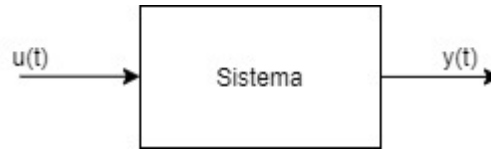


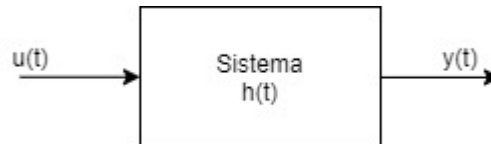
## Representación de los sistemas dinámicos

**Función de transferencia (FT):**



Al sistema le vamos a ingresar la señal **impulso unitario**:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Se obtiene la respuesta al impulso,  $y(t) = h(t)$ .

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, uno puede obtener la salida(respuesta) frente a cualquier entrada(estimulo), con la operación matemática conocida con el nombre de **convolución**.

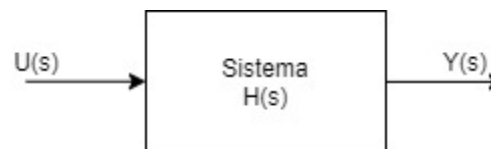
$$y(t) = u(t) * h(t)$$

Vamos a usar la transformada de Laplace unilateral:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) * h(t)\} = U(s)H(s) = Y(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}} \text{ Función de transferencia}$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Comentarios:

- Una función de transferencia es un modelo matemático porque nos permite expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
- Esta función es independiente de la magnitud y naturaleza de las señales de excitación, es una propiedad propia del sistema.
- No proporciona información acerca de la estructura física del sistema, podemos obtener funciones idénticas de muchos sistemas físicamente diferentes.

- Permite comprender el comportamiento del sistema.
- Proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema.

### Polinomio característico:

Dado la FT:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$  y  $D(s)$  son funciones polinómicas en términos de la variable  $s$ . El polinomio característico es el denominador de mi función de transferencia, es decir  $D(s)$  es mi polinomio característico.

### Ecuación característica:

$$D(s) = 0$$

### Polos y ceros:

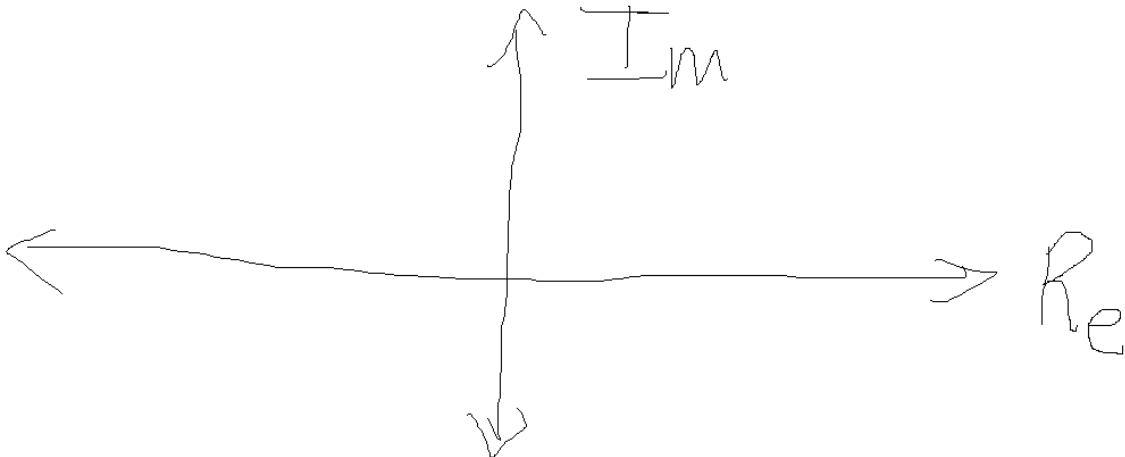
Los polos son las raíces del polinomio característico, es decir es la solución de la ecuación característica.

Los ceros son las raíces del numerador, es decir se resuelva la ecuación  $N(s) = 0$ .

### Estabilidad:

Un sistema es estable si todas las partes reales de los polos del mismo son menores que 0.

