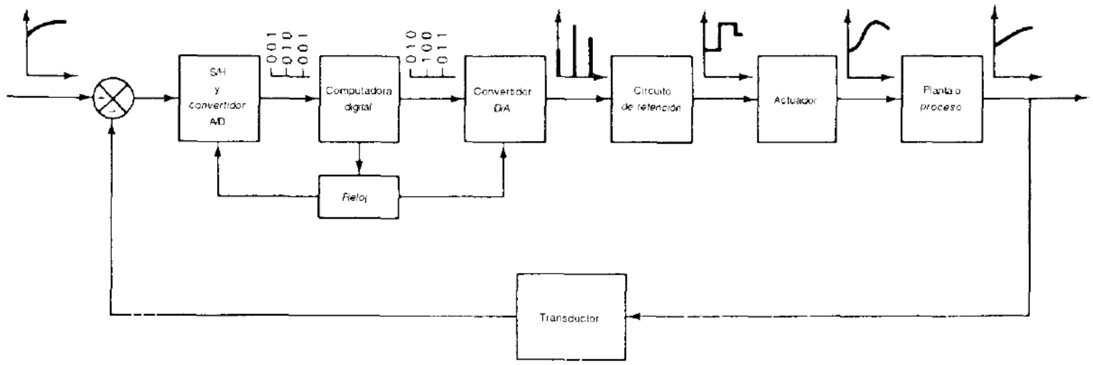
Control Digital

Recientemente, la aplicación de control por computadora ha hecho posible el movimiento "inteligente" en robots industriales, la optimización de economía de combustible en automóviles y el refinamiento en la operación de enseres y máquinas de uso doméstico, tales como hornos de microondas y máquinas de coser, entre otros. La capacidad en la toma de decisiones y la flexibilidad en los programas de control son las mayores ventajas de los sistemas de control digital.

- Un sistema digital programable proporciona la flexibilidad de reconfigurar las operaciones del tratamiento digital de la señal simplemente modificando el programa. Sin embargo, normalmente, la reconfiguración de un sistema analógico implica un rediseño del hardware seguido de los procesos de realización de pruebas y de verificación que permiten comprobar que todo funciona correctamente.
- También, las consideraciones de precisión desempeñan un papel importante en la determinación de la forma del procesador de señales. Las tolerancias de los componentes de los circuitos analógicos hacen extremadamente difícil que el diseñador del sistema pueda controlar la precisión de un sistema de tratamiento de señales analógicas. Por el contrario, un sistema digital proporciona un control mucho mejor en lo que respecta a los requisitos de precisión. Tales requisitos, a su vez, exigen especificar los requisitos de precisión del convertidor A/D y del procesador digital de señales, en términos de longitud de palabra, aritmética en coma flotante o coma fija, y factores similares.
- Las señales digitales se almacenan fácilmente en soportes magnéticos (cinta o disco) sin deteriorarse o perder fidelidad, aparte de la introducida por la conversión A/D. Como consecuencia, las señales se hacen transportables y pueden procesarse en tiempo no real en un laboratorio remoto. El tratamiento digital de señales también permite la implementación de algoritmos de tratamiento de señales más sofisticados. Normalmente, es muy difícil efectuar operaciones matemáticas precisas sobre señales analógicas, pero esas mismas operaciones pueden implementarse de forma rutinaria en una computadora digital mediante software.
- En algunos casos, una implementación digital del sistema de procesamiento de señales es más barata que su contrapartida analógica. Este menor coste puede deberse al hecho de que el hardware digital es más barato o, quizás, es el resultado de la flexibilidad de poder realizar modificaciones proporcionada por la implementación digital.

La tendencia actual de controlar los sistemas dinámicos en forma digital en lugar de analógica se debe principalmente a la disponibilidad de computadoras digitales de bajo costo y a las ventajas de trabajar con señales digitales en lugar de señales en tiempo continuo. Entre las más destacables:

Los sistemas de control en tiempo discreto difieren de los sistemas de control en tiempo continuo en que las señales para los primeros están en la forma de datos muestreados o en la forma digital. Si en el sistema de control está involucrada una computadora digital como un controlador, los datos muestreados se deben convertir a datos digitales.



