REPASO.

- **SISO:** Single Input- Single Output

La variable x(t) es la señal de entrada.

La variable y(t) es la señal de salida.

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo **(LTI)**, uno puede obtener la salida(respuesta) frente a cualquier entrada(estimulo), con la operación matemática conocida con el nombre de **convolución.**

$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Donde h(t) es la respuesta al impulso del sistema.

Vamos a usar la transformada de Laplace unilateral:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) * h(t)\} = U(s)H(s) = Y(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}} \; \boldsymbol{Funci\acute{o}n\ de\ transferencia}$$

Comentarios:

- Una función de transferencia es un modelo matemático que nos permite expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
- Esta función es independiente de la magnitud y naturaleza de las señales de excitación, es una propiedad propia del sistema.
- No proporciona información acerca de la estructura física del sistema, podemos obtener funciones idénticas de muchos sistemas físicamente diferentes.
- Permite comprender el comportamiento del sistema.
- Proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema.

Polinomio característico:

Dado la FT:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) y D(s) son funciones polinómicas en términos de la variable **s**. El polinomio característico es el denominador de mi función de transferencia, es decir D(s) es mi polinomio característico.

Ecuación característica:

$$D(s) = 0$$

Polos y ceros:

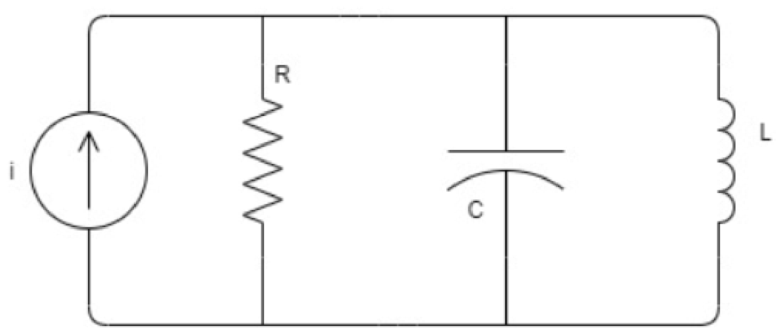
Los polos son las raíces del polinomio característico, es decir es la solución de la ecuación característica.

Los ceros son las raíces del numerador, es decir se resuelva la ecuación $N(s) = 0$.

Estabilidad:

Un sistema es estable si todas las partes reales de los polos del mismo son menores que 0.

Circuito RLC:



$$\boldsymbol{H(s) = \frac{V_C(s)}{I(s)}} = ?$$

$$i(t) = i_R + i_C + i_L$$

$$\boldsymbol{i(t) = \frac{v_C}{R} + C\frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{L}\int v_C(t)\, dt}$$

$$I(s) = \frac{V_C(s)}{R} + CsV_C(s) + \frac{1}{Ls}V_C(s)$$

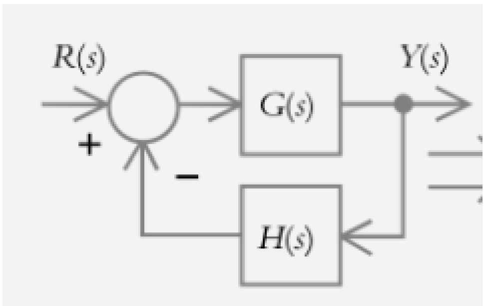
$$I(s) = V_C(s)\left(\frac{1}{R} + Cs + \frac{1}{Ls}\right) = V_C(s)\left(\frac{Ls}{RLs} + \frac{CsRLs}{RLs} + \frac{R}{RLs}\right)$$

$$I(s) = V_C(s)\left(\frac{Ls + RLCs^2 + R}{RLs}\right)$$

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{V_C(s)}{I(s)} = \frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R}}$$

Diagrama de bloques (DB):

Diagrama de bloques (Realimentación negativa/positiva):



