

Control 1- Lugar Geométrico de las raíces

Carlos Mario Paredes

Septiembre 2021

Los sistemas físicos pueden ser analizados mediante un procedimiento gráfico denominado "Lugar de las raíces", desarrollado por Walter Evans en la década de los 40 el cual permite determinar las ubicaciones de los polos de lazo cerrado del sistema conociendo las posiciones de los polos y ceros de lazo abierto. Se puede decir entonces que el lugar de las raíces son caminos por donde se mueven los polos al variar un parámetro del sistema como la ganancia desde cero hasta infinito.

Considere el siguiente sistema en lazo cerrado:

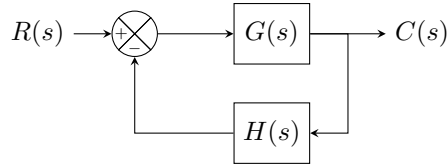


Fig. 1: Sistema en lazo cerrado

Sabemos que la función de transferencia de este sistema es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1)$$

La ecuación característica para este sistema se puede obtener haciendo igual a cero el denominador de la función de transferencia, $1 + G(s)H(s) = 0$. Para que esta ecuación se cumpla la cantidad compleja $G(s)H(s) = -1$.

$G(s)H(s)$ se puede representar mediante su magnitud y un ángulo.

$$G(s)H(s) = |G(s)H(s)|\angle G(s)H(s) \quad (2)$$

Para que la cantidad compleja $G(s)H(s) = -1$, se deben cumplir dos condiciones. La primera, es que la magnitud $|G(s)H(s)|$ debe ser igual a 1 y la segunda es que el ángulo $\angle G(s)H(s)$ debe ser igual a $\pm 180^\circ(2k + 1)$, $\forall k = 0, 1, 2, \dots$, a estas condiciones se les denomina **condición de magnitud** y **condición del ángulo**, respectivamente.

La condición del ángulo me permite conocer si un punto determinado forma parte o no del Lugar de las raíces. Por otra parte la condición de la magnitud

permite conocer el valor de ganancia (k) necesaria para ubicar los polos en un punto cualquiera sobre el lugar de las raíces.

A continuación se presenta un ejemplo sobre lo que es el Lugar de las raíces, la metodología utilizada para la solución del problema no es la correcta, pero permite mostrar las condiciones de ángulo y magnitud.

Ejemplo

Considerar el siguiente sistema:

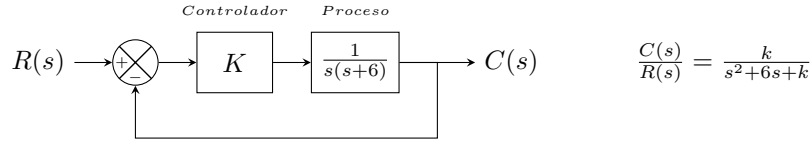


Fig. 2: Sistema en lazo cerrado

La ecuación característica es : $s^2 + 6s + k = 0$. Resolviendo se tiene que:

$$s_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4k}}{2} = -3 \pm \sqrt{9 - k} \quad (3)$$

Se puede observar que variando el controlador se tienen diferentes polos. Por ejemplo, para $k > 9$ se tienen complejos conjugados, para $k = 9$ se tienen polos reales repetidos y para $k < 9$ se tienen polos reales distintos. El lugar de las raíces en este caso se muestra en la siguiente figura:

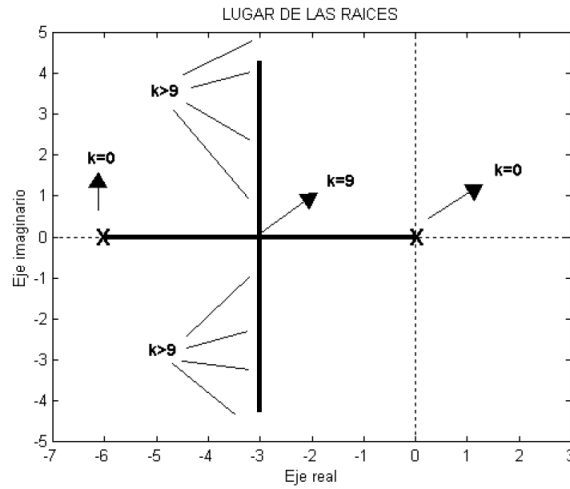


Fig. 3: Lugar geométrico de las raíces

Condición de la magnitud:

