

# Modelos matemáticos de sistemas electromecánicos

En este capítulo abordaremos el desarrollo de modelos matemáticos de sistemas electromecánicos, utilizando la dinámica lagrangiana<sup>1</sup>. Este es un enfoque alternativo a la dinámica newtoniana, que permite trabajar con cantidades escalares (trabajo y energía), en lugar de cantidades vectoriales (fuerza, torque, momentum).

Cuando se utiliza la dinámica lagrangiana, se considera globalmente el sistema y no es necesario descomponerlo en todas sus componentes, ni dibujar diagramas de cuerpo libre. De esta manera se elimina la inclusión de las fuerzas de interacción entre las partes del sistema.

Es importante tener en cuenta que los resultados del enfoque lagrangiano son los mismos que los del enfoque newtoniano; la diferencia radica en el método utilizado para obtener los resultados.

Las ecuaciones de Lagrange son un conjunto de ecuaciones diferenciales, generalmente no lineales, que definen el movimiento de un sistema en función de  $n$  coordenadas generalizadas  $q_i$  de desplazamiento y  $n$  velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$ . El lagrangiano es una función de la coordenada  $q_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ) y su derivada temporal  $\dot{q}_i$ , ( $i = 1, \dots, n$ ), donde  $n$  es el número de grados de libertad del sistema. En consecuencia, la ecuación de movimiento para  $q$  es una ecuación diferencial de segundo orden.

## 2.1 Ecuación de Lagrange para sistemas conservativos

El enfoque convencional para la deducción de la ecuación de Lagrange que comúnmente se presenta en los textos de mecánica analítica, se basa en los principios del trabajo virtual de D'Alembert y de Hamilton, junto con el cálculo variacional. En este texto se hace una deducción simplificada, orientada a la comprensión de la ecuación y a sus aplicaciones especialmente en el modelamiento de sistemas electromecánicos.

<sup>1</sup>J.L. Lagrange (1736-1813) En 1788 Lagrange desarrolló una formulación de la mecánica, que denominó *Mecánica Analítica*.

Los *sistemas conservativos* son aquellos que están sometidos únicamente a la acción de fuerzas conservativas, es decir, fuerzas que realizan un trabajo que no depende del camino que se siga en el movimiento sino, de las posiciones inicial y final. El trabajo que realizan las fuerzas conservativas sobre una trayectoria cerrada es cero. Este tipo de fuerzas pueden ser obtenidas a partir de una función potencial escalar, denotada por  $V$ . Por ejemplo, la fuerza ejercida por un resorte puede ser obtenida a partir de la energía potencial almacenada en el resorte. Otro ejemplo de fuerza conservativa es la fuerza gravitacional. Las fuerzas no conservativas, como las fuerzas de fricción, son denominadas *fuerzas disipativas*. Las fuerzas disipativas producen una disminución progresiva de la energía cinética del sistema, impidiendo que ésta se convierta en algún tipo de energía potencial reutilizable.

Considérense  $n$  partículas en un campo de fuerzas conservativo, cuyas posiciones están dadas por las coordenadas cartesianas  $x_i$ . La energía cinética total del sistema es:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (2.1)$$

El *momentum* de la partícula,  $p_i = m_i \dot{x}_i$  es dado por:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = p_i$$

La derivada en el tiempo de este *momentum* es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = m_i \ddot{x}_i \quad (2.2)$$

En un campo de fuerzas conservativo, la fuerza sobre una partícula es:

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

donde  $V$  es la energía potencial.

De la Segunda Ley de Newton:

$$F_i = \frac{dp_i}{dt} = m_i \ddot{x}_i \quad (2.4)$$

Igualando 2.2 y 2.4:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) = - \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

Ahora, definiendo el *lagrangiano* del sistema como  $L = T - V$ , donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  es la energía potencial, la ecuación 2.5 se convierte en:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

**Ejemplo 2.1** *Caída libre.* Considere una partícula de masa  $m$  que cae desde una altura  $y$ , bajo la acción de la gravedad. Se ignora la resistencia del aire.

