# Control 1: Análisis del error en estado estacionario

Carlos Mario Paredes

Agosto 13 2021

## 1 Error en estado estacionario

Suponer el sistema el lazo cerrado que se muestra en la Fig 1.

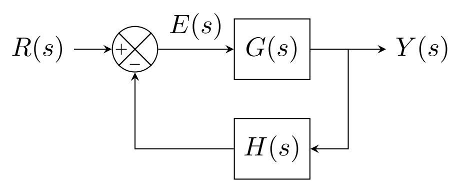


Fig. 1: Sistema en lazo cerrado

El sistema equivalente en lazo cerrado presenta la función de transferencia:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \tag{1}$$

La salida relacionada con la señal del error puede ser expresada como

$$Y(s) = G(s)E(s) \tag{2}$$

Reemplazando la Ecuación (2) en la Ecuación (1), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{G(s)E(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\ \frac{E(s)}{R(s)} &= \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \\ \mathbf{E}(\mathbf{s}) &= \frac{\mathbf{R}(\mathbf{s})}{\mathbf{1} + \mathbf{G}(\mathbf{s})\mathbf{H}(\mathbf{s})} \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando el teorema de valor final al resultado de la Ecuación (3), encontramos el error en estado estacionario $e_{ss}$

$$\mathbf{e_{ss}} = \lim_{\mathbf{s}\to\mathbf{0}} \mathbf{sE(s)} = \lim_{\mathbf{s}\to\mathbf{0}} \mathbf{s}\frac{\mathbf{R(s)}}{\mathbf{1+G(s)H(s)}} \tag{4}$$

Los sistemas se pueden clasificar según el tipo. Que es la capacidad de responder a entradas rampa, escalón, parábola. Para establecer la clasificación, se considera la función de transferencia de lazo abierto. La función de transferencia puede ser escrita como el cociente de dos polinomios como se muestra en la Ecuación (5)

$$G(s)H(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s+z_i)}{s^N\prod_{i=1}^{n}(s+p_i)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^N\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \tag{5}$$

Dependiendo de la cantidad de integradores que se tengan, $N$, se define el tipo de sistema. Así:

- $N = 0$, el sistema es de tipo 0
- $N = 1$, el sistema es de tipo 1
- $N = 2$, el sistema es de tipo 2 y así sucesivamente.

Ahora analizaremos como responde el $e_{ss}$ en cada tipo de sistema cuando le ingresemos un escalón,rampa y parábola.

## 1.1 Entrada escalón, $r(t) = Au(t)$

Si la entrada es $r(t) = Au(t)$ entonces $R(s) = A/s$ y el $e_{ss}$ es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s\frac{A}{s(1+G(s)H(s))} = \lim_{\mathbf{s}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{1+G(s)H(s)}} \tag{6}$$

Se define la constante de error de posición de está manera:

$$\mathbf{K_p} = \lim_{\mathbf{s}\to\mathbf{0}} \mathbf{G(s)H(s)} \tag{7}$$

Por lo tanto la Ecuación (8) corresponderá a:

$$\mathbf{e_{ss}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{1+K_p}} \tag{8}$$

### 1.1.1 Tipo 0

Si el sistema es tipo 0, $K_p$ será:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^0\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} = \lim_{s\to 0} K\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \tag{9}$$
$$\mathbf{K_p = K}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{1+K}} \tag{10}$$

### 1.1.2 Tipo $\geq 1$

Si el sistema es tipo $\geq 1 (N \geq 1)$, $K_p$ será:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^N \prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \qquad (11)$$
$$\mathbf{K_p = \infty}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss} = 0} \qquad (12)$$

## 1.2 Entrada rampa, $r(t) = Atu(t)$

Si la entrada es $r(t) = Atu(t)$ entonces $R(s) = A/s^2$ y el $e_{ss}$ es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s \frac{A}{s^2(1+G(s)H(s))}$$
$$\mathbf{e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{s+sG(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{A}{sG(s)H(s)}} \qquad (13)$$

