Tarea 5- Control Óptimo

Carlos Mario Paredes Valencia

Noviembre 13 2018

1) a) Dado el problema

$$\begin{aligned}&\min \int_1^2 (tu^2(t) + t^2x(t))dt\\ &\text{s.a:}\\ &x'(t) = -u(t)\\ &x(1) = 1\end{aligned}$$

El Hamiltoniano es:

$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = tu^2(t) + t^2x(t) + \lambda(-u(t))$

De esta manera el sistema diferencial adjunto es:

$\lambda' = -t^2; \lambda(2) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2tu - \lambda = 0 \Rightarrow u^* = \dfrac{\lambda}{2t}$(Condición de optimalidad)

Obteniendo así el siguiente sistema de optimalidad:

$$\begin{cases} x' = -\frac{\lambda}{2t}; x(1) = 1 \\ \\ \lambda' = -t^2; \lambda(2) = 0 \end{cases}$$

b) Dado el problema

$$\begin{aligned}&\min\ x^2(0) + \int_0^4 (u^2(t) + x(t))dt\\ &\text{s.a:}\\ &x'(t) = u(t)\\ &x(4) = 1\end{aligned}$$

El Hamiltoniano es:

$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = u^2(t) + x(t) + \lambda u(t)$

De esta manera el sistema diferencial adjunto es:

$\lambda' = -1; \lambda(0) = -2x(0)$ (Condición de transversalidad)

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = \dfrac{-\lambda}{2}$(Condición de optimalidad)

Obteniendo así el siguiente sistema de optimalidad:

$$\begin{cases} x' = \frac{-\lambda}{2}; x(4) = 1 \\ \\ \lambda' = -1; \lambda(0) = -2x^*(0) \end{cases}$$

2) Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\max \int_1^5 (u(t)x(t) - u^2(t) - x^2(t))dt \\ &\text{s.a:} \\ &x'(t) = x(t) + u(t) \\ &x(1) = 2 \end{aligned}$$

El Hamiltoniano es:

$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = u(t)x(t) - u^2(t) - x^2(t) + \lambda(x(t) + u(t))$

De esta manera el sistema diferencial adjunto es:

$\lambda' = -u + 2x - \lambda; \lambda(5) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow x - 2u + \lambda = 0 \Rightarrow u^* = \dfrac{(\lambda + x)}{2}$(Condición de optimalidad)

Si se verifica la $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = -2 < 0$, lo cual indica que u^* es un máximo.Obteniendo así el siguiente sistema de optimalidad:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{(\lambda + x)}{2} \Rightarrow x' = \frac{(\lambda + 3x)}{2}; x(1) = 2 \\ \\ \lambda' = -\frac{(\lambda + x)}{2} + 2x - \lambda \Rightarrow \lambda' = \frac{(3x - 3\lambda)}{2}; \lambda(5) = 0 \end{cases}$$

Dando solución a este sistema de ecuaciones diferenciales se tiene que:

$x^*(t) = 4.7308 * 10^{-6} e^{\sqrt{3}t} + 11.3043 e^{-\sqrt{3}t}$

$\lambda(t) = 2.1956 * 10^{-6} e^{\sqrt{3}t} - 73.0722 e^{-\sqrt{3}t}$

De esta manera el control óptimo es:

$u^* = 3.4632 * 10^{-6} e^{\sqrt{3}t} - 30.8839 e^{-\sqrt{3}t}$

3)
Dado el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\min \int_0^1 (x_2(t) + u^2(t))dt \\ &\text{s.a:} \\ &x_1'(t) = x_2(t); x_1(0) = 0, x_1(1) = 1 \\ &x_2'(t) = u(t); x_2(0) = 0 \end{aligned}$$

a)
El Hamiltoniano es:

$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = \lambda_0(x_2(t) + u^2(t)) + \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 u(t), \lambda_0 \in \{0, 1\}$

Para este problema se toman en cuenta dos casos:

Caso I: $\lambda_0 = 0$
De esta manera el sistema diferencial adjunto es:

$\lambda_1' = 0; \lambda_1(1) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\lambda_2' = -\lambda_1; \lambda_2(1) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$(Condición de optimalidad)

Obteniendo así el siguiente sistema de optimalidad:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; x_1(0) = 0, x_1(1) = 1 \\ \\ x_2' = u; x_2(0) = 0 \\ \\ \lambda_1' = 0; \lambda_1(1) = 0 \\ \\ \lambda_2' = -\lambda_1; \lambda_2(1) = 0 \end{cases}$$

Dando solución a este sistema de ecuaciones diferenciales se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1(t) = 0 \\ \lambda_2(t) = 0 \end{cases}$$

De este modo quedan dos ecuaciones diferenciales: $x_1' = x_2; x_1(0) = 0, x_1(1) = 1, x_2' = u, x_2(0) = 0$ que no se pueden resolver porque falta la expresión para $u(t)$.

Caso II: $\lambda_0 = 1$
De esta manera el sistema diferencial adjunto es:

$\lambda_1' = 0; \lambda_1(1) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\lambda_2' = -(1 + \lambda_1); \lambda_2(1) = 0$ (Condición de transversalidad)

$\dfrac{\partial H}{\partial u} = 2u + \lambda_2 = 0 \Rightarrow u^* = -\dfrac{\lambda_2}{2}$(Condición de optimalidad)

Obteniendo así el siguiente sistema de optimalidad:

$$\begin{cases} x_1' = x_2; x_1(0) = 0, x_1(1) = 1 \\ \\ x_2' = -\frac{\lambda_2}{2}; x_2(0) = 0 \\ \\ \lambda_1' = 0; \lambda_1(1) = 0 \\ \\ \lambda_2' = -(1 + \lambda_1); \lambda_2(1) = 0 \\ \end{cases}$$

Dando solución a este sistema de ecuaciones diferenciales se tiene que:

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^3}{2} + \frac{3t^2}{2} \\ x_2(t) = -\frac{3t^2}{2} + 3t \\ \lambda_1(t) = -7; t \neq 0 \\ \lambda_1(t) = 0; t = 0 \\ \lambda_2(t) = -6 + 6t \end{cases}$$

Así el control óptimo es:

$$\begin{cases} u^*(t) = 3 - 3t \end{cases}$$

b)

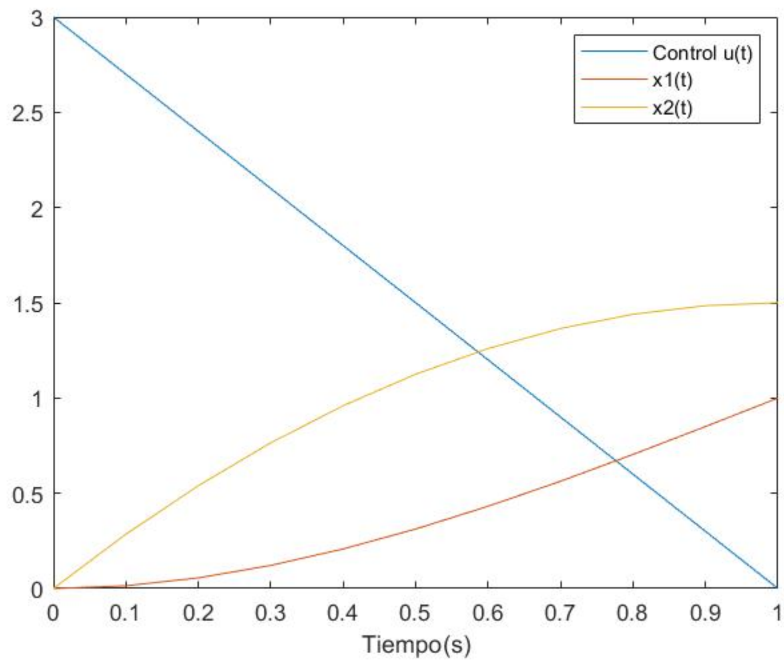

Figura 1: Evolución de los estados y el control