

Control 1- Compensadores mediante el método del LGR

Carlos Mario Paredes

Septiembre 2021

Los sistemas de control se diseñan para realizar tareas específicas. Los requerimientos impuestos sobre el sistema de control se detallan como especificaciones de desempeño. Por lo general se refieren a la precisión, la estabilidad relativa y la velocidad de respuesta.

1 Compensación del sistema

Establecer la ganancia es el primer paso encaminado para ajustar el sistema y cumplir con un desempeño satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, ajustar solamente la ganancia tal vez no proporcione una alteración suficiente del comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estable pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) a fin de alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se requiere. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina compensación. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina compensador. El compensador modifica el desempeño con déficit del sistema original.

La Fig 1 muestra el esquema de compensación en serie.

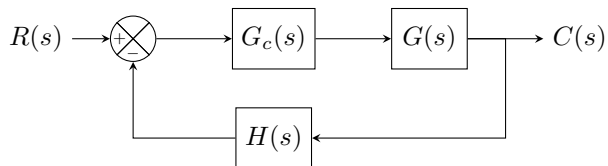


Fig. 1: Sistema en lazo cerrado, compensación en serie

Al analizar los compensadores, solemos utilizar términos como red de adelanto, red de atraso, y red de atraso-adelanto. Si se aplica una entrada senoidal e_i a la entrada de una red, y la salida en estado estable e , (que también es

senoidal) tiene un adelanto de fase, el sistema se denomina red de adelanto. Si la salida en estado estable e , tiene un atraso de fase, la red se denomina red de atraso. En una red de atraso-adelanto, ocurren tanto un atraso de fase como un adelanto de fase en la salida, pero en diferentes regiones de frecuencia; el atraso de fase ocurre en la región de baja frecuencia y el adelanto de fase ocurre en la región de alta frecuencia. Un compensador que tenga la característica de una red de adelanto, una red de atraso, o una red de atraso-adelanto se denomina compensador de adelanto, compensador de atraso, o compensador de atraso-adelanto, respectivamente.

1.1 Compensadores

Si se necesita un compensador para cumplir las especificaciones de desempeño, el diseñador debe planear un dispositivo físico que tenga prescrita la función de transferencia del compensador.

Entre los muchos tipos de compensadores, los de mayor uso son los compensadores de adelanto, los de atraso, los de atraso-adelanto y los de realimentación de velocidad (tacómetros). En este capítulo limitaremos nuestro análisis a estos tipos. Los compensadores de adelanto, de atraso y de atraso-adelanto pueden ser dispositivos electrónicos (tales como circuitos que usen amplificadores operacionales), redes RC (eléctricas, mecánicas, neumáticas, hidráulicas o una combinación de ellas) o amplificadores. En el diseño real de un sistema de control, el que se use un compensador electrónico, neumático o hidráulico debe decidirse parcialmente con base en la naturaleza de la planta que se controla. Por ejemplo, si la planta que se controla contiene fluidos inflamables, debe optarse por los componentes neumáticos (tanto un compensador como un actuador) para eliminar la posibilidad de que salten chispas. Sin embargo, si no existe el riesgo de incendio, los que se usan con mayor frecuencia son los compensadores electrónicos. (De hecho, es común transformar las señales no eléctricas en señales eléctricas, debido a la sencillez de la transmisión, mayor precisión, mayor confiabilidad, más facilidad de compensación, etcétera.)

1.2 Consideraciones preliminares de diseño

Al desarrollar un sistema de control, sabemos que la modificación adecuada de la dinámica de la planta puede ser una forma sencilla de cumplir las especificaciones de desempeño. Sin embargo, tal vez esto no sea posible en muchas situaciones prácticas, debido a que la planta esté fija y no pueda modificarse.

Por tanto, los problemas de diseño son aquellos que implican la mejora del desempeño de un sistema mediante la inserción de un compensador. La compensación de un sistema de control se reduce al diseño de un filtro cuyas características tiendan a compensar las características inconvenientes o inalterables de la planta.

1.2.1 Enfoque del LGR para el diseño de un sistema de control

En la práctica, una gráfica del lugar geométrico de las raíces de un sistema indica que el desempeño deseado no puede obtenerse con sólo el ajuste de la ganancia. De hecho, en algunos casos, tal vez el sistema no sea estable para todos los valores de ganancia. En este caso, es necesario volver a construir los lugares geométricos de las raíces para cumplir las especificaciones de desempeño. Cuando se diseña un sistema de control, si se requiere de un ajuste diferente al de la ganancia, debemos modificar los lugares geométricos de las raíces originales insertando un compensador conveniente. Una vez comprendidos los efectos de la adición de los polos y/o ceros sobre el lugar geométrico de las raíces, podemos determinar con facilidad las ubicaciones de los polos y los ceros del compensador que volverán a dar una forma conveniente al lugar geométrico de las raíces. En esencia, en el diseño realizado mediante el método del lugar geométrico de las raíces, los lugares geométricos de las raíces del sistema se vuelven a construir mediante el uso de un compensador, a fin de poder colocar un par de polos dominantes en lazo cerrado en la posición deseada. (A menudo se especifican el factor de amortiguamiento y la frecuencia no amortiguada natural de un par de polos dominantes en lazo cerrado.)

1.3 Efectos de adición de polos

La adición de un polo a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de halar el lugar geométrico de las raíces a la derecha, lo cual tiende a disminuir la estabilidad relativa del sistema y volver más lento el tiempo de respuesta. En la Fig. 2 se observa el efecto en el LGR al adicionar polos.

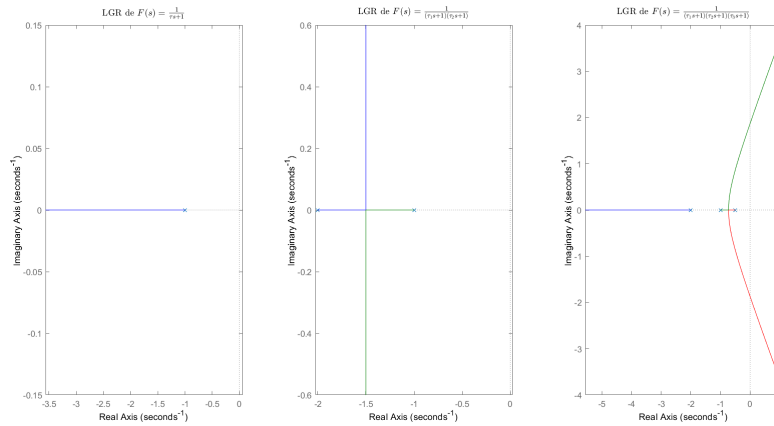


Fig. 2: Efecto de adicionar polos en el LGR

1.4 Efectos de adición de ceros

La adición de un cero a la función de transferencia en lazo abierto tiene el efecto de halar el lugar geométrico de las raíces hacia la izquierda, con lo cual el sistema tiende a ser más estable, y se acelera el asentamiento de la respuesta. (Físicamente, la adición de un cero a la función de transferencia de la trayectoria directa significa agregar al sistema un control derivativo. El efecto de tal control es introducir un grado de previsión al sistema y acelerar la respuesta transitoria. En la Fig. 3 se observa el efecto en el LGR al adicionar ceros.

