Tarea 2 Optimización con restricciones

Parte I

1) **Recopilación de datos:** disponibles en la descripción del sistema.
Definición de las variables de decisión:
x_1: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.8m provenientes del producto de 1.2m.
x_2: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.6m provenientes del producto de 1.2m.
x_3: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.5m provenientes del producto de 1.2m.
x_4: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.8m provenientes del producto de 2.1m.
x_5: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.6m provenientes del producto de 2.1m.
x_6: cantidad de madera aserrada 4x4 de longitud 0.5m provenientes del producto de 2.1m.

Criterio de optimización: la función objetivo del problema es una función de costo cuyas unidades serán $, y se plantea de la siguiente manera:

$$C(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 300(x_1 + x_2 + x_3) + 350(x_4 + x_5 + x_6)$$

Dado esto el problema se centra en:

$$\min_{\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in \mathbb{Z}^+\}} 300(x_1 + x_2 + x_3) + 350(x_4 + x_5 + x_6)$$

Formulación de restricciones:

$$x_1 + x_4 \geq 1500$$

$$x_2 + x_5 \geq 800$$

$$x_3 + x_6 \geq 2400$$

De esta forma, el problema de optimización es:

$$\min_{\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)\in \mathbb{Z}^+\}} 300(x_1 + x_2 + x_3) + 350(x_4 + x_5 + x_6)$$

s.a:

$$x_1 + x_4 \geq 1500$$

$$x_2 + x_5 \geq 800$$

$$x_3 + x_6 \geq 2400$$

2) **Recopilación de datos:** disponibles en la descripción del sistema.
Definición de las variables de decisión: si se considera la matriz $A = [a_{ij}]$, donde i hace referencia a la sinfonía, es decir que i=1,2,…,7, mientras que j se refiere al musico, donde j=A,B,…,I. De este modo la matriz A correspondiente será:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tener en cuenta una constante c_j, que se refiere al costo por sinfonía del j-ésimo musico, de esta forma si j=A,D,F,I $c_j = 2$, si j=B,C,G $c_j = 3$ y si j=E,H $c_j = 1$. De esta manera el problema es reordenar las filas de A de manera que sea mínima la suma del número de unos y ceros en una misma columna j por el costo asociado a esa columna j. Así se determina una variable de decisión:

$$x_{ik} = \begin{cases} 1 \; si \; la \; sinfonía \; i \; se \; toca \; en \; la \; posición \; j \\ 0 \; en \; otros \; casos \end{cases}$$

Donde $i, k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Además para cada j-ésimo musico se considera la variable e_j, que representara la posición en el orden final de la primera sinfonía donde sea necesrio el j-ésimo musico y la variable s_j que representará la posición en el orden final de la última sinfonía donde sea necesario el j-ésimo musico, siendo $j \in \{A, B, C, D, E, F, G, H, I\}$.

Criterio de optimización: de este modo, el problema de optimización se refiere a reordenar las sinfonías (filas de la matriz A), de modo que el coste total del pago a los músicos sea mínimo. Un planteamiento de una función objetivo para lograr esto, puede ser:

$$\min_{x_{ik} \in \{0,1\}} \sum_{j \in \{A..,I\}} (s_j + 1 - e_j) c_j$$

Formulación de restricciones:

$$\sum_{k \in \{1,..,7\}} x_{ik} = 1 \quad para \; todo \; i \in \{1,..,7\}$$

$$\sum_{i \in \{1,..,7\}} x_{ik} = 1 \quad para \; todo \; k \in \{1,..,7\}$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} para \; todo \; i, k \in \{1,..,7\}$$

$$\sum_{k \in \{1,..,7\}} k x_{ik} \geq e_j \quad para \; todo \; i \in \{1,..,7\}, j \in \{A,..,I\}: a_{ij} = 1$$

$$\sum_{k \in \{1,..,7\}} k x_{ik} \leq s_j \quad para \; todo \; i \in \{1,..,7\}, j \in \{A,..,I\}: a_{ij} = 1$$

De esta forma el problema de optimización es:

$$\min_{x_{ik} \in \{0,1\}} \sum_{j \in \{A..,I\}} (s_j + 1 - e_j) c_j$$

s.a:

$$\sum_{k \in \{1,..,7\}} x_{ik} = 1 \quad para \; todo \; i \in \{1,..,7\}$$

$$\sum_{i \in \{1,..,7\}} x_{ik} = 1 \quad para \; todo \; k \in \{1,..,7\}$$

$$x_{ik} \in \{0,1\} para\ todo\ i,k\ \in \{1,..,7\}$$

$$\sum_{k\ \in\{1,..,7\}} kx_{ik} \geq e_j \quad para\ todo\ i \in \{1,..,7\}, j \in \{A,..,I\}: a_{ij} = 1$$

$$\sum_{k\ \in\{1,..,7\}} kx_{ik} \leq s_j \quad para\ todo\ i \in \{1,..,7\}, j \in \{A,..,I\}: a_{ij} = 1$$

