## Acciones de Control

Un control automático compara el valor efectivo de la salida de una planta con el valor deseado, determina la desviación o error y produce una señal de control que reduce el error a cero o a un valor pequeño. La forma en que el control automático produce la señal de control recibe el nombre de acción de control.

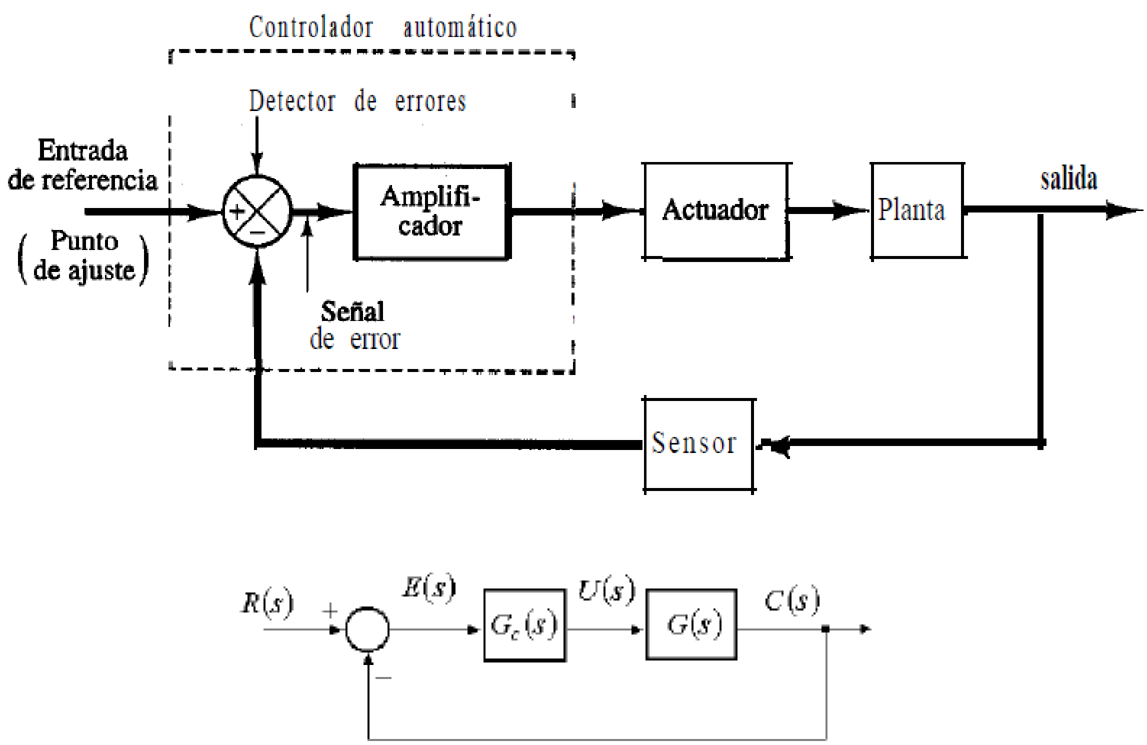


*Figura 1 Diagrama de bloques de un sistema de control.*

Los sistemas clásicos de control automático se pueden clasificar, según su acción de control, en:
- Control de dos posiciones (control sí - no ó control on off).
- Control proporcional ($P$).
- Control integral ($I$).
- Control proporcional - integral ($PI$).
- Control proporcional - derivado ($PD$)
- Control proporcional - integral - derivativo ($PID$)

## Control ON-OFF

El elemento accionador tiene solamente dos posiciones fijas, que en muchos casos es conectado - desconectado (ó abierto o cerrado).

$$u(t) = \begin{cases} U_1, & e(t) > 0 \\ U_2, & e(t) < 0 \end{cases}$$

El control de dos posiciones es relativamente simple y económico, por lo cual es muy utilizado. Ejemplos: calentadores de agua, enfriadores, etc.