Se define la constante de error de velocidad de está manera:

$$\mathbf{K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s)} \qquad (14)$$

Por lo tanto la Ecuación (13) corresponderá a:

$$\mathbf{e_{ss} = \frac{A}{K_v}} \qquad (15)$$

### 1.2.1 Tipo 0

Si el sistema es tipo 0, $K_v$ será:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0} Ks \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^0 \prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} = \lim_{s\to 0} Ks \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)}$$
$$\mathbf{K_v = 0} \qquad (16)$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss} = \frac{A}{K_v}} = \infty \qquad (17)$$

### 1.2.2 Tipo 1

Si el sistema es tipo 1, $K_v$ será:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0} Ks\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \tag{18}$$
$$\mathbf{K_v = K}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss} = \frac{A}{K}} \tag{19}$$

### 1.2.3 Tipo $\geq 2$

Si el sistema es tipo $\geq 2 (N \geq 2)$, $K_v$ será:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s\to 0} Ks\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^N\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \tag{20}$$
$$\mathbf{K_v} = \infty$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss} = 0} \tag{21}$$

## 1.3 Entrada parábola, $r(t) = A\frac{t^2}{2}u(t)$

Si la entrada es $r(t) = A\frac{t^2}{2}u(t)$ entonces $R(s) = A/s^3$ y el $e_{ss}$ es:

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0} s\frac{A}{s^3(1+G(s)H(s))}$$
$$\mathbf{e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2+s^2G(s)H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{A}{s^2G(s)H(s)}} \tag{22}$$

Se define la constante de error de aceleración de está manera:

$$\mathbf{K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)H(s)} \tag{23}$$

Por lo tanto la Ecuación (22) corresponderá a:

$$\mathbf{e_{ss} = \frac{A}{K_a}} \tag{24}$$

### 1.3.1 Tipo 0

Si el sistema es tipo 0, $K_a$ será:

$$\begin{aligned} K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K s^2 \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^0\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} = \\ \lim_{s\to 0} K s^2 \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} = \\ \mathbf{K_a = 0} \end{aligned} \tag{25}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{K_a}} = \infty \tag{26}$$

### 1.3.2 Tipo 1

Si el sistema es tipo 1, $K_a$ será:

$$\begin{aligned} K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K s^2 \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \\ \mathbf{K_a = 0} \end{aligned} \tag{27}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss}} = \infty \tag{28}$$

### 1.3.3 Tipo 2

Si el sistema es tipo 2, $K_a$ será:

$$\begin{aligned} K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K s^2 \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^2\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \\ \mathbf{K_a = K} \end{aligned} \tag{29}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss}} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{K}} \tag{30}$$

### 1.3.4 Tipo $\geq 3$

Si el sistema es tipo $\geq 3 (N \geq 3)$, $K_a$ será:

$$\begin{aligned} K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} K s^2 \frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_{z_i}s+1)}{s^N\prod_{i=1}^{n}(\tau_{p_i}s+1)} \\ \mathbf{K_a = \infty} \end{aligned} \tag{31}$$

Por lo tanto el $e_{ss}$ es:

$$\mathbf{e_{ss} = 0} \tag{32}$$

El resumen de todo este análisis se observa en la Tabla 1

| **Tipo** | $\mathbf{r(t) = Au(t)}$ | $\mathbf{r(t) = Atu(t)}$ | $\mathbf{r(t) = A\frac{t^2}{2}u(t)}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$ | $e_{ss} = \infty$ | $e_{ss} = \infty$ |
| 1 | $e_{ss} = 0$ | $e_{ss} = \frac{A}{K_v}$ | $e_{ss} = \infty$ |
| 2 | $e_{ss} = 0$ | $e_{ss} = 0$ | $e_{ss} = \frac{A}{K_a}$ |

Table 1: Resumen del error en estado estacionario

El error en estado estacionario vale la pena analizarlo en sistemas que son estables en lazo cerrado.

# 2 Ejemplos

Encontrar el $e_{ss}$ de los siguientes sistemas para las entradas respectivas.

