Compensador de adelanto

A partir de:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Se desea un sistema de control que cumpla las siguientes especificaciones:

$$K_v = 20, MF \approx 50°, MG > 10dB$$

Suponer el siguiente controlador:

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$$

Donde:

$$K_c = \frac{K}{a}, z = \frac{1}{T}, p = \frac{1}{aT}$$

1)

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c 4\frac{s+z}{s(s+p)(s+2)} = 20$$

$$\frac{4K_c z}{2p} = 20$$

$$\frac{2K_c aT}{T} = 20$$

$$\frac{2Ka}{a} = 20$$

$$\boldsymbol{K = 10}$$

2) Margen de Fase del sistema $KG(s)$

$$MF_a = 18°$$

3)

$$\phi_m = 50 - 18 + 5 = 37°$$

4)

$$sin\phi_m = \frac{1-a}{1+a}$$

$$(sin\phi_m)(1+a) = 1-a$$

$$sin\phi_m + asin\phi_m = 1-a$$

$$a + asin\phi_m = 1 - sin\phi_m$$

$$a(1+sin\phi_m) = 1 - sin\phi_m$$

$$a = \frac{1 - sin\phi_m}{1 + sin\phi_m}$$

$$\boldsymbol{a = \frac{1 - sin37}{1 + sin37} = 0.2485}$$

Calcular:

$$-20\log\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right) = -6.04dB$$

$$\left|\frac{40}{j\omega(j\omega + 2)}\right|_{dB} = -6.04$$

$$\boldsymbol{\omega_m = 8.83\ rad/s}$$

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{a}T} \dashrightarrow \boldsymbol{T = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_m} = 0.2271}$$

5)

$$K_c = \frac{10}{0.2486}, z = \frac{1}{0.2271}, p = \frac{1}{0.2486 * 0.2271}$$

$$K_c = 40.2279, z = 4.4025, p = 17.7102$$

Por lo tanto, el compensador de adelanto es:

$$G_c(s) = 40.2279\frac{s + 4.4025}{s + 17.7102}$$

El sistema en lazo cerrado es:

$$\boldsymbol{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{160.9\, s\ +\ 708.4}{s^3\ +\ 19.71s^2\ +\ 196.3\, s\ +\ 708.4}}$$

Compensador de atraso

Se puede ver como un filtro pasa-bajas. La función principal es proporcionar una atenuación en el rango de frecuencias altas con el fin de aportar un margen de fase suficiente al sistema para cumplir los requerimientos.

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$$

Donde:

$$K_c = \frac{K}{\beta}, z = \frac{1}{T}, p = \frac{1}{\beta T}$$

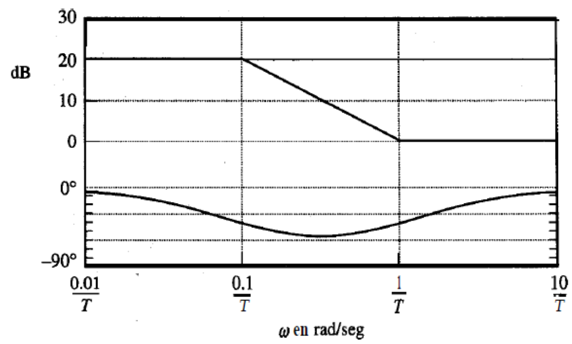

Fig. 1. Diagrama de Bode del compensador de atraso, con $\beta = 10$

1) Suponer que el compensador tiene la siguiente función de transferencia

$$G_c(s) = K_c \frac{s+z}{s+p}$$

Donde:

$$K_c = \frac{K}{\beta}, z = \frac{1}{T}, p = \frac{1}{\beta T}$$

Determinar K, para cumplir el requerimiento de la constante de error.

2) Si $KG(s)$ no cumple el MF y el MG, buscar la frecuencia ω donde el ángulo de fase sea $-180°$ más el MF requerido. Adicionar entre 5° y 12° para compensar el atraso de fase del compensador. Está nueva frecuencia será la frecuencia de cruce de ganancia ω_m.

