

Control Óptimo para la velocidad angular de un motor DC

Carlos Mario Paredes Valencia, Universidad Autónoma de Occidente, e-mail: cmparedes@uao.edu.co

Abstract—En el presente documento, se realiza un control óptimo para la velocidad angular de un motor DC. Este tipo de sistemas, son sistemas dinámicos electromecánicos en donde interactúan partes eléctricas y partes mecánicas, que permiten generar a partir de señales eléctricas desplazamientos lineales o angulares, como es el caso específico. De esta manera se describe el modelo dinámico del sistema, encontrando una representación en variables de estado que posteriormente se discretiza para encontrar su equivalente en tiempo discreto y proceder al diseño de un controlador óptimo discreto para controlar la velocidad del mismo. Se plantea un índice de desempeño cuadrático que penaliza tanto la evolución de los estados así como la acción de control, a través de unas matrices de penalización, las cuales se estudian en dos casos. En este caso no se toman restricciones o acotamientos en los estados ni en la entrada. Finalmente se evalúa el desempeño del controlador en el modelo del motor DC.

Palabras claves: control óptimo cuadrático, motor de corriente continua, regulador lineal cuadrático, sistemas dinámicos.

I. INTRODUCCIÓN

EN la cotidianidad se pueden encontrar una gran variedad de dispositivos útiles que combinan elementos eléctricos con elementos mecánicos para cumplir un objetivo. Se pueden encontrar sistemas como galvanómetros, micrófonos, parlantes, motores, generadores, entre otros. En estos sistemas, circulan corrientes dentro de un campo magnético. Las leyes físicas que gobiernan estos sistemas, además de las leyes de Kirchoff (análisis de la parte eléctrica) y las leyes de Newton (análisis de la parte mecánica), que permiten el acoplamiento entre estas partes, son introducidos en los libros de física. Estas leyes establecen que si un cable por donde circula corriente, está dentro de un campo magnético se generará una fuerza ejercida sobre este, y además un voltaje será inducido en el cable que se mueve dentro del campo magnético [1]. Estas características se tendrán en cuenta, en el momento de encontrar el modelo dinámico del motor DC.

Los motores de corriente continua, se han usado ampliamente en muchas aplicaciones industriales como vehículos eléctricos, laminadoras de acero, maquinas herramientas, grúas eléctricas y manipuladores robóticos. Estos motores se caracterizan por ser capaces de producir un par continuo completo y su costo es relativamente bajo comparado con motores de corriente alterna similares [2]. Un esquemático de un motor DC se muestra en la figura 1 [3]. En este se puede observar un circuito eléctrico, que se encuentra sometido a un flujo de campo magnético de manera constante, generando la fuerza F_e sobre el eje del

motor, produciendo un torque que en este caso genera un movimiento angular sobre el mismo.