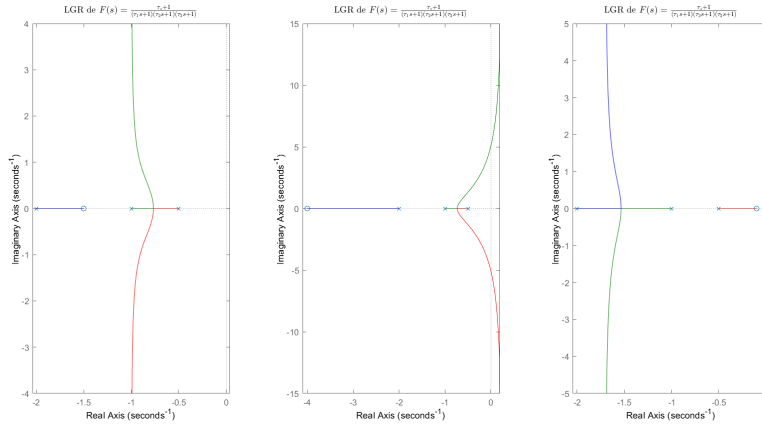


Fig. 3: Efecto de adicionar ceros en el LGR

2 Compensación de adelanto

Existen muchas formas de obtener compensadores de adelanto en tiempo continuo (o analógicos), tales como redes electrónicas que usan amplificadores operacionales, redes RC eléctricas y sistemas de amortiguadores mecánicos. En la práctica, suelen usarse compensadores que involucran amplificadores operacionales. La Fig. 4 es un circuito electrónico que puede funcionar como una red adelanto o de atraso dependiendo de los valores de los parámetros.

La respectiva función de transferencia del sistema es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K \frac{s + z}{s + p} \quad (1)$$

Donde:

$$K = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \quad (2)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C_1}, \quad p = \frac{1}{R_2 C_2}$$

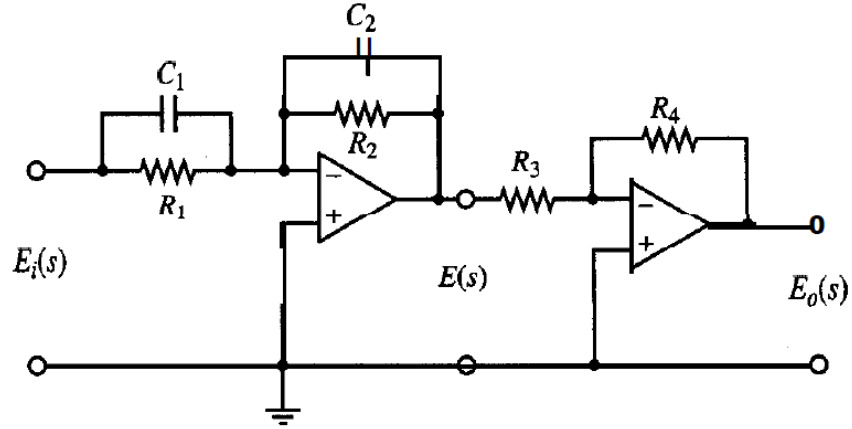


Fig. 4: Circuito electrónico para una red de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ y una red de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$

La red es de adelanto si $R_1C_1 > R_2C_2$ y de atraso si $R_1C_1 < R_2C_2$. Las configuraciones de los polos de este sistema se muestran en la Fig. 5.

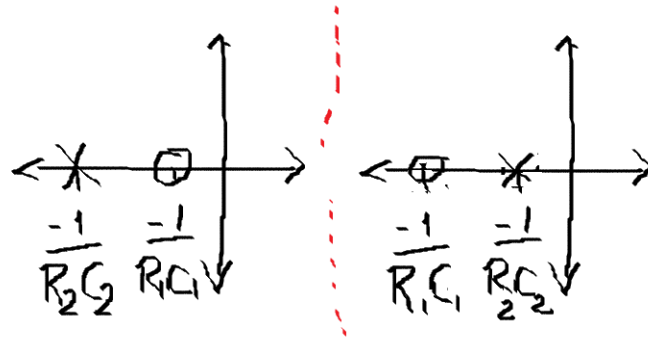


Fig. 5: Mapa de polos y ceros del compensador. Lado izquierdo: red de adelanto. Lado derecho: Red de atraso

Procedimiento para diseñar un compensador de adelanto, considerar $H(s) = 1$

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Graficar el LGR y comprobar si con solo ajustar la ganancia, se pasa por los raíces deseadas. Si esto no es así obtener el ángulo faltante, usando el criterio del ángulo. Este ángulo será compensado con la red de adelanto,

y esto modificará el LGR para que las raíces deseadas pasen por el nuevo LGR.

3. Suponer o ubicar el polo y el cero del compensador $G_c(s)$ de modo que contribuya con el ángulo faltante. Esto siempre y cuando no se especifiquen la constantes de error estático.
4. Determinar la ganancia en lazo abierto del sistema compensado a partir de la condición de magnitud

Una vez diseñado el compensador/controlador, verificar que se cumplan todas las especificaciones de diseño. Si se requiere de una constante de error estático grande, enlace en cascada una red de atraso o convierta el compensador de adelanto en un compensador de atraso-adelanto.

Si los polos dominantes en lazo cerrado seleccionados no son realmente dominantes, será necesario modificar la ubicación del par de polos dominantes en lazo cerrado. (Los polos en lazo cerrado diferentes de los dominantes modifican la respuesta obtenida de los polos dominantes en lazo cerrado. El grado de modificación depende de la ubicación de los polos en lazo cerrado restantes.) Asimismo, los ceros en lazo cerrado afectan la respuesta si se localizan cerca del origen

Ejemplo:

Considerar el siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s(s+2)} \quad (3)$$

En lazo abierto el sistema es inestable. Si se realimenta el sistema, Fig. 6

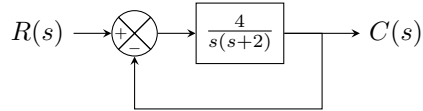


Fig. 6

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s(s+2) + 4} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \quad (4)$$

Los polos de este sistema en lazo cerrado son:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}j \quad (5)$$

Esto da un sistema de segundo orden con $\zeta = 0.5$ y una $\omega_n = 2$. Lo que quiere decir que el $SO(\%) = 16.3\%$ y que el sistema presenta un tiempo de estabilización de $T_s = 4seg$. Se desea aumentar la frecuencia natural no amortiguada a $\omega_n = 4$ sin afectar el factor de amortiguamiento ζ . Esto permitiría

que el sistema se estabilice más rápido, $T_s = 2\text{seg}$, manteniendo el mismo sobreimpulso. De este modo los polos deseados del sistema en lazo cerrado son:

$$s^2 + 4s + 16 = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j \quad (6)$$