### Mapa de polos y ceros:



Polos(x)

Ceros(o)

### Ejemplos G2:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t), CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$s^2 Y(s) + 4s Y(s) + 8Y(s) = 2X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(s^2 + 4s + 8) = 2X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 8}$$

$$s^2 + 4s + 8 \text{ Pol. caract.}$$

$$s^2 + 4s + 8 = 0 \text{ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

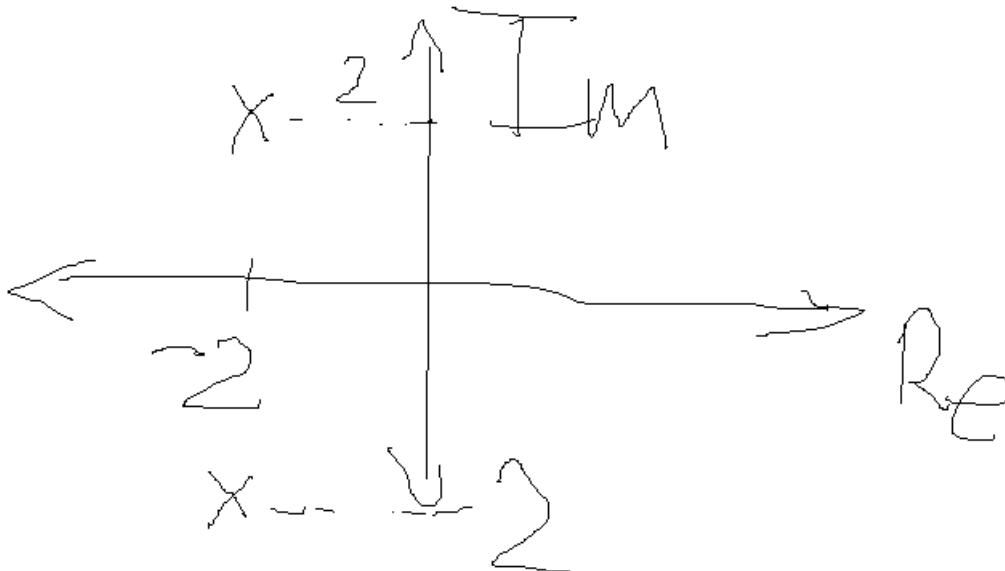
$$s^2 + 4s + 8 = 0$$

$$s_1 = -2 + 2i$$

$$s_2 = -2 - 2i$$

Ceros del sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:



**Ejemplos G54:**

$$3\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) = 5x(t), CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(3s^2 + 5) = 5X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

$$3s^2 + 5 \text{ Pol. caract.}$$

$$3s^2 + 5 = 0 \text{ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

$$s_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} i$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} i$$

Ceros de sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:

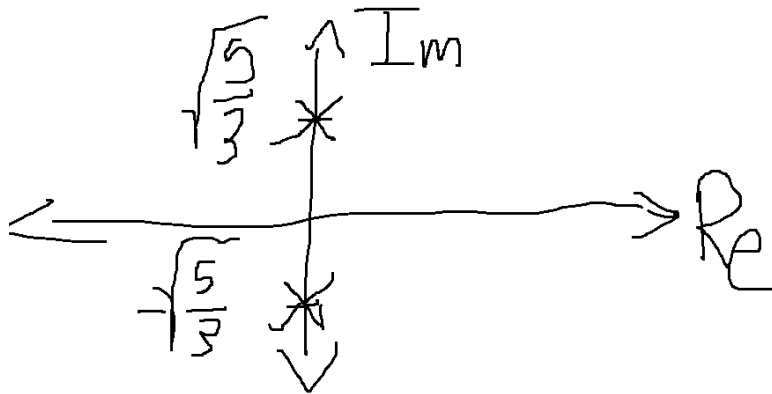
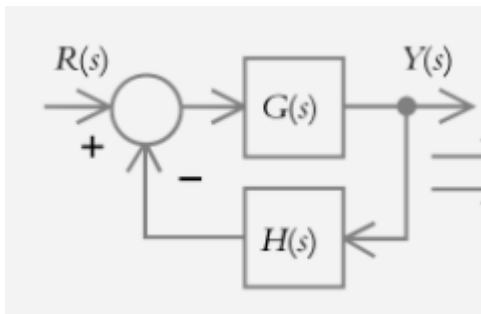


Diagrama de bloques (DB):

