

Control 1: Efectos de retroalimentación, Perturbaciones

Carlos Mario Paredes

Agosto 13 2021

1 Efectos de retroalimentación

A continuación se realizará el análisis correspondiente al efecto de retroalimentación negativa en sistemas de primer orden y segundo orden

1.1 Sistemas de primer orden

A continuación se comparan los parámetros del sistema de primer orden cuando se encuentra en lazo abierto y lazo cerrado.

[Lazo Abierto](#)

Un sistema de primer orden lazo abierto tiene la forma que se muestra en la Fig. 1

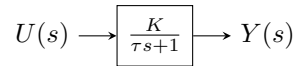


Fig. 1: Sistema de primer orden en lazo abierto

Recordar que este sistema tiene una constante de tiempo τ y una ganancia estática K

[Lazo Cerrado](#) Suponer un sistema de primer orden con retroalimentación negativa cómo el que se observa en la Fig. 2.

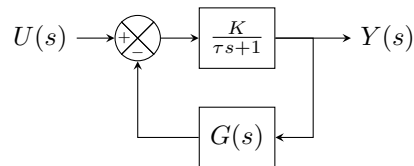
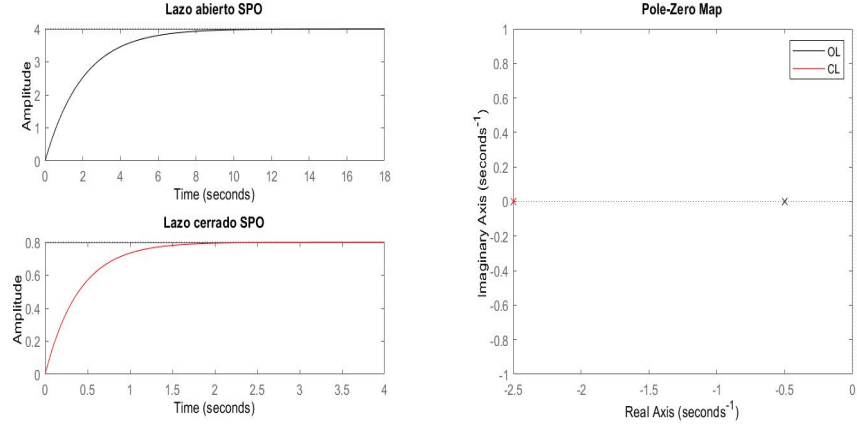


Fig. 2: Sistema de primer orden en lazo cerrado

Suponiendo que $G(s) = 1$ podemos encontrar la nueva función de transferencia, Ecuación (1)

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{K}{\tau s + 1 + K} = \frac{\frac{K}{1+K}}{\frac{\tau}{1+K}s + 1} \\
H(s) &= \frac{\frac{K}{1+K}}{\frac{\tau}{1+K}s + 1} \\
\mathbf{H}(s) &= \frac{\mathbf{K}_n}{\tau_n s + 1}
\end{aligned} \tag{1}$$

De aquí se puede observar que el sistema tiene una nueva ganancia estática $K_n = \frac{K}{1+K}$ y una nueva constante de tiempo $\tau_n = \frac{\tau}{1+K}$. Se puede observar de este modo, que tanto la ganancia del sistema como la constante de tiempo en lazo cerrado disminuye. Los efectos se pueden apreciar en la Fig. 3a y Fig. 3b



(a) Respuesta temporal en OL y CL (b) Mapa de polos y ceros en OL y CL

Fig. 3: Retroalimentación sistema de primer orden.

1.2 Sistemas de segundo orden

A continuación se comparan los parámetros del sistema de segundo orden cuando se encuentra en lazo abierto y lazo cerrado.

Lazo Abierto

Un sistema de segundo orden en lazo abierto tiene la forma que se muestra en la Fig. 4

$$U(s) \longrightarrow \boxed{\frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}} \longrightarrow Y(s)$$

Fig. 4: Sistema de segundo orden en lazo abierto

Recordar que este sistema tiene una frecuencia natural ω_n , un factor de amortiguamiento ζ y una ganancia estática K

Lazo Cerrado Suponer un sistema de segundo orden con retroalimentación negativa cómo el que se observa en la Fig. 5.

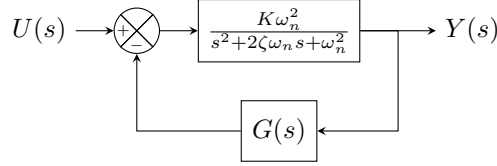


Fig. 5: Sistema de segundo orden en lazo cerrado

Suponiendo que $G(s) = 1$ podemos encontrar la nueva función de transferencia, Ecuación (2)

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K\omega_n^2} \quad (2)$$

Ahora se llevará a su forma estándar para reconocer los nuevos parámetros. Primero se organizará la ganancia del sistema. Para ello hay que recordar que este término está acompañado de la frecuencia natural del sistema elevada al cuadrado. Se puede notar que la nueva frecuencia natural es $\omega_N = \sqrt{\omega_n^2 + K\omega_n^2}$. De este modo se puede reordenar el numerador como se muestra en la Ecuación (3) para encontrar la nueva ganancia estática K_N

$$\begin{aligned} K\omega_n^2 \frac{\omega_n^2 + K\omega_n^2}{\omega_n^2 + K\omega_n^2} &= \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + K\omega_n^2} \omega_n^2 + K\omega_n^2 \\ K_N &= \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + K\omega_n^2} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2(1 + K)} \\ K_N &= \frac{K}{1 + K} \end{aligned} \quad (3)$$

Esta nueva ganancia es menor que la ganancia del sistema en lazo abierto.