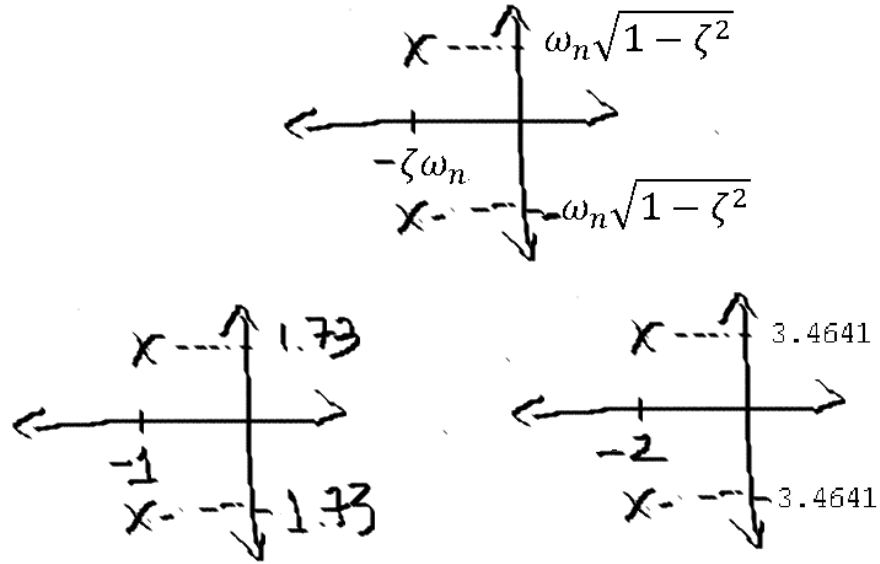


Fig. 7: Mapa de polos y ceros, izquierda:actual, derecha: deseados

Graficar el LGR para el sistema descrito y verificar si con tan solo ajustar la ganancia se pasan por los polos deseados, Fig 8

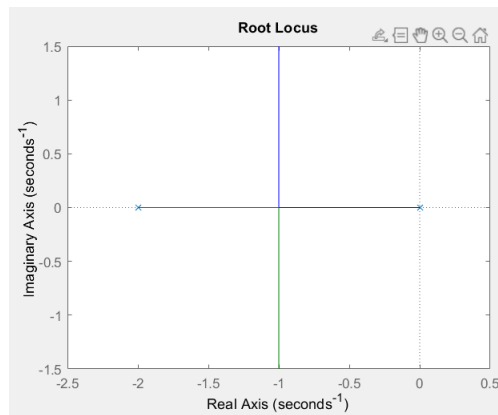


Fig. 8: LGR

Se observa que los polos deseados no pasan por el LGR. De este modo se requiere modificar el LGR. Se usará una red de adelanto en este caso. De este modo el diseño del controlador $G_c(s)$ se debe realizar de tal forma que cumpla con las especificaciones deseadas, Fig 9.

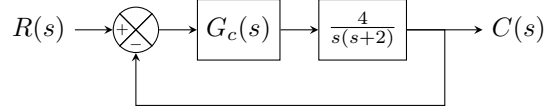


Fig. 9: Sistema de control

Para esto, primero hay que obtener el ángulo faltante.

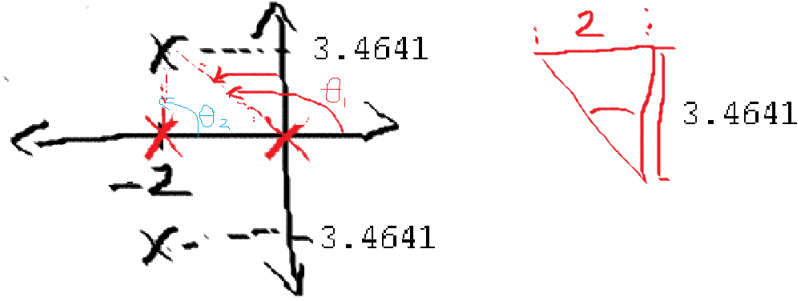


Fig. 10: Ángulo faltante

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 90^\circ + \text{atan} \frac{2}{2\sqrt{3}} \\ \theta_2 &= 90^\circ \\ \theta_1 + \theta_2 &= 210^\circ\end{aligned}\tag{7}$$

Estos ángulos provienen de polos por lo tanto el resultado real es $\theta_1 + \theta_2 = -210^\circ$.

Para cumplir la condición del ángulo se requiere sumar 30° . Estos 30° deben ser la contribución de la red de adelanto. Para esto se plantea la siguiente ubicación de polo y cero de la red de adelanto $G_c(s)$, con respecto al polo deseado, Fig. 11

Recordar que los ángulos de los ceros suman(porque está en el numerador) y el del polo resta(porque está en el denominador). Entonces se tiene que la contribución del compensador debe aportar 30° :

$$\phi_1 - \theta_3 = 30^\circ \longrightarrow \phi_1 = 70^\circ \text{ y } \theta_3 = 40^\circ\tag{8}$$

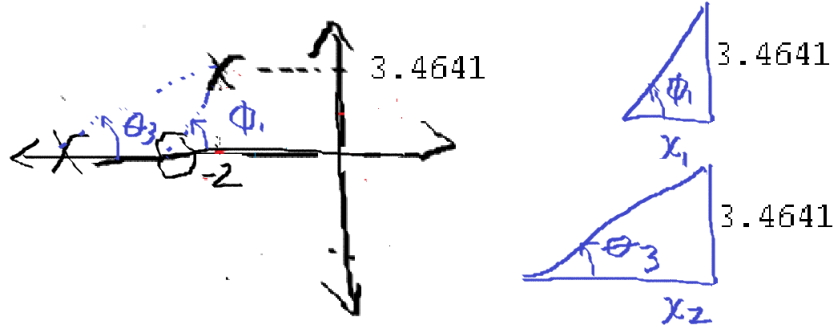


Fig. 11: Polo y cero de la red de adelanto

De los triángulos planteados en la Fig. 11 se puede obtener la distancia a la que deben de estar el cero y el polo del compensador de la parte real de los polos deseados.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{\tan 70^\circ} = 1.26 \\ x_2 &= \frac{2\sqrt{3}}{\tan 40^\circ} = 4.13 \end{aligned} \quad (9)$$

Por lo tanto la ubicación del polo del compensador es $s_3 = -6.13$ y del cero del compensador es $s_1 = -3.26$ para cumplir con la condición del ángulo, y generar que los polos deseados pasen por el nuevo LGR. Al agregar este compensador, en la Fig. 14 se observa el nuevo LGR.