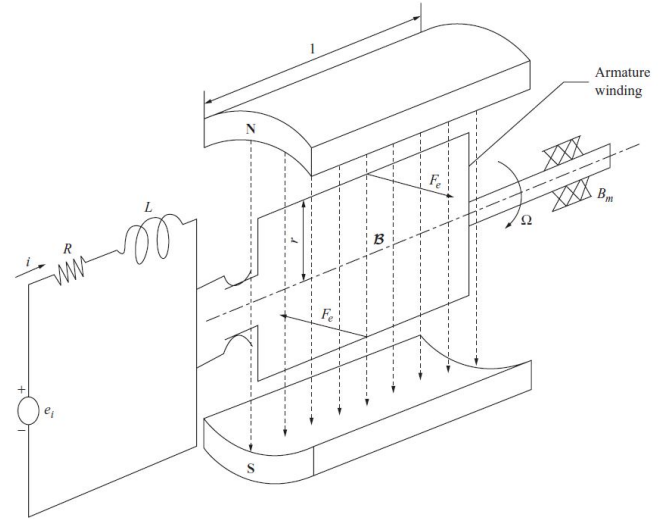


Fig. 1. Esquemático simplificado de un motor DC

En la figura 2 se observa que el circuito eléctrico está compuesto por la fuente de alimentación o entrada v , y se encuentran dos parámetros evidentes: el resistor de armadura R y el inductor de armadura L . Además aparece una fuente inducida e , la cual es directamente proporcional a la velocidad angular del rotor. Esta constante de proporción la llamaremos K_b y será otro parámetro del sistema. Por su parte, los elementos mecánicos que se encuentran en el rotor, permite establecer otra serie de parámetros necesarios para describir la dinámica del sistema. En este caso se tiene un momento de inercia J , el cual está asociado al momento de inercia del eje del rotor y otros elementos, se tiene un coeficiente de fricción b , el cual genera un torque directamente proporcional a la velocidad angular del rotor pero en sentido contrario al movimiento, esto se da debido a elementos como rodamientos por ejemplo. Además el torque T , causante principal del movimiento en la parte mecánica, es directamente proporcional a la corriente que circula por la armadura del motor. A esta constante de proporción la llamaremos K_p y será otro parámetro del sistema. Bajo lo comentado anteriormente, se puede decir que para modelar este sistema se tendrán 6 parámetros constantes y una entrada.

En muchas ocasiones estos sistemas son usados para pro-

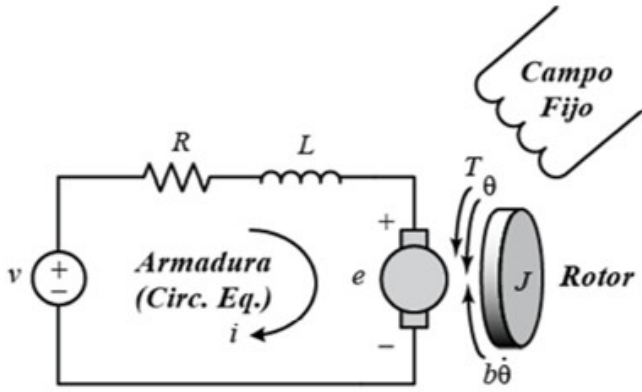


Fig. 2. Motor de corriente continua controlado por armadura

ducir movimiento que tiendan a una velocidad específica o a una posición específica. El caso de interés es lograr alcanzar una velocidad específica para cierta aplicación. En muchas ocasiones el diseño del motor no cumple con las características deseadas para la aplicación. De este modo, se requieren de controladores o algoritmos de control que permitan llevar una salida, en este caso la velocidad angular del rotor, a un valor deseado. Para esto normalmente se plantea el lazo de control como el que se muestra en la figura 3 [4]. Aunque en esta ocasión, se realimenta la variable posición, un proceso similar se realiza cuando se desea controlar velocidad, y en esta oportunidad la variable que se realimenta es la velocidad angular.

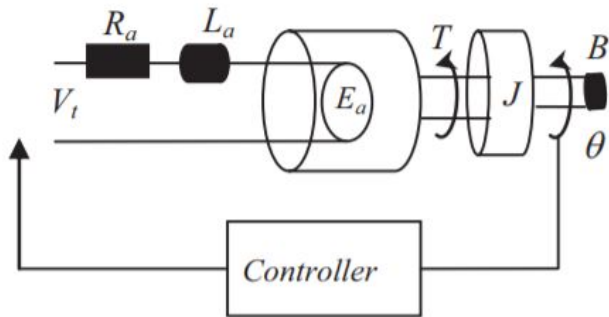


Fig. 3. Control de posición para un motor DC

El diseño de estos sistemas de control han sido estudiados en muchos ámbitos, y la idea principal es seleccionar de cierta manera unas ganancias de realimentación que cumplan con las especificaciones de diseño [5]. Para el caso en particular, se desea que la velocidad angular del motor alcance un valor deseado, desde un estado inicial. Si un sistema es controlable, cualquier estado puede ser alcanzado usando control por realimentación de estados. De esta manera se pueden ubicar los polos del sistema en lazo cerrado en donde se desee, modificando así la dinámica del sistema, permitiendo alcanzar un valor de estado deseado en un tiempo determinado. Si el tiempo en el que se alcanza el valor deseado es muy rápido, las señales de control o esfuerzo de control son grandes, y

pueden llegar a exceder los límites físicos del sistema. Esta situación permite naturalmente conducir a la formulación de un problema de optimización en donde se tome en cuenta la velocidad de convergencia al estado deseado así como la magnitud de la entrada de control [6].