**Diagrama de bloques (Realimentación negativa/positiva):**



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

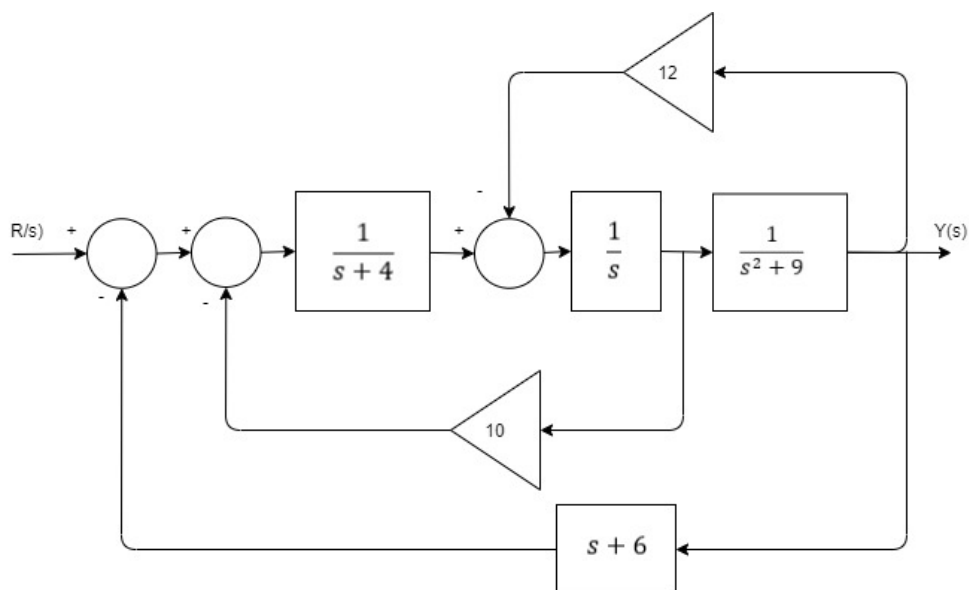
$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 \pm \frac{A(s)}{B(s)} \frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)}{B(s) \left( \frac{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}{B(s)D(s)} \right)} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

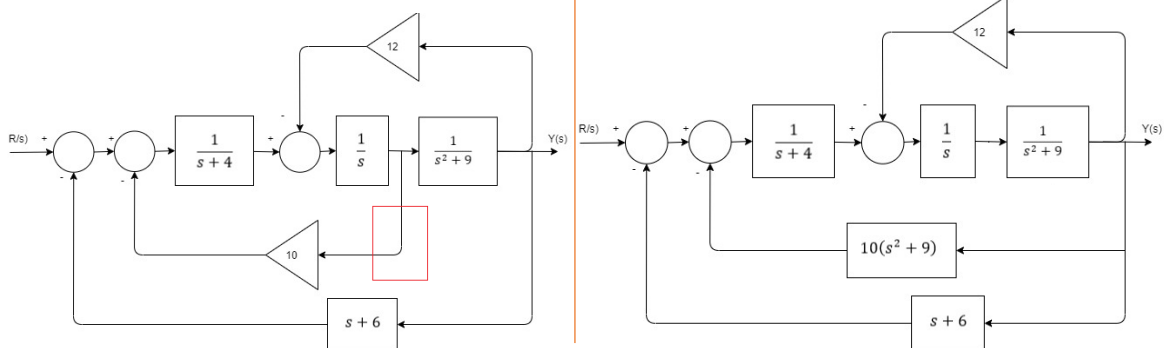
$$T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

**Ejemplos G2:**

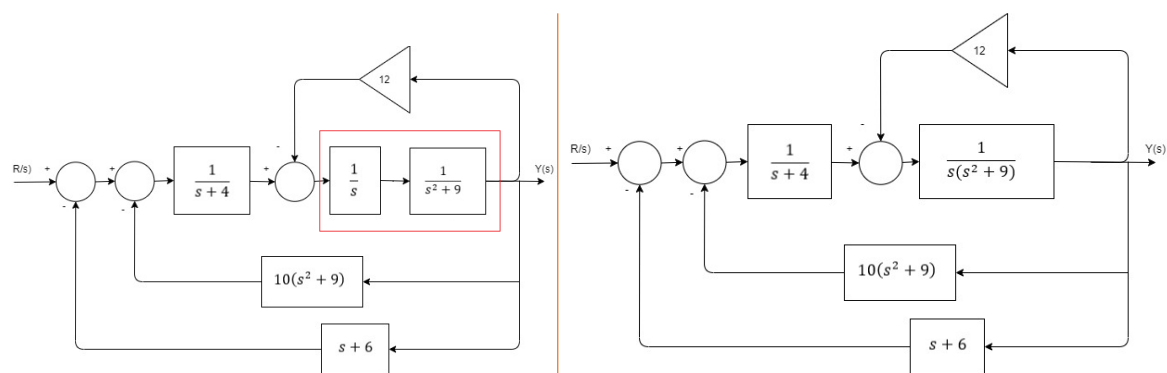
Encontrar la FT  $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$ , del sistema descrito a continuación (use algebra de bloques):