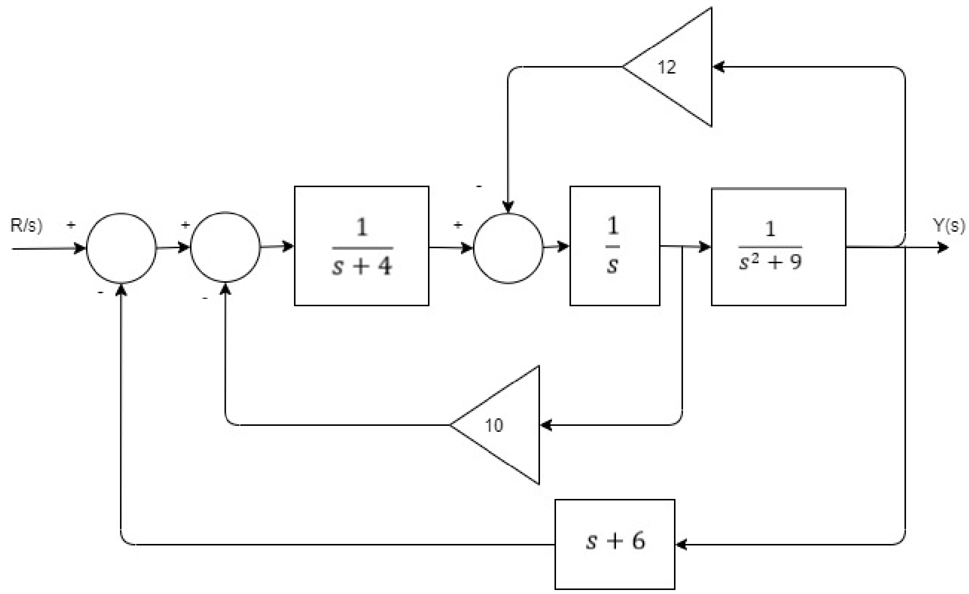
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

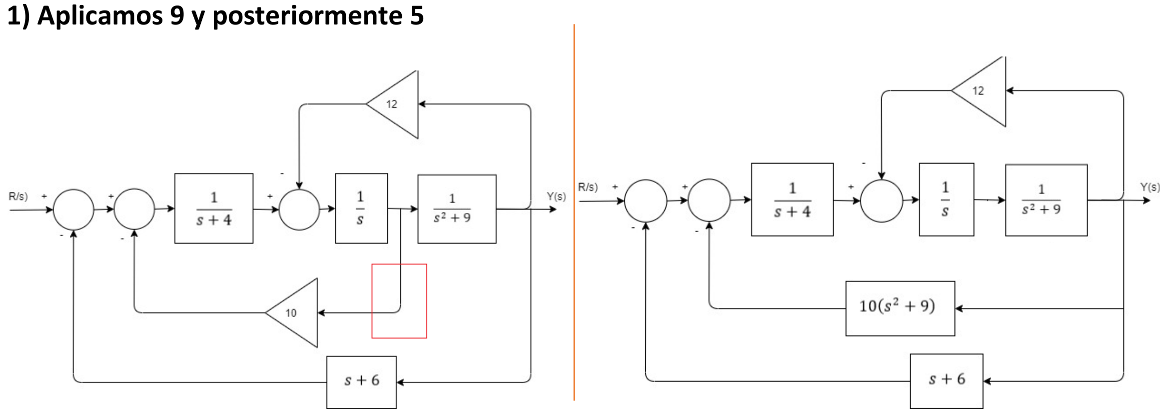
$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 \pm \frac{A(s)}{B(s)}\frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)}{B(s)\left(\frac{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}{B(s)D(s)}\right)} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}}}$$

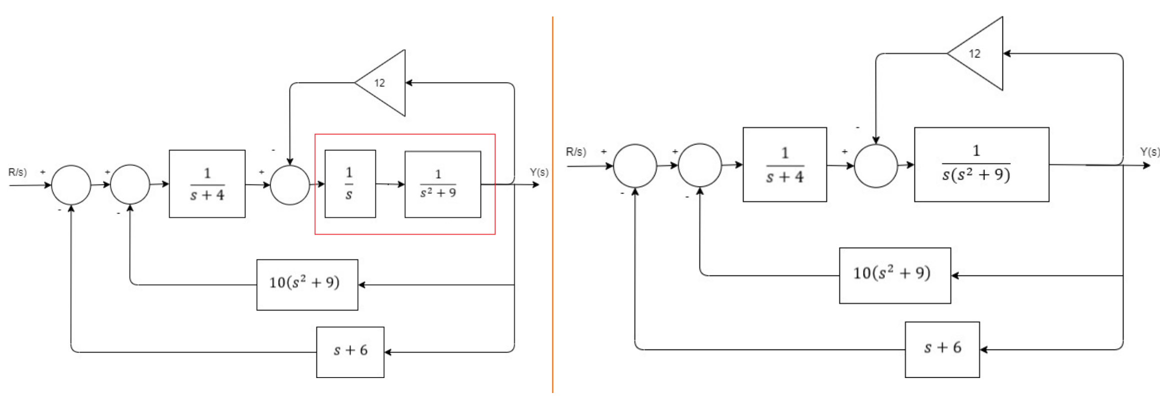
Encontrar la FT $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, del sistema descrito a continuación (use algebra de bloques):