En este caso, las energías cinética, potencial y el lagrangiano son, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}m_i\dot{y}^2 \quad V = mgy \quad L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mgy$$

La ecuación de Lagrange es:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

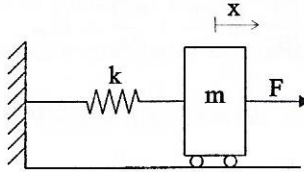
Las derivadas correspondientes son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - mg = 0 \Rightarrow m\ddot{y} - g = 0 \Rightarrow \ddot{y} = -g$$

**Ejemplo 2.2** *Oscilador armónico.* Considere un oscilador compuesto de un cuerpo de masa  $m$  y un resorte con una constante  $k$ , que se mueve en un plano horizontal sin fricción. Las energías cinética, potencial y el lagrangiano son, respectivamente:



**Figura 2.1** Oscilador armónico

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2}kx^2 \quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Las derivadas correspondientes son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

Aplicando la ecuación de Lagrange se obtiene:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

## 2.2 Ecuación de Lagrange para sistemas disipativos

Considere el caso de un sistema de  $n$  partículas sobre el cual actúan fuerzas conservativas  $F_i$ , fuerzas disipativas  $F_d$  y otras fuerzas externas  $F_{ext}$ . La segunda ley de Newton se expresa como:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i + F_d + F_{ext}$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = p_i$  y que las fuerzas conservativas se expresan como  $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$ , se puede escribir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + F_d + F_{ext} \quad (2.7)$$

Para modelar las fuerzas disipativas utilizaremos la función de disipación de Rayleigh,  $D$ , la cual depende de las velocidades de las partículas:

$$D = \frac{1}{2}b\dot{x}_i^2 \quad (2.8)$$

donde  $b$  es un coeficiente de amortiguamiento viscoso. Así,

$$F_d = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} \quad i = 1, \dots, n$$

Entonces, la Ecuación 2.7 se puede escribir como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F_{ext} \quad (2.9)$$

Ahora, en función del lagrangiano del sistema  $L = T - V$ , la Ecuación 2.9 se expresa como:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_i} = F_{ext} \quad (2.10)$$

## 2.3 Ecuación de Lagrange en coordenadas generalizadas

El número de *grados de libertad* es una propiedad fundamental de un sistema físico y está definido como el número de variables necesarias para especificar completamente las posiciones de las partículas o de los centros de gravedad de los cuerpos que hacen parte del sistema. Si el número de grados de libertad es  $n$ , cualquier conjunto de variables  $q_1, q_2, \dots, q_n$  que especifique la configuración geométrica del sistema, se denomina conjunto de *coordenadas generalizadas*. Por ejemplo, un punto que se mueve sobre una línea recta tiene un grado de libertad y una coordenada generalizada, que puede ser  $l$ , la coordenada que indica el desplazamiento a lo largo de la línea. La



posición de un punto en dos dimensiones se puede especificar por las coordenadas rectangulares  $(x, y)$  o por las coordenadas polares  $(r, \theta)$ .

Un cuerpo rígido moviéndose en dos dimensiones tiene tres grados de libertad. Las coordenadas generalizadas pueden ser, por ejemplo,  $(x_g, y_g, \theta)$ , donde  $(x_g, y_g)$  son las coordenadas del centro de gravedad y  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $x$  y una línea entre el punto  $(x_g, y_g)$  y otro punto del cuerpo. En algunos casos, tanto en 2D como en 3D, se utilizan coordenadas de propósito general.

Para disponer de una expresión general de la ecuación de Lagrange, utilizaremos las coordenadas generalizadas  $q_i$  y las fuerzas externas generalizadas  $Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.11)$$

A cada coordenada generalizada  $q_i$  se le asocia una fuerza generalizada  $Q_i$ . Es importante tener en cuenta que una fuerza generalizada no siempre es dimensionalmente equivalente a una fuerza. Por ejemplo, si una coordenada generalizada es un ángulo, la fuerza generalizada asociada será un torque.

El procedimiento para la obtención de un modelo matemático de un sistema mecánico mediante la aplicación de la ecuación 2.11, se resume en los siguientes pasos:

1. Determinar el número de partículas o cuerpos que componen el sistema.
2. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
3. Seleccionar el conjunto de coordenadas generalizadas.
4. Expresar la energía cinética y la energía potencial en términos de las coordenadas generalizadas.
5. Construir el lagrangiano, realizar las derivadas correspondientes para cada coordenada generalizada y obtener las ecuaciones del movimiento.
6. Si las ecuaciones resultantes son no lineales y se desea trabajar con un modelo lineal aproximado, linealizar alrededor de un punto de operación.
7. Expresar el modelo lineal en variables de estado o en su representación entrada-salida.