$$\left| \frac{k}{s(s+6)} \right| = 1$$

$$k = |s(s+6)| \quad (4)$$

Condición del ángulo:

$$\angle \frac{k}{s(s+6)} = 0 - (\angle s + \angle(s+6))$$

$$= -\angle s - \angle(s+6) = \pm 180^\circ (2k+1) \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Se desea saber un valor de k para que los polos se ubiquen en $s = -3 \pm 2i$:

$$k = |s(s+6)|_{s=-3+2i} \Rightarrow k = |(-3+2i)(-3+2i+6)| = |-13| = 13 \quad (6)$$

Para verificar que con $k = 13$ se pasa por el lugar geométrico de las raíces, realizar la gráfica de la siguiente figura, y verificar la condición del ángulo.

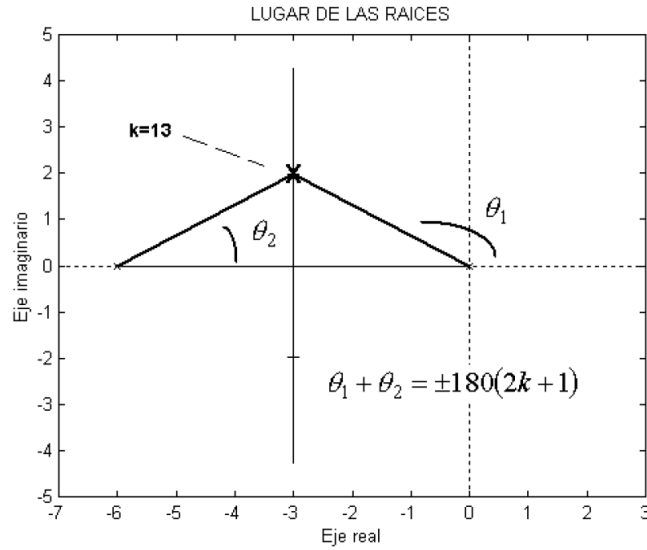


Fig. 4

$$\theta_1 = 90^\circ + \tan^{-1} \left(\frac{3}{2} \right) \simeq 146.31^\circ$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \left(\frac{2}{3} \right) \simeq 33.69^\circ$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ \quad (7)$$

Se verifica que con $k = 13$ los polos quedan ubicados en el lugar deseado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{s^2 + 6s + k} = \frac{13}{s^2 + 6s + 13} \quad (8)$$

Ecuación característica $s^2 + 6s + 13 = 0 \implies s_{1,2} = -3 \pm 2i$

Reglas para la construcción del lugar geométrico de las raíces

- Análisis gráfico de la variación de los polos al variar algún parámetro del sistema.
- Sensibilidad de las raíces.

$$M(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)} \quad (k > 0 \text{ y es variable}) \quad (9)$$

$$1 + kG(s)H(s) = 1 + kF(s), \text{ donde } F(s) = G(s)H(s)$$

Polos de $M(s)$:

$$\begin{aligned} 1 + kF(s) &= 0 & k|F(s)| &= 1 \\ (kF(s) \rightarrow \text{lazo abierto}) & \quad \angle F(s) = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (10)$$

Objetivos: Ubicar gráficamente los polos de $M(s)$, esto es $1 + kF(s) = 0$ para todos los valores posibles de $k > 0$.

