

Luego,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \dot{\varphi} = \text{cte} \equiv l_z. \quad (1.229)$$

La cantidad constante es la componente l_z del momento angular en términos de las coordenadas generalizadas, lo que se puede verificar calculando la componente cartesiana $l_z = m(xy - y\dot{x})$, y usando las Ecs. (1.222) y (1.223). La componente l_z se conserva porque la componente τ_z del vector de torque total producido por las fuerzas actuantes sobre la partícula (su peso y la fuerza normal ejercida por la superficie del cono) es cero.

La ecuación de Lagrange para r es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \quad (1.230)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - mg \cot \alpha, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \csc^2 \alpha. \quad (1.231)$$

Luego,

$$\ddot{r} \csc^2 \alpha - r\dot{\varphi}^2 + g \cot \alpha = 0, \quad (1.232)$$

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha + g \sin \alpha \cos \alpha = 0. \quad (1.233)$$

5. Péndulo doble.

Consiste en un péndulo de longitud l_1 y masa m_1 , del cual cuelga un segundo péndulo de longitud l_2 y masa m_2 .

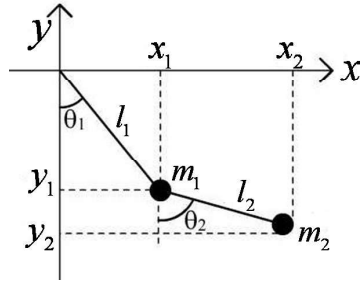


Figura 1.38: Péndulo doble.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$. Luego,

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & \Rightarrow \dot{x}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \\ y_1 &= -l_1 \cos \theta_1 & \Rightarrow \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \end{aligned} \quad (1.234)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 & \Rightarrow \dot{x}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 \\ y_2 &= -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 & \Rightarrow \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (1.235)$$

1.6. EJEMPLOS DE ECUACIONES DE LAGRANGE PARA VARIOS SISTEMAS.53

La energía cinética de partícula 1 es

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2. \quad (1.236)$$

La energía cinética de partícula 2 es

$$\begin{aligned} T_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= \frac{1}{2}m_2[l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned} \quad (1.237)$$

Las energías potenciales de las partículas se pueden expresar como

$$V_1 = m_1gy_1 = -m_1gl_1\cos\theta_1 \quad (1.238)$$

$$V_2 = m_2gy_2 = -m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2). \quad (1.239)$$

La energía cinética del sistema es $T = T_1 + T_2$ y la energía potencial es $V = V_1 + V_2$. El Lagrangiano del sistema es $L = T - V$, lo que conduce a

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2gl_2\cos\theta_2. \end{aligned} \quad (1.240)$$

Ecuación de Lagrange para θ_1 ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0, \quad (1.241)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= -m_1l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) &= (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación de Lagrange para θ_1 queda

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)\sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ + m_1l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.242)$$

Ecuación de Lagrange para θ_2 ,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0, \quad (1.243)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin \theta_2 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)].\end{aligned}$$

Luego, la ecuación de Lagrange para θ_2 queda

$$\begin{aligned}m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 [\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g l_2 \sin \theta_2 = 0.\end{aligned}\quad (1.244)$$

Las ecuaciones de Lagrange para θ_1 y θ_2 se pueden expresar como

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\sin \theta_2 \cos \Delta\theta - \mu \sin \theta_1) - (l_2 \dot{\theta}_2^2 + l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_1(\mu - \cos^2 \Delta\theta)} \quad (1.245)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\sin \theta_1 \cos \Delta\theta - \sin \theta_2) - (\mu l_1 \dot{\theta}_1^2 + l_2 \dot{\theta}_2^2 \cos \Delta\theta) \sin \Delta\theta}{l_2(\mu - \cos^2 \Delta\theta)}, \quad (1.246)$$

donde $\Delta\theta \equiv \theta_1 - \theta_2$, y $\mu \equiv 1 + m_1/m_2$.

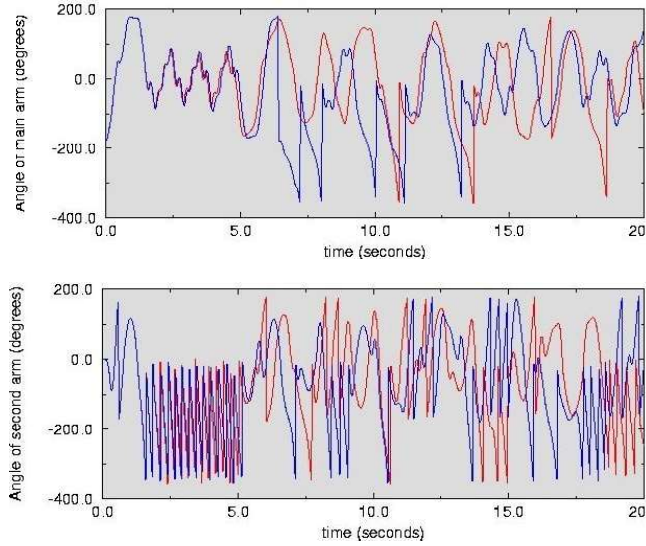


Figura 1.39: Caos en el péndulo doble. Arriba: θ_1 vs. t . Abajo: θ_2 vs. t . En ambos casos, se muestra la evolución a partir de dos condiciones iniciales muy cercanas.

Las ecuaciones de Lagrange para θ_1 y θ_2 son no lineales y acopladas para θ_1 y θ_2 , dando lugar a la posibilidad de la aparición de *comportamiento caótico* en este sistema para cierto rango de valores de parámetros.

El fenómeno de *caos* consiste en la sensibilidad extrema de la evolución de un sistema dinámico determinista ante cambios en las condiciones iniciales del mismo, lo que conlleva a limitaciones en la predicción del comportamiento de sistemas deterministas. Una condición necesaria para la ocurrencia de caos es la existencia de no linealidad en las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema. El caos es un fenómeno muy común en la Naturaleza, donde abundan los sistemas no lineales.

Si consideramos el límite de pequeñas oscilaciones, $\theta_1 \rightarrow 0$ y $\theta_2 \rightarrow 0$, las ecuaciones de movimiento pueden linealizarse usando la aproximación $\sin x \approx x$, y $\cos x \approx 1$, para $x \rightarrow 0$, quedando

$$\ddot{\theta}_1 \approx \frac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{l_1(\mu - 1)} \quad (1.247)$$

$$\ddot{\theta}_2 \approx \frac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{l_2(\mu - 1)}. \quad (1.248)$$

Note que, en este caso, no se observa caos; el movimiento del sistema consiste en la superposición de dos modos de oscilación periódica con sus correspondientes frecuencias: un modo en fase ($\theta_1 = \theta_2$) y otro modo en fases opuestas ($\theta_1 = -\theta_2$). (Capítulo 4).

6. Péndulo con soporte deslizante horizontalmente sin fricción.

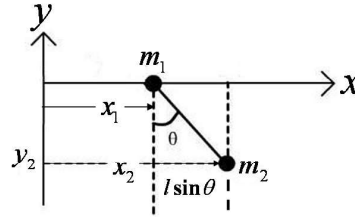


Figura 1.40: Péndulo con soporte deslizante.

Coordenadas generalizadas son $q_1 = x_1$ y $q_2 = \theta$.

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + l \sin \theta, & \dot{x}_2 &= \dot{x}_1 + l \dot{\theta} \cos \theta \\ y_2 &= -l \cos \theta, & \dot{y}_2 &= l \dot{\theta} \sin \theta. \end{aligned}$$

Energía cinética,

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{\theta} l \cos \theta). \quad (1.249)$$