Definición de términos:

- **Muestreador y retenedor(S/H):** es un circuito que recibe como entrada una señal analógica y mantiene dicha señal en un valor constante durante un tiempo específico.
- **Convertidor analógico-digital(A/D):** también conocido como codificador, es un dispositivo que convierte una señal analógica en una señal digital. Normalmente el circuito S/H viene integrado en los convertidores A/D. La conversión de la señal analógica a digital es una aproximación, es un numero binario. Este proceso de aproximación recibe el nombre de cuantificación.
- **Convertidor digital-analógico (D/A):** también conocido como decodificador, convierte una señal digital en una señal análoga.

Ecuación en diferencia

$$\sum_{k=0}^{M} \boldsymbol{a_k y(n-k)} = \sum_{k=0}^{N} \boldsymbol{b_k x(n-k)} \quad (\boldsymbol{IIR - Filtros\ recurrentes})$$

$$a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_M y(n-M) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \cdots + b_N x(n-N)$$

$$a_0 Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + \cdots + a_M Y(z) z^{-M} = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + \cdots + b_N X(z) z^{-N},$$
$$if\ a_0 = 1$$

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{M} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{N} b_k X(z) z^{-k}$$

$$Y(z) + Y(z) \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}$$

$$Y(z)\left(1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}\right) = X(z) \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}$$

$$\boldsymbol{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}, \quad a_0 = 1}$$

Algoritmo de controlador discreto:

En el tiempo de muestreo:

1. Tomar la medida de la variable del proceso (AI)
2. Leer la referencia (AI)
3. Calcular el error.
4. Calcular la acción de control.
5. Actualizar valores.
6. Generar la salida del controlador hacia la planta (AO)

Encontramos la ecuación en diferencia del controlador discreto:

$$G_{cd}(z) = \frac{368.9z - 325.7}{z-1} * \left(\frac{z^{-1}}{z^{-1}}\right) = \frac{368.9 - 325.7z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$E(z)(368.9 - 325.7z^{-1}) = U(z)(1 - z^{-1})$$

$$368.9e(n) - 325.7e(n-1) = u(n) - u(n-1)$$

$$\boldsymbol{u(n) = 368.9e(n) - 325.7e(n-1) + u(n-1)}$$

Proceso discretizado:

$$G_{pd}(z) = \frac{0.0001488\,z\ +\ 0.0001083}{z^2\ -\ 1.382\,z\ +\ 0.3829} * \left(\frac{z^{-2}}{z^{-2}}\right) =$$

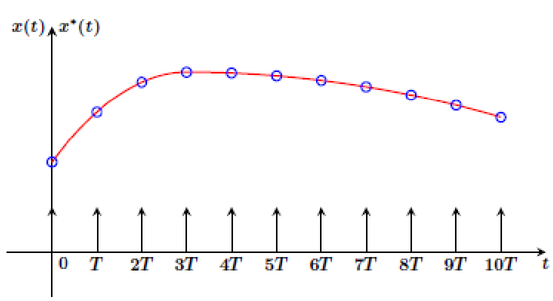
$$\frac{0.0001488\,z^{-1}\ +\ 0.0001083z^{-2}}{1\ -\ 1.382\,z^{-1}\ +\ 0.3829z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

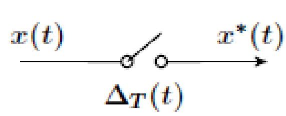
$$U(z)(0.0001488\,z^{-1}\ +\ 0.0001083z^{-2}) = Y(z)(1\ -\ 1.382\,z^{-1}\ +\ 0.3829z^{-2})$$

$$0.0001488\,u(n-1)\ +\ 0.0001083u(n-2) = y(n)\ -\ 1.382\,y(n-1)\ +\ 0.3829y(n-2)$$

$$\boldsymbol{y(n) = 0.0001488\,u(n-1) +\ 0.0001083u(n-2) + 1.382\,y(n-1) - 0.3829y(n-2)}$$