## 2.1

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{5}{s+2} \\ H(s) &= 1 \end{aligned} \tag{33}$$

Tipo=?
Si $r(t) = u(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$\begin{aligned} K_p = \lim_{s\to 0} G(s)H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{s+2} &= \frac{5}{2} \\ e_{ss} = \frac{1}{1+5/2} &= \frac{2}{7} \end{aligned} \tag{34}$$

Esto se puede observar en la Fig. 2
Si $r(t) = tu(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$e_{ss} = \infty \tag{35}$$

Esto se puede observar en la Fig. 3
Si $r(t) = t^2/2u(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$e_{ss} = \infty \tag{36}$$

Esto se puede observar en la Fig. 4

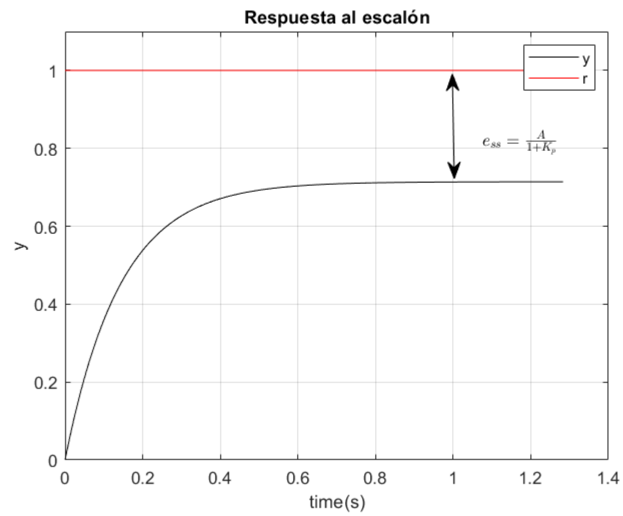


Fig. 2: Respuesta al escalón

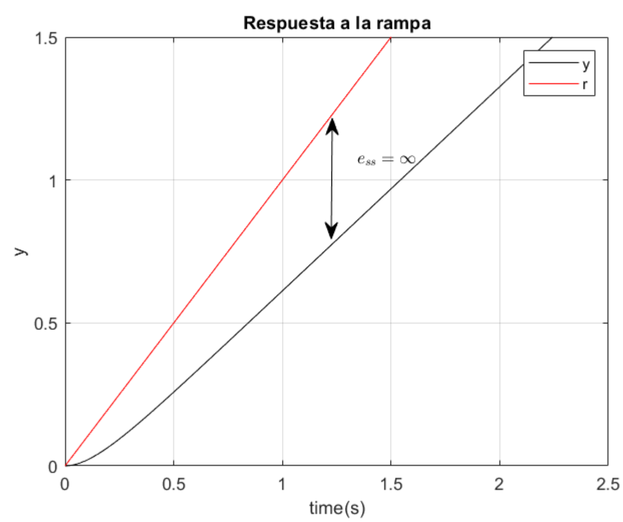


Fig. 3: Respuesta a la rampa

## 2.2

$$G(s) = \frac{5}{s^2 + 2s} \qquad (37)$$
$$H(s) = 1$$

Tipo=?
Si $r(t) = u(t)$, el $e_{ss}$ será:

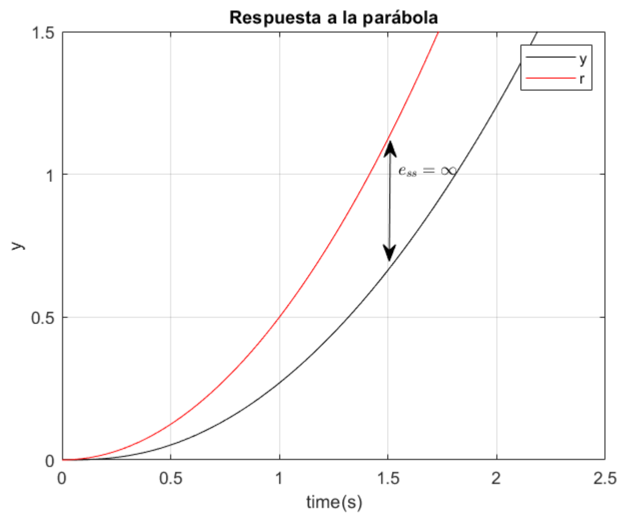


Fig. 4: Respuesta a la parábola

$$e_{ss} = 0 \tag{38}$$

Esto se puede observar en la Fig. 5

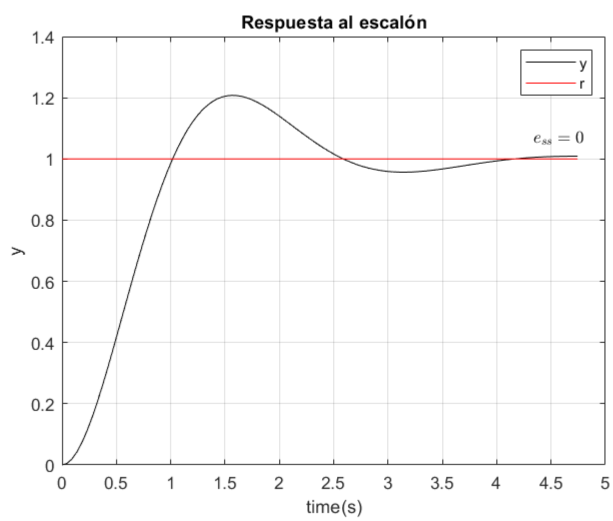


Fig. 5: Respuesta al escalón

Si $r(t) = 6tu(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$K_v = \lim_{s \to 0} sG(s)H(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{5}{s^2+2s} = \frac{5}{2}$$
$$e_{ss} = \frac{6}{5/2} = \frac{12}{5} \tag{39}$$

Esto se puede observar en la Fig. 6

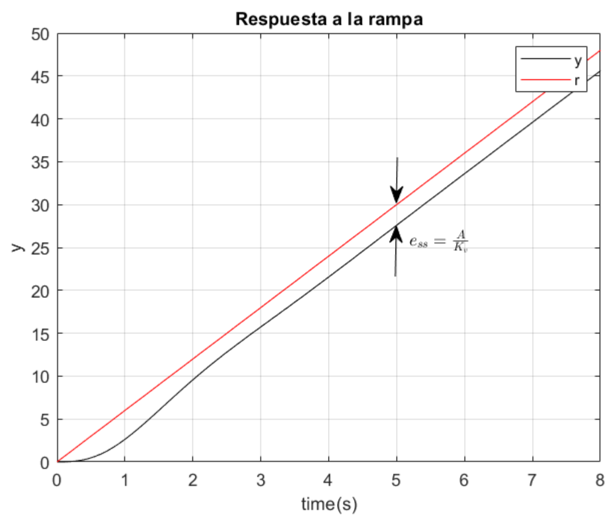


Fig. 6: Respuesta a la rampa

Si $r(t) = t^2/2u(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$e_{ss} = \infty \tag{40}$$

Esto se puede observar en la Fig. 7

## 2.3

$$G(s) = \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)}$$
$$H(s) = 1 \tag{41}$$

Tipo=?
Si $r(t) = u(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$e_{ss} = 0 \tag{42}$$