3) Determinar el cero y el polo del compensador. Para evitar efectos negativos debido al atraso de fase producido por el compensador, el polo y el cero debe ubicarse mucho más abajo que ω_m.

$$la\ frecuencia\ de\ ubicación\ de\ z, debe\ estar\ entre$$
$$una\ octava\ o\ una\ decada\ antes\ de\ la\ nueva\ frecuencia\ de\ cruce\ de\ ganancia$$
$$z = \frac{1}{T} = 0.1\omega_m$$

4) Determinar la atenuación necesaria para disminuir la magnitud de $|KG(j\omega)|_{dB}$a 0_{dB}en la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Considere esta atenuación como:

$$-20Log\beta$$

A partir de esto se encuentra β y por lo tanto la ubicación del cero y el polo del compensador.

5) Calcular K_c

Ejemplo:

A partir de:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Se desea un sistema de control que cumpla las siguientes especificaciones:

$$K_v = 5, MF > 40°, MG > 0dB$$

1)

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} s\,K_c \frac{s+z}{s(s+p)(s+1)(0.5s+1)} = 5$$

$$\frac{K_c z}{p} = 5$$

$$\frac{K_c \beta T}{T} = 5$$

$$\frac{K}{\beta}\beta = 5$$

$$\boldsymbol{K = 5}$$

2) Observamos el MF y MG de KG(s), no cumple los requerimientos de las márgenes.

$$-180 + 40 + 12 = \boldsymbol{-128°}$$

$$\boldsymbol{\omega_m = 0.46 rad/s}$$

3)

$$\boldsymbol{z = 0.1\,\omega_m = 0.046 = \frac{1}{T} \longrightarrow T = \frac{1}{0.046} = 21.7391}$$

4)

$$-20Log\beta = -19.7$$

$$Log\beta = \frac{19.7}{20}$$

$$10^{Log\beta} = 10^{\frac{19.7}{20}}$$

$$\beta = 10^{\frac{19.7}{20}} = 9.6605$$

$$p = \frac{1}{\beta T} = 0.0048$$

5 $K_c = \frac{K}{\beta} = 0.5176$

Por lo tanto, el compensador es:

$$G_c(s) = 0.5176 \frac{s + 0.046}{s + 0.0048}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{0.5176\, s \;+\; 0.02381}{0.5\, s^4 \;+\; 1.502\, s^3 \;+\; 1.007\, s^2 \;+\; 0.5223\, s \;+\; 0.02381}$$

Compensador de atraso-adelanto

Considerar el siguiente compensador:

$$G_c(s) = K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

Donde:

$$z_1 = \frac{1}{T_1}, z_2 = \frac{1}{T_2}, p_1 = \frac{\beta}{T_1}, p_2 = \frac{1}{\beta T_2}$$

Parte de adelanto (roja) altera la curva de respuesta en frecuencia, adicionando un ángulo de adelanto de fase e incrementando el margen de fase en la frecuencia de cruce de ganancia. La parte de atraso de fase proporciona una atenuación cercana y por arriba de la frecuencia de cruce de ganancia, permitiendo un incremento en la ganancia en el rango de frecuencias bajas con el fin de mejor el desempeño en estado estacionario.