Muestreador ideal y relación entre s y z:





$$x^*(t) = x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty}x(t)\delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)$$

$$\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\infty}x(kT)\delta(t-kT)e^{-st}dt = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)\int_0^{\infty}\delta(t-kT)e^{-st}dt$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}\{x^*(t)\} = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)e^{-skT}}$$

$$\boldsymbol{Z\{x(kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty}x(kT)z^{-k}}$$

$$\boldsymbol{e^{-skT} = z^{-k} \dashrightarrow z = e^{sT}}$$

$$\boldsymbol{Ln\, z = Ln\, e^{sT} \dashrightarrow s = \frac{Ln\, z}{T}}$$

Mapeo entre s y z

$$z = e^{sT}, s = \sigma + j\omega$$

$$z = e^{(\sigma+j\omega)T} = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$$

$$e^{j\omega T} = \cos(\omega T) + jsin(\omega T) es\ periodicia$$

$$e^{j(\omega+2n\pi)T}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Caso I $\sigma < 0$

$$|z| = |e^{\sigma T}||e^{j\omega T}|$$

$$|e^{\sigma T}| < 1$$

Caso II $\sigma = 0$

$$|z| = |e^{j\omega T}| = 1$$

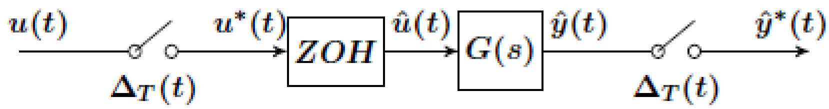
Caso III $\sigma > 0$

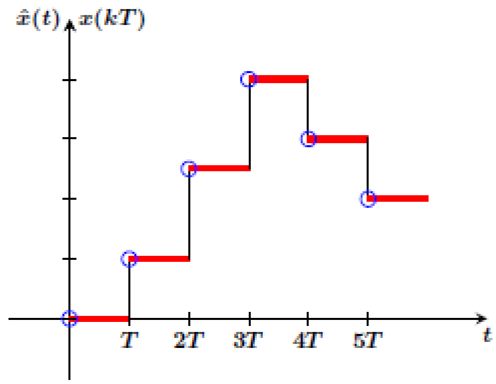
$$|z| = |e^{\sigma T}||e^{j\omega T}|$$

$$|e^{\sigma T}| > 1$$

Retenedor de orden cero (ZOH)

Un ZOH(Zero Order Hold) es un dispositivo cuya entrada es una señal muestreada y su salida una señal continua obtenida por extrapolación de un polinomio de orden cero en cada intervalo de muestreo $[kT, (k+1)T]$





Si $x(kT)$ es la señal de entrada, la salida $\hat{x}(t)$ es una combinación de señales escalón desplazadas en el tiempo

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\big(u(t-kT) - u(t-(k+1)T)\big)$$

La respectiva transformada de Laplace será:

$$\hat{X}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left(\frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(k+1)Ts}}{s}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}\frac{(1-e^{-Ts})}{s}$$

$$\hat{X}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}X^*(s)$$

Por lo tanto la función de transferencia del ZOH es:

$$\boldsymbol{G(s)_{ZOH} = \frac{\hat{X}(s)}{X^*(s)} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}}$$

Discretización de sistemas dinámicos

-Aprox. Lineal de $z = e^{sT}$ o por aprox. Discreta de la integral

La idea de la discretización por aprox. Lineal de $z = e^{sT}$ es obtener funciones de transferencia discretizadas $G_D(z)$ de $G(s)$ substituyendo la variable compleja s por una función racional lineal de la variable compleja z obtenida por una aprox. Racional lineal de la expresión $z = e^{sT}$.

Por ejemplo, si tenemos una ecuación diferencial expresada como:

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

Con la condición inicial $y(0)$. La función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

La solución de la ecuación diferencial es:

$$y(t) = y(0) + \int_{0}^{\infty} u(t)\, dt$$

A continuación, se verán tres métodos de discretización que permite obtener la función discretizada y la ecuación en diferencias discretizada de la solución de la ecuación diferencial.