**Ejemplo:**

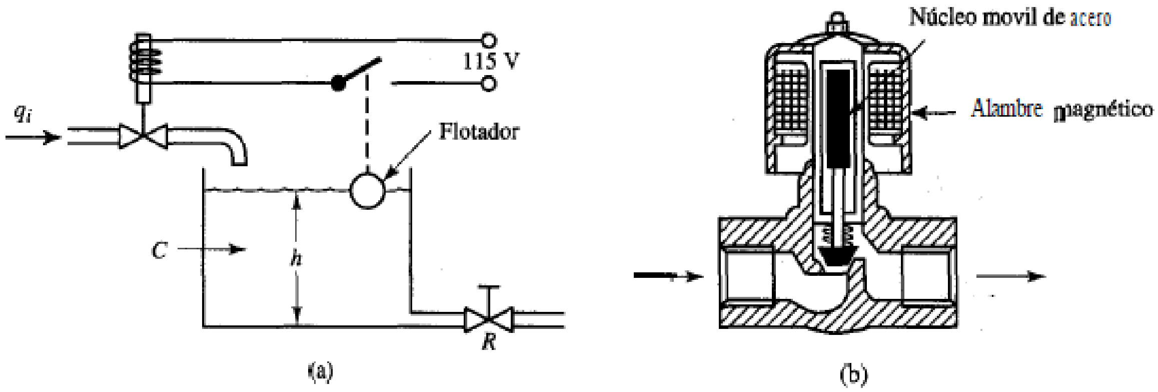


**Figura 5-4**
(a) Sistema del control del nivel de líquido; (b) válvula electromagnética.

$$G(s) = \frac{R}{RCs + 1} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

**Control proporcional (P):**

Es la acción que produce una señal de control proporcional al error.

$$u(t) = K_p e(t)$$
$$U(s) = K_p E(s)$$
$$\boldsymbol{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p}$$

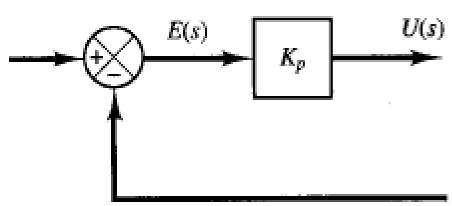


*Figura 2 Diagrama de bloques de Controlador proporcional*

Cualquiera que sea el mecanismo real y la forma de la potencia de operación, el controlador proporcional es básicamente un amplificador con una ganancia ajustable.

Con respecto a un sistema de primer orden:

- Con este controlador se mantiene el orden del sistema.
- Hay $e_{ss}$ frente a la entrada escalón.
- Ganancia del sistema disminuye.
- Constante de tiempo disminuye.

**Control integral(I):**

Es la acción que produce una señal de control proporcional al área bajo la curva de la señal de error.

$$u(t) = K_i \int e(t)dt = \frac{K_p}{T_i} \int e(t)dt$$
$$U(s) = \frac{K_i}{s} E(s) = \frac{K_p}{T_i s} E(s)$$
$$\boldsymbol{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{T_i s}}$$

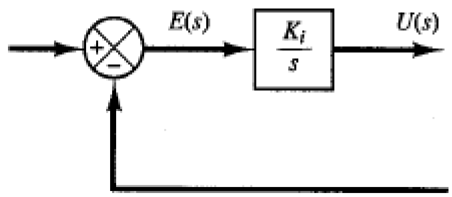


*Figura 3 Diagrama de bloques de Controlador integral*

La constante $K_i$ es una constante ajustable, además puede ser representada por una ganancia $K_p$ y un tiempo integral o tiempo de *reset(reajuste)* $T_i$. Este tiempo es el tiempo que debe transcurrir para que la acción integral alcance(iguale o repita) a la acción proporcional.

$$\frac{1}{T_i} : velocidad\ de\ reajuste$$

Tiene la finalidad de eliminar el $e_{ss}$ frente a la entrada escalón (aumenta el tipo del sistema).

**Control derivativo (D):**

Es la acción que produce una señal de control proporcional a la velocidad de la señal de error.

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} = K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$
$$U(s) = K_p T_d s E(s)$$
$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p T_d s$$

Donde $T_d$, se denomina tiempo derivativo o diferencial. Es el intervalo de tiempo, en el que la acción derivativa adelanta a la acción proporcional.

Se puede mejorar la respuesta transitoria y el sistema conserva el orden original. No se acostumbra a usar sola ya que solo actúa en el transitorio, en régimen estacionario la derivada del error va a ser cero. Además, tiene la desventaja que amplifica las señales de ruido y puede producir efectos de saturación en el actuador.

**Control PI(Proporcional+integral)**

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i}\int e(t)dt$$

$$U(s) = K_p E(s) + \frac{K_p E(s)}{T_i s} = E(s)\left(K_p + \frac{K_p}{T_i s}\right) = E(s)\left(\frac{K_p + K_p T_i s}{T_i s}\right)$$

$$\boldsymbol{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{T_i s}(1 + T_i s)}$$

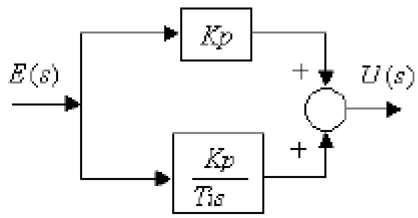


*Figura 4 Diagrama de bloques de Controlador PI*

Efectos:
- El orden del sistema controlado se incrementa.
- Se introduce un polo en el origen y un cero de lazo abierto en $s = -\frac{1}{T_i}$.
- El error en estado estacionario (para entrada tipo escalón), se elimina.
- El tiempo integral ($T_i$) regula la acción de control integral, mientras una modificación de $K_p$ afecta tanto a la parte proporcional como a la integral.
- Si $K_p$ se aumenta, la respuesta se hace más rápida y oscilatoria. Valores grandes de $K_p$ pueden llevar el sistema a la inestabilidad.
- Si $T_i$ disminuye (con $K_p$ constante), la respuesta es más rápida pero también más oscilatoria.