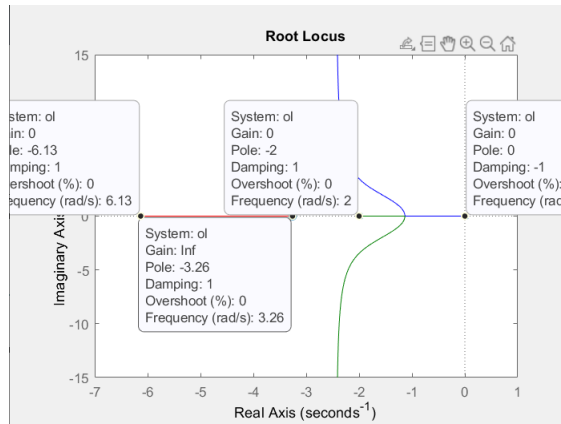


Fig. 12: Nuevo LGR con el compensador

Ahora hay que encontrar la ganancia K del compensador que permite obtener los polos deseados. Esto es a partir de la condición de magnitud.

$$\begin{aligned}
|G_c(s)G(s)|_{s=-2+2\sqrt{3}j} &= \left| K \frac{4(s+3.26)}{s(s+6.13)(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \\
4K \times 0.0494 &= 1 \\
\mathbf{K} &= \mathbf{5.061}
\end{aligned} \tag{10}$$

Con esto se finaliza el diseño del compensador:

$$\begin{aligned}
G_c(s) &= K \frac{s+z}{s+p} \\
\mathbf{G_c(s)} &= \mathbf{5.061} \frac{s + \mathbf{3.26}}{s + \mathbf{6.13}}
\end{aligned} \tag{11}$$

Si se desea montar un circuito electrónico como el de la Fig. 4 para realizar la acción de este compensador. Se requieren encontrar los valores los parámetros del sistema. Se sabe que:

$$\begin{aligned}
K &= \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \rightarrow 5.061 = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \\
z &= \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow 3.26 = \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow R_1 C_1 = \frac{1}{3.26} \\
p &= \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow 6.13 = \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow R_2 C_2 = \frac{1}{6.13}
\end{aligned} \tag{12}$$

Se pueden seleccionar capacitores de valores comerciales y encontrar los valores de las resistencias. Por ejemplo si $\mathbf{C_1 = C_2 = 10\mu F}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{3.26 \times C_1} \rightarrow \mathbf{R_1 = 30.67k\Omega} \\
R_2 &= \frac{1}{6.13 \times C_2} \rightarrow \mathbf{R_2 = 16.31k\Omega} \\
\frac{R_4}{R_3} &= 5.061 \rightarrow \text{if } \mathbf{R_3 = 10k\Omega} \\
\mathbf{R_4} &= \mathbf{50.61k\Omega}
\end{aligned} \tag{13}$$

Este sistema sería el controlador que se encargaría de llevar el proceso a los polos deseados (especificaciones requeridas)

Si se analiza la constante de error de velocidad K_v se tiene que:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 5.061 s \frac{4(s+3.26)}{s(s+6.13)(s+2)} \\
\mathbf{K_v} &= \mathbf{5.383}
\end{aligned} \tag{14}$$

Es conveniente que esta constante sea grande, entre más elevado sea su valor mejor.

Por ultimo observar los polos del sistema retroalimentado con este compensador y verificar que cumple con las especificaciones dadas.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20.26s + 66.06}{s^3 + 8.13s^2 + 32.52s + 66.06} \quad (15)$$

Los polos de este sistema son:

$$s^3 + 8.13s^2 + 32.52s + 66.06 = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = -2 + 2\sqrt{3}j \\ s_2 = -2 - 2\sqrt{3}j \\ s_3 = -4.13 \end{cases} \quad (16)$$

El sistema tiene un cero en $s_1 = -3.26$. Como el tercer polo está lejos del cero agregado, este polo tendrá algo de influencia en la respuesta del sistema. Debido a que no se impuso ninguna restricción sobre el polo no dominante y no se definió una especificación relacionada con el valor del coeficiente de error de velocidad, se puede decir que el diseño es satisfactorio. A continuación se muestra la respuesta del sistema sin compensador y con compensador, así como el mapa de polos y ceros.

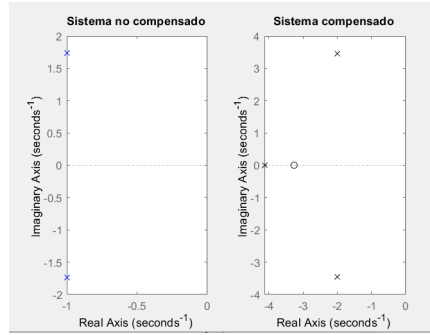


Fig. 13: Mapa de polos y ceros del sistema compensado vs no compensado

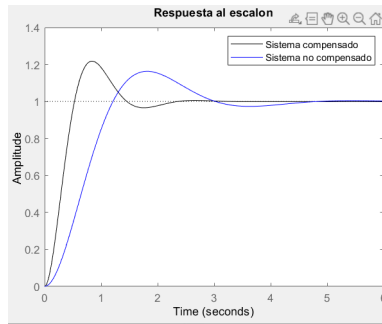


Fig. 14: Respuesta temporal del sistema compensado vs no compensado

Se observa que la respuesta del sistema compensado es más rápida que el sistema sin controlador, que era lo que se deseaba.

Ejemplo con otra red de adelanto

Considerar la siguiente red de adelanto para el diseño del controlador $G_c(s)$ teniendo en cuenta el mismo sistema anterior y las mismas características deseadas.

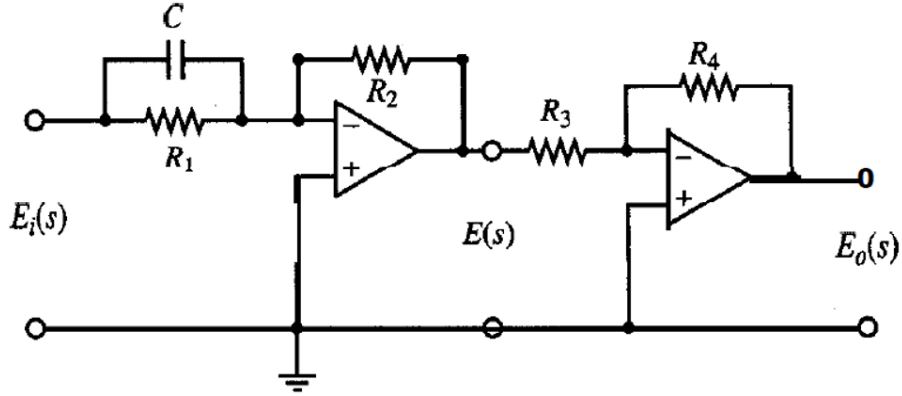


Fig. 15: Circuito electrónico para una red de adelanto

La respectiva función de transferencia de esta red es la siguiente:

$$G_c(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K(s + z) \quad (17)$$

Donde:

$$K = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \quad (18)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C}$$

Se agrega el cero de tal forma que compense los 30° que se requieren para completar la condición del ángulo, Fig. 16.

$$\phi = 30^\circ \rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{\tan 30^\circ} = 6 \quad (19)$$

Por lo tanto el cero será ubicado en $s_1 = -8$. El nuevo LGR se muestra en la Fig. 17.