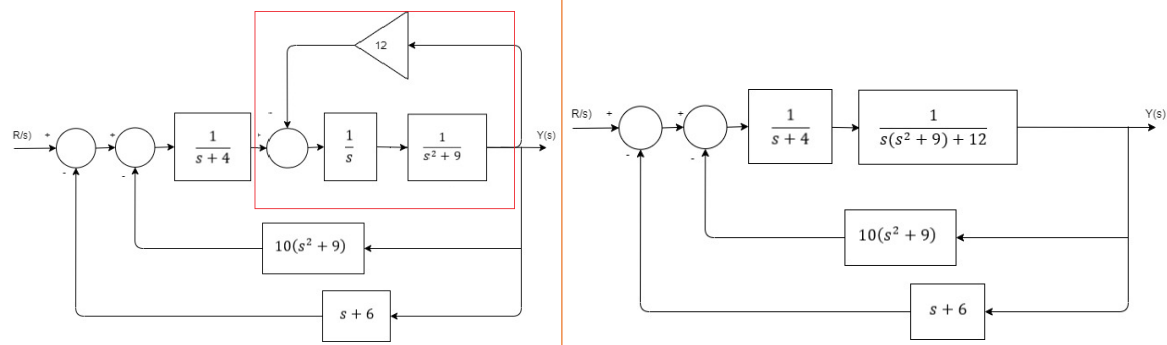
### 1) Aplicamos 9 y posteriormente 5



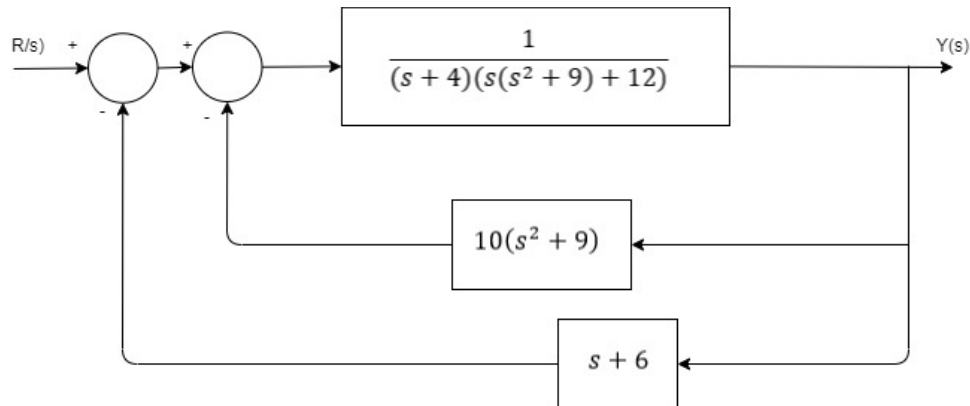
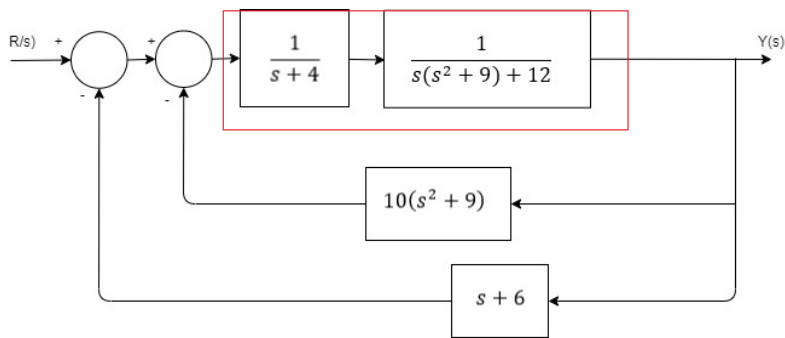
### 2) Aplicamos 5