Parte II

3)

$$\min_{\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3\}} 3x + y - z^2$$
$$s.a \qquad x + y + z \geq 0$$
$$-x + 2y + z^2 = 0$$

Reescribimos la restricción de desigualdad de tal forma que quede la función de restricción menor o igual a 0. De esta forma

$$\min_{\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3\}} 3x + y - z^2$$
$$s.a \qquad -\ x - y - z \leq 0$$
$$-x + 2y + z^2 = 0$$

Posteriormente agregamos la variable de holgura s_1 y convertimos la restricción de desigualdad en una restricción de igualdad.

$$\min_{\{(x,y,z)\in\ \mathbb{R}^3\}} 3x + y - z^2$$
$$s.a \qquad -\ x - y - z + s_1^2 = 0$$
$$-x + 2y + z^2 = 0$$

De esta manera el lagrangiano para este caso será:

$$L = 3x + y - z^2 + \lambda_1(-x + 2y + z^2) + \mu_1(-\ x - y - z + s_1^2)$$

Aplicando las derivadas parciales correspondientes a la función L, se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\mathbf{3 - \lambda_1 - \mu_1 = 0}}$$
$$\boxed{\mathbf{1 + 2\lambda_1 - \mu_1 = 0}}$$
$$\boxed{\mathbf{-2z + 2z\lambda_1 - \mu_1 = 0}}$$
$$\boxed{\mathbf{-x + 2y + z^2 = 0}}$$
$$\boxed{\mathbf{-\ x - y - z + s_1^2 = 0}}$$
$$\boxed{\mathbf{2s_1\mu_1 = 0}}$$

4)

$$\underset{\{(x,y)\in\,\mathbb{R}^2\}}{\text{máx}} \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t})dt$$
$$s.a \qquad y - x = c$$

Reescribiendo la restricción de igualdad se tiene que:

$$\underset{\{(x,y)\in\,\mathbb{R}^2\}}{\text{máx}} \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t})dt$$
$$s.a \qquad y - x - c = 0$$

De esta manera el lagrangiano para este caso será:

$$L = \int_x^y (e^{-t} - e^{-2t})dt + \lambda_1(y - x - c)$$

Aplicando las derivadas parciales correspondientes a la función L, se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-2x} - e^{-x} - \lambda_1 = 0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{e^{-y} - e^{-2y} + \lambda_1 = 0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y - x - c = 0}}$$

Parte III

5)

$$\underset{\{(x,y)\in\,\mathbb{R}^2\}}{\text{mín}} x^2 + y^2$$
$$s.a \qquad x + y = 5$$
$$xy \geq 4$$
$$(x-4)^2 + (y-2)^2 \leq 1$$

Reescribiendo

$$\underset{\{(x,y)\in\,\mathbb{R}^2\}}{\text{mín}} x^2 + y^2$$
$$s.a \qquad x + y - 5 = 0$$
$$-xy \leq -4$$
$$(x-4)^2 + (y-2)^2 - 1 \leq 0$$

Reescribiendo

$$\underset{\{(x,y)\in\,\mathbb{R}^2\}}{\text{mín}} x^2 + y^2$$
$$s.a \qquad x + y - 5 = 0$$
$$-xy + 4 \leq 0$$

$$(x-4)^2+(y-2)^2-1\leq 0$$

Reescribiendo

$$\min_{\{(x,y)\in \mathbb{R}^2\}} x^2+y^2$$
$$s.a \quad x+y-5=0$$
$$-xy+4+s_1^2=0$$
$$(x-4)^2+(y-2)^2-1+s_2^2=0$$

Entonces el lagrangiano será:

$$L=x^2+y^2+\lambda_1(x+y-5)+\mu_1(-xy+4+s_1^2)+\mu_2((x-4)^2+(y-2)^2-1+s_2^2)$$

Aplicando la **condición estacionaria**, se encuentran el siguiente sistema de ecuaciones:

$$2x+\lambda_1-\mu_1 y+2\mu_2(x-4)=0$$

$$2y+\lambda_1-\mu_1 x+2\mu_2(y-2)=0$$

$$x+y-5=0$$

$$-xy+4+s_1^2=0$$

$$(x-4)^2+(y-2)^2-1+s_2^2=0$$

$$2\mu_1 s_1=0$$

$$2\mu_2 s_2=0$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentran, los siguientes puntos (se seleccionan las soluciones donde todas las variables pertenecen a los números reales y además cumplen con las restricciones planteadas):