Esto se puede observar en la Fig. 8

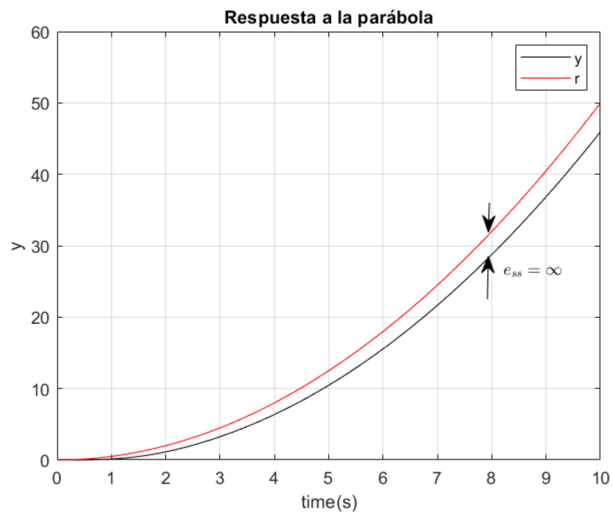


Fig. 7: Respuesta a la parábola

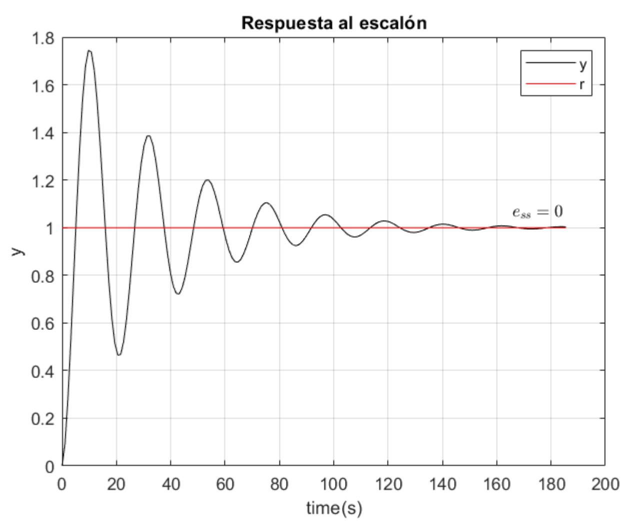


Fig. 8: Respuesta al escalón

Si $r(t) = 6tu(t)$, el $e_{ss}$ será:

$$e_{ss} = 0 \tag{43}$$

Esto se puede observar en la Fig. 9
Si $r(t) = t^2/2u(t)$, el $e_{ss}$ será:

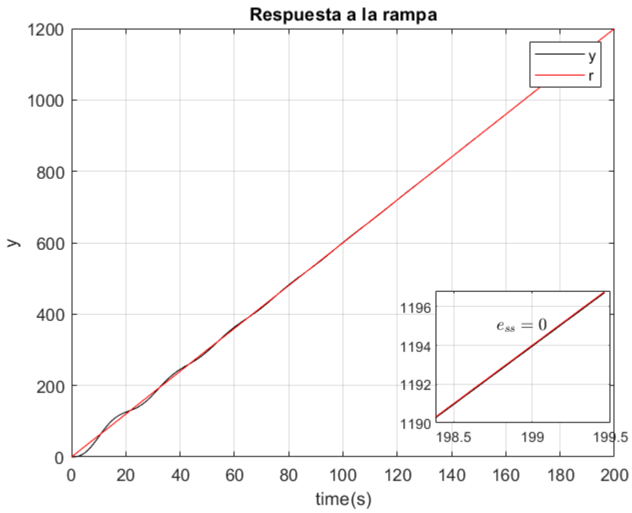


Fig. 9: Respuesta a la rampa

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)H(s) = \lim_{s \to 0} s^2 \frac{5(s+1)}{s^2(s+12)(s+5)} = \frac{1}{12} \tag{44}$$

$$e_{ss} = 12$$

Esto se puede observar en la Fig. 10

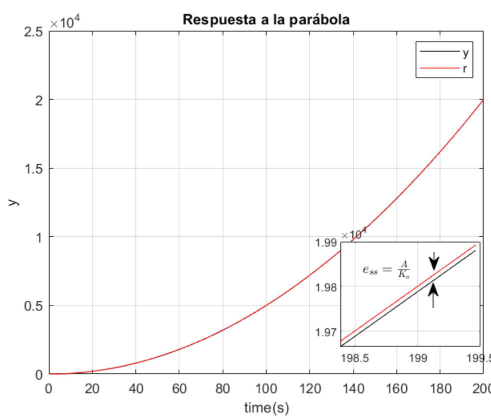


Fig. 10: Respuesta a la parábola