**Ejemplo 2.3** Sistema de masas acopladas. Considere el sistema de la Figura 2.2 Este sistema tiene dos grados de libertad y las coordenadas generalizadas son  $x_1$  y  $x_2$ . Además tiene dos fuerzas generalizadas (entradas)  $u_1$  y  $u_2$ . Las energías cinética y potencial son:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \quad V = \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2$$

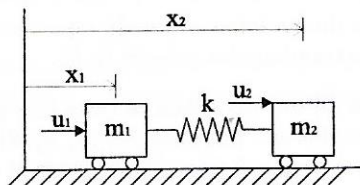


Figura 2.2 Sistema de masas acopladas

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

En este caso no tenemos fuerzas disipativas. Las ecuaciones de Lagrange para cada coordenada generalizada son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = u_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = u_2$$

Realizando las operaciones correspondientes, se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$m_1\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2) = u_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = u_2$$

Ahora, utilizando el vector de estado  $[x_1 \ \dot{x}_1 \ x_2 \ \dot{x}_2]^T$  y el vector de entradas  $[u_1 \ u_2]^T$ , se obtiene la representación en variables de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ , donde las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  están dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & \frac{k}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{k}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 2.4** Manipulador de una barra. Considere el sistema de la Figura 2.3. Para este sistema con un grado de libertad, se escoge como coordenada generalizada el ángulo  $\theta$ . Las energías cinética, potencial y la función de disipación, están dadas

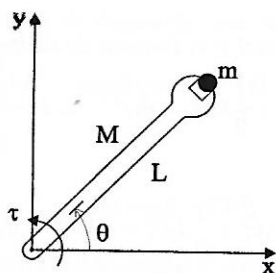


Figura 2.3 Manipulador de una barra

por:

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 \quad V = Mg\frac{l}{2}\sin\theta + mgl\sin\theta \quad D = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}I_o\dot{\theta}^2 - Mg\frac{l}{2}\sin\theta - mgl\sin\theta$$

Aplicando la ecuación de Lagrange para la variable  $\theta$  y haciendo  $x_1 = \theta$ ,  $x_2 = \dot{\theta}$ ,  $u = \tau$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{ml^2 + I_o} \left[ -\left(\frac{M}{2} + mgl \cos x_1\right) - bx_2 + u \right] \end{aligned}$$

**Ejemplo 2.5** Considere el sistema mecánico rotacional de la Figura 2.4.

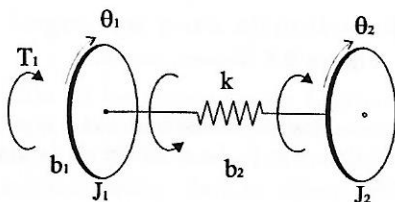


Figura 2.4 Sistema mecánico rotacional

Las coordenadas generalizadas para este sistema de dos grados de libertad son  $\theta_1$  y

$\theta_2$  Las energías cinética y potencial y la función de disipación están dadas por:

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 \quad V = \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad D = \frac{1}{2}b_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\theta_2 - \theta_1)^2$$

Aplicando la ecuación de Lagrange para  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} J_1\ddot{\theta}_1 + (b_1 + b_2)\dot{\theta}_1 - b_2\dot{\theta}_2 + k\theta_1 - k\theta_2 &= \tau \\ J_2\ddot{\theta}_2 - b_2\dot{\theta}_1 + b_2\dot{\theta}_2 - k\theta_1 + k\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas a ambas ecuaciones, resulta:

$$\begin{aligned} [J_1s^2 + (b_1 + b_2)s + k]\Theta_1(s) - [bs + k]\Theta_2(s) &= \tau(s) \\ -[bs + k]\Theta_1(s) + [J_2s^2 + b_2s + k]\Theta_2(s) &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtienen las funciones de transferencia  $\Theta_1(s)/\tau(s)$  y  $\Theta_2(s)/\tau(s)$ .

