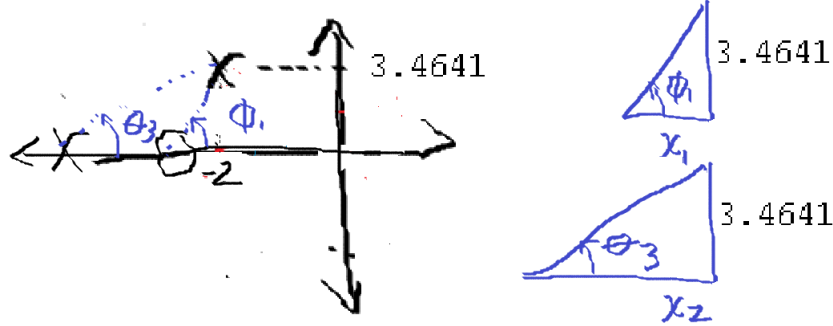


Fig. 11: Polo y cero de la red de adelanto

De los triángulos planteados en la Fig. 11 se puede obtener la distancia a la que deben de estar el cero y el polo del compensador de la parte real de los polos deseados.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{\tan 70^\circ} = 1.26 \\ x_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{\tan 40^\circ} = 4.13 \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto la ubicación del polo del compensador es $s_3 = -6.13$ y del cero del compensador es $s_1 = -3.26$ para cumplir con la condición del ángulo, y generar que los polos deseados pasen por el nuevo LGR. Al agregar este compensador, en la Fig. 14 se observa el nuevo LGR.

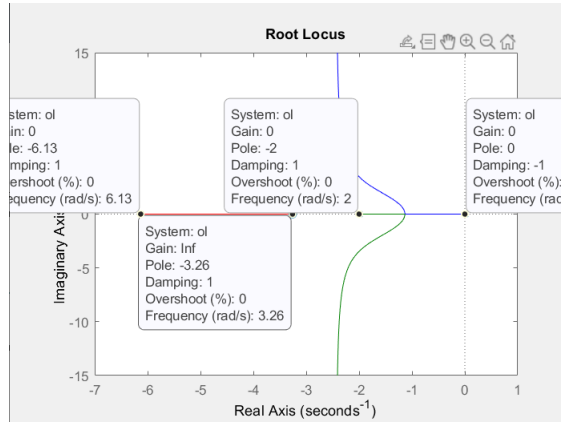


Fig. 12: Nuevo LGR con el compensador

Ahora hay que encontrar la ganancia K del compensador que permite obtener los polos deseados. Esto es a partir de la condición de magnitud.

$$\begin{aligned}
|G_c(s)G(s)|_{s=-2+2\sqrt{3}j} &= \left| K \frac{4(s+3.26)}{s(s+6.13)(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \\
4K \times 0.0494 &= 1 \\
\mathbf{K} &= \mathbf{5.061}
\end{aligned} \tag{10}$$

Con esto se finaliza el diseño del compensador:

$$\begin{aligned}
G_c(s) &= K \frac{s+z}{s+p} \\
\mathbf{G_c(s)} &= \mathbf{5.061} \frac{s + \mathbf{3.26}}{s + \mathbf{6.13}}
\end{aligned} \tag{11}$$

Si se desea montar un circuito electrónico como el de la Fig. 4 para realizar la acción de este compensador. Se requieren encontrar los valores los parámetros del sistema. Se sabe que:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \rightarrow 5.061 = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \\
z &= \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow 3.26 = \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow R_1 C_1 = \frac{1}{3.26} \\
p &= \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow 6.13 = \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow R_2 C_2 = \frac{1}{6.13}
\end{aligned} \tag{12}$$

Se pueden seleccionar capacitores de valores comerciales y encontrar los valores de las resistencias. Por ejemplo si $\mathbf{C_1 = C_2 = 10\mu F}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{3.26 \times C_1} \rightarrow \mathbf{R_1 = 30.67k\Omega} \\
R_2 &= \frac{1}{6.13 \times C_2} \rightarrow \mathbf{R_2 = 16.31k\Omega} \\
\frac{R_4}{R_3} &= 5.061 \rightarrow \text{if } \mathbf{R_3 = 10k\Omega} \\
\mathbf{R_4} &= \mathbf{50.61k\Omega}
\end{aligned} \tag{13}$$

Este sistema sería el controlador que se encargaría de llevar el proceso a los polos deseados (especificaciones requeridas)

Si se analiza la constante de error de velocidad K_v se tiene que:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 5.061 s \frac{4(s+3.26)}{s(s+6.13)(s+2)} \\
\mathbf{K_v} &= \mathbf{5.383}
\end{aligned} \tag{14}$$

Es conveniente que esta constante sea grande, entre más elevado sea su valor mejor.