Del mismo modo nos podemos enfocar en el término que acompaña la s en el denominador para encontrar el nuevo factor de amortiguamiento ζ_N . Para ello hay que recordar que este término está compuesto por $2\zeta\omega_n$, que en el nuevo sistema debe corresponder a $2\zeta_N\omega_N$, como se muestra en la Ecuación (4)

$$\begin{aligned} 2\zeta_N\omega_N &= 2\zeta\omega_n \frac{\sqrt{\omega_n^2 + K\omega_n^2}}{\sqrt{\omega_n^2 + K\omega_n^2}} = 2\zeta\omega_n \frac{\omega_N}{\omega_N} \\ \zeta_N &= \frac{\zeta\omega_n}{\omega_N} \end{aligned} \quad (4)$$

Así el sistema de la Ecuación (2) es equivalente al sistema de la Ecuación (5) donde se tienen los parámetros nuevos del sistema, anteriormente definidos

$$H(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 + K\omega_n^2}$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{K}_N\omega_N^2}{s^2 + 2\zeta_N\omega_N s + \omega_N^2} \quad (5)$$

Los efectos se pueden apreciar en la Fig. 6a y Fig. 6b

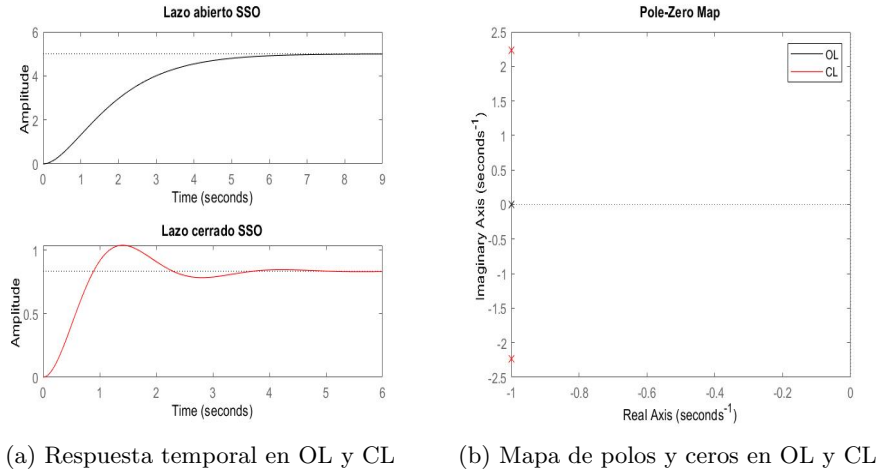


Fig. 6: Retroalimentación sistema de segundo orden.

2 Análisis de perturbaciones

Los procesos son susceptibles a tener perturbaciones. A continuación se analizará el efecto de estas en lazo cerrado como en lazo abierto.

2.1 Lazo abierto

Suponer el sistema en lazo abierto que muestra en la Fig. 7

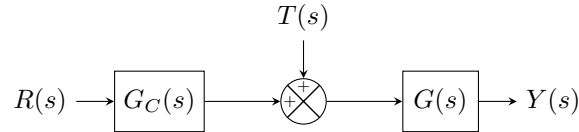


Fig. 7: Sistema en lazo abierto con perturbaciones

Donde $R(s)$ es la referencia del sistema. $Y(s)$ es la salida del sistema y $T(s)$ es una perturbación.

Aplicando el principio de superposición la salida del sistema será:

$$\begin{aligned} N(s) &= 0 & R(s) &= 0 \\ Y_1(s) &= R(s)G_C(s)G(s) & Y_2(s) &= T(s)G(s) \end{aligned} \quad (6)$$

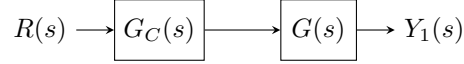


Fig. 8: Sistema en lazo abierto con $T(s) = 0$

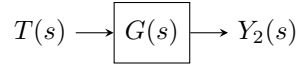


Fig. 9: Sistema en lazo abierto con $R(s) = 0$

De este modo la salida total del sistema, teniendo en cuenta tanto la perturbación como la referencia es:

$$\begin{aligned} Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ Y(s) &= R(s)G_C(s)G(s) + \textcolor{red}{T(s)}G(s) \end{aligned} \quad (7)$$

De la Ecuación (7) se puede observar que la salida del sistema se ve afectada directamente por la señal de perturbación, de este modo el sistema es muy sensible a cualquier cambio dado por esta señal.