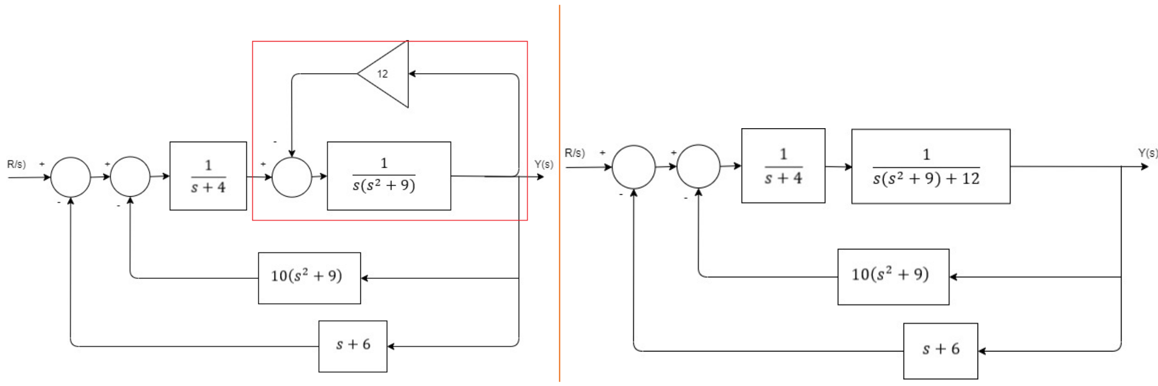
1) Aplicamos 9 y posteriormente 5



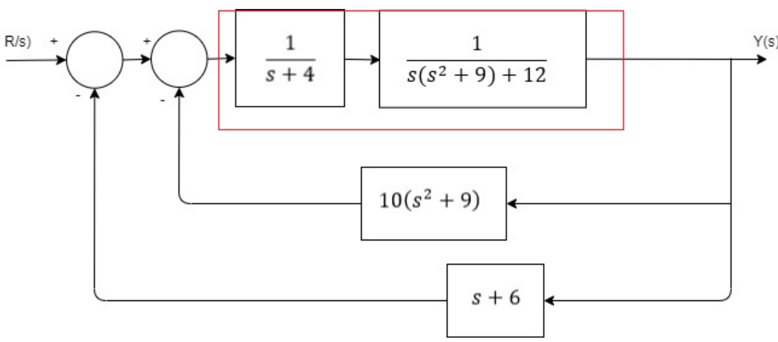
2) Aplicamos 5

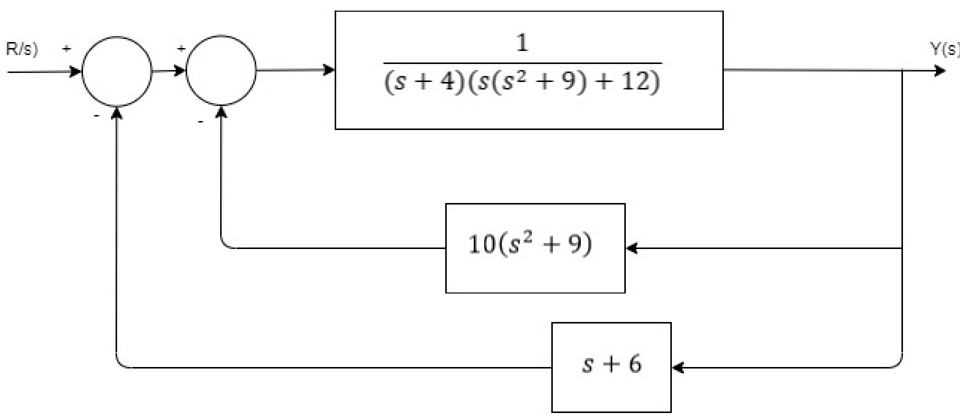


3) Aplicamos 11

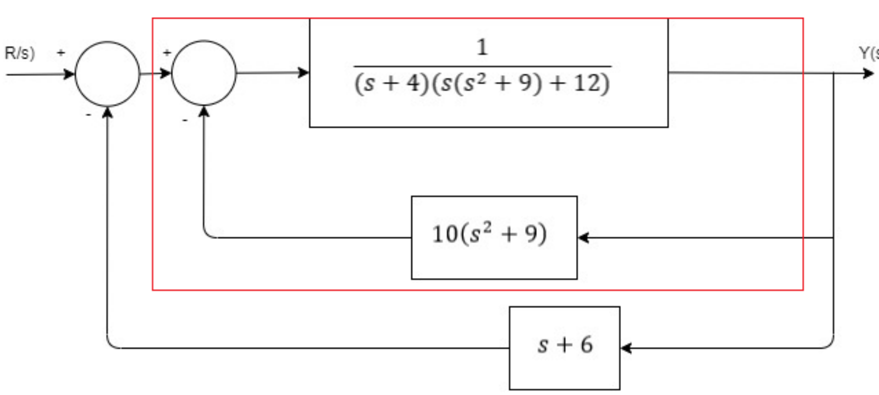


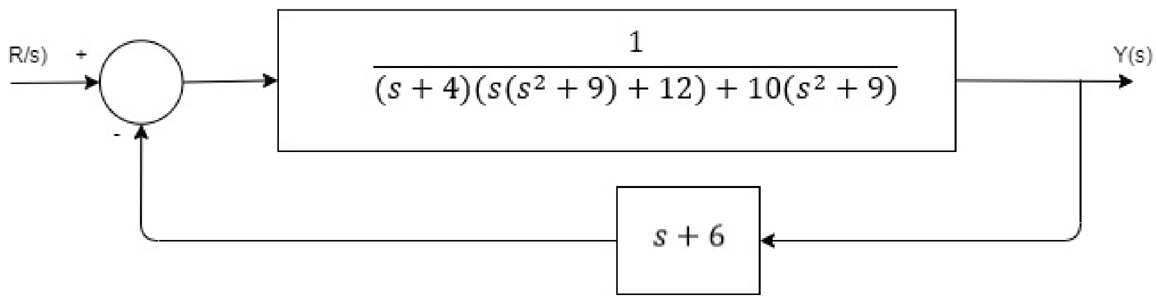
4) Aplicamos de nuevo 5





5) Aplicamos 11





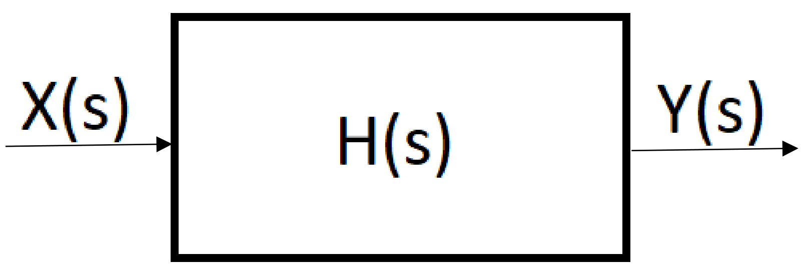
Finalmente aplicando 11 una vez más:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)+s+6}$$

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^4+4s^3+19s^2+49s+144}}$$

----------------------------Vamos a aquí----------------------

Sistema de primer orden



Un sistema de primer orden estándar es un sistema que tiene la siguiente función de transferencia (en su forma canónica)

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}} \quad (1)$$

Los parámetros del sistema son:

τ: Constante de tiempo del sistema, indica el tiempo en el que el sistema ha alcanzado el 63.21% de su valor final.

$$\tau \in \mathbb{R}^+$$

k: Ganancia estática del sistema, indica la relación entre la salida y la entrada después de mucho tiempo.

$$k \in \mathbb{R}, \quad k = \left.\frac{y(t)}{x(t)}\right|_{t\to\infty} \text{ ó } (en\ Laplace)\ k = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

Si se desea conocer, la ecuación diferencial de este sistema basta con aplicar Laplace inversa a (1):

$$Y(s)(\tau s + 1) = kX(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)(\tau s + 1)\} = \mathcal{L}^{-1}\{kX(s)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\tau s + Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{kX(s)\}$$

$$\boxed{\tau\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)}\ (2)$$

Una de las respuestas más comunes que se analizan para comprender la dinámica de estos sistemas es la respuesta al escalón. En este caso vamos a encontrar la respuesta al escalón unitario, es decir la entrada es $x(t) = u(t)$:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k}{\tau s + 1}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{k}{\tau s + 1}X(s), \quad X(s) = \frac{1}{s}$$