**Ejemplo 2.6** Considere el sistema mecánico de la Figura 2.5.

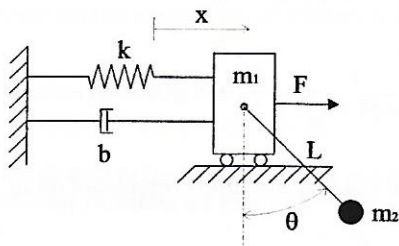


Figura 2.5 Sistema mecánico

Es fácil ver que el sistema tiene dos grados de libertad y que las coordenadas generalizadas pueden ser las variables  $x$  y  $\theta$ . La posición de la masa  $m_2$  con relación a unos ejes fijos está dada por:

$$x_2 = x + l \sin \theta \quad y_2 = -l \cos \theta$$

La energía cinética del sistema es:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2)$$



La energía potencial y la función de disipación son dadas por:

$$V = \frac{1}{2}kx^2 - m_2gl \cos \theta \quad D = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\theta}l \cos \theta + l^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kx^2 + m_2gl \cos \theta$$

Las ecuaciones de Lagrange para las variables  $x$  y  $\theta$  son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = F \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Realizando las derivadas correspondientes, se obtienen las ecuaciones del movimiento:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) + b\dot{x} + kx = F$$

$$\ddot{x} \cos \theta + l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$$

Se observa que las ecuaciones son no lineales. Para la aplicación de técnicas de control lineal, es necesario linealizar el sistema alrededor de un punto de operación. Para  $\dot{\theta} = \dot{x} = 0$  y para valores del ángulo  $\theta$  cercanos a cero se utilizan las siguientes aproximaciones, correspondientes al primer término de la expansión en serie de Taylor de la respectiva función:

$$\sin \theta \approx \theta \quad \cos \theta \approx 1$$

Entonces, las ecuaciones lineales resultantes son:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + m_2l\ddot{\theta} + b\dot{x} + kx = F$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\theta} + g\theta = 0$$

## 2.4 Ecuación de Lagrange para circuitos eléctricos

Para extender la aplicación de las ecuaciones de Lagrange a los circuitos eléctricos, utilizaremos la analogía entre un sistema mecánico *masa-resorte-amortiguador*, *MRA* y un circuito eléctrico *RLC*, los cuales son representados por ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Para el sistema mecánico, la ecuación del movimiento está dada por:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \quad (2.12)$$

Para el circuito eléctrico:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = v \quad (2.13)$$

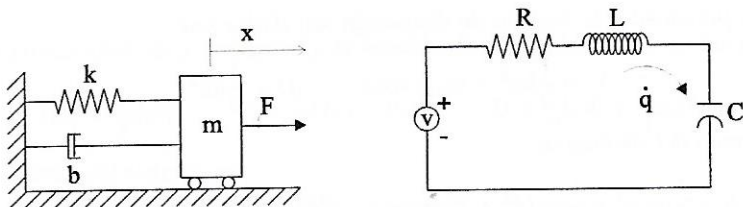


Figura 2.6 Sistema MRA y circuito RLC

donde  $q$  es la carga eléctrica, cuya relación con la corriente está dada por  $i = \dot{q}$ . Comparando las ecuaciones 2.12 y 2.13, se puede establecer el siguiente conjunto de analogías entre las variables y los parámetros de los dos sistemas:

$$\begin{aligned} v &\sim f \\ q &\sim x \\ L &\sim m \\ R &\sim b \\ \frac{1}{C} &\sim k \end{aligned}$$

De esta manera, las energías cinética y potencial y la función de disipación para un circuito eléctrico son:

$$T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 \quad V = \frac{1}{2C}q^2 \quad D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2$$

Estas expresiones se pueden obtener directamente, analizando los componentes del circuito eléctrico.

La relación entre el voltaje aplicado a una bobina de inductancia  $L$  y la corriente que circula por ésta es:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

El trabajo por unidad de tiempo para mantener la corriente  $i$  es:

$$\frac{dW}{dt} = vi = Li \frac{di}{dt}$$

Si no hay efectos disipativos, el trabajo es igual a la energía almacenada en el campo magnético:

$$\int dW = \int Lidi = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L\dot{q}^2$$

Si se interpreta  $\dot{q}$  como una velocidad generalizada, se ve que  $\frac{1}{2}L\dot{q}^2$  tiene la misma forma de la energía cinética de una partícula,  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ .

Ahora, para un condensador con capacitancia  $C$  al que se le aplica un voltaje  $v$ , el *trabajo para trasladar una carga entre sus placas* es:

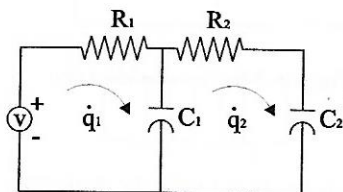
$$dW = v dq$$

Pero  $v = \frac{1}{C} \int i dq = \frac{1}{C} q$  Entonces:

$$dW = \frac{1}{C} q dq \Rightarrow W = \frac{1}{C} \int q dq = \frac{1}{2C} q^2$$

Si no hay efectos disipativos, la energía almacenada en el campo eléctrico será igual a  $W$ . Se observa que si se considera  $q$  como una variable generalizada de posición, el término  $\frac{1}{2C} q^2$  tiene la forma de la energía potencial almacenada en un resorte  $\frac{1}{2} k x^2$ .

**Ejemplo 2.7** Considere el circuito representado en la Figura 2.7.



**Figura 2.7** Circuito eléctrico

Las energías cinética, potencial y la función de disipación para este circuito son, respectivamente:

$$T = 0 \quad V = \frac{1}{2C_1} (q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{2C_2} q_2^2 \quad D = \frac{1}{2} R_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} R_2 \dot{q}_2^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = -\frac{1}{2C_1} (q_1 - q_2)^2 - \frac{1}{2C_2} q_2^2$$

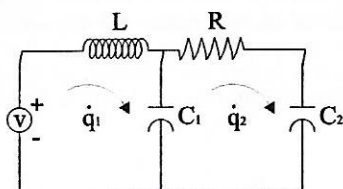
Los términos de las ecuaciones de Lagrange para  $q_1$  y  $q_2$  se pueden expresar de forma compacta como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} (q_1 - q_2) \\ \frac{1}{C_1} (q_1 - q_2) - \frac{1}{C_2} q_2 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} R_1 \dot{q}_1 \\ R_2 \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, aplicando las ecuaciones de Lagrange se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= -\frac{1}{C_1 R_1} q_1 + \frac{1}{C_1 R_1} q_2 + \frac{v}{R_1} \\ \dot{q}_2 &= -\frac{1}{C_1 R_2} q_1 - \frac{1}{R_2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q_2\end{aligned}$$

**Ejemplo 2.8** Considere el circuito representado en la Figura 2.8.



**Figura 2.8** Circuito eléctrico

Las energías cinética, potencial y la función de disipación para este circuito son, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} L \dot{q}_1^2 \quad V = \frac{1}{2C} (q_1 - q_2)^2 \quad D = \frac{1}{2} R \dot{q}_2^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2} L \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2C} (q_1 - q_2)^2$$

Los términos de las ecuaciones de Lagrange para  $q_1$  y  $q_2$  se pueden expresar de forma compacta como:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} L \dot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \begin{bmatrix} L \ddot{q}_1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial L}{\partial q} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C} (q_1 - q_2) \\ \frac{1}{C} (q_1 - q_2) \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

Así, las ecuaciones resultantes son:

$$\begin{aligned}L \ddot{q}_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) &= v \\ R \dot{q}_2 - \frac{1}{C} (q_1 - q_2) &= 0\end{aligned}$$

## 2.5 Ecuación de Lagrange para sistemas electromecánicos

Una de las principales ventajas del enfoque lagrangiano es que permite representar la dinámica de un sistema que integra componentes mecánicos y eléctricos, sin tener que tratarlos de manera separada. Aunque existe una gran cantidad de sistemas electromecánicos, en este texto se consideran aquellos en los que la interacción entre las variables mecánicas y eléctricas, se produce como resultado de fenómenos electromagnéticos. Entre estos sistemas están los dispositivos que producen fuerzas, como los actuadores lineales que utilizan solenoides, y los equipos de conversión continua de energía, como motores y generadores.

