Control 1 Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Carlos Mario Paredes

Agosto 2021

Este criterio es un método algebraico que proporciona información sobre la estabilidad absoluta de un sistema lineal e invariante en el tiempo. El criterio indica si cualquiera de las raíces de ecuación característica está en el semiplano derecho del plano s. También indica el numero de raíces que están sobre el eje $j\omega$ y en el semiplano derecho del plano.

Considerar que la ecuación característica de un sistema LTI tiene la forma:

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{1}$$

Para determinar la estabilidad se debe generar el siguiente arreglo conocido con el nombre de tabulación de Routh.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{s^n} & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot \\
\mathbf{s^{n-1}} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot \\
\mathbf{s^{n-2}} & A & B & C & \cdot \\
\mathbf{s^{n-3}} & D & E & \cdot & \cdot \\
\vdots & & & & \\
\mathbf{s^1} & F & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{s^0} & a_0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \tag{2}$$

Donde:

$$\begin{array}{ll}
A = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} & B = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \\
C = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} & D = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ A & B \end{vmatrix}}{A} \\
E = -\dfrac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ A & C \end{vmatrix}}{A} &
\end{array} \tag{3}$$

El número de cambios de signo en la primera columna es igual al numero de polos en el semiplano derecho del plano complejo. Además para que el sistema sea estable el signo de los elementos de la primera columna deben ser iguales.

0.1 Ejemplo

$$H(s) = \frac{3(s+8)}{s^5 + s^4 + 3s^3 + 9s^2 + 16s + 10} \tag{4}$$

Realizamos el arreglo:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{s^5} & 1 & 3 & 16 \\ \mathbf{s^4} & 1 & 9 & 10 \\ \mathbf{s^3} & A & B & 0 \\ \mathbf{s^2} & C & D & 0 \\ \mathbf{s^1} & F & 0 & 0 \\ \mathbf{s^0} & 10 & 0 & 0 \end{array} \tag{5}$$

Los valores de A, B, C, D y F son:

$$\begin{array}{ll} A = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix}}{1} = -(9-3) = -6 & B = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}}{1} = -(10-16) = 6 \\ C = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 6 \end{vmatrix}}{-6} = -\dfrac{(6+54)}{-6} = 10 & D = -\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = -\dfrac{60}{-6} = 10 \\ F = -\dfrac{\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}}{10} = -\dfrac{-60-60}{10} = 12 & \end{array} \tag{6}$$

Reemplazando

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{s^5} & 1 & 3 & 16 \\ \mathbf{s^4} & 1 & 9 & 10 \\ \mathbf{s^3} & -6 & 6 & 0 \\ \mathbf{s^2} & 10 & 10 & 0 \\ \mathbf{s^1} & 12 & 0 & 0 \\ \mathbf{s^0} & 10 & 0 & 0 \end{array} \tag{7}$$

Como hay dos cambios de signo el sistema tiene dos polos en le semiplano derecho del plano complejo por lo tanto el sistema es inestable.

0.2 Ejemplo (indeterminaciones)

$$H(s) = \frac{s+1}{s^3 + 2s + 3} \tag{8}$$

Realizamos el arreglo:

$$\begin{array}{lcc} \mathbf{s^3} & 1 & 2 \\ \mathbf{s^2} & 0 & 3 \\ \mathbf{s^1} & A & 0 \\ \mathbf{s^0} & 3 & 0 \end{array} \tag{9}$$

El valor de A es:

$$A = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{0} \tag{10}$$

Se puede observar que existe una indeterminación. Para este caso se realiza un cambio de variable, se cambia el $0 = \epsilon$, de este modo

$$\begin{array}{lcc} \mathbf{s^3} & 1 & 2 \\ \mathbf{s^2} & \epsilon & 3 \\ \mathbf{s^1} & A & 0 \\ \mathbf{s^0} & 3 & 0 \end{array} \tag{11}$$

El valor de A es:

$$A = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \epsilon & 3 \end{vmatrix}}{\epsilon} = -\frac{(3-2\epsilon)}{\epsilon} = \frac{2\epsilon-3}{\epsilon} \tag{12}$$

Se procede con calcular el limite cuando ϵ tiende a 0 para verificar los signos de la primera columna.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{2\epsilon - 3}{\epsilon} = -\infty \tag{13}$$

Como hay dos cambios de signo el sistema tiene dos polos en el semiplano derecho del plano complejo por lo tanto el sistema es inestable.

Un análisis que también se puede realizar es observar los signos de los coeficientes que están por encima y por debajo del 0 (ϵ). Si son iguales hay un par de raíces imaginarias.