Se aplica Laplace inversa y en este caso se usa el método de fracciones parciales:

$$Y(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}$$

Al comparar las expresiones obtenidas en las fracciones parciales en una tabla de Transformada de Laplace se puede decir que:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B}{\tau s + 1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s} + \frac{B/\tau}{s + 1/\tau}\right\}$$

$$\boldsymbol{y(t) = \left(A + \frac{B}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}$$

Ahora bien, faltan encontrar las constantes A y B:

$$A = \left.\frac{k}{\tau s + 1}\right|_{s=0} = k$$

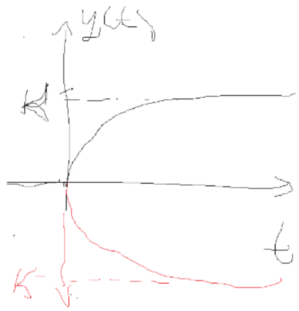
$$B = \left.\frac{k}{s}\right|_{s=-\frac{1}{\tau}} = -k\tau$$

Reemplazamos:

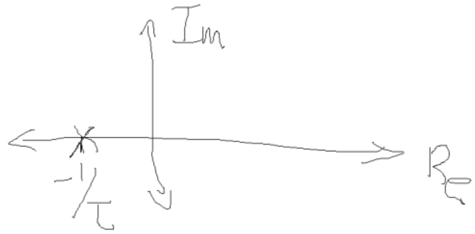
$$y(t) = \left(k - ke^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)}}\ \ (3)$$

¿Cómo es la gráfica en el tiempo de esta respuesta?



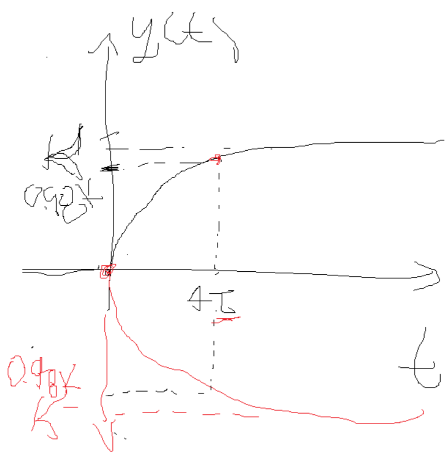
Mapa de polos y ceros



¿Qué es el tiempo de estabilización?

Es el tiempo que le toma al sistema alcanzar el 98% de su valor final:

$$\boxed{\boldsymbol{T_s = 4\tau}}$$



<u>**Sistemas de segundo orden**</u>

Un sistema de segundo orden en su forma canónica es un sistema cuya función de transferencia es la siguiente

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s \, + {\omega_n}^2}} \quad (1)$$

De esta manera se puede observar que los polos del sistema son:

$$\boxed{s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}} \quad (2)$$

Los parámetros del sistema $\xi\ y\ \omega_n$ (factor de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada, respectivamente) si nos referimos a un sistema físico, son constantes características de cada sistema y son mayores o iguales (caso del factor de amortiguamiento) que 0. Entonces **observando (2)** se puede afirmar lo siguiente

$$\xi \geq 0\ , \omega_n > 0\ \in\ \mathbb{R},\ \ por\ lo\ tanto\ el\ producto\ \ \xi\omega_n \geq 0$$

Siguiendo con esta idea el comportamiento temporal de la respuesta del sistema frente a una entrada especifica dependerá de los valores posibles que pueda adquirir el parámetro ξ. De esta manera se pueden tener 4 posibles casos:

Caso 1 Sistema sobre amortiguado $\boldsymbol{\xi > 1}$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar que el termino $\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ cumple que:

$$\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\ > 0\ \in\ \mathbb{R}\ \forall\, \xi > 1$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos diferentes para este caso, donde el factor de amortiguamiento toma valores mayores que 1. De esta forma los polos del sistema son:

$$\boxed{s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\ \ \in\ \mathbb{R}} \ (3)$$

$$\boxed{s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}\ \ \in\ \mathbb{R}} \ (4)$$