En este caso en particular se puede plantear un índice de desempeño cuadrático, conocido como regulador lineal cuadrático, que tiene en cuenta los factores comentados con anterioridad. Si el control que se plantea es continuo, el problema a tratar es el siguiente:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\mathbf{x}' Q \mathbf{x} + \mathbf{u}' R \mathbf{u}) dt \\ \text{s.a:} & \\ \dot{\mathbf{x}} &= A \mathbf{x} + B \mathbf{u}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Donde \mathbf{x} es el vector de estados en tiempo continuo, \mathbf{u} es el vector de entradas en tiempo continuo, las matrices A y B , son la matriz de estados y matriz de entradas, respectivamente y las matrices Q y R , son matrices semi definida positiva y definida positiva, respectivamente. El primer termino dentro de la integral determina la importancia relativa de la desviación del estado con respecto al estado deseado, mientras que el segundo tiene en cuenta el gasto de energía de la señal de control [7]. En aplicaciones industriales, los controladores, normalmente son implementados en una computadora, es decir se implementan controladores discretos. Por tal motivo el índice de desempeño planteado en la anterior ecuación, se modifica para trabajar en tiempo discreto, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{x}(k)' Q \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)' R \mathbf{u}(k)) \\ \text{s.a:} & \\ \mathbf{x}(k+1) &= A_d \mathbf{x}(k) + B_d \mathbf{u}(k); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2)$$

Donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estados en tiempo discreto, $\mathbf{u}(k)$ es el vector de entradas en tiempo discreto, las matrices A_d y B_d , son la matriz de estados y matriz de entradas, del sistema equivalente discreto respectivamente y las matrices Q y R , son matrices semi definida positiva y definida positiva, respectivamente. De igual manera las matrices Q y R , penalizan tanto la evolución de los estados así como la acción de control. En ambos problemas, tanto continuo como discreto, se busca encontrar una acción de control o variable de control u que minimice el índice de desempeño planteado sujeto a la dinámica del sistema.

Teniendo esta descripción de la situación, en la sección II se describe el modelo matemático del sistema, en la sección III se procede al diseño del controlador óptimo, siguiendo con

la sección IV, donde se muestran y se discuten los resultados, finalizando con las conclusiones.

II. MODELO DINÁMICO DEL MOTOR DC

Haciendo referencia al esquemático mostrado en la figura 2, se procede a encontrar el conjunto de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema. A partir de las leyes de voltaje de Kirchhoff y lo mencionado en la sección anterior, se puede obtener las siguientes ecuaciones.

$$v = iR + L \frac{di}{dt} + e \quad (3)$$

$$e = K_b \dot{\theta} \quad (4)$$

Igualmente usando la segunda Ley de Newton, se obtiene el conjunto de ecuaciones que rigen la dinámica de la parte mecánica del sistema.

$$J\ddot{\theta} = T - b\dot{\theta} \quad (5)$$

$$T = K_p i \quad (6)$$

Donde R, L, K_p, K_b, b y J son los parámetros del sistema, descritos anteriormente. La variable v es la fuente de alimentación de voltaje, la cual es la entrada del sistema y las variables i, θ y $\dot{\theta}$ son la corriente de armadura, la posición angular del eje del rotor, y la velocidad angular del mismo, respectivamente.

Para el caso de interés, es de gran ayuda describir estas ecuaciones en sus respectivas ecuaciones de estado. De esta manera seleccionando como variables de estado $x_1 = i, x_2 = \theta$ y $x_3 = \dot{\theta}$, se obtiene la siguiente representación en variables de estado para este sistema:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{K_b}{L}x_3 + \frac{1}{L}u, \dot{x}_2 = x_3, \dot{x}_3 = \frac{K_p}{J}x_1 - \frac{b}{J}x_3 \quad (7)$$

Se puede observar que las matrices A y B , siguiendo esta representación en variables de estado son:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{K_b}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_p}{J} & 0 & -\frac{b}{J} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donde u es la acción de control del sistema. Para el caso practico se trabaja con el modelo de motor Quanser DCMTCT, el cual es una plataforma educativa que permite trabajar tanto temas de modelamiento de sistemas dinámicos así como temas relacionados con la teoría de control. Esta se muestra en la figura 4 [8].