0.3 Raíces imaginarias

$$H(s) = \frac{6}{s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4} \tag{14}$$

Realizamos el arreglo:

$$\begin{array}{lccc} \mathbf{s^5} & 1 & 8 & 7 \\ \mathbf{s^4} & 4 & 8 & 4 \\ \mathbf{s^3} & A & B & 0 \\ \mathbf{s^2} & C & D & 0 \\ \mathbf{s^1} & F & 0 & 0 \\ \mathbf{s^0} & 4 & 0 & 0 \end{array} \tag{15}$$

Los valores de A, B, C, D son:

$$
\begin{aligned}
A = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{(8-32)}{4} = 6 \quad B = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{(4-28)}{4} = 6 \\
C = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}}{6} = -\frac{(24-48)}{6} = 4 \quad D = -\frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}}{4} = -\frac{-24}{6} = 4 \\
F = -\frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}}{4} = 0
\end{aligned} \tag{16}
$$

Reemplazando

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{s^5} & 1 & 8 & 7 \\
\mathbf{s^4} & 4 & 8 & 4 \\
\mathbf{s^3} & 6 & 6 & 0 \\
\mathbf{s^2} & 4 & 4 & 0 \\
\mathbf{s^1} & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{s^0} & 4 & 0 & 0
\end{array} \tag{17}
$$

Como hay una fila de 0 en la fila de s^1. Entonces generamos una ecuación auxiliar $f(s) = 0$, mediante el uso de los coeficientes de la fila que se encuentra justo antes del renglón de 0. Encontramos la derivada de está ecuación auxiliar, $\frac{df}{ds} = 0$. Finalmente se reemplaza el renglón de 0 con los coeficientes de $\frac{df}{ds} = 0$.

$$
\begin{aligned}
f(s) = 4s^2 + 4 = 0 \\
\frac{df}{ds} = 8s = 0
\end{aligned} \tag{18}
$$

Reemplazando en el arreglo

$$
\begin{array}{cccc}
\mathbf{s^5} & 1 & 8 & 7 \\
\mathbf{s^4} & 4 & 8 & 4 \\
\mathbf{s^3} & 6 & 6 & 0 \\
\mathbf{s^2} & 4 & 4 & 0 \\
\mathbf{s^1} & 8 & 0 & 0 \\
\mathbf{s^0} & 4 & 0 & 0
\end{array} \tag{19}
$$

Finalmente se revisa los signos de la primera columna, de este nuevo arreglo. Se observa que no ha cambios de signo. Pero dado que salió la fila de ceros, el sistema tiene un par de raíces imaginarias, por lo tanto el sistema es marginalmente estable.

Las raíces imaginarias son la solución de la ecuación auxiliar:

$$
\begin{aligned}
f(s) = 4s^2 + 4 = 0 \\
s = \pm\sqrt{-1} = \pm j
\end{aligned} \tag{20}
$$

Aunque se realiza el análisis para este caso donde salen raíces imaginarias existen dos posibilidades. Una de ellas es que las raíces sean imaginarias y la otra posibilidad es que hay dos raíces con magnitudes iguales y signos opuestos.

0.4

$$H(s) = \frac{5}{s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16} \tag{21}$$

0.5

Encontrar los valores de K que permiten que el sistema sea estable y que el sistema sea marginalmente estable en lazo cerrado.

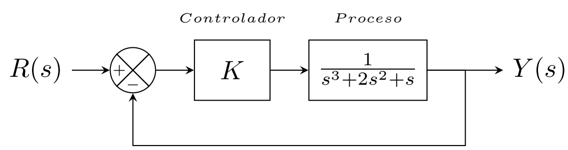

Fig. 1: Sistema en lazo cerrado

La ecuación característica del sistema en lazo cerrado es:

$$s^3 + 2s^2 + s + K = 0 \tag{22}$$

Realizamos el arreglo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{s^3} & 1 & 1 \\ \mathbf{s^2} & 2 & K \\ \mathbf{s^1} & A & 0 \\ \mathbf{s^0} & K & 0 \end{array} \tag{23}$$

El término A es:

$$A = -\frac{K-2}{2} = \frac{2-K}{2} \tag{24}$$

Para que el sistema sea estable, no debe haber cambio de signo en los elementos de la primero columna por lo tanto, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \frac{2-K}{2} > 0 \Rightarrow K < 2 \\ K > 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Por lo tanto el valor de esta ganancia debe ser $0 < K < 2$, para garantizar que todos los planos se ubiquen en el semiplano izquierdo del plano complejo.

Para que el sistema sea marginalmente estable, debe tener polos imaginarios no repetidos, para ello debe cumplir que un renglón este lleno de ceros. De tal forma que se debe cumplir es que $A = 0$:

$$\frac{2-K}{2} = 0 \Rightarrow K = 2 \tag{26}$$

Esto garantiza la condición mencionada. ¿Cuales son los valores de estos polos imaginarios?.