Dado que los polos del sistema son ambos reales y diferentes, falta establecer en donde se ubicarían en el plano complejo y determinar si el sistema es estable o inestable (recordar que la estabilidad depende de la ubicación de la parte real de los polos en el plano complejo). Si se factoriza ω_n en (2) se obtiene que:

$$\omega_n\left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)$$

Se sabe que $\omega_n > 0$, por lo tanto, se requiere analizar el factor $-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$ de la expresión anterior para establecer la ubicación de los polos y por lo tanto la estabilidad del sistema. Si se supone lo siguiente:

$$-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} < 0$$

$$\pm\sqrt{\xi^2 - 1} < \xi$$

$$\left(\pm\sqrt{\xi^2 - 1}\right)^2 < (\xi)^2$$

$$\xi^2 - 1 < \xi^2$$

$$\boxed{\mathbf{-1 < 0}}$$

Se puede verificar que esta inecuación **siempre** es válida, bajo el supuesto planteado. Si se plantea la inecuación con el símbolo mayor que(>) , se corrobora fácilmente que el supuesto es imposible, así se concluye que el factor $-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \in \mathbb{R} \ \forall \ \xi > 1$, por lo tanto también se puede concluir que los polos descritos en (3) y en (4) son siempre menores que 0, de esta manera el sistema es estable. Ahora bien, ¿qué polo estará más cerca al origen? Claramente se puede observar que el polo descrito en (4) será el polo mas alejado del origen mientras que el polo descrito en (3) será el polo más cerca del origen.

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s \ + {\omega_n}^2} = \frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Si la entrada del sistema x(t)=u(t), se puede calcular la salida, y(t), como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \qquad ==> \ Y(s) = \frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s1t} + Ce^{s_2 t})u(t)} \ (5)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} < 0$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (5) desaparecen después de cierto tiempo, y solo prevalece el valor de A.

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = {\omega_n}^2$$

Por lo tanto, las constantes A, B y C serán:

$$A = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)(s - s_2)}\right|_{s=0} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1 s_2} = \boldsymbol{k} = \ \boldsymbol{A > 0 \ if \ k > 0}$$

$$B = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_2)}\right|_{s=s_1} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{\boldsymbol{ks_2}}{\boldsymbol{s_1 - s_2}} = \boldsymbol{B < 0 \ if \ k > 0}$$

$$C = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_1)}\right|_{s=s_2} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_2(s_2 - s_1)} = \frac{\boldsymbol{ks_1}}{\boldsymbol{s_2 - s_1}} = \boldsymbol{C > 0 \ if \ k > 0}$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 2 Sistema críticamente amortiguado $\boldsymbol{\xi = 1}$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar que el termino $\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ cumple que:

$$\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} = 0 \quad \forall \ \xi = 1$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos iguales para este caso, donde el factor de amortiguamiento toma valores iguales a 1. De esta forma los polos del sistema son un par de polos reales iguales negativos, lo que conlleva a que el sistema es estable:

$$\boxed{s_1 = -\omega_n < 0 \ \in \ \mathbb{R} \ \forall \ \xi = 1} \ (6)$$

$$\boxed{s_2 = -\omega_n < 0 \ \in \ \mathbb{R} \ \forall \xi = 1} \ (7)$$

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s \ + {\omega_n}^2} = \frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)^2}$$

Si la entrada del sistema x(t)=u(t), se puede calcular la salida, y(t), como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \qquad ==> \ Y(s) = \frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{(s - s_1)^2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s1t} + Cte^{s_1 t})u(t)} \ (8)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} < 0$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (8) desaparecen después de cierto tiempo, y solo prevalece el valor de A.

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = {\omega_n}^2$$

Por lo tanto, las constantes A, B y C serán:

$$A = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)^2}\right|_{s=0} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1^2} = \boldsymbol{k} = \ \boldsymbol{A > 0 \ if \ k > 0}$$

$$B = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{k{\omega_n}^2}{s}\right]\right|_{s=s_1} = \left.-\frac{k{\omega_n}^2}{s^2}\right|_{s=s_1} = \boldsymbol{-k = B < 0 \ if \ k > 0}$$

$$C = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{s}\right|_{s=s_1} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1} = \boldsymbol{-k\omega_n = C < 0 \ if \ k > 0}$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 3 Sistema subamortiguado $\boldsymbol{0 < \xi < 1}$:

Si se toma la ecuación (2) y se reescribe el factor $\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ como $j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, se tiene que:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\sigma \pm \omega_d j \ \in \mathbb{C} \ \forall \ 0 < \xi < 1} \ (9)$$

Donde

$$\sigma = \xi\omega_n, constante\ de\ amortiguamiento, parte\ Real\ de\ los\ polos$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}\ , frecuencia\ de\ amortiguamiento, parte\ Imaginaria\ de\ los\ polos$$

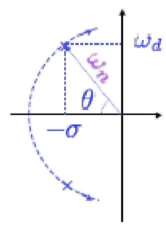


Figura 1. Diagrama de polos y ceros, caso subamortiguado

De esta forma los polos del sistema son un par de polos complejos conjugados cuya parte real es menor que 0, lo que conlleva a que el sistema sea estable:

$$\boxed{s_1 = -\sigma + \omega_d j \ \in \mathbb{C} \ \forall \ 0 < \xi < 1} \ (10)$$

$$\boxed{s_2 = -\sigma - \omega_d j \ \in \mathbb{C} \ \forall \ 0 < \xi < 1} \ (11)$$

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k{\omega_n}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s \ + {\omega_n}^2} = \frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Si la entrada del sistema x(t)=u(t), se puede calcular la salida, y(t), como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \qquad ==> \ Y(s) = \frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s1t} + Ce^{s_2 t})u(t)} \ (12)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} \ \in \mathbb{C}$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (12) son exponenciales complejas

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = {\omega_n}^2$$

Por lo tanto, las constantes A, B y C serán:

$$A = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{(s - s_1)(s - s_2)}\right|_{s=0} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1 s_2} = \boldsymbol{k = \ A > 0 \ if \ k > 0}$$

$$B = \left.\frac{k{\omega_n}^2}{s(s - s_2)}\right|_{s=s_1} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{ks_2}{s_1 - s_2} = \frac{k(-\sigma - \omega_d j\,)}{-\sigma + \omega_d j + \sigma + \omega_d j} = \frac{k(-\sigma - \omega_d j\,)}{2\omega_d j}$$

Se sabe que (ver Figura 1) la forma polar de los números complejos expresados en el numerador y denominador, son respectivamente:

$$-\sigma-\omega_d j=\sqrt{\sigma^2+\omega_d^2}\,e^{j(\pi+\theta)}=\omega_n e^{j(\pi+\theta)}$$

$$\omega_d j=\omega_d e^{j\pi/2}$$

Entonces

$$B=\frac{k\omega_n e^{j(\pi+\theta)}}{2\omega_d e^{j\pi/2}}=\frac{\boldsymbol{k e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}}{\boldsymbol{2\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$C=B^*=\frac{\boldsymbol{k e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}}{\boldsymbol{2\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Ahora reemplazando los resultados de estas constantes en la expresión (12) se tiene que:

$$y(t)=\left(k+\frac{k e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{s1t}+\frac{k e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{s_2 t}\right)u(t)$$

$$y(t)=\left(k+\frac{k e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\sigma+\omega_d j)t}+\frac{k e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\sigma-\omega_d j)t}\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\sigma t}e^{j\omega_d t}+\frac{e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\sigma t}e^{-j\omega_d t}\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left(e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}e^{j\omega_d t}+e^{-j\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}e^{-j\omega_d t}\right)\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left(e^{j\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)}+e^{-j\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)}\right)\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left(cos\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)+jsin\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)+cos\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\,jsin\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}}\left(2cos\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)\right)u(t)$$

$$y(t)=k\left(1+\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}cos\left(\omega_d t+\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right)u(t)$$

Se sabe que:

$$cos\left(\omega_d t+\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(\omega_d t+\theta)$$

De esta manera la respuesta de un sistema de segundo orden cuando la entrada es un escalón unitario es:

$$\boxed{\boldsymbol{y(t)=k\left(1-\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\omega_d t+\theta)\right)u(t)}}\ \mathbf{(13)}$$

Con

$$\cos\theta=\frac{\sigma}{\omega_n}=\frac{\xi\omega_n}{\omega_n}=\xi$$

$$\theta=\cos^{-1}\xi$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 4 Sistema marginalmente estable $\boldsymbol{\xi=0}$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar los polos del sistema son:

$$\boxed{s_1=\omega_n j\in\mathbb{I}\ \forall\,\xi=0}\ (14)$$

$$\boxed{s_2=-\omega_n j\ \in\ \mathbb{I}\ \forall\,\xi=0}\ (15)$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos complejos no repetidos sobre el eje imaginario (sin parte real). Debido a esto el sistema se denomina marginalmente estable.