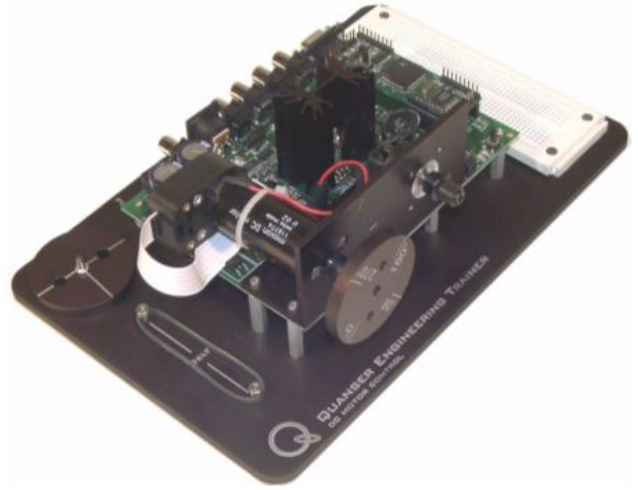


Fig. 4. Plataforma de experimentación Quanser

En la practica, realmente se usa un modelo experimental (debido a que no se tienen todos los valores de los parámetros del sistema), que se obtiene a través de la toma de datos del motor Quanser y de la aplicación de System Identification Toolbox de la plataforma de simulación Matlab. Este modelo experimental se discretiza con un tiempo de muestreo de 0.01s seleccionado por el comportamiento dinámico del sistema, obteniendo de esta manera un modelo de la planta (motor DC) en tiempo discreto que se usa posteriormente para el diseño del controlador óptimo discreto.

En la figura 5, se puede observar la salida del sistema (velocidad angular del rotor), cuando se le ingresa una entrada de 1 voltio, tomada con datos reales. En esta se obtiene un valor de voltaje que es proporcional a la velocidad angular del rotor, determinado por la sensibilidad de un sensor (tacómetro) la cual es de 1.5V/rpm. En este caso se observa que la planta tiene un error en estado estacionario. Lo que se planea, con el diseño e implementación del controlador óptimo, es que esta variable alcance este valor sin error en estado estacionario.

III. CONTROL ÓPTIMO DISCRETO DE VELOCIDAD ANGULAR DEL MOTOR DC

Usando el funcional descrito en 2, se puede obtener la solución del problema planteando el Hamiltoniano, escribiendo el sistema diferencial adjunto con las condiciones de transversalidad y optimalidad requeridas, que conlleva a encontrar una matriz P , resultante de la solución de la ecuación de Ricatti en tiempo discreto definida a continuación:

$$A_d' P A_d - P - (A_d' P B_d)(B_d' P B_d + R)^{-1}(B_d' P A_d) + Q = 0 \quad (8)$$

Encontrando P , la ley de control óptimo para la operación en estado estacionario esta dada por[7]:

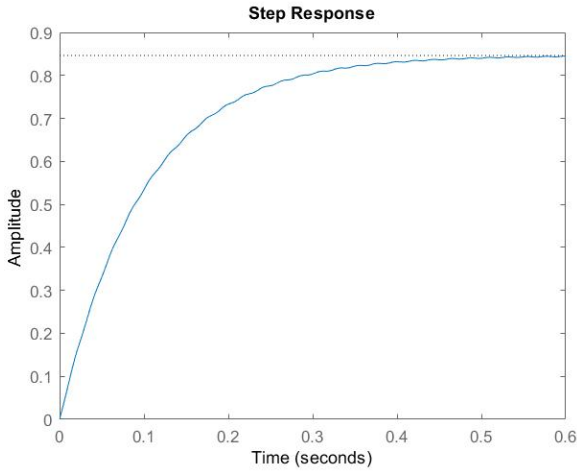


Fig. 5. Respuesta al escalón del motor Quanser, Velocidad Angular

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(\mathbf{k}) \quad (9)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de realimentación de estados dada por :

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}_d' \mathbf{P} \mathbf{B}_d + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}_d' \mathbf{P} \mathbf{A}_d) \quad (10)$$

Cabe recordar, que este problema plantea llevar los estados hasta el estado cero. Para permitir seguir referencias diferentes de cero, se adiciona un nuevo estado que permitirá tener una acción integral que permitirá llevar los estados a un estado deseado sin error en estado estacionario. Para encontrar estas matrices y resolver el problema de optimización, se puede usar el software matlab y el comando dlqr.

