Tarea 1 Conceptos Básicos de Optimización

Estudiante: Carlos Mario Paredes

Parte I

1) Sean:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; y\, \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$S = \{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \,|A\vec{\boldsymbol{x}} \le \vec{\boldsymbol{b}}\} \; es\ convexo$$

Si se toman dos elementos que pertenezcan al conjunto S, $\vec{\boldsymbol{y}}\ y\ \vec{\boldsymbol{x}}$**:**

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in S$$

Entonces, si se demuestra la siguiente expresión se comprueba que el conjunto S es convexo:

$$\lambda\vec{\boldsymbol{x}} + (1-\lambda)\vec{\boldsymbol{y}} \in S\,, \lambda \in [0,1]$$

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \end{pmatrix} \in S \quad (1)$$

Como los dos elementos $\vec{\boldsymbol{y}}\ y\ \vec{\boldsymbol{x}}$**,** pertenecen a S, se cumple lo siguiente

$$A\vec{\boldsymbol{x}} \le \vec{\boldsymbol{b}}, \quad A\vec{\boldsymbol{y}} \le \vec{\boldsymbol{b}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ahora como (1) pertenece a S, también cumple lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x_1 + (1-\lambda)y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + \cdots + a_{1n}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda x_1 + (1-\lambda)y_1) + \cdots + a_{mn}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Factorizando $\lambda\ y\ (1-\lambda)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + (1-\lambda)(a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n) \\ \vdots \\ \lambda(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) + (1-\lambda)(a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mn}y_n) \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

Si los valores obtenidos en (2) se sustituyen en (3) se tiene que:

$$\begin{pmatrix} \lambda b_1 + (1-\lambda)b_1 \\ \vdots \\ \lambda b_m + (1-\lambda)b_m \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\lambda+(1-\lambda)\\ \vdots\\ \lambda+(1-\lambda)\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \vdots\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \vdots\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

En este caso queda demostrada la igualdad. Ahora si se desea corroborar la desigualdad, se selecciona una fracción menor que 1 asociado a la inecuación (2) y se sustituye en (3), por ejemplo:

$$\begin{pmatrix}0.5\lambda b_1+0.5(1-\lambda)b_1\\ \vdots\\ 0.5\lambda b_m+0.5(1-\lambda)b_m\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}0.5\lambda+0.5(1-\lambda)\\ \vdots\\ 0.5\lambda+0.5(1-\lambda)\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}\mathbf{0.5}\\ \vdots\\ \mathbf{0.5}\end{pmatrix}\leq\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ \vdots\\ \mathbf{1}\end{pmatrix}$$

Demostrando así que el conjunto S es un conjunto convexo.

2) Como

$$f(\vec{\boldsymbol{x}})=x_1^2+5x_2^2-4x_1+3x_2+x_3^2$$

Entonces:

$$\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}2x_1-4\\ 10x_2+3\\ 2x_3\end{pmatrix}$$
$$H_f(\vec{\boldsymbol{x}})=\nabla^2 f(\vec{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}2&0&0\\ 0&10&0\\ 0&0&2\end{pmatrix}$$
$$M_1=|2|=2>0$$
$$M_2=\begin{vmatrix}2&0\\ 0&10\end{vmatrix}=20>0$$
$$M_2=\begin{vmatrix}2&0&0\\ 0&10&0\\ 0&0&2\end{vmatrix}=2>0$$

Como todos los menores asociados a la matriz $H_f(\vec{\boldsymbol{x}})$ son **mayores** que **0** entonces esta matriz es **definida positiva**, por lo tanto, **f** es **estrictamente convexa**.