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k{\omega_n}^2}{s^2+2\xi\omega_n s\ +{\omega_n}^2}=\frac{k{\omega_n}^2}{s^2+{\omega_n}^2}$$

Si la entrada del sistema x(t)=u(t), se puede calcular la salida, y(t), como sigue:

$$Y(s)=H(s)X(s),X(s)=\frac{1}{s}\qquad ==>\ Y(s)=\frac{k{\omega_n}^2}{s(s^2+{\omega_n}^2)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+{\omega_n}^2}$$

O también una posible expansión por fracciones parciales seria:

$$Y(s)=\frac{k{\omega_n}^2}{s(s^2+{\omega_n}^2)}=\frac{k{\omega_n}^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s-s_1}+\frac{C}{s-s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t)=(A+Be^{s1t}+Ce^{s_2t})u(t)}\ (16)$$

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1s_2={\omega_n}^2$$

De esta manera el cálculo de las constantes A, B y C expresadas en (16) son:

$$A = \left. \frac{k{\omega_n}^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \right|_{s=0} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1 s_2} = \boldsymbol{k} = \ \boldsymbol{A > 0\ if\ k > 0}$$

$$B = \left. \frac{k{\omega_n}^2}{s(s-s_2)} \right|_{s=s_1} = \frac{k{\omega_n}^2}{s_1(s_1-s_2)} = \frac{ks_2}{s_1-s_2} = \frac{k(-\omega_n j)}{\omega_n j + \omega_n j} = \frac{-k\omega_n j}{2\omega_n j} = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{B < 0\ if\ k > 0}$$

$$C = B^* = -\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{C < 0\ if\ k > 0}$$

Tomando estos valores y los polos descritos en (14) y (15) y sustituyendo en (16), se tiene que:

$$y(t) = \left(k - \frac{k}{2}e^{\omega_n jt} - \frac{k}{2}e^{-\omega_n jt}\right)u(t)$$

$$y(t) = k\left(1 - \frac{1}{2}\left(e^{\omega_n jt} + e^{-\omega_n jt}\right)\right)u(t)$$

$$y(t) = k\left(1 - \frac{1}{2}(\cos(\omega_n t) + jsin(\omega_n t) + \cos(\omega_n t) - jsin(\omega_n t)\right)u(t)$$

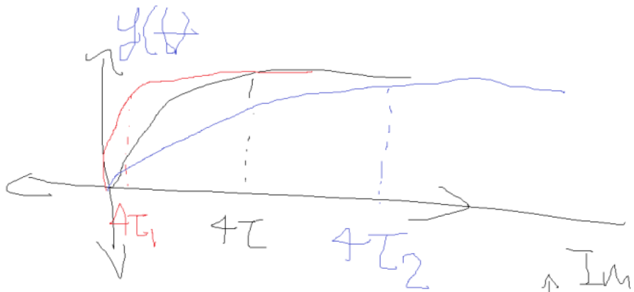
$$\boxed{\boldsymbol{y(t) = k(1 - \cos(\omega_n t))u(t)}}\ \boldsymbol{(17)}$$

De esta manera se puede observar que la salida estaría oscilando en valores de 0 y 2k cuando el tiempo tiende a infinito.

Nota: Se adiciona un script realizado en Matlab donde se puede ver gráficamente las respuestas obtenidas con anterioridad.

Estabilidad:

- Un sistema es **estable** si todos sus polos están situados en el semiplano complejo negativo.
- Un sistema es **inestable** si algún polo se ubica en el semiplano complejo positivo o si existen polos múltiples en el eje imaginario o en el origen.
- Un sistema es **marginalmente estable** si existe una pareja simple (no repetida) de polos imaginarios (parte real es 0), estando el resto de los polos en el semiplano negativo.
- Los polos que ubican en el semiplano negativo originan respuestas que se atenúan más rápido, si están mas alejados del eje imaginario. Se denominan **polos dominantes** aquellos que se ubican mas cerca del eje imaginario.
- Los polos complejos conjugados dan lugar a respuestas oscilatorias con frecuencia mas elevada cuando mayor es la distancia al eje real.



$\tau_1 < \tau < \tau_2$