Para modelar la interacción entre las variables mecánicas y eléctricas, se estudia el caso del solenoide representado en la Figura 2.9. Cuando circula una corriente  $i$  por la bobina, se genera un campo magnético cuyas líneas interiores de inducción magnética tienen la dirección del eje.

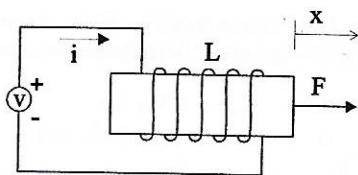


Figura 2.9 Solenoide

La fuerza que se produce debido a la interacción de la corriente y el campo es:

$$F = \beta li$$

donde  $\beta$  es la densidad del flujo y  $l$  la longitud del conductor. A su vez, un movimiento del núcleo con una velocidad  $\dot{x}$ , induce en la bobina una tensión contra-electromotriz:

$$v_c = \beta l \dot{x}$$

El trabajo para mantener la corriente  $i$  en la bobina y para desplazar la fuerza  $F$  una distancia  $dx$ , es:

$$dW = vi \, dt + F \dot{x} \, dt = L(x) \frac{di}{dt} i \, dt + F dx \Rightarrow dW = L(x) i \, di + F dx$$

Ahora, teniendo en cuenta que  $F = \beta li$ , suponiendo que  $L(x)$  es constante e ignorando los efectos disipativos, el trabajo será igual a la energía cinética almacenada en el solenoide:

$$T = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + k_{f,v} \dot{q} x$$



donde  $\dot{q} = i$  y  $k_{f,v}$  es una constante. El subíndice  $(f,v)$  indica que en la ecuación correspondiente a la variable mecánica se usa el subíndice  $f$ ; la constante  $k_f$  se denomina constante de fuerza (o de torque). En la ecuación correspondiente a la variable eléctrica se usa el subíndice  $e$ ; la constante  $k_e$  se denomina constante de tensión contra-electromotriz.

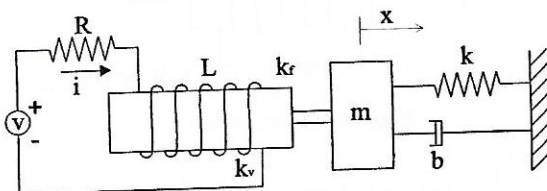
Se puede ver que al agregar el término  $k_{f,v}\dot{q}x$  a la energía cinética asociada con la inductancia, se establecen relaciones entre las variables mecánicas y eléctricas.

Utilizando coordenadas generalizadas, el término que se le adiciona a la energía cinética para relacionar las variables mecánicas y eléctricas se puede escribir como:

$$T_{ad} = k_{f,v}\dot{q}_e q_m$$

donde  $\dot{q}_e$  es la velocidad generalizada eléctrica ( $i$ ) y  $q_m$  es la posición generalizada mecánica. Así, para el caso de un motor de corriente continua,  $\dot{q}_e$  representa la corriente en la armadura y  $q_m$  el desplazamiento rotacional del eje del rotor.

**Ejemplo 2.9** Actuador lineal electromagnético. Este sistema tiene dos grados de libertad, uno para la parte eléctrica y otro para la parte mecánica.



**Figura 2.10** Actuador lineal electromagnético

Las coordenadas generalizadas son  $q$  y  $x$ . Las energías cinética, potencial y la función de disipación para este sistema son, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + k_{f,v}\dot{q}x + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2}kx^2 \quad D = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 + \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

El lagrangiano del sistema es:

$$L = \frac{1}{2}L\dot{q}^2 + k_{f,v}\dot{q}x + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = e \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

Los términos de las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = L\dot{q} + k_v x$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k_f \dot{q} - kx$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R\dot{q}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = b\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = L\ddot{q} + k_v \dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

Así, las ecuaciones diferenciales del actuador lineal electromagnético son:

$$\begin{aligned} L\ddot{q} + R\dot{q} + k_v \dot{x} &= e \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - k_f \dot{q} &= 0 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que  $\dot{q} = i$ , las ecuaciones se pueden escribir como:

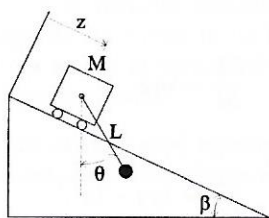
$$\begin{aligned} L\frac{di}{dt} + Ri + k_v \dot{x} &= e \\ m\ddot{x} + b\dot{x} + kx - k_f i &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$ ,  $x_3 = i$  y  $u = e$ , se obtiene la siguiente representación en variables de estado:

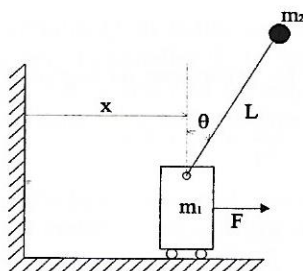
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + k_f x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_v}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u \end{aligned}$$

## 2.6 Ejercicios

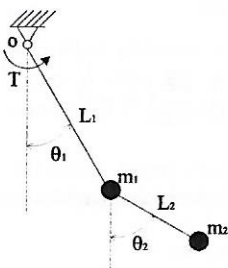
**2.6.1** Obtenga los modelos matemáticos de los sistemas mecánicos representados en la Figura 2.11.



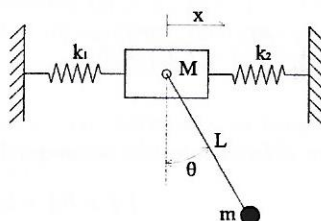
(a) Carro con péndulo sobre plano inclinado.



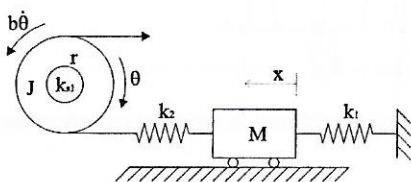
(b) Péndulo invertido



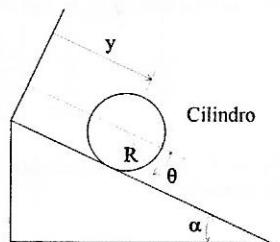
(c) Péndulo doble.



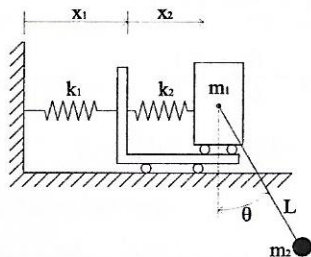
(d) Resortes-Masa-Péndulo.



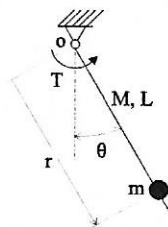
(e) Rueda-Resortes-Masa.



(f) Cilindro sobre plano inclinado.



(g) Carro con péndulo sobre plano inclinado.



(h) Masa deslizante sobre varilla.

Figura 2.11 Sistemas mecánicos

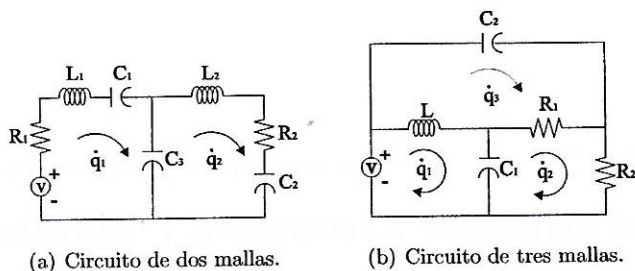


Figura 2.12 Circuitos eléctricos

**2.6.2** Obtenga los modelos matemáticos de los circuitos eléctricos representados en la Figura 2.12.

**2.6.3** Obtenga el modelo matemático del sistema electromecánico representado en la Figura 2.13.

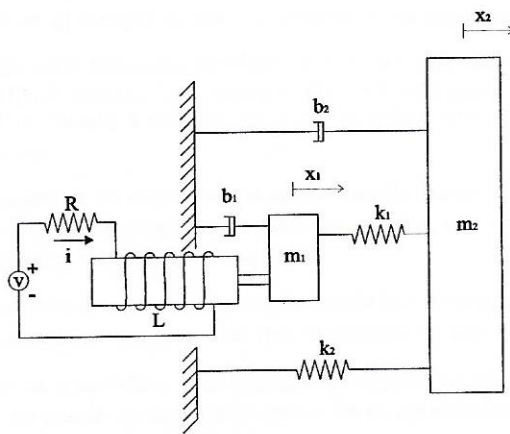


Figura 2.13 Circuitos eléctricos