1. Método de Euler (por diferencia en adelanto)
   La función exponencial e^{sT} puede escribirse como un desarrollo en la Serie de Taylor alrededor de s=0:

$$e^{sT} = 1 + Ts + \frac{1}{2}(Ts)^2 + \cdots$$

   Nos quedamos con el término de primer orden

$$e^{sT} \approx 1 + Ts$$

De aquí se obtiene el método de Euler, donde

$$\boldsymbol{z = 1 + Ts}$$

Por lo tanto, una función $G(s)$ puede corresponder a una función discretizada $G_D(z)$ usando la expresión anterior.

$$G_D(z) = G(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T}}$$

Tomando la función de transferencia anterior

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Su equivalente discreto será:

$$G_D(z) = G(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \boldsymbol{\frac{T}{z-1}}$$

Su respectiva ecuación en diferencias es:

$$G_D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{T}{z-1} * \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = U(z)Tz^{-1}$$

$$\boldsymbol{y(k) - y(k-1) = Tu(k-1)}$$

2. Método de Euler en atraso (por diferencia en atraso)
   La función exponencial e^{sT} puede escribirse como un desarrollo en la Serie de Taylor alrededor de s=0:

$$e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} = \frac{1}{1 - Ts + \frac{1}{2}(Ts)^2 - \cdots}$$

   Nos quedamos con el término de primer orden

$$e^{sT} \approx \frac{1}{1 - Ts}$$

De aquí se obtiene el método de Euler en atraso, donde

$$\boldsymbol{z = \frac{1}{1 - Ts}}$$

Por lo tanto una función $G(s)$ puede corresponder a una función discretizada $G_D(z)$ usando la expresión anterior.

$$G_D(z) = G(s)\big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$$

Tomando la función de transferencia anterior

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Su equivalente discreto será:

$$G_D(z) = G(s)\big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} = \boldsymbol{\frac{Tz}{z-1}}$$

Su respectiva ecuación en diferencias es:

$$G_D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{Tz}{z-1} * \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = U(z)T$$

$$\boldsymbol{y(k) - y(k-1) = Tu(k)}$$

3. Método de Tustin o transformación bilineal
   La función exponencial e^{sT} puede escribirse como un desarrollo en la Serie de Taylor alrededor de s=0:

$$e^{sT} = \frac{e^{\frac{Ts}{2}}}{e^{-\frac{Ts}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{2}Ts + \cdots}{1 - \frac{1}{2}Ts + \cdots}$$

Nos quedamos con el término de primer orden

$$e^{sT} \approx \frac{1+\frac{1}{2}Ts}{1-\frac{1}{2}Ts}$$

De aquí se obtiene el método de Tustin, donde

$$\boldsymbol{z = \frac{1+\frac{1}{2}Ts}{1-\frac{1}{2}Ts}}$$

Por lo tanto, una función $G(s)$ puede corresponder a una función discretizada $G_D(z)$ usando la expresión anterior.

$$G_D(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$$

Tomando la función de transferencia anterior

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

Su equivalente discreto será:

$$G_D(z) = G(s)|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = \boldsymbol{\frac{T(z+1)}{2(z-1)}}$$

Su respectiva ecuación en diferencias es:

$$G_D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \boldsymbol{\frac{T(z+1)}{2(z-1)}} * \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{T(1+z^{-1})}{2(1-z^{-1})}$$

$$Y(z)(1-z^{-1}) = \frac{T}{2}U(z)(1+z^{-1})$$

$$\boldsymbol{y(k) - y(k-1) = \frac{T}{2}u(k) + \frac{T}{2}u(k-1)}$$

Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{2.5s+1}$$

1. $G_D(z) = \frac{1}{2.5s+1}|_{s=\frac{z-1}{T}}$

$$T = 1$$

$$G_D(z) = \frac{1}{2.5(z-1)+1} = \frac{1}{2.5z-2.5+1} = \frac{1}{2.5z-1.5} = \frac{0.4}{z-0.6}$$

2. $G_D(z) = \frac{1}{2.5s+1}\Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}}$

$$T = 1$$

$$G_D(z) = \frac{1}{\frac{2.5(z-1)}{z}+1} = \frac{z}{2.5z-2.5+z} = \frac{z}{3.5z-2.5} = \frac{0.2857z}{z-0.7143}$$

3. $G_D(z) = \frac{1}{2.5s+1}\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}}$

$$T = 1$$

$$G_D(z) = \frac{1}{\frac{2.5*2(z-1)}{z+1}+1} = \frac{z+1}{5z-5+z+1} = \frac{z+1}{6z-4} = \frac{0.1667z+0.1667}{z-0.6667}$$