3) Como

$$f(\vec{\boldsymbol{x}})=x_1^4-2px_1^2-x_2^2+3$$

$$\nabla f(\vec{\boldsymbol{x}})=\begin{pmatrix}4x_1^3-4px_1\\ -2x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

El sistema de ecuaciones resultantes es:

$$4x_1^3-4px_1=0,-2x_2=0$$

De esta manera los puntos críticos de f son:

$$x_2=0$$
$$4x_1(x_1^2-p)=0$$

$$x_1 = 0, x_1 = \pm\sqrt{p}$$

$$\boldsymbol{P1} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}), \qquad \boldsymbol{P2} = \left(\sqrt{\boldsymbol{p}}, \mathbf{0}\right), \qquad \boldsymbol{P3} = (-\sqrt{\boldsymbol{p}}, \mathbf{0})$$

Para corroborar que son máximos y/o mínimos se encuentra la Hessiana:

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 12x_1^2 - 4p & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Sus respectivos menores principales son:

$$M_1 = \left|12x_1^2 - 4p\right| = 4(3x_1^2 - p)$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 12x_1^2 - 4p & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 8(p - 3x_1^2)$$

Caso 1: p=0

Para P1, los menores son:

$$M1 = 0$$
$$M2 = 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida. P1** es un **punto de silla.**

Para P2, los menores son:

$$M1 = 4(3p) = 0$$
$$M_2 = 8(-3p) = 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida. P2** es un **punto de silla.**

Para P3, los menores son:

$$M1 = 4(3p) = 0$$
$$M_2 = 8(-3p) = 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida. P3** es un **punto de silla.**

Caso 2: p>0

Para P1, los menores son:

$$M1 = -4p < 0$$
$$M2 = 8p > 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **definida negativa**, el punto **P1=(0,0)** es un **máximo**.

Para P2, los menores son:

$$M1 = 4(3p - p) = 8p > 0$$
$$M_2 = 8(p - 3p) = -16p < 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida,** el punto **P2=($\sqrt{p}$,0)** es un **punto de silla**.

Para P3, los menores son:

$$M1 = 4(3p - p) = 8p > 0$$
$$M_2 = 8(p - 3p) = -16p < 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida,** el punto **P3=($-\sqrt{p}$,0)** es un **punto de silla**.

Caso 3: p<0

Para P1, los menores son:

$$M1 = -4p > 0$$
$$M2 = 8p < 0$$

La matriz $H_f(x_1, x_2)$ es **indefinida**. **P1** es un **punto de silla.**

Para P2 y P3 aunque se puede corroborar que la Hessiana es definida negativa no tiene sentido por que al ser p<0 los puntos P2 y P3 son puntos que se encontrarían en el plano **Imaginario,** por ende se concluye que este critico no es ni máximo ni mínimo.

Parte II

4) Sea f (x, y) la cantidad de calor que se desprende en una reacción química al interactuar x moléculas de un compuesto en y moléculas de otro:

$$f(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

Para determinar el número de moléculas de cada compuesto que maximiza la cantidad de calor, el problema a resolver es el siguiente:

$$\max_{(x,y)\in \mathbb{R}^2} -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$

Entonces:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -10x - 2y + 42 \\ -16y - 2x + 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales, se obtiene que

$$x = 3, y = 6$$

Entonces se tiene un solo punto crítico en (3,6). Para verificar que es un máximo se calcula la matriz Hessiana en el punto crítico.

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -16 \end{pmatrix} = cte \ \forall \ (x,y)$$

$$M_1 = |-10| = -10 < 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -16 \end{vmatrix} = 156 > 0$$

Dado M1<0 y M2>0 la matriz Hessiana es **definida negativa**, por lo tanto, el **punto (3,6) es un máximo** y el calor máximo es:

$$\boldsymbol{f(3,6) = 369}$$

5) El problema a resolver es un problema de mínimos cuadrados, que para n cantidad de datos tomados, es para este caso:

$$\min_{g\,\in\,\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{n} \left(s_i - \frac{g}{2} t_i^2\right)^2$$

a) Tomando los datos de la tabla, el problema a resolver es un problema de minimización, donde se busca encontrar un hiperplano que minimice la suma de los errores al cuadrado.

$$\min_{g\,\in\,\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} \left(s_i - \frac{g}{2} t_i^2\right)^2$$

La función objetivo se puede escribir de la siguiente forma

$$V(\theta) = \|Y - G(k, \Phi(k), \theta)\|^2{}_2$$

Para el caso específico Y será igual a los datos tomados de la distancia mientras que el modelo será representado por $G(k, \Phi(k), \theta) = \frac{gt_k^2}{2} = \Phi(k)\theta$, donde $\Phi(k) = \frac{t_k^2}{2}$ es el regresor y $\theta = g$, es el parámetro por estimar. Para minimizar esta función objetivo se calcula:

$$\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial (Y - \Phi\theta)}{\partial \theta} = 0$$
$$-2\Phi^T(Y - \Phi\theta) = 0$$
$$\Phi^T Y - \Phi^T \Phi\theta = 0$$
$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi\theta$$
$$\left(\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\Phi}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}$$