$$P_1(x,y,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,s_1,s_2)=(4,1,-10,-2,0,0,0)$$

$$P_2(x,y,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,s_1,s_2)=(4,1,-8,0,-3,0,0)$$

$$P_3(x,y,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,s_1,s_2)=(3,2,-4,0,1,-\sqrt{2},0)$$

$$P_4(x,y,\lambda_1,\mu_1,\mu_2,s_1,s_2)=(3,2,-4,0,1,\sqrt{2},0)$$

Aplicando la **condición de factibilidad** en los puntos encontrados anteriormente a la restricción de igualdad y desigualdad, respectivamente, siendo $h(x,y)=\ x+y-5$, $g_1(x,y,s_1)=-xy+4+s_1^2$ y $g_2(x,y,s_2)=(x-4)^2+(y-2)^2-1+s_2^2$, se obtiene que:

$$h(P_1)=4+1-5=0$$

$$h(P_2)=4+1-5=0$$

$$h(P_3)=3+2-5=0$$

$$h(P_4)=3+2-5=0$$

$$g_1(P_1)=-4*1+4+0^2=0$$

$$g_1(P_2)=-4*1+4+0^2=0$$

$$g_1(P_3) = -3 * 2 + 4 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$g_1(P_4) = -3 * 2 + 4 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 0$$
$$g_2(P_1) = (4-4)^2 + (1-2)^2 - 1 + 0^2 = 0$$
$$g_2(P_2) = (4-4)^2 + (1-2)^2 - 1 + 0^2 = 0$$
$$g_2(P_3) = (3-4)^2 + (2-2)^2 - 1 + 0^2 = 0$$
$$g_2(P_4) = (3-4)^2 + (2-2)^2 - 1 + 0^2 = 0$$

Aplicando la **condición de holgura**, se obtiene que:

$$\mu_1 g_1(P_1) = -2(-4 * 1 + 4 + 0^2) = 0$$
$$\mu_1 g_1(P_2) = 0(-4 * 1 + 4 + 0^2) = 0$$
$$\mu_1 g_1(P_3) = 0\left(-3 * 2 + 4 + \left(-\sqrt{2}\right)^2\right) = 0$$
$$\mu_1 g_1(P_4) = 0\left(-3 * 2 + 4 + \left(\sqrt{2}\right)^2\right) = 0$$
$$\mu_2 g_2(P_1) = 0((4-4)^2 + (1-2)^2 - 1 + 0^2) = 0$$
$$\mu_2 g_2(P_2) = -3((4-4)^2 + (1-2)^2 - 1 + 0^2) = 0$$
$$\mu_2 g_2(P_3) = 1((3-4)^2 + (2-2)^2 - 1 + 0^2) = 0$$
$$\mu_2 g_2(P_4) = 1((3-4)^2 + (2-2)^2 - 1 + 0^2) = 0$$

Aplicando la **condición de signo** se puede observar que:

$$Para\ P_1\ \mu_1 = -2, \mu_2 = 0\ \ (para\ máximo)$$
$$Para\ P_2\ \mu_1 = 0, \mu_2 = -3\ (para\ máximo)$$
$$Para\ P_3\ \mu_1 = 0, \mu_2 = 1\ (para\ mínimo)$$
$$Para\ P_4\ \mu_1 = 0, \mu_2 = 1\ (para\ mínimo)$$

Ahora para verificar cada uno de estos puntos, se procede a encontrar la matriz Hessiana orlada asociada al Lagrangiano encontrado con anterioridad. Esta es:

$$\widehat{H}_L(\vec{\boldsymbol{x}}^*) = \begin{pmatrix} 2\mu_2 + 2 & -\mu_1 \\ -\mu_1 & 2\mu_2 + 2 \end{pmatrix}$$

Reemplazando cada uno de los puntos encontrados con anterioridad se obtienen que:

$$\widehat{H}_L(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, indefinida\ (por\ valores\ propios)$$
$$\widehat{H}_L(P_2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, definida\ negativa\ (por\ valores\ propios)$$
$$\widehat{H}_L(P_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, definida\ positiva\ (por\ valores\ propios)$$
$$\widehat{H}_L(P_4) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, definida\ positiva\ (por\ valores\ propios)$$

Dado esto $\boldsymbol{P_3}$ **y** $\boldsymbol{P_4}$, serán los puntos que minimicen la función f (x, y) sujeto a las restricciones mencionadas. Es decir que el mínimo se localiza en la coordenada **(3,2)** y su valor es $\boldsymbol{f(3,2) = 13}$