Ejemplos introductorios

$$\begin{aligned} M(s) &= \frac{k}{s + 2 + k} \\ kF(s) &= \frac{k}{s + 2} \end{aligned} \quad (11)$$

Evaluamos k en 0 e ∞ y verificamos los polos en lazo cerrado:

$$\begin{aligned} k = 0 &\rightarrow s + 2 = 0 \rightarrow s = -2 \\ k = \infty &\rightarrow s + 2 + \infty = 0 \rightarrow s = -\infty \end{aligned} \quad (12)$$

Eso quiere decir que ha medida que va aumentando k los polos del sistema en lazo cerrado, se van a empezar a mover desde -2 hasta $-\infty$. Esto se muestra en la siguiente figura.

Se puede observar que si se desea que el sistema en lazo cerrado tenga un polo ubicado en -3 esto se puede lograr con la correcta selección de k dado que -3 pasa por el lugar de las raíces.

La condición de la magnitud de este sistema es:

$$\left| \frac{k}{s + 2} \right| = 1 \quad (13)$$

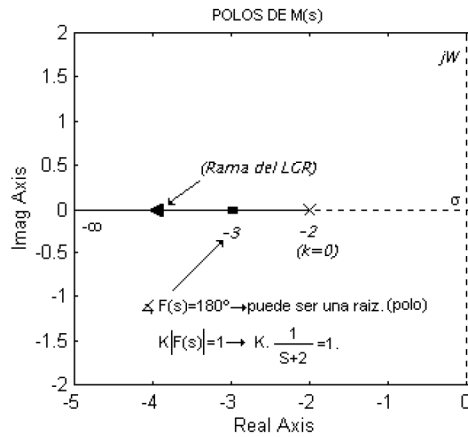


Fig. 5

La magnitud $|s + 2|$ se puede ver como la distancia entre "s" ($s = -3, s = -2$):

$$|-3 - (-2)| = 1 \rightarrow \frac{k}{1} = 1 \rightarrow k = 1 \quad (14)$$

Para $k = 1$ se tiene el polo $s = -3$.

En cambio, para el punto s_1 que se muestra en la siguiente figura, es imposible que esto sea una polo del sistema en lazo cerrado (no hay k para que el sistema tenga este comportamiento, porque el polo s_1 no pasa por el lugar geométrico de las raíces). Además se observa que no cumple la condición del ángulo ($\phi < 180^\circ$)

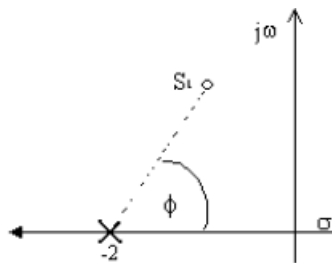


Fig. 6

Ejemplo 2

$$1 + kG(s)H(s) = (s + 3)(s + 2) + k = 0 \quad \text{Para } k = 0, s_1 = -2, s_2 = -3$$

Punto de "ruptura" de las raíces:

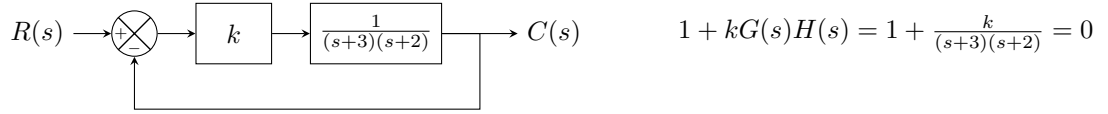


Fig. 7

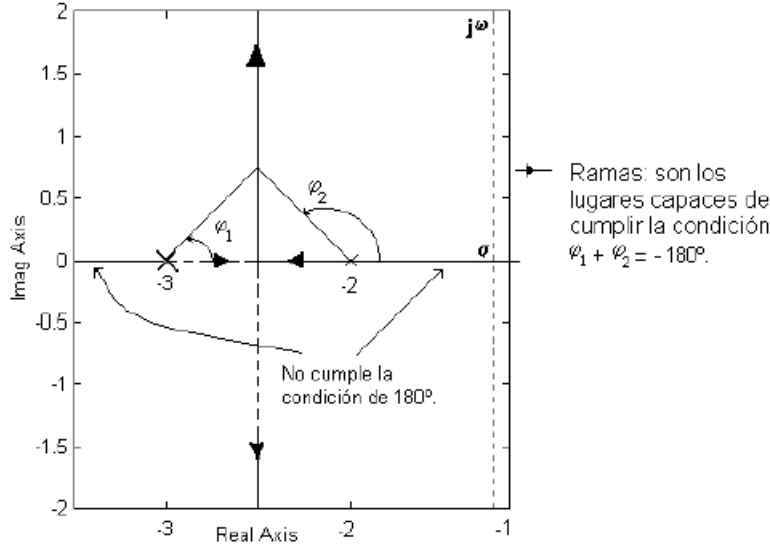


Fig. 8: Lugar geométrico de las raíces

Se produce cuando $s = -2.5$ En la condición de magnitud

$$k|F(s)| = \frac{k}{|(s+3)(s+2)|_{s=-2.5}} = 1 \rightarrow \frac{k}{(0.5)(0.5)} = 1 \rightarrow k = 0.25 \quad (15)$$

Respuesta en lazo cerrado para $k=0.25$:

$$M(s) = \frac{kG(s)}{1 + kG(s)H(s)}, \quad G(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)}, \quad H(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (16)$$

$$M(s) = \frac{kN_1(s)D_2(s)}{D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)k}$$

Por lo tanto las raíces de:

$$1 + kG(s)H(s) = 1 + kF(s) = 1 + k \frac{N_1(s)N_2(s)}{D_1(s)D_2(s)} = \text{raíces de } D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s)k \quad (17)$$

Reglas para la construcción del lugar geométrico de las raíces

0. No cancelar polos y ceros en lazo abierto de $F(s)$

1. Poner $1 + kF(s) = 0$, de la forma $N_1 N_2 k + D_1 D_2 = 0$
2. N° de ramas = N° de polos de $F(s)$
3. Nacimiento de las ramas ($k = 0$): polos de $F(s)$
4. Fin de las ramas ($k = \infty$): ceros de $F(s)$ o ceros en el infinito.

N° de ceros en el infinito: N° de polos de $F(s)$ - N° de ceros de $F(s)$.

Demostración:

$$1 + kF(s) = 1 + k \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^n (s + p_i) + k \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0$$

$$\frac{\prod_{i=1}^n (s + p_i)}{k} + \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0 \rightarrow \text{if } k \rightarrow \infty \Rightarrow \prod_{i=1}^m (s + z_i) = 0 \quad (18)$$

5. Asíntotas de las ramas (σ_A es la intersección de la asíntota con eje real y α_A son los ángulos de las asíntotas):

$$\sigma_A = \frac{\sum(\text{valores de los polos}) - \sum(\text{valores de los ceros})}{N^\circ \text{ de polos} - N^\circ \text{ de ceros}} \quad (19)$$

$$\alpha_A = \pm n \frac{180^\circ}{N^\circ \text{ de polos} - N^\circ \text{ de ceros}}, n \text{ impar}$$

6. Eje real: Es *LGR* si hay un N° impar de raíces a la derecha.

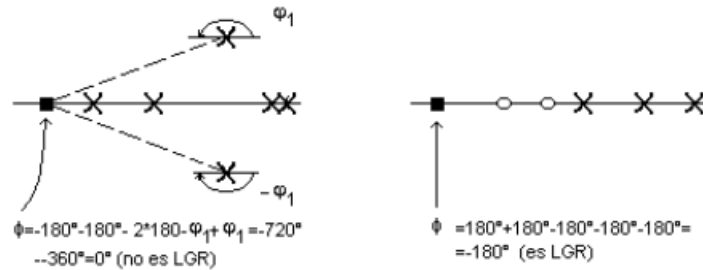


Fig. 9

7. Lugar (LGR) simétrico respecto al eje real
8. Puntos de ruptura de las ramas: puntos de máxima sensibilidad de k .

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \quad (20)$$

9. Puntos de corte con el eje imaginario: aplicar el criterio de Routh-Hurwitz.

Ejemplo completo

$$kF(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+8)} \quad (21)$$

1.

$$1 + kF(s) = 0 \implies s(s+1)(s+8) + k = 0 \quad (22)$$

2. 3 polos \rightarrow 3 ramas.