De esta manera se puede plantear el sistema descrito a continuación:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_1^2}{2} \\ \frac{t_2^2}{2} \\ \frac{t_3^2}{2} \end{bmatrix} [g], \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = Y, \begin{bmatrix} \frac{t_1^2}{2} \\ \frac{t_2^2}{2} \\ \frac{t_3^2}{2} \end{bmatrix} = \Phi, g = \theta$$

Donde lo que se busca es obtener el parámetro g, usando el resultado anterior:

$$\mathrm{g} = \Phi^{+}S, \Phi^{+} = \left(\Phi^{\mathrm{T}}\Phi\right)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}$$
$$donde\ \Phi^{+}\ es\ la\ pseudoinversa\ de\ \Phi$$

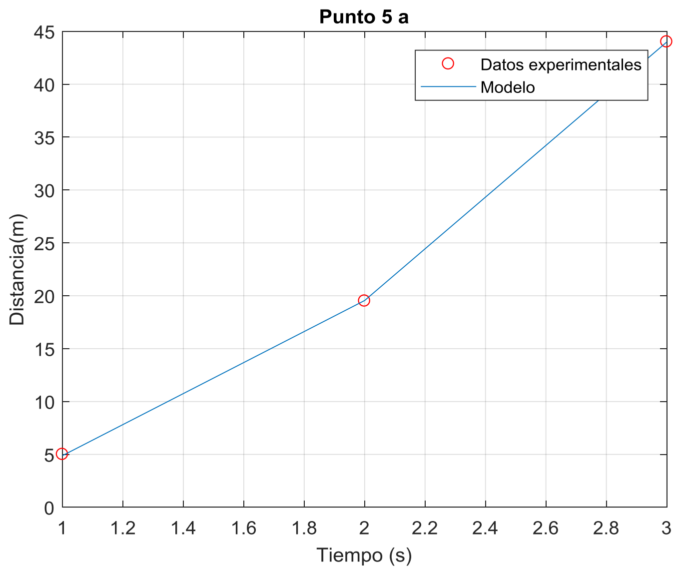
El problema se resuelve con el siguiente código escrito en Matlab:

```
clear
clc
close all

%Datos experimentales punto a)

s=[5 19.5 44]'; %Distancia medida en metros
t=[1 2 3]';     %Tiempo en segundos
%Se arma el sistema
Y=s;
phi=t.^2/2;
tetha=phi\Y; %Calculo del parámetro g en m/s^2
g=tetha;
%Comprobando modelo
se=g*t.^2/2;

plot(t,s,'or')
hold on
plot(t,se)
legend('Datos experimentales','Modelo')
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Distancia(m)');
grid on
title('Punto 5 a')
```



De esta manera se obtiene que $\boldsymbol{g} = \mathbf{9.7755}\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{s}^2}$

b) Siguiendo la misma idea, pero con el dato adicional, el sistema a solucionar queda descrito por:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_1^2}{2} \\ \frac{t_2^2}{2} \\ \frac{t_3^2}{2} \\ \frac{t_4^2}{2} \end{bmatrix} [g]$$

Igualmente se soluciona con Matlab, el siguiente código realiza el procedimiento:

```
%Datos experimentales punto b)
s=[5 19.5 44 78.5]'; %Distancia medida en metros
t=[1 2 3 4]';      %Tiempo en segundos
%Se arma el sistema
Y=s;
phi=t.^2/2;
tetha=phi\Y; %Calculo del parámetro g en m/s^2
g=tetha;
%Comprobando modelo
se=g*t.^2/2;

figure
plot(t,s,'or')
hold on
plot(t,se)
```

```
legend('Datos experimentales','Modelo')
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Distancia(m)');
grid on
title('Punto 5 b')
```

De esta manera se encuentra que el nuevo valor de $\boldsymbol{g = 9.8023\frac{m}{s^2}}$