Por ultimo observar los polos del sistema retroalimentado con este compensador y verificar que cumple con las especificaciones dadas.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20.26s + 66.06}{s^3 + 8.13s^2 + 32.52s + 66.06} \quad (15)$$

Los polos de este sistema son:

$$s^3 + 8.13s^2 + 32.52s + 66.06 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 + 2\sqrt{3}j \\ s_2 = -2 - 2\sqrt{3}j \\ s_3 = -4.13 \end{cases} \quad (16)$$

El sistema tiene un cero en $s_1 = -3.26$. Como el tercer polo está lejos del cero agregado, este polo tendrá algo de influencia en la respuesta del sistema. Debido a que no se impuso ninguna restricción sobre el polo no dominante y no se definió una especificación relacionada con el valor del coeficiente de error de velocidad, se puede decir que el diseño es satisfactorio. A continuación se muestra la respuesta del sistema sin compensador y con compensador, así como el mapa de polos y ceros.

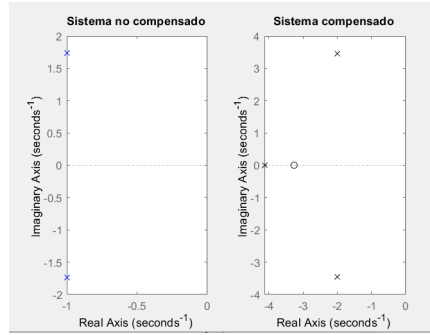


Fig. 13: Mapa de polos y ceros del sistema compensado vs no compensado

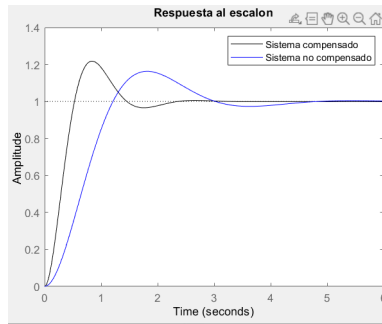


Fig. 14: Respuesta temporal del sistema compensado vs no compensado

Se observa que la respuesta del sistema compensado es más rápida que el sistema sin controlador, que era lo que se deseaba.

Ejemplo con otra red de adelanto

Considerar la siguiente red de adelanto para el diseño del controlador $G_c(s)$ teniendo en cuenta el mismo sistema anterior y las mismas características deseadas.

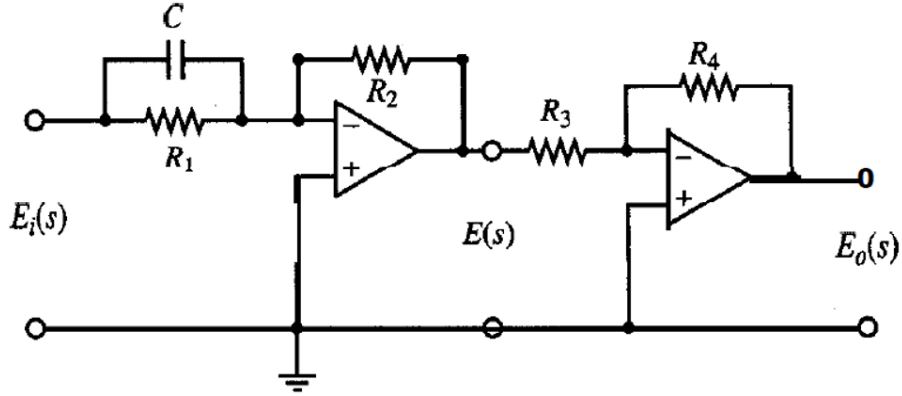


Fig. 15: Circuito electrónico para una red de adelanto

La respectiva función de transferencia de esta red es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K(s + z) \quad (17)$$

Donde:

$$K = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \quad (18)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C}$$

Se agrega el cero de tal forma que compense los 30° que se requieren para completar la condición del ángulo, Fig. 16.

$$\phi = 30^\circ \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = 6 \quad (19)$$

Por lo tanto el cero será ubicado en $s_1 = -8$. El nuevo LGR se muestra en la Fig. 17.