3. Nacimiento de ramas:

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ s = -1 \\ s = -8 \end{cases} \quad (23)$$

4. Fin de ramas: no tiene ceros, por lo tanto observar los ceros en el infinito, en este caso son 3. Las ramas terminan en el infinito.

5. Asíntotas de las ramas:

$$\sigma_A = \frac{-9-0}{3-0} = -3$$

$$\alpha_A = \pm n \frac{180^\circ}{3-0} = \pm n 60^\circ \rightarrow \begin{cases} 60^\circ \\ 180^\circ \\ 300^\circ \end{cases} \quad (24)$$

6. 7, 8 Puntos de ruptura de las ramas: puntos de máxima sensibilidad de k.

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \longrightarrow s(s+1)(s+8) + k = 0 \rightarrow k = -s^3 - 9s^2 - 8s$$

$$-3s^2 - 18s - 8 = 0 \implies s = \begin{cases} -5.517 \\ -0.484 \end{cases} \quad (25)$$

10. Puntos de corte con el eje imaginario: aplicar el criterio de Routh-Hurwitz (buscar la fila de ceros).

$$s^3 + 9s^2 + 8s + k = 0 \quad (26)$$

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 8 \\ s^2 & 9 & k \\ s^1 & \frac{72-k}{9} & 0 \\ s^0 & k & 0 \end{array} \quad (27)$$

Si $k = 72$ se tiene la fila de ceros. A partir de este valor de k se obtienen los polos imaginarios

$$9s^2 + 72 = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm\sqrt{8}i \quad (28)$$

