Tarea 4- Optimización lineal

Carlos Mario Paredes Valencia

Octubre 29 2018

1) Este problema presenta una no linealidad por el termino $|x_2|$. Además esta variable es una variable libre. Así, esta variable se transforma en:

$$\begin{gathered} x_2 = x_2^+ - x_2^- \\ |x_2| = x_2^+ + x_2^- \\ 0 \leq x_2^+ \leq \infty \\ 0 \leq x_2^- \leq \infty \end{gathered}$$

De esta forma el problema queda de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \min\ x_1 + x_2^+ + x_2^- + x_3 \\ \text{s.a:} \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- \leq 2 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_2^+ \geq 0 \\ x_2^- \geq 0 \end{array}$$

Así la forma canónica, da como resultado el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{l} \min\ x_1 + x_2^+ + x_2^- + x_3 \\ \text{s.a:} \\ x_1 + x_2^+ - x_2^- + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ x_1, x_2^+, x_2^+, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Donde la variable x_4 es una variable de holgura para la primera restricción.

2) Considerando el siguiente problema:

$$\begin{array}{l} \min\ 8x_1 - 4x_2 \\ \text{s.a:} \\ 4x_1 - 5x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 6 \\ x_1 - 6x_2 \geq -14 \end{array}$$

a) El gráfico correspondiente a la región factible (región no acotada) y sus vértices se muestran a continuación:
Vértices: $P_1 = (-1.25, 2.125), P_2 = (4.3158, 3.0526)$

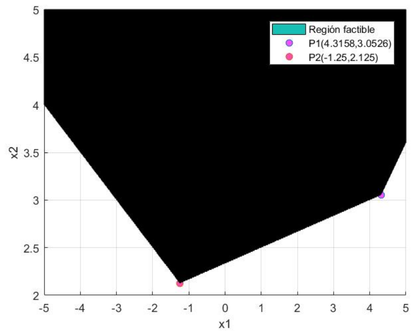

Figura 1: Región factible y vértices

b) Verificando el valor de la función $8x_1 - 4x_2$ en los puntos encontrados anteriormente da como resultado -18.5 en el punto (-1.25,2.125) y 22.316 en el punto (4.3158,3.0526). Al evaluar otro punto dentro de la región factible(diferente a los vértices) el valor del funcional objetivo es menor que el valor obtenido en el punto P_1, el cual daba como valor mínimo al evaluar los vértices. Esto indica que al ser la región factible no acotada no se puede encontrar un mínimo para esta función.

3)

a) Se definen las variables x_1 y x_2, para representar los dos tipos de arreglos respectivamente. De esta manera se plantea la función objetivo $P(x_1, x_2) = 20000x_1 + 10000x_2$, que representará el beneficio del florista.Igualmente se plantean tres restricciones asociadas a la disponibilidad de los tipos de flores que se tienen (rosas, tulipanes e hibiscos).

Primal

$$\begin{aligned}
&\max\ 20000x_1 + 10000x_2 \\
&\text{s.a:} \\
&3x_1 + x_2 \leq 300 \\
&x_1 + x_2 \leq 140 \\
&x_1 + 3x_2 \leq 300 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

b)

Dual

$$\begin{aligned}
&\min\ 300y_1 + 140y_2 + 300y_3 \\
&\text{s.a:} \\
&3y_1 + y_2 + y_3 \geq 20000 \\
&y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 10000 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

En este caso las variables de decisión y_1, y_2 y y_3, representan el precio de los diferentes tipos de flores que el florista tiene en su tienda, respectivamente. Se ve que la función objetivo del problema dual es $Q(y_1, y_2, y_3) = 300y_1 + 140y_2 + 300y_3$. Debido a esto se puede pensar este problema como qué valor unitario se puede ofrecer para cada tipo de flor, y poder llevar así una diversidad de flores.

c) Si se sabe que el óptimo del problema prima es $\overrightarrow{x}^* = (x_1, x_2)^T = (80, 60)^T$. Se puede aplicar el Teorema de Holgura Complementaria y obtener el óptimo del problema dual. Primero que todo encontramos la correspondiente forma estándar del problema dual planteado anteriormente.

$$\begin{aligned}
&\min\ 300y_1 + 140y_2 + 300y_3 \\
&\text{s.a:} \\
&3y_1 + y_2 + y_3 - y_4 = 20000 \\
&y_1 + y_2 + 3y_3 - y_5 = 10000 \\
&y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

Donde las variables y_4 y y_5, corresponden a las variables de holgura. De esta manera se tiene que:

$x_1 = 80 \Rightarrow y_4 = 0, 3y_1 + y_2 + y_3 = 20000$
$x_2 = 60 \Rightarrow y_5 = 0, y_1 + y_2 + 3y_3 = 10000$

Además verificando las restricciones de igualdad del primal con el óptimo dado, se presenta que la condición asociada a la disponibilidad del hibisco no se verifica con igualdad. Así, la variable de decisión $y_3 = 0$, y de este modo el sistema de ecuaciones resultantes a resolver para encontrar las variables de decisión del dual es:
$3y_1 + y_2 = 20000$
$y_1 + y_2 = 10000$

Solucionando, se encuentra que $y_1 = y_2 = 5000$. Se puede corroborar que el valor óptimo que alcanza el funcional objetivo es $P(x_1, x_2) = Q(y_1, y_2, y_3) = 2200000$. Este resultado se puede interpretar, que el florista venderá rosas y tulipanes a un mismo precio, y este precio es de 5000, además de que el hibisco lo ofrecerá gratis.