Para el caso practico se establecieron dos pares de matrices \mathbf{Q} y \mathbf{R} . La primera de ellas se muestra a continuación:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = (1)$$

Mientras que para el segundo caso se asignaron los siguientes valores:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = (100)$$

La principal diferencia es la penalización para regular la acción de control, lo cual conllevará a que el sistema se estabilice mas lento en el segundo caso.

IV. RESULTADOS Y ANÁLISIS

A continuación se muestran los resultados obtenidos para los dos casos de control mencionados en la anterior sección. En la figura 6, se muestra la respuesta del sistema a escalones con diferentes amplitudes. Se puede observar la diferencia cuando se aplica el control y cuando no se aplica este. La principal discrepancia es que el sistema alcanza el valor deseado de la entrada cuando se le aplica la ley de control, aunque con un tiempo de estabilización ligeramente mayor. La respectiva acción de control se observa en la figura 7. En esta se puede notar que el control alcanza valores un poco mayor que la referencia, además de que presenta sobre picos. Esto se debe a que la penalización de la acción de control para este caso no es muy grande (matriz \mathbf{Q}), comparada con la penalización de la evolución de los estados (matriz \mathbf{P}).

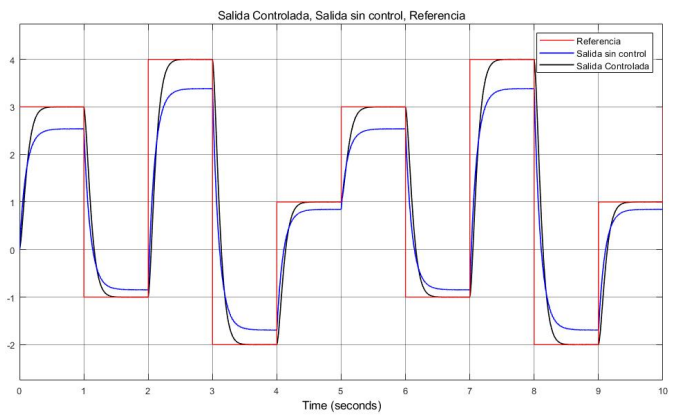


Fig. 6. Respuesta al escalón del motor Quanser, Caso I

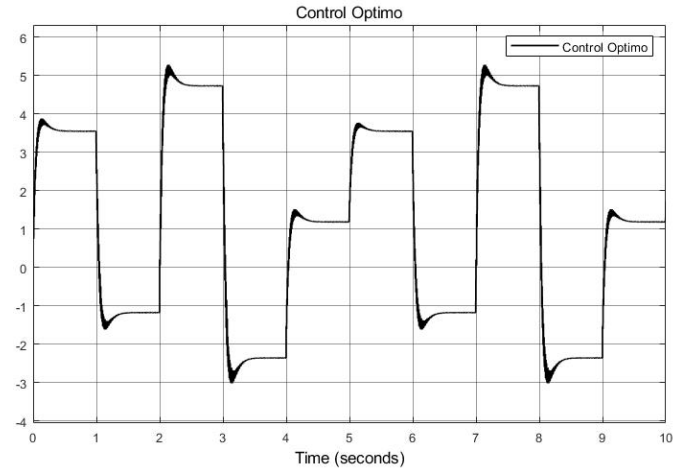


Fig. 7. Control Óptimo, Caso I

Para el segundo caso se puede observar la figura 8. En esta se puede ver que la salida alcanza el valor deseado nuevamente cuando se le aplica el control, pero esto se obtiene con un tiempo de estabilización muy alto comparado con el caso anterior y aun mas, comparado con el tiempo de

estabilización de la planta sin tener control.