2.2 Lazo cerrado

Suponer el esquema que se muestra en la Fig 10

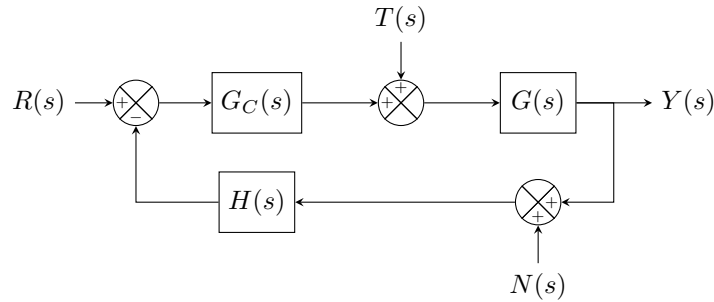


Fig. 10: Sistema en lazo cerrado con perturbaciones

Donde $G_C(s)$ es el controlador, $G(s)$ es el sistema, $H(s)$ es el sensor, $T(s)$ son las perturbaciones del sistema y $N(s)$ es el ruido que se puede obtener desde el sensor.

Vamos a aplicar nuevamente el principio de superposición para obtener las respectivas salidas que se obtienen a partir de la referencia, la perturbación y el ruido del sensor.

Para $T(s) = 0$ y $N(s) = 0$

$$Y_1(s) = \frac{G_C(s)G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}R(s) \quad (8)$$

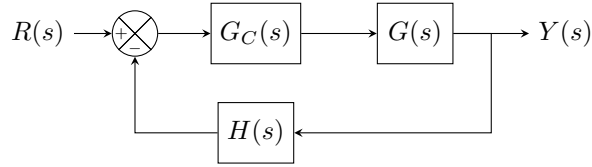


Fig. 11: Sistema en lazo cerrado con $T(s) = 0$ y $N(s) = 0$

Para $R(s) = 0$ y $N(s) = 0$

$$Y_2(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}T(s) \quad (9)$$

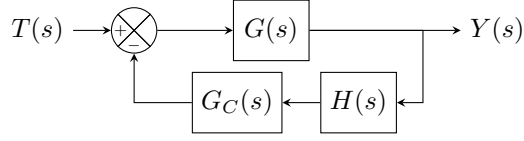


Fig. 12: Sistema en lazo cerrado con $R(s) = 0$ y $N(s) = 0$

Para $R(s) = 0$ y $T(s) = 0$

$$Y_3(s) = \frac{-H(s)G_C(s)G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}N(s) \quad (10)$$

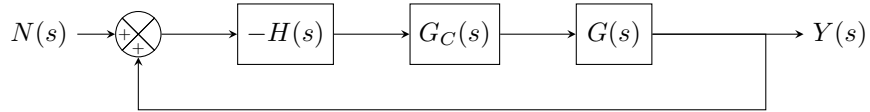


Fig. 13: Sistema en lazo cerrado con $R(s) = 0$ y $T(s) = 0$

De este modo la salida total del sistema, teniendo en cuenta tanto las tres señales $R(s), T(s), N(s)$ es:

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) + Y_3(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_C(s)G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}R(S) + \frac{G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}T(S) - \frac{H(s)G_C(s)G(s)}{1 + H(s)G_C(s)G(s)}N(S) \quad (11)$$

Suponer para el análisis que $H(s) = 1$. Así la Ecuación (11) será:

$$Y(s) = \frac{G_C(s)G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}R(S) + \frac{G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}T(S) - \frac{G_C(s)G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}N(S)$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}(G_C(s)R(S) + T(s) - G_C(s)N(s)) \quad (12)$$

De la Ecuación (12). Se puede observar que el controlador $G_C(s)$ puede ser seleccionado de tal forma que permita disminuir el efecto de las perturbaciones y del ruido de la medición.

Para disminuir el efecto de las perturbaciones analicemos $Y_2(s)$.

$$Y_2(s) = \frac{G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}T(S) \quad (13)$$

De la Ecuación (13) se nota que si la magnitud del termino $G_C(s)G(s) \gg 1$ el efecto de la perturbación en la salida del sistema disminuye. Esto se logra diseñando un controlador $G_C(s)$ cuya magnitud sea "grande" en un rango de frecuencias que caractericen estas perturbaciones.

Por otro lado, para disminuir el efecto del ruido analicemos $Y_3(s)$

$$Y_3(s) = -\frac{G_C(s)G(s)}{1 + G_C(s)G(s)}N(S) \quad (14)$$

De la Ecuación (14) se nota que si la magnitud del termino $G_C(s)$ es pequeño el efecto del ruido en la salida del sistema disminuye. Esto se logra diseñando un controlador $G_C(s)$ cuya magnitud sea "pequeña" en un rango de frecuencias que caractericen este ruido.