Discretización de un controlador PID ideal por el método de Euler en atraso

$$u(t) = K_p\left(e(t) + T_D\dot{e}(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right)$$

Derivamos con respecto al tiempo

$$\dot{u}(t) = K_p\left(\dot{e}(t) + T_D\ddot{e}(t) + \frac{1}{T_i}e(t)\right)$$

$$\dot{u}(t) \dashrightarrow \frac{u(k)-u(k-1)}{T}$$

$$\dot{e}(t) \dashrightarrow \frac{e(k)-e(k-1)}{T}$$

$$\ddot{e}(t) \dashrightarrow \frac{\frac{e(k)-e(k-1)}{T} - \frac{e(k-1)-e(k-2)}{T}}{T}$$

$$\frac{u(k)-u(k-1)}{T} = K_p\left(\frac{e(k)-e(k-1)}{T} + T_D\frac{e(k)-e(k-1)-\big(e(k-1)-e(k-2)\big)}{T^2} + \frac{1}{T_i}e(k)\right)$$

$$\frac{u(k)-u(k-1)}{T} = K_p\left(\frac{e(k)-e(k-1)}{T} + T_D\frac{e(k)-2e(k-1)+e(k-2)}{T^2} + \frac{1}{T_i}e(k)\right)$$

$$u(k)-u(k-1) = K_pT\left(\frac{e(k)-e(k-1)}{T} + T_D\frac{e(k)-2e(k-1)+e(k-2)}{T^2} + \frac{1}{T_i}e(k)\right)$$

$$u(k)-u(k-1) = K_p\left(e(k)-e(k-1) + T_D\frac{e(k)-2e(k-1)+e(k-2)}{T} + \frac{T}{T_i}e(k)\right)$$

Pasamos a Z:

$$U(z)(1-z^{-1}) = K_p\left(E(z)(1-z^{-1}) + \frac{T_DE(z)}{T}(1-2z^{-1}+z^{-2}) + \frac{T}{T_i}E(z)\right)$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p}{1 - z^{-1}} \left(1 - z^{-1} + \frac{T_D}{T}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) + \frac{T}{T_i}\right)$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{K_p}{1 - z^{-1}} \left(1 - z^{-1} + \frac{T_D}{T}(1 - z^{-1})^2 + \frac{T}{T_i}\right)$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T_D}{T}(1 - z^{-1}) + \frac{T}{T_i}\frac{1}{1 - z^{-1}}\right)$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z} + \frac{T}{T_i}\frac{z}{z-1}\right)$$

$$G_C(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = K_p \left(1 + \frac{T_D}{T}\frac{z-1}{z} + \frac{T}{T_i}\frac{z}{z-1}\right)$$

Ejemplo Controlador discreto:

$$G(z) = \frac{0.368\,z \;+\; 0.264}{z^2 \;-\; 1.368\,z \;+\; 0.368}$$

Controlador algebraico: polos deseados todos en 0

$$Ec.deseada = 2(2) - 1 = 3 \longrightarrow z^3 = 0$$

$$(Control)^1 x (Planta)^2 = (Deseado)^3$$

$$G_c(z) = \frac{q_1 z + q_0}{p_1 z + p_0}$$

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{(0.368\,z \;+\; 0.264)(q_1 z + q_0)}{(z^2 \;-\; 1.368\,z \;+\; 0.368)(p_1 z + p_0) + (0.368\,z \;+\; 0.264)(q_1 z + q_0)}$$

$$p_1 z^3 \;-\; 1.368 p_1\, z^2 \;+\; 0.368 p_1 z + p_0 z^2 - 1.368 p_0 z + 0.368 p_0 + 0.368 q_1 z^2 + 0.264 q_1 z + 0.368 q_0 z + 0.264 q_0 = 0$$

$$p_1 z^3 + z^2(p_0 - 1.368 p_1 + 0.368 q_1) \;+ z(\,0.368 p_1 - 1.368 p_0 + 0.264 q_1 + 0.368 q_0) + 0.368 p_0 + 0.264 q_0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.368 & 0 & -1.368 & 1 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & -1.368 \\ 0 & 0.264 & 0 & 0.368 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_0 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$