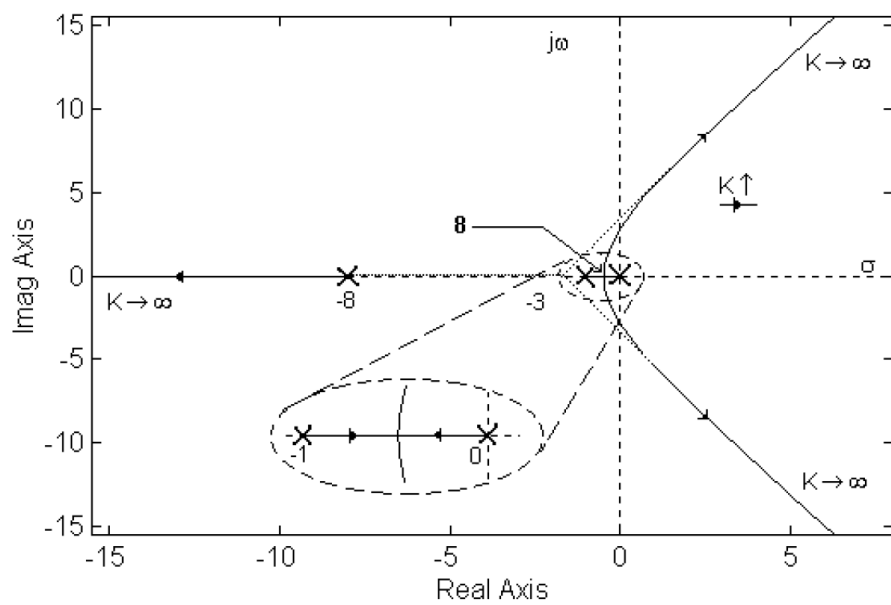


Fig. 10

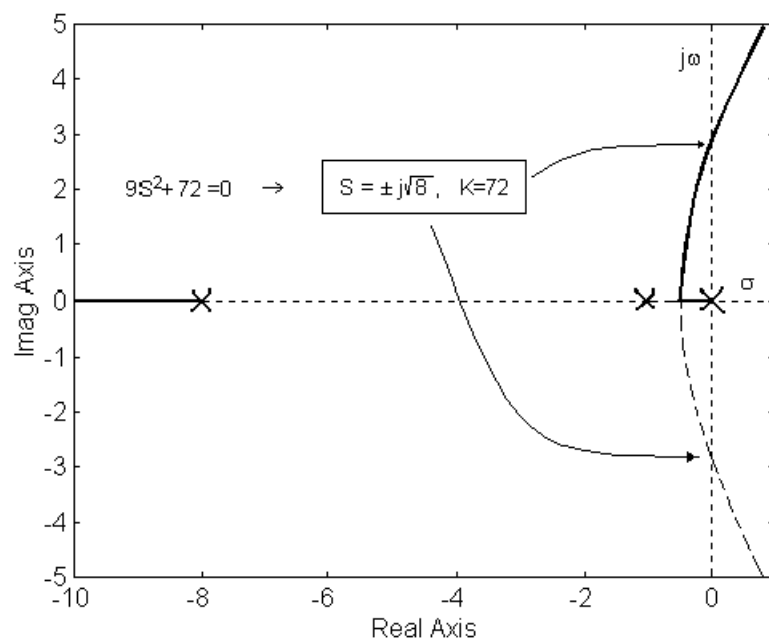


Fig. 11: LGR

Ejemplo:

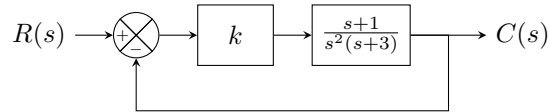


Fig. 12

La función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^2(s+3) + k(s+1)} \quad (29)$$

Ec. característica:

$$s^2(s+3) + k(s+1) = 0 \quad (30)$$

El sistema en lazo abierto tiene 3 polos, por lo tanto se tendrán 3 ramas.

Para el inicio de las ramas miramos los polos en lazo abierto ($k = 0$):

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \\ s_3 = -3 \end{cases} \quad (31)$$

Fin de las ramas (ceros en lazo abierto):

$$s_1 = -1 \quad (32)$$

El sistema tiene un cero en 0 y tiene dos ceros en el infinito. N° de ceros en el infinito: N° de polos de $F(s)$ - N° de ceros de $F(s) \rightarrow 3 - 1 = 2$.

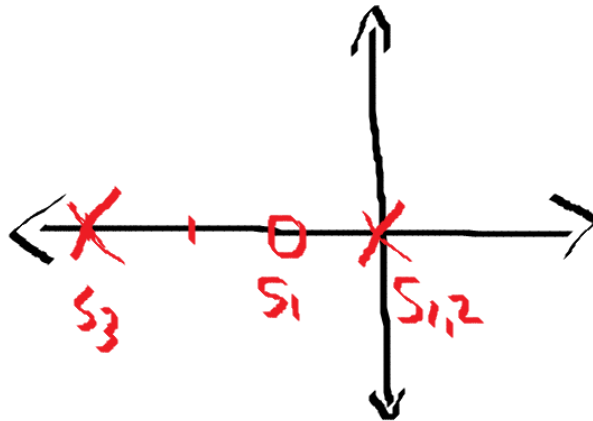


Fig. 13: LGR

Asíntotas:

$$\sigma_A = \frac{-3 - (-1)}{3 - 1} = -1$$

$$\alpha_A = \pm n \frac{180^\circ}{3 - 1} = \pm n 90^\circ \rightarrow \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases} \quad (33)$$

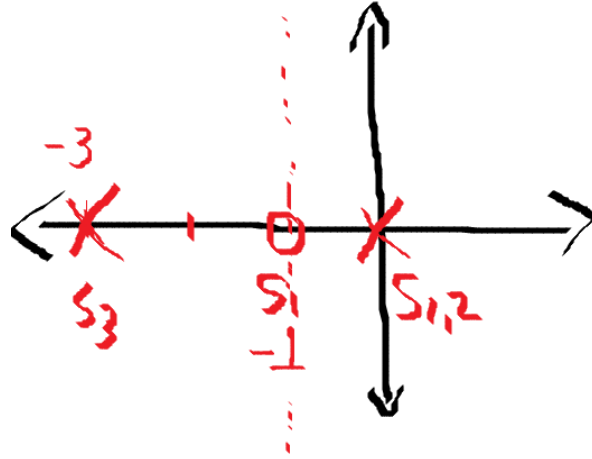


Fig. 14: LGR

Punto de ruptura:

$$\frac{\partial k}{\partial s} = 0 \rightarrow s^2(s + 3) + k(s + 1) = 0 \rightarrow s^3 + 3s^2 + k(s + 1) = 0$$

$$k = \frac{-(s^3 + 3s^2)}{(s + 1)}$$

$$\frac{\partial k}{\partial s} = \frac{-(3s^2 + 6s)(s + 1) + s^3 + 3s^2}{(s + 1)^2} = 0 \quad (34)$$

$$-3s^3 - 6s^2 - 3s^2 - 6s + s^3 + 3s^2 = 0$$

$$-2s^3 - 6s^2 - 6s = 0 \Rightarrow s(2s^2 + 6s + 6) = 0$$

$$s_1 = 0, \quad 2s^2 + 6s + 6 = 0$$

$$s_{2,3} = \begin{cases} -1.5 + 0.86i \\ -1.5 - 0.86i \end{cases}$$

De todas las soluciones, la que tiene sentido es la primera. Entonces el punto de ruptura es en 0.

Corte en el eje imaginario:

$$s^3 + 3s^2 + ks + k = 0 \quad (35)$$

| | | |
|-------|----------------|-----|
| s^3 | 1 | k |
| s^2 | 3 | k |
| s^1 | $\frac{2k}{3}$ | 0 |
| s^0 | k | 0 |

(36)

No tiene corte en el eje imaginario debido que con $k = 0$ aparecen dos filas de ceros seguidas, se requiere una sola para cumplir la condición.

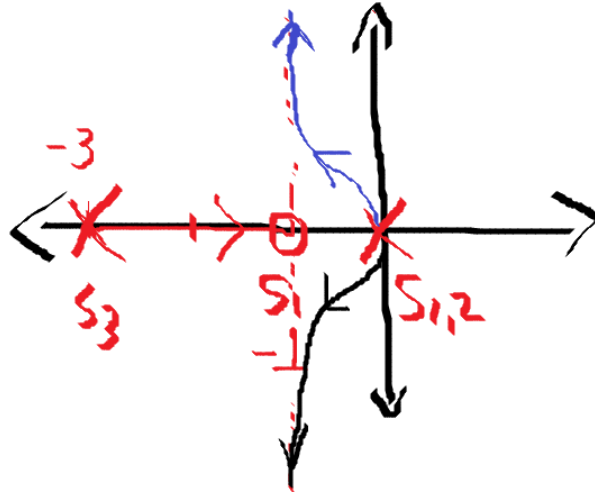


Fig. 15: LGR

Ejemplo:

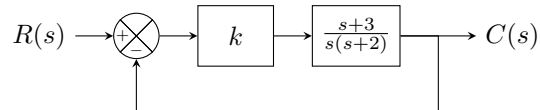


Fig. 16

La función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s+3)}{s(s+2) + k(s+3)} \quad (37)$$

Ec. característica:

$$s^2 + 2s + k(s+3) = 0 \quad (38)$$

El sistema en lazo abierto tiene 2 polos, por lo tanto se tendrán 2 ramas. Para el inicio de las ramas miramos los polos en lazo abierto ($k = 0$):

$$k = 0 \rightarrow \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases} \quad (39)$$

Fin de las ramas (ceros en lazo abierto):

$$s_1 = -3 \quad (40)$$

El sistema tiene un cero en -3 y tiene un cero en el infinito. N° de ceros en el infinito: N° de polos de $F(s)$ - N° de ceros de $F(s) \rightarrow 2 - 1 = 1$.