Para encontrar la ganancia K , determinarla con la condición de magnitud.

$$|G_c(s)G(s)|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = \left| K \frac{4(s+8)}{s(s+2)} \right|_{s=-2+2\sqrt{3}j} = 1 \quad (20)$$

K = 0.5

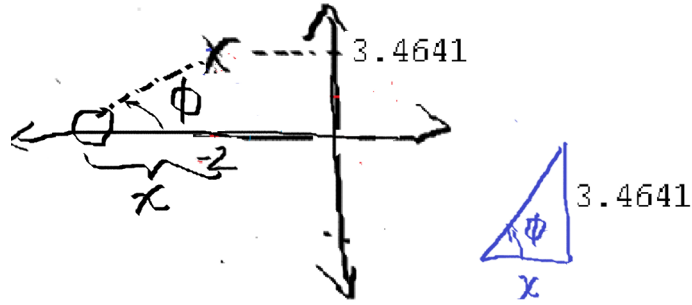


Fig. 16: Cálculo del ángulo faltante

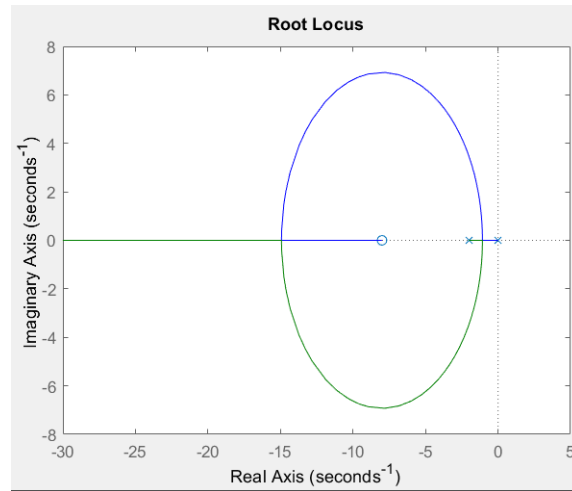


Fig. 17: Nuevo LGR

Con el controlador establecido se pueden encontrar los valores de los parámetros de la red de adelanto para ser implementado por el segundo circuito formado por amplificadores operacionales.

$$K = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \rightarrow 0.5 = \frac{R_2 R_4 C}{R_3} \quad (21)$$

$$z = \frac{1}{R_1 C} \rightarrow 8 = \frac{1}{R_1 C}$$

Se pueden seleccionar el capacitor con un valor comercial y encontrar los valores de las resistencias. Por ejemplo si $C = 10\mu\text{F}$. Entonces:

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{8 \times C} \rightarrow \mathbf{R_1 = 12.5k\Omega} \\
\mathbf{R_3 = R_4 = 10k\Omega} \\
R_2 &= \frac{0.5}{C} \rightarrow \mathbf{R_2 = 50k\Omega}
\end{aligned} \tag{22}$$

Este sistema sería el controlador que se encargaría de llevar el proceso a los polos deseados (especificaciones requeridas)

Si se analiza la constante de error de velocidad K_v se tiene que:

$$\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 0.5s \frac{4(s+8)}{s(s+2)} \\
\mathbf{K_v} &= \mathbf{8}
\end{aligned} \tag{23}$$

Por ultimo observar los polos del sistema retroalimentado con este compensador y verificar que cumple con las especificaciones dadas.

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 16}{s^2 + 4s + 16} \tag{24}$$

Los polos de este sistema son los deseados. El comportamiento del sistema compensado vs el no compensado se observa en la siguiente figura.

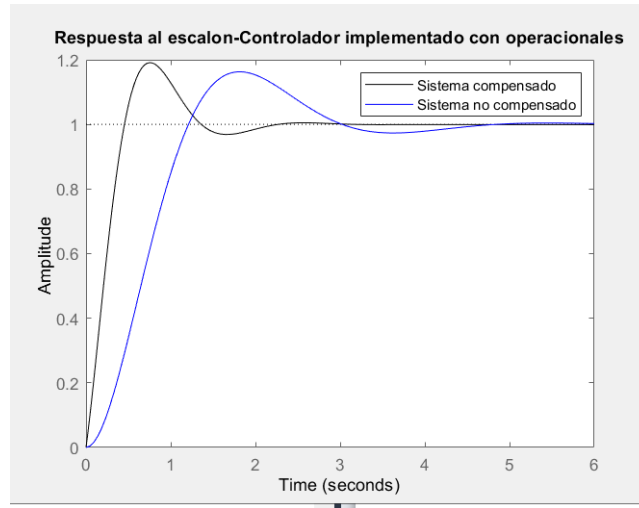


Fig. 18: Respuesta temporal del sistema compensado vs no compensado

3 Compensación de atraso

Ahora consideremos el problema de encontrar un compensador para un sistema que tiene características satisfactorias en la respuesta transitoria pero que se

desea mejorar el comportamiento en estado estacionario.

En este caso el compensador busca incrementar la ganancia en lazo cerrado sin modificar de una forma muy notoria las características de la respuesta transitoria. Esto permite aumentar las constantes de e_{ss} y a su vez disminuir el e_{ss} . En este caso el LGR no debe cambiar de forma significativa.

La implementación del controlador se puede obtener con el mismo sistema mostrado en la Fig. 4 haciéndolo funcionar como una red de atraso. Es decir que la función de transferencia del controlador $G_c(s)$ es :

$$G_c(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad (25)$$

La contribución del ángulo de la red en este caso debe ser pequeño ($< \pm 5^\circ$) para que no se modifique mucho el LGR. Para lograr esto es recomendable que el polo y el cero del controlador esten cerca al origen y que entre ellos tambien esten cerca.

Procedimiento para diseñar un compensador de atraso

1. Dibujar el LGR. Ubicar los polos dominantes que se desean en el LGR.
2. Suponer el controlador:

$$G_c(s) = K \frac{s+z}{s+p} \quad (26)$$

3. Calcular la constante de e_{ss} actual del sistema. Por ejemplo si se requiere modificar K_v encontrar el K_v actual

$$K_{v_a} = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \quad (27)$$

Esta constante de e_{ss} es la constante sin compensador

4. Determinar el incremento necesario de la constante de e_{ss} para satisfacer el requerimiento en estado estacionario, Es decir encontrar por ejemplo K_v teniendo en cuenta el controlador pero sin considerar la ganancia K .

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s+z}{s+p} G(s) = \frac{z}{p} \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \frac{z}{p} K_{v_a} \quad (28)$$

$$\frac{K_v}{K_{v_a}} = \frac{z}{p}$$

5. Determinar el polo y el cero de $G_c(s)$ que no altere mucho el LGR y que permita el incremento de la constante de e_{ss} (K_v). Observe que la razón entre el valor de la ganancia requerido en las especificaciones y la ganancia que se encuentra en el sistema no compensado es la razón entre la distancia del cero al origen y la del polo al origen.

6. Dibuje el nuevo LGR. Ubique los polos dominantes en lazo cerrado deseados sobre el nuevo LGR. (Si la contribución de ángulo de la red de atraso es muy pequeña, es decir, de pocos grados, los lugares geométricos de las raíces originales y los nuevos serán casi idénticos. Sin embargo, habrá una ligera discrepancia entre ellos. A continuación ubique, sobre el nuevo lugar geométrico de las raíces, los polos dominantes en lazo cerrado deseados a partir de las especificaciones de la respuesta transitoria).
7. Ajustar la ganancia K del controlador a partir de la condición de magnitud para establecer así la ubicación de los polos deseados.

Verificar el cumplimiento de las especificaciones.