**Control PD(Proporcional+derivativo)**

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s) = E(s)\left(K_p(1 + T_d s)\right)$$

$$\boldsymbol{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p(1 + T_d s)}$$

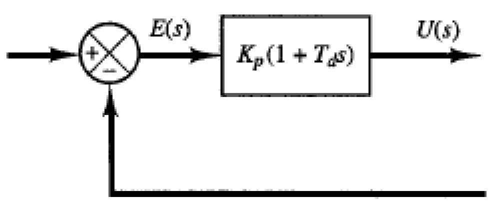


*Figura 5 Diagrama de bloques de Controlador PD*

Efectos:
- Se introduce un cero de lazo abierto en $s = -\frac{1}{T_d}$ .
- La señal de control es proporcional a la velocidad de variación de la señal de error actuante.

-La acción derivativa produce una acción correctiva significativa antes de que la magnitud del error se vuelva muy grande(se anticipa al error). Aunque el control derivativo no mejora la respuesta en estado estacionario, añade amortiguamiento al sistema, y permite así usar valores más grandes en la parte proporcional mejorando la precisión en estado estacionario.
- La acción de control derivativo tiene las desventajas de amplificar las señales de ruido y puede producir efectos de saturación en el actuador.
- Se debe notar que nunca puede tenerse una acción derivativa.

**Control PID(Proporcional+integral+derivativo)**

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i}\int e(t)dt$$

$$U(s) = K_p E(s) + K_p T_d s E(s) + \frac{K_p E(s)}{T_i s} = E(s)\left(K_p + K_p T_d s + \frac{K_p}{T_i s}\right)$$

$$U(s) = E(s)\left(\frac{K_p + K_p T_i s + K_p T_i T_d s^2}{T_i s}\right)$$

$$\boldsymbol{G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p + K_p T_i s + K_p T_i T_d s^2}{T_i s} = \frac{K_p}{T_i s}(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}$$

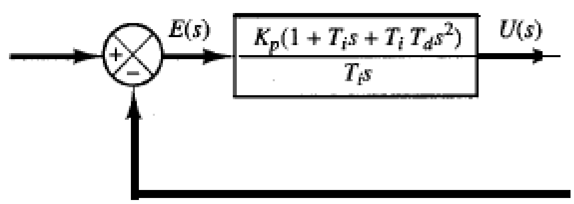


*Figura 6 Diagrama de bloques de Controlador PID*

Efectos:
- Se introduce dos ceros de lazo abierto y un polo en el origen.
- Al aumentar $K_P$ la respuesta se hace más rápida y oscilatoria.
- La acción derivativa disminuye la oscilación (tiene un efecto estabilizador)
- La acción integral permite tener un error de estado estable nulo.

**Aplicaciones más comunes del controlador PID**

- Control de posición y velocidad: Generalmente se utilizan las tres acciones del $PID$, por ejemplo, en los pilotos automáticos de naves o en el control de los ejes de robot. Hay casos, como en algunas máquinas herramientas de control numérico, es que solo se aplican las acciones $P$ ó $PD$.

- Control de caudal y presión de líquidos: La acción integral es esencial ($PI$), mientras que la acción derivativa es perjudicial, ya que el ruido en los sensores de esta variable no permite su aplicación.

- Control de presión de gases: Un controlador $P$ basta, ya que estos procesos son muy estables y pueden aplicarse una acción proporcional elevada, la cual prácticamente elimina el error de estado estable.

- Control de nivel de líquidos: No se utiliza la acción de control derivativa por la misma razón que en el control de caudal. Se recomienda la acción de control $PI$.

- Control de temperatura y de presión de vapor: La acción de control integral es necesaria y la acción derivativa es esencial si se desea acelerar la respuesta del proceso.

- Control PH: La acción integral es esencial y la acción derivativa es recomendable dada la inestabilidad intrínseca de estos procesos.

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{G(s)=\frac{1}{s^2+48s+5}}$$

Se desea eliminar el error en estado estacionario cuando ingresemos entradas tipo escalón, un tiempo de estabilización de 1 segundo y un sobre impulso del 13%.