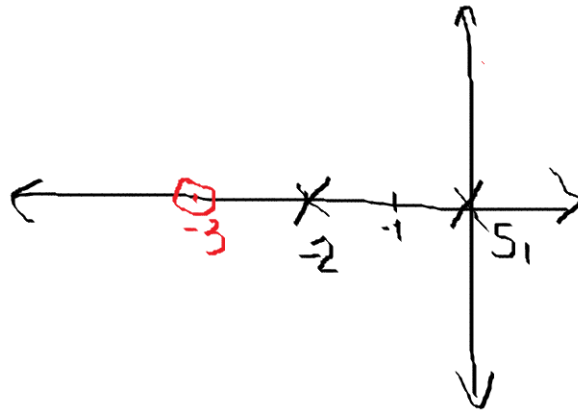


Fig. 17: LGR

Asíntotas:

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{-2 - (-1)}{2 - 1} = 1 \\ \alpha_A &= \pm n \frac{180^\circ}{2 - 1} = \pm 180^\circ \end{aligned} \quad (41)$$

Las asíntotas están acostadas, no tienen corte sobre el eje real

Punto de ruptura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial s} = 0 &\rightarrow s^2 + 2s + k(s + 3) = 0 \\ k &= \frac{-(s^2 + 2s)}{s + 3} \\ \frac{\partial k}{\partial s} &= \frac{-(2s + 2)(s + 3) + s^2 + 2s}{(s + 3)^2} = 0 \\ -2s^2 - 6s - 2s - 6 + s^2 + 2s &= 0 \\ -s^2 - 6s - 6 &= 0 \Rightarrow s^2 + 6s + 6 = 0 \\ s_{1,2} &= \begin{cases} -4.73 \\ -1.26 \end{cases} \end{aligned} \quad (42)$$

Tiene dos puntos de ruptura.

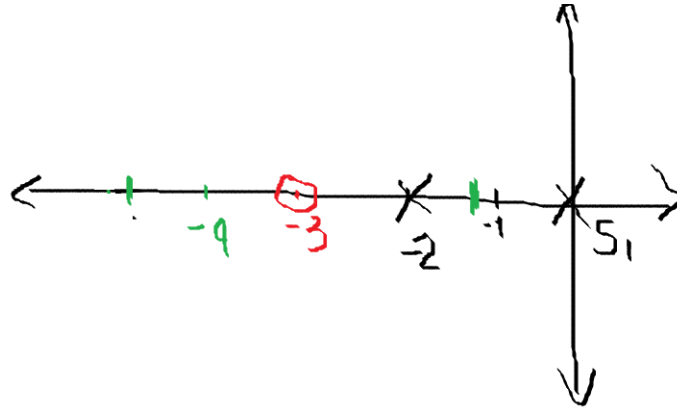


Fig. 18: LGR

Corte en el eje imaginario:

$$s^2 + 2s + ks + 3k = 0 \quad (43)$$

$$\begin{array}{ccc} s^2 & 1 & 3k \\ s^1 & 2+k & 0 \\ s^0 & 3k & 0 \end{array} \quad (44)$$

No tiene corte en el eje imaginario debido que se requiere $k = -2$ para la fila de 0. Solo se consideran ganancias positivas.

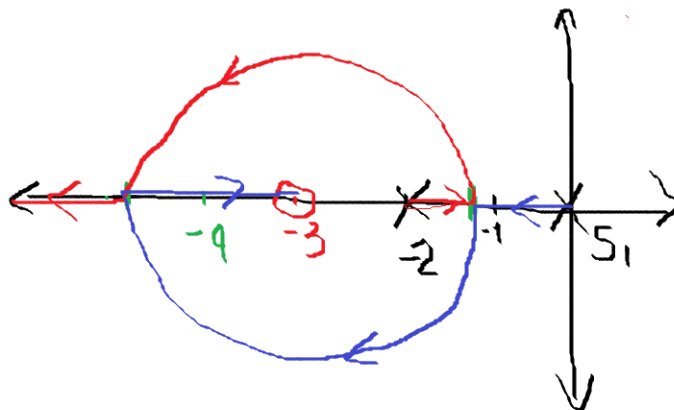


Fig. 19: LGR

Para observar otros ejemplos leer el capítulo 6 del libro de Ingeniería de control moderna de Ogata