Control-Compensadores mediante la respuesta en frecuencia

Carlos Mario Paredes

Septiembre 2021

1 Introducción

Es importante destacar que en el diseño de un sistema de control, por lo general lo más importante es el desempeño de la respuesta transitoria. En el enfoque de la respuesta en frecuencia, especificamos el desempeño de la respuesta transitoria en una forma indirecta. Es decir, el desempeño de la respuesta transitoria se especifica en términos del margen de fase, el margen de ganancia y la magnitud del pico de resonancia, que ofrecen una estimación a grandes rasgos del amortiguamiento del sistema, la frecuencia de cruce de ganancia, la frecuencia de resonancia y el ancho de banda, que ofrecen una estimación a grandes rasgos de la velocidad de la respuesta transitoria y las constantes de error estático, que aportan la precisión en estado estable.

1.1 Compensación de adelanto

La función principal de este compensador como ya se ha mencionado, es mejorar la respuesta transitoria del sistema. En termino de la respuesta en frecuencia busca volver a dar forma a la curva de respuesta en frecuencia a fin de ofrecer un ángulo de adelanto de fase suficiente para compensar el atraso de fase excesivo asociado con los componentes del sistema fijo.

Se considera que el compensador tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p} \tag{1}$$

Donde:

$$\begin{aligned} K_c &= \frac{K}{a} \\ z &= \frac{1}{T} \\ p = \frac{1}{aT},\ 0 < a < 1 \end{aligned} \tag{2}$$

En este caso se observa que el polo se ubica a la izquierda de donde se ubique el cero. Por lo general, el valor mínimo de a se ubica cerca de 0.05 lo que permite obtener que el adelanto de fase máxima que produce el compensador es alrededor de 65°. El respectivo diagrama de bode del compensador de adelanto se muestra en la Fig. 1

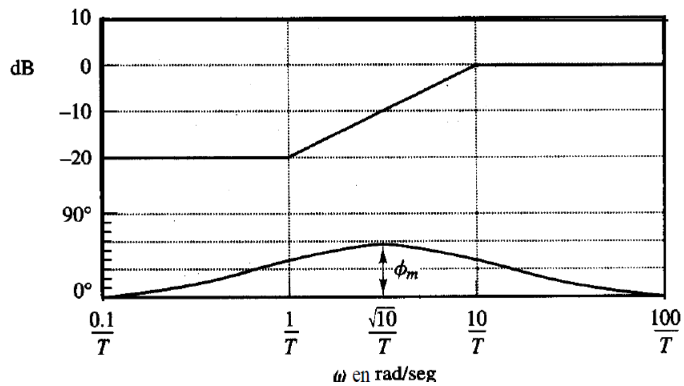

Fig. 1: Diagrama de bode de un compensador de adelanto, con $a = 0.1$ y $K_c = 1$

Si las especificaciones del desempeño se dan en términos del margen de fase (MF), del margen de ganancia (MG) y de las constante de error en estado estacionario. El procedimiento para el diseño del compensador es el siguiente:

1. Considerar el compensador $G_c(s)$ y determinar la ganancia K que satisface la constante de error.

2. Usando esta ganancia K dibujar el diagrama de bode de la función $KG(s)$ y calcular el margen de fase (MF).

3. Determinar el ángulo de adelanto de fase ϕ necesario que compensará $G_c(s)$

$$\phi_m = \phi_d - \phi_a + 5^\circ \tag{3}$$

4. Determina a a través de la siguiente relación:

$$\sin \phi_m = \frac{1-a}{1+a} \tag{4}$$

Después determinar la frecuencia ω para la cuál la magnitud de:

$$KG(j\omega) = -20 \log \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{5}$$

Está será la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_m

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \tag{6}$$

5. Determinar la ubicación del cero, el polo y K_c.

Ejemplo:
Considerar el siguiente sistema:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)} \tag{7}$$

Se desea que $K_v = 20$, el $MF \geq 50°$ y el $MG \geq 10dB$.
Se define el sistema compensado en lazo abierto $G_c(s)G(s)$ para verificar la constante de error de velocidad.

$$\begin{aligned} K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} K_c s\frac{4(s+z)}{s(s+p)(s+2)} \\ 20 = \frac{4K_c z}{2p} \\ 20 = \frac{2KaT}{Ta} \\ \mathbf{K = 10} \end{aligned} \tag{8}$$

Se dibuja el diagrama de Bode de $KG(s)$ y se calcula el MF actual. Esto se observa en la Fig. 2