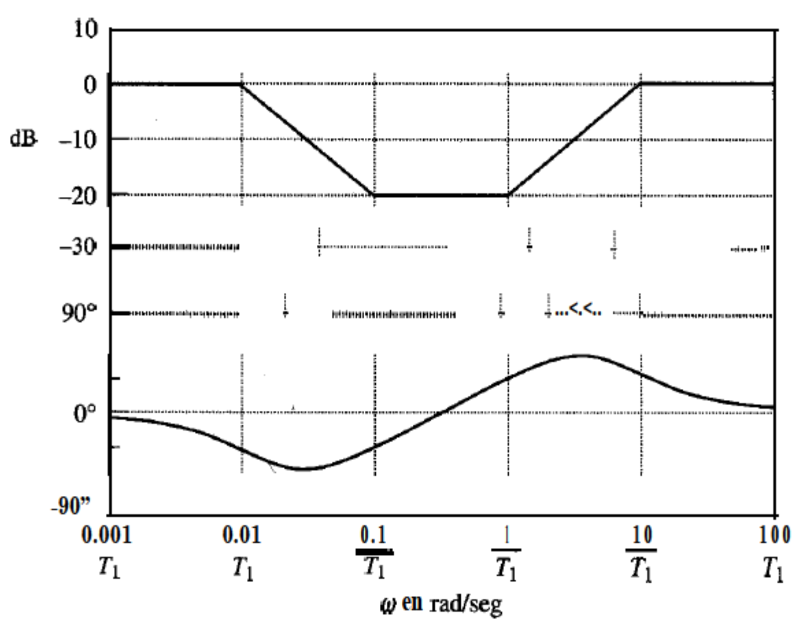

Fig. 2. Diagrama de Bode del compensador de atraso-adelanto, con $K_c = 1, \beta = 10, T_2 = 10T_1$

Ejemplo:

A partir de:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Se desea un sistema de control que cumpla las siguientes especificaciones:

$$K_v = 10, MF = 50°, MG > 10dB$$

1) Obtener K_c a partir del requerimiento de la constante de error.

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+p_1)(s+p_2)(s+1)(s+2)} = 10$$

$$\frac{K_c z_1 z_2}{2p_1 p_2} = 10$$

$$\frac{K_c T_1 T_2 \beta}{2T_1 T_2 \beta} = 10$$

$$\boldsymbol{K_c = 20}$$

2) Dibujar el diagrama de Bode $K_cG(s)$ y seleccionar la nueva frecuencia de cruce de ganancia en donde está la frecuencia de cruce de fase (donde la fase del sistema es -180°).

$$\boldsymbol{\omega_m = 1.41\ rad/seg}$$

3) Seleccionar una frecuencia una década antes de la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Esta frecuencia corresponde a z_2 (cero de la parte de atraso)

$$\boldsymbol{z_2 = \frac{1}{T_2} = 0.1\omega_m = 0.141, T_2 = 7.0922}$$

Obtener β a partir de:

$$sin\phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

Donde

$$\phi_m = MF_d + 5°$$

$$\boldsymbol{\phi_m = 50 + 5 = 55°}$$

$$(\beta + 1)(sin\phi_m) = \beta - 1$$

$$\beta sin\phi_m + sin\phi_m = \beta - 1$$

$$sin\phi_m + 1 = \beta(1 - sin\phi_m)$$

$$\beta = \frac{sin\phi_m + 1}{1 - sin\phi_m}$$

$$\boldsymbol{\beta = \frac{sin55 + 1}{1 - sin55} = 10.059}$$

Obtener el polo de la parte de atraso, p_2

$$p_2 = \frac{1}{\beta T_2}$$

$$\boldsymbol{p_2 = 0.014}$$

4) Determinar la magnitud $|K_c G(j\omega_m)|_{dB}$. A partir de esto, se supone que el compensador debe contribuir una magnitud en dB para que esto de 0dB. Para lograrlo, trazar una recta con pendiente de 20dB/década que pase por el punto $(-|K_c G(j\omega_m)|_{dB}\ , \omega_m)$. Buscar las frecuencias de las intersecciones de esta recta con 0dB y -20dB, y estas serían las frecuencias para el polo y el cero de la parte de adelanto.

$$z_1 = \omega_{-20_{dB}}$$

$$p_1 = \omega_{0_{dB}}$$

$$\boldsymbol{|K_c G(j1.41)|_{dB} = -10.5dB}$$

$$\boldsymbol{z_1 = 0.5}$$

$$\boldsymbol{p_1 = 5}$$

Por lo tanto, el controlador es:

$$\boldsymbol{G_c(s) = 20\frac{(s + 0.5)(s + 0.141)}{(s + 5)(s + 0.0141)}}$$

Sistema compensado:

$$\boldsymbol{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{20\, s^2\ +\ 12.82\, s\ +\ 1.41}{s^5 +\ 8.014\, s^4\ +\ 17.11\, s^3\ +\ 30.24\, s^2\ +\ 12.96\, s\ +\ 1.41}}$$