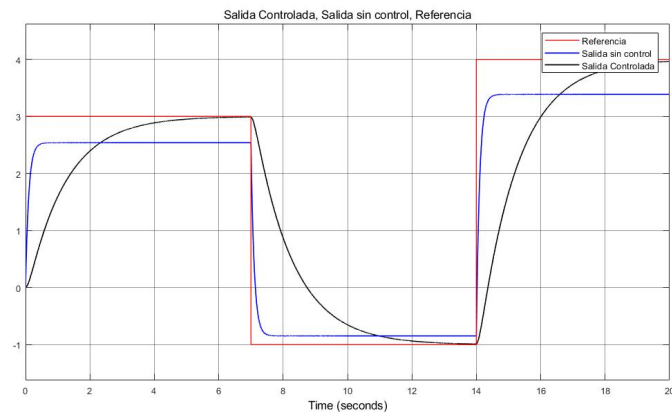


Fig. 8. Respuesta al escalón del motor Quanser, Caso II

En la figura 9, se observa que la acción de control ya no presenta sobre impulsos, sin embargo el tiempo que le toma en alcanzar su régimen estacionario es alto. Esto se debe a que la matriz Q , en este caso es relativamente mayor que la matriz P , ocasionando lo que se evidencia en este par de figuras.

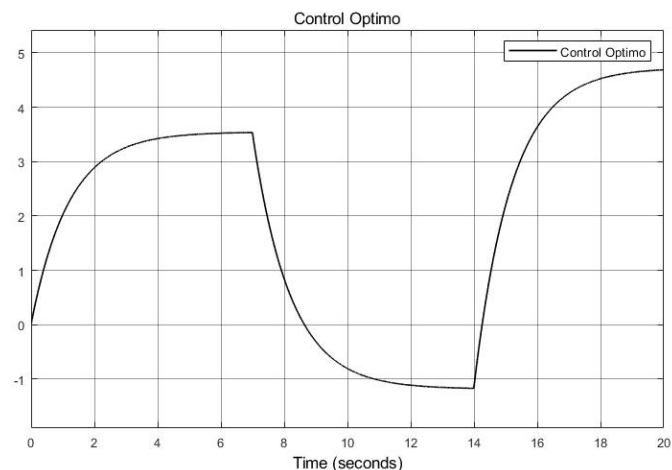


Fig. 9. Control Óptimo, Caso II

V. CONCLUSIONES

La evolución de los estados, desde su valor inicial hasta su valor final, cuando se aplica este controlador depende de las matrices Q y R . Si se desea una dinámica característica, no se puede conocer de antemano, sino a través de simulaciones, en donde se varíe el peso de estas matrices.

Aunque el problema planteado, no presenta restricciones ni de estados ni en la acción de control, normalmente toca tenerlas en cuenta, debido a las limitaciones y comportamientos físico que se tiene realmente en el sistema.

Aumentar el valor de la matriz de penalización de entrada Q , permite obtener esfuerzos de control no tan grandes, pero

a la vez el tiempo que le toma el sistema en alcanzar su valor final es mayor.

REFERENCES

- [1] C. M. Close, D. H. Frederick, and J. C. Newell, *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 3rd ed.
- [2] M. Moradi, A. Ahmadi, and S. Abhari, "Optimal control based feedback linearization for position control of dc motor," in *2010 2nd International Conference on Advanced Computer Control*, vol. 4, March 2010, pp. 312–316.
- [3] B. T. Kulakowski, J. F. Gardner, and J. L. Shearer, *Dynamic Modeling and Control of Engineering Systems*, 3rd ed.
- [4] M. Moradi, A. Ahmadi, and S. Abhari, "Optimal control based feedback linearization for position control of dc motor," in *2010 2nd International Conference on Advanced Computer Control*, vol. 4, 2010, pp. 312–316.
- [5] S. Sahoo, B. Subudhi, and G. Panda, "Optimal speed control of dc motor using linear quadratic regulator and model predictive control," in *2015 International Conference on Energy, Power and Environment: Towards Sustainable Growth (ICEPE)*, 2015, pp. 1–5.
- [6] F. N. Perez, *Control lineal moderno, análisis y diseño en el espacio de estados*.
- [7] K. Ogata, *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*, segunda ed.
- [8] R. Lu, S. Li, and L. Xue, "Robust hoptimal speed control of dc motor using lmi approach," in *2008 Chinese Control and Decision Conference*, 2008, pp. 4350–4354.