Ejemplo:

Considerar el siguiente sistema:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \quad (29)$$

En lazo abierto el sistema es inestable. Si se realimenta el sistema, Fig. 19

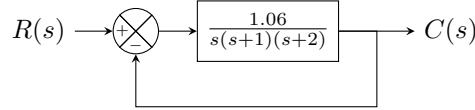


Fig. 19

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.06}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1.06} \quad (30)$$

Los polos de este sistema en lazo cerrado son:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -0.33 \pm 0.586j \\ s_3 &= -2.34 \end{aligned} \quad (31)$$

El comportamiento es dominado por $s_{1,2}$ con $\zeta = 0.491$ y una $\omega_n = 0.673$. Lo que quiere decir que el $SO(\%) = 17.05\%$ y que el sistema presenta un tiempo de estabilización de $T_s = 12.12 \text{ seg}$. Estos polos pasan por el LGR con una ganancia unitaria.

En este caso se considera que la respuesta transitoria con estos polos es satisfactoria. Se desea mejorar la respuesta en el régimen estacionario. Se quiere que la constante de error de velocidad K_v se incremente cerca de $5/\text{seg}$. Sin modificar notablemente la respuesta transitoria. Para cumplir esto se usará la red de atraso anteriormente planteada.

La constante K_v actual es:

$$K_{v_a} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} = 0.53 \quad (32)$$

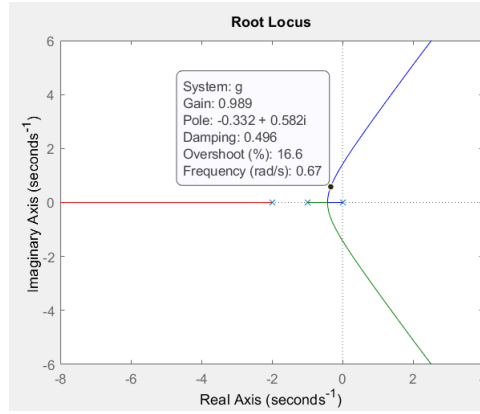


Fig. 20: LGR sin compensador

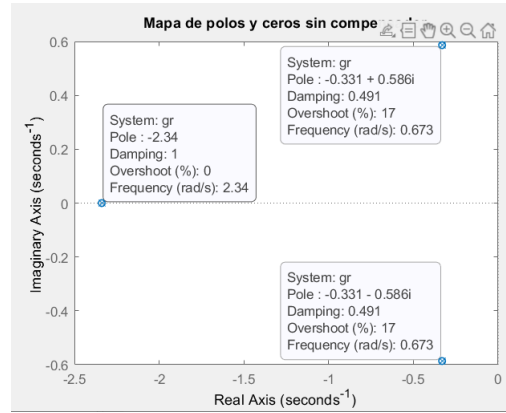


Fig. 21: Mapa de polos y ceros sin compensador

Se desea que $K_v \simeq 5$. Con esto se disminuye el $e_s s$ cuando la entrada sea una rampa. Por lo tanto

$$\frac{K_v}{K_{v_a}} = \frac{5}{0.53} = \frac{z}{p} = 9.43 \rightarrow 10 \quad (33)$$

Es decir, que el objetivo es aumentar la constante de error de velocidad actual 10 veces. Recordar que para esta red, el polo está mas cerca al origen que el cero.

Se selecciona el polo cerca al origen, $s_4 = -0.005$, por lo tanto el cero es $s_1 = -0.05$. Comprobar que el ángulo de contribución de la red es pequeño, para no modificar mucho el LGR.

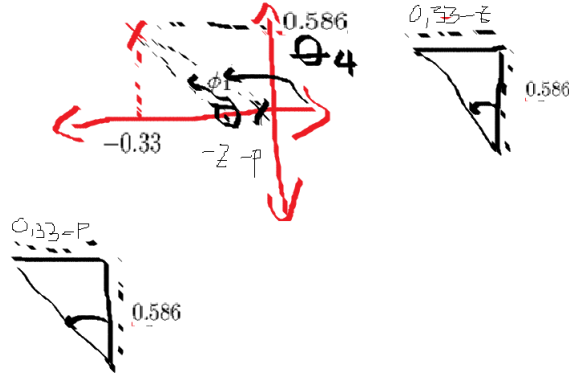


Fig. 22: Angulo del compensador en el polo deseado

$$\begin{aligned}
 \theta_4 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{0.33 - 0.005}{0.586} \\
 \phi_1 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{0.33 - 0.05}{0.586} \\
 \phi_1 - \theta_4 &= -3.474^\circ
 \end{aligned} \tag{34}$$

Hasta el momento el controlador es:

$$G_c(s) = \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \tag{35}$$

Graficar el nuevo LGR , Fig. 24. Se observa que hay un leve cambio en el nuevo LGR. Se determinan los nuevos polos dominantes en lazo cerrado, y se encuentra la ganancia K con la condición de magnitud.

Nuevos Polos dominantes:

$$s_{1,2} = -0.308 \pm 0.566j \tag{36}$$

Estos polos dan un comportamiento similar al original. Ahora encontrar la ganancia K

$$\begin{aligned}
 |G_c(s)G(s)|_{s=-0.308 \pm 0.566j} &= \left| K \frac{1.06(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)} \right|_{s=-0.308 \pm 0.566j} = 1 \\
 \mathbf{K} &= \mathbf{1.0007}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Así el controlador completo es:

$$G_c(s) = 1.0007 \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \tag{38}$$

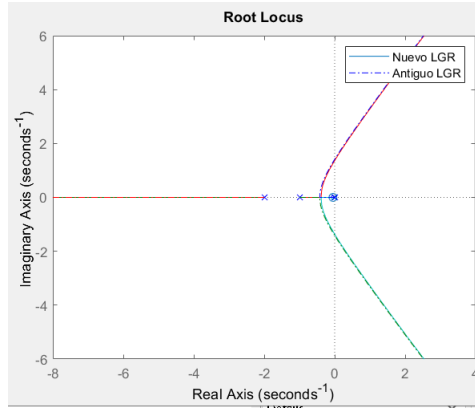


Fig. 23: Comparación entre LGR

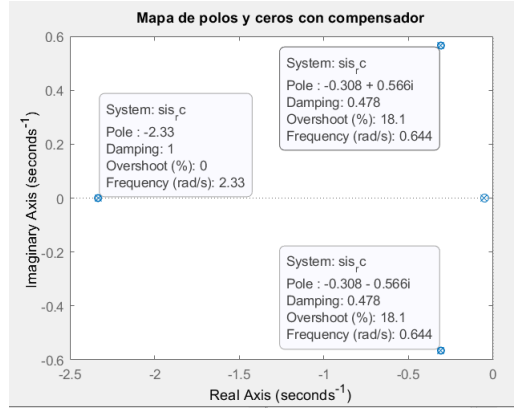


Fig. 24: Nuevo mapa de polos y ceros

Se verifica la especificación que se había establecido para la constante de error de velocidad:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 1.0007 \frac{1.06(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s + 1)(s + 2)} = \mathbf{5.3} \quad (39)$$