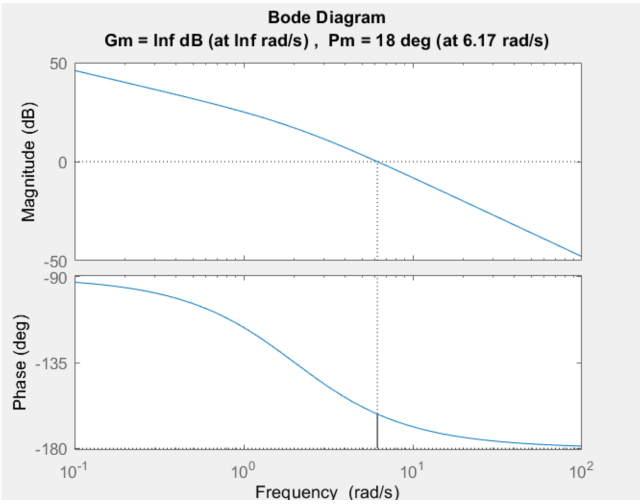

Fig. 2: Diagrama de Bode $KG(j\omega)$

El $MF = 18°$ por lo tanto se requiere que el compensador agregué el ángulo de adelanto de fase ϕ necesario:

$$\begin{aligned} \phi_m &= \phi_d - \phi_a + 5^\circ \\ \phi_m &= 50^\circ - 18^\circ + 5^\circ = 37^\circ \end{aligned} \tag{9}$$

Encontramos el término a, resolviendo la relación:

$$\begin{aligned} \sin\phi_m &= \frac{1-a}{1+a} \\ \sin 37 &= \frac{1-a}{1+a} \\ a &= 0.25 \end{aligned} \tag{10}$$

De esto modo proseguir con determinar la nueva frecuencia de cruce de ganancia.

$$\begin{aligned} |KG(j\omega)|_{dB} = -20\log\frac{1}{\sqrt{a}} - \Longrightarrow \left|\frac{40}{j\omega(j\omega+2)}\right|_{dB} &= -20\log\frac{1}{\sqrt{0.25}} \\ \frac{40}{\omega\sqrt{\omega^2+4}}_{dB} &= -6.02 \\ 20\log 40 - 20\log\omega\sqrt{\omega^2+4} &= -6.02 \\ 38.06 &= 20\log\omega\sqrt{\omega^2+4} \\ 1.9 &= \log\omega\sqrt{\omega^2+4} \\ 80 &= \omega\sqrt{\omega^2+4} \\ 80^2 &= \omega^2(\omega^2+4) \\ \omega_m &= 8.83 rad/seg \end{aligned} \tag{11}$$

Con está nueva frecuencia terminar la ubicación tanto del cero como del polo, así como el valor de K_c:

$$\begin{aligned} \omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \longrightarrow 8.83 = \frac{1}{\sqrt{0.25}T} &\longrightarrow T = 0.2265 \\ z = \frac{1}{T} &= 4.42 \\ p = \frac{1}{aT} &= 17.66 \\ K_c = \frac{K}{a} &= 40 \end{aligned} \tag{12}$$

El compensador diseñado es:

$$G_c(s) = K_c\frac{s+z}{s+p} = 40\frac{s+4.42}{s+17.66} \tag{13}$$

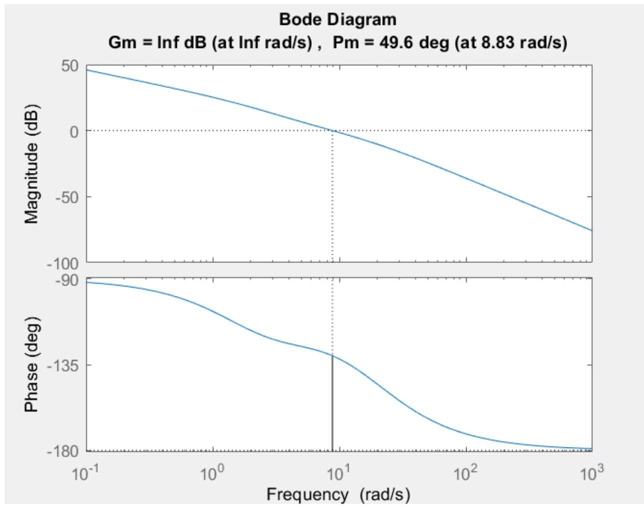

Fig. 3: Diagrama de Bode con compensador en lazo abierto

Se corrobora que cumpla con los requerimientos específicos, Fig. 3.
La función de transferencia en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{160s + 706.4}{s^3 + 19.66s^2 + 195.3s + 706.4} \tag{14}$$

La respuesta al escalón del sistema compensado vs el no compensado se observa en la Fig. 4.

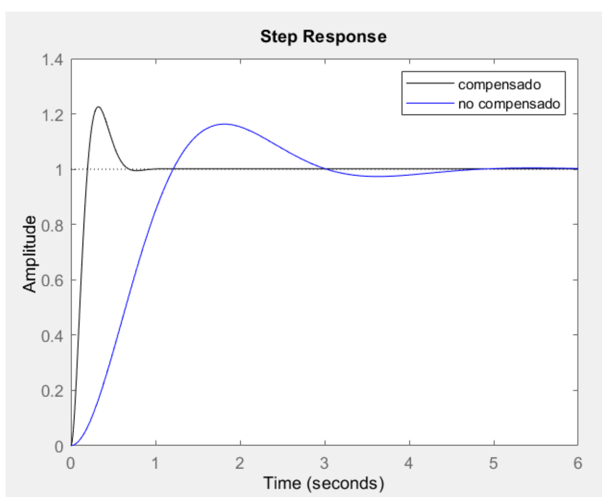

Fig. 4: Respuesta al escalón