Probar PI:

$$T_s=1,\ \ SO(\%)=13\%$$
$$SO(\%)=13=100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta}}$$
$$\boldsymbol{\zeta=0.545}$$
$$T_s=1=\frac{4}{\zeta\omega_n}\dashrightarrow \boldsymbol{\omega_n=\frac{4}{\zeta}=7.34}$$
$$s^2+8s+53.94=0\quad (ec.característica\ deseada)$$

$$G_c(s)=\frac{U(s)}{E(s)}=\frac{K_p}{T_is}(1+T_is)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_p(1+T_is)}{(s^2+48s+5)T_is+K_p(1+T_is)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{K_p(1+T_is)}{T_is^3+48T_is^2+5T_is+K_p+K_pT_is}$$

$$T_is^3+48T_is^2+5T_is+K_p+K_pT_is=0$$
$$s^3+48s^2+s(5+K_p)+\frac{K_p}{T_i}=0$$

Aumentando el orden deseado

$$(s^2+8s+53.94)(s+40)=0$$

$$s^3+48s^2+373.9s+2157.5=0$$

Igualando polinomios:

$$s^3+48s^2+s(5+K_p)+\frac{K_p}{T_i}=s^3+48s^2+373.9s+2157.5$$

$$5 + K_p = 373.9 \dashrightarrow K_p = 368.9$$
$$\frac{K_p}{T_i} = 2157.5 \dashrightarrow T_i = 0.171$$

Probar PID:

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 5}}$$

Se desea eliminar el error en estado estacionario, un tiempo de estabilización de 1 segundo y un sobre impulso del 13%.

Probar PI:

$$T_s = 1,\ \ SO(\%) = 13\%$$
$$SO(\%) = 13 = 100e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta}}$$
$$\boldsymbol{\zeta = 0.545}$$
$$T_s = 1 = \frac{4}{\zeta\omega_n} \dashrightarrow \boldsymbol{\omega_n = \frac{4}{\zeta} = 7.34}$$
$$s^2 + 8s + 53.94 = 0 \quad (ec.\,característica\ deseada)$$

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_p}{T_i s}(1 + T_i s)$$
$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_i s)}{(s^2 + 3s + 5)T_i s + K_p(1 + T_i s)}$$
$$\boldsymbol{\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_i s)}{T_i s^3 + 3T_i s^2 + 5T_i s + K_p + K_p T_i s}}$$

$$T_i s^3 + 3T_i s^2 + 5T_i s + K_p + K_p T_i s = 0$$
$$s^3 + 3s^2 + 5s + \frac{K_p}{T_i} + K_p s = 0$$
$$\boldsymbol{s^3 + 3s^2 + s(5 + K_p) + \frac{K_p}{T_i} = 0}$$

Aumentando el orden deseado

$$(s^2 + 8s + 53.94)(s + 40) = 0$$

$$s^3 + 48s^2 + 373.9s + 2157.5 = 0$$

Igualando polinomios:

Aumentando el orden deseado

$$(s^2 + 8s + 53.94)(s + 40) = 0$$

$$s^3 + 48s^2 + 373.9s + 2157.5 = 0$$

Igualando polinomios:

$$s^3 + 3s^2 + s(5 + K_p) + \frac{K_p}{T_i} = s^3 + 48s^2 + 373.9s + 2157.5$$

No sirve.

Probar PID

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 5}$$

$$G_c(s) = \frac{K_p}{T_i s}(1 + T_i s + T_i T_d s^2)$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{(s^2 + 3s + 5)T_i s + K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_p(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{T_i s^3 + 3T_i s^2 + 5T_i s + K_p + K_p T_i s + K_p T_i T_d s^2}$$

$$T_i s^3 + 3T_i s^2 + 5T_i s + K_p + K_p T_i s + K_p T_i T_d s^2 = 0$$
$$s^3 + 3s^2 + 5s + \frac{K_p}{T_i} + K_p s + K_p T_d s^2 = 0$$
$$s^3 + s^2(3 + K_p T_d) + s(5 + K_P) + \frac{K_p}{T_i} = 0$$

Igualamos polinomios:

$$s^3 + s^2(3 + K_p T_d) + s(5 + K_P) + \frac{K_p}{T_i} = s^3 + 48s^2 + 373.9s + 2157.5$$

$$3 + K_p T_d = 48 \dashrightarrow T_d = 0.122$$
$$5 + K_P = 373.9 \dashrightarrow K_p = 368.9$$
$$\frac{K_p}{T_i} = 2157.5 \dashrightarrow T_i = 0.171$$

**Ejemplo:**

$$\boldsymbol{G(s) = \frac{4}{s(s-6)}}$$

Se desea un tiempo de estabilización de 8 segundos y un sobre impulso menor del 40%.

Probar PID