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema compensado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1.061s + 0.05304}{s^4 + 3.005s^3 + 2.015s^2 + 1.071s + 0.05304} \quad (40)$$

La respuesta del sistema compensado vs el no compensado se muestra en la Fig. 25

Se observa que el sistema compensado tiene una cola larga de amplitud pequeña en la respuesta transitoria. Esto se debe por el par formado por el polo y el cero del controlador. Si no se pretende obtener un sobrepaso máximo

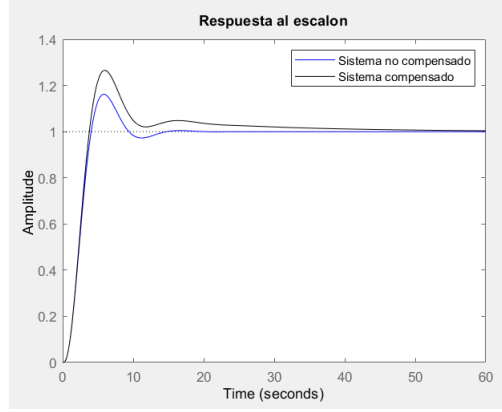


Fig. 25: Respuesta temporal

más grande y una respuesta más lenta, es necesario usar un compensador de atraso-adelanto.

En la Fig. 26 se observa el e_{ss} cuando se ingresa una rampa al sistema. Se observa que el sistema compensado tiene menor e_{ss} debido al incremento que se realizó en su constante de error de velocidad K_v

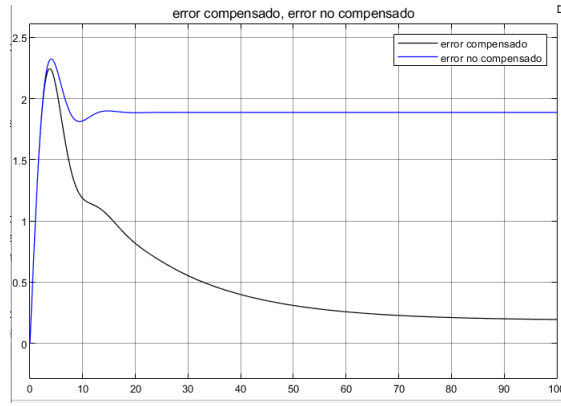


Fig. 26: Señal de error cuando la entrada es una rampa

Del mismo modo se puede obtener un sistema físico (circuito con amplificadores operacionales) cuya función de transferencia corresponda a $G_c(s)$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \rightarrow 1.0007 = \frac{R_4 C_1}{R_3 C_2} \\
 z &= \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow 0.05 = \frac{1}{R_1 C_1} \rightarrow R_1 C_1 = \frac{1}{0.05} \\
 p &= \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow 0.005 = \frac{1}{R_2 C_2} \rightarrow R_2 C_2 = \frac{1}{0.005}
 \end{aligned} \tag{41}$$

Se pueden seleccionar capacitores de valores comerciales y encontrar los valores de las resistencias. Por ejemplo si $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = 1000\mu\mathbf{F}$. Entonces:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{0.05 \times C_1} \longrightarrow \mathbf{R}_1 = 20\mathbf{k}\Omega \\ R_2 &= \frac{1}{0.005 \times C_2} \longrightarrow \mathbf{R}_2 = 200\mathbf{k}\Omega \\ \frac{R_4}{R_3} &= 1.0007 \longrightarrow \text{if } \mathbf{R}_3 = 10\mathbf{k}\Omega \\ &\quad \mathbf{R}_4 \simeq 10\mathbf{k}\Omega \end{aligned} \tag{42}$$

4 Compensador de atraso-adelanto

Este compensador se implementa cuando se requiere mejorar tanto la respuesta transitoria como la respuesta en estado estacionario.

Suponer el siguiente controlador:

$$G_c(s) = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} \tag{43}$$

Procedimiento para diseñar un compensador de atraso-adelanto

1. A partir de las especificaciones de desempeño, determine la ubicación deseada para los polos dominantes en lazo cerrado.
2. Determinar el ángulo faltante si los polos dominante no pasan por el LGR. Este ángulo lo aporta la parte de la red de adelanto, z_1, p_1 .
3. Suponer un z_2, p_2 pequeño para que la magnitud de atraso sea cercana a 1 en los polos dominantes. De esto modo determinar K con la condición de magnitud.
4. Si se especifica un e_{ss} como K_v determinar la relación z_2/p_2 para garantizar la condición del valor de K_v

Ejemplo

Considerar el sistema $G(s)$

$$G(s) = \frac{4}{s(s + 0.5)} \tag{44}$$

Se desea que el sistema tenga un sobreimpulso de 16.3% y un $T_s = 1.6\text{seg}$, frente a una entrada escalón. La salida en régimen estacionario tiende a 1. Además se desea que $K_v = 80\text{seg}^{-1}$

De este modo el factor de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema son:

$$\begin{aligned}\zeta &= 0.5 \\ \omega_n &= 5\end{aligned}\tag{45}$$

Los polos deseados y la ecuación característica deseada son:

$$\begin{aligned}s^2 + 5s + 25 &= 0 \\ s_{1,2} &= -2.5 \pm 4.33j\end{aligned}\tag{46}$$

Al cerrar el lazo sin controlador el sistema presenta los siguientes polos:

$$s_{1,2} = -0.25 \pm 1.9843j\tag{47}$$

El LGR actual del sistema sin controlador, Fig. 27, no permite obtener los polos deseados ajustando solamente una ganancia. Se requiere modificarlo.

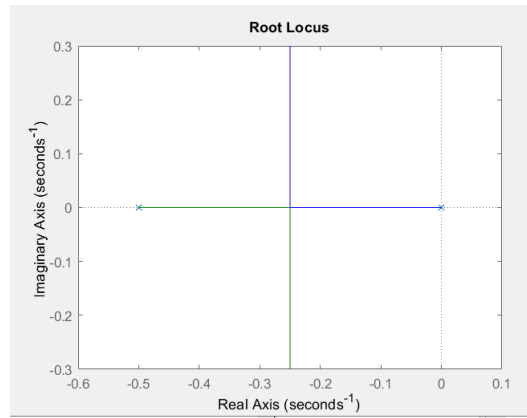


Fig. 27: LGR sin compensador

Se calcula el ángulo faltante para que cumpla la condición del ángulo.

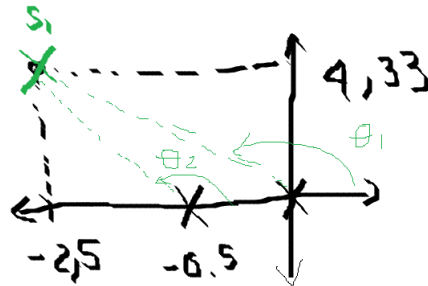


Fig. 28

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{2.5}{4.33} = 120^\circ \\
\theta_2 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{2.5 - 0.5}{4.33} = 114.79^\circ \\
\theta_1 + \theta_2 &= 234.79^\circ
\end{aligned} \tag{48}$$

Tener en cuenta que este ángulo resultante de los dos polos es negativo. Se requiere que el compensador aporte 54.79° . Se ubica de esta forma el cero z_1 y el polo p_1 de la red de adelanto para suplir este ángulo faltante, Fig. 29

Para fines prácticos y disminuir el orden de la función que quedaría en lazo cerrado con el controlador, se ubica el cero en -0.5 y cancela un polo de la planta.