Para encontrar la ganancia K , determinarla con la condición de magnitud.

$$|G_c(s)G(s)|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = \left| K \frac{4(s+8)}{s(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \quad (20)$$

$$\mathbf{K = 0.5}$$

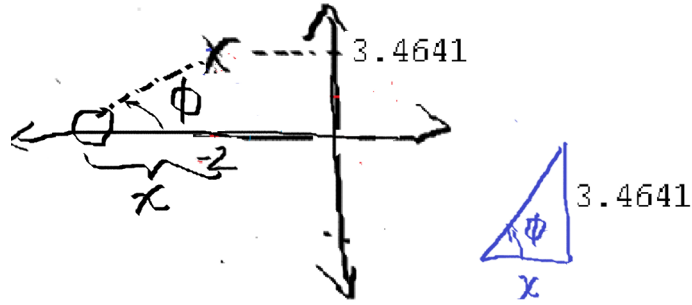


Fig. 16: Cálculo del ángulo faltante

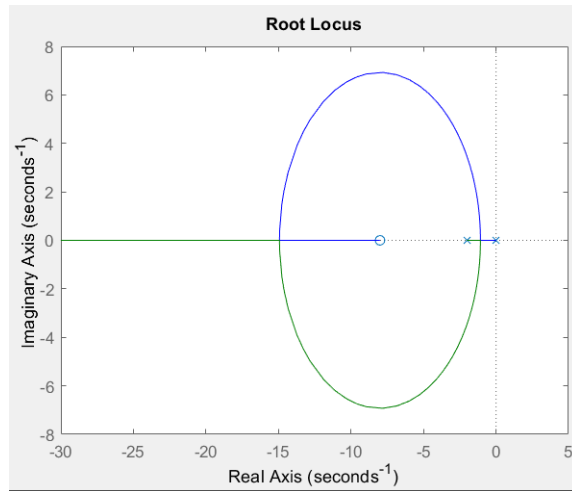


Fig. 17: Nuevo LGR

Con el controlador establecido se pueden encontrar los valores de los parámetros de la red de adelanto para ser implementado por el segundo circuito formado por amplificadores operacionales.

$$K = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \rightarrow 0.5 = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \quad (21)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C} \rightarrow 8 = \frac{1}{R_1 C}$$

Se pueden seleccionar el capacitor con un valor comercial y encontrar los valores de las resistencias. Por ejemplo si $C = 10\mu\text{F}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{8 \times C} \rightarrow \mathbf{R_1 = 12.5k\Omega} \\
\mathbf{R_3 = R_4 = 10k\Omega} \\
R_2 &= \frac{0.5}{C} \rightarrow \mathbf{R_2 = 50k\Omega}
\end{aligned} \tag{22}$$

Este sistema sería el controlador que se encargaría de llevar el proceso a los polos deseados (especificaciones requeridas)

Si se analiza la constante de error de velocidad K_v se tiene que:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 0.5s \frac{4(s+8)}{s(s+2)} \\
\mathbf{K_v} &= \mathbf{8}
\end{aligned} \tag{23}$$

Por ultimo observar los polos del sistema retroalimentado con este compensador y verificar que cumple con las especificaciones dadas.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 16}{s^2 + 4s + 16} \tag{24}$$

Los polos de este sistema son los deseados. El comportamiento del sistema compensado vs el no compensado se observa en la siguiente figura.

Complementar leyendo el capítulo 7 del libro de Ingeniería de control moderna de Ogata

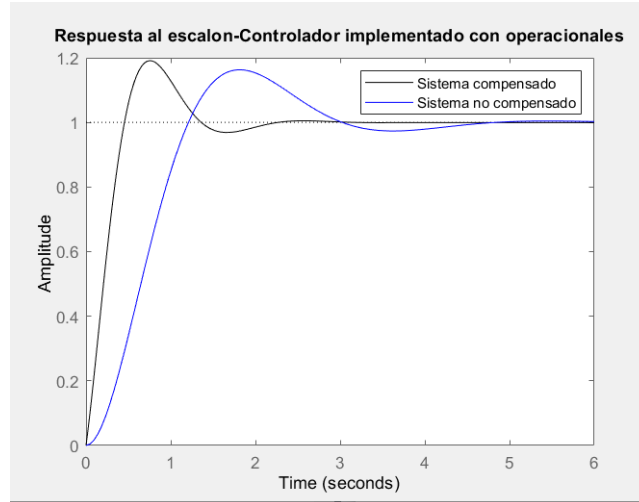


Fig. 18: Respuesta temporal del sistema compensado vs no compensado