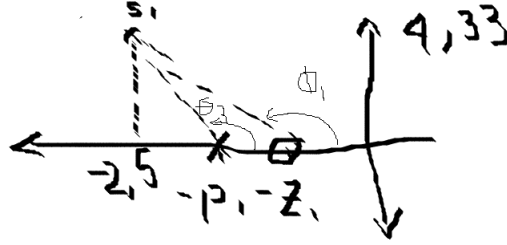


Fig. 29

$$\begin{aligned}
\theta_3 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{x}{4.33} = \\
\phi_1 &= 90^\circ + \tan^{-1} \frac{2.5 - 0.5}{4.33} = 114.79^\circ \\
\phi_1 - \theta_3 &= 54.79^\circ \\
\theta_3 &= 60^\circ
\end{aligned} \tag{49}$$

Como el ángulo de $\theta_3 = 60^\circ$ esto significa que el polo se ubica a la izquierda del polo dominante.

$$x = \frac{4.33}{\tan 60} = 2.5 \tag{50}$$

Por lo tanto $p_1 = 5$. La red de adelanto va quedando de esta forma:

$$K \frac{s + z_1}{s + p_1} = K \frac{s + 0.5}{s + 5} \tag{51}$$

Se determina K a partir de la condición de magnitud.

$$\left| K \frac{4(s+0.5)}{s(s+5)(s+0.5)} \right|_{s=-2.5+4.33j} = 1 \quad (52)$$

K = 6.2497

Para la red de atraso se obtiene z_2 y p_2 a partir de la condición de la constante K_v .

$$K_v = 80 = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} 6.2497 s \frac{4(s+0.5)(s+z_2)}{s(s+5)(s+0.5)(s+p_2)} \quad (53)$$

$$80 = 5 \frac{z_2}{p_2}$$

$$\frac{z_2}{p_2} = 16$$

Tener en cuenta que tanto z_2 como p_2 deben estar cerca al origen para que la contribución en magnitud sea despreciable en los polos dominantes, es decir 1. Además se espera que este par, no modifique mucho el LGR. Una posible selección son $z_2 = 0.2$ y $p_2 = 0.0125$. Verificar.

De este modo el compensador que permite llevar el sistema en lazo cerrado a los polos deseados es:

$$G_c(s) = 6.2497 \frac{(s+0.5)(s+0.2)}{(s+5)(s+0.0125)} \quad (54)$$

La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25s^2 + 17.5s + 2.5}{s^4 + 5.513s^3 + 27.57s^2 + 17.53s + 2.5} \quad (55)$$

La gráfica del error cuando se le ingresa una rampa se observa en la Fig. 30. Se observa que además de cumplir con la respuesta transitoria, e_{ss} es menor con el sistema compensado. Lo cual se deseaba al momento de incrementar la ganancia K_v

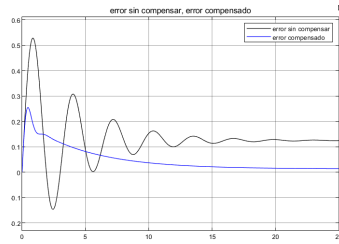


Fig. 30: Error cuando se ingresa una rampa de pendiente 1

La respuesta temporal, el nuevo LGR y el mapa de polos y ceros del sistema se muestran en las siguientes figuras.

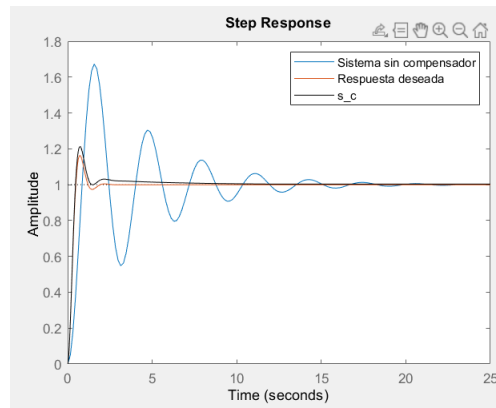


Fig. 31: Respuesta temporal

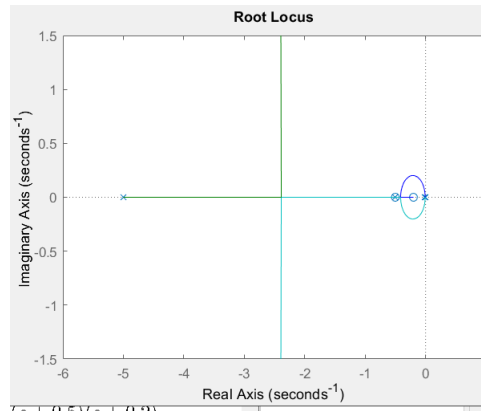


Fig. 32: Nuevo LGR

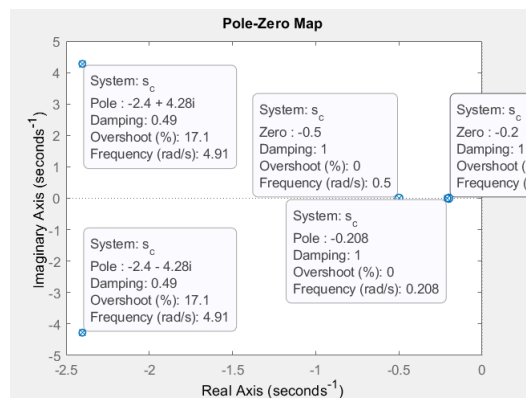


Fig. 33: Mapa de polos y ceros

Del mismo modo, la red de adelanto-atraso se puede diseñar a partir de amplificadores operacionales. En este caso el circuito usado es el que se muestra en la Fig. 34

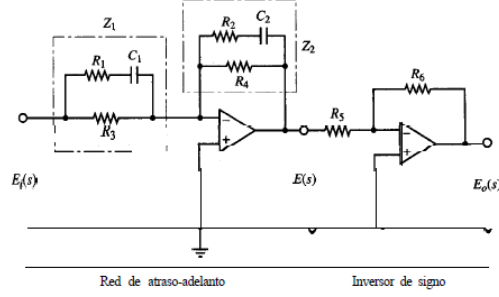


Fig. 34: Red de adelanto-atraso con amplificadores operacionales

La respectiva función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = K \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)} \quad (56)$$

Donde:

$$\begin{aligned} K &= \frac{R_2 R_4 R_6 (R_1 + R_3)}{R_1 R_3 R_5 (R_2 + R_4)} \\ z_1 &= \frac{1}{(R_1 + R_3) C_1} \\ z_2 &= \frac{1}{R_2 C_2} \\ p_1 &= \frac{1}{R_1 C_1} \\ p_2 &= \frac{1}{(R_2 + R_4) C_2} \end{aligned} \quad (57)$$