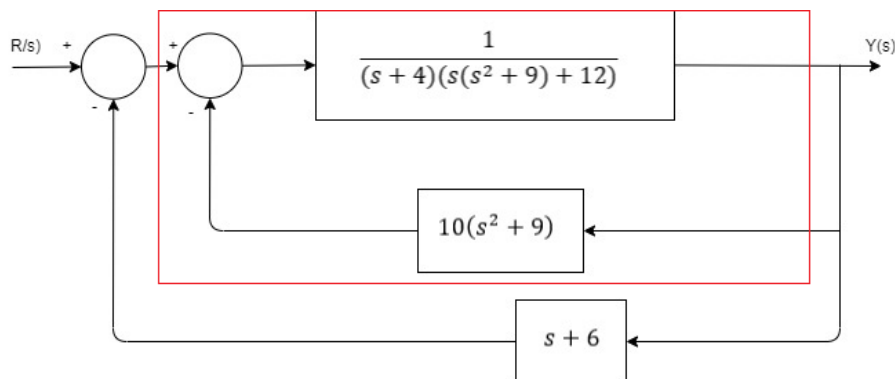
### 3) Aplicamos 11



### 4) Aplicamos de nuevo 5



### 5) Aplicamos 11

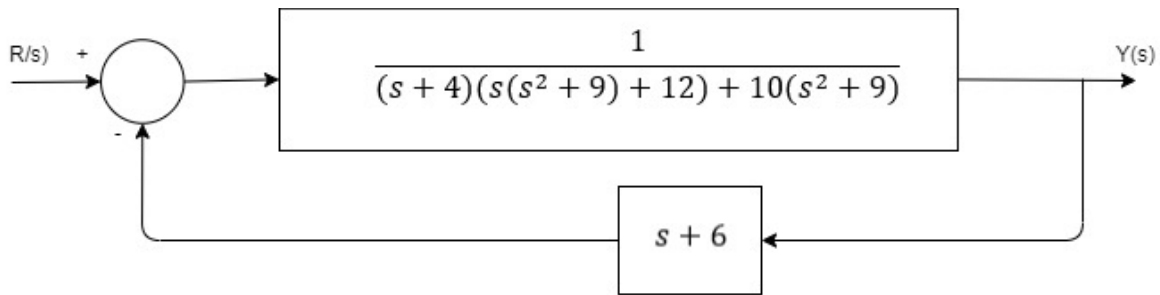


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 \pm \frac{A(s)}{B(s)} \frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)}{B(s) \left( \frac{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}{B(s)D(s)} \right)} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}}$$



Finalmente aplicando 11 una vez más:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)+s+6}$$

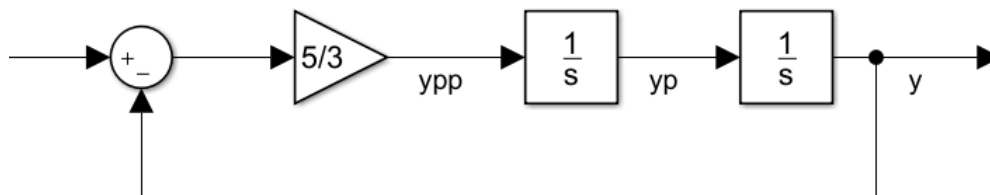
$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 19s^2 + 49s + 144}$$

-----Vamos aquí G2-----

Ejemplos G54:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t), CI = 0$$

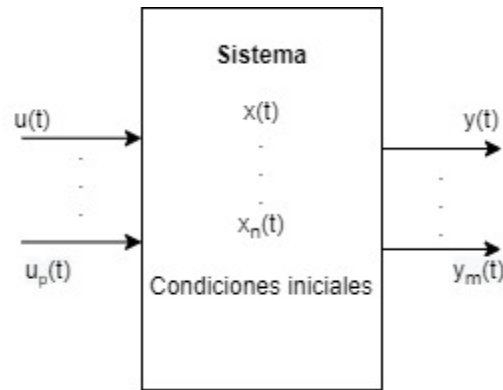
$$\ddot{y}(t) = \frac{(5x(t) - 5y(t))}{3} = (x(t) - y(t))\frac{5}{3}$$



-----Grupo 54-----

Representación en Variables de Estado (VE):





**Estado:** representa la mínima cantidad de información de modo que el conocimiento de este en  $t = t_0$  (condiciones iniciales) junto con el conocimiento de la entrada para  $t \geq t_0$ , determina por completo el comportamiento del sistema (evolución de los estados) para cualquier instante de tiempo  $t \geq t_0$ .

Las variables necesarias para describir el estado de un sistema son llamadas **variables de estado (VE)**. En términos generales el estado de un sistema de orden  $n$  es descrito por un conjunto de  $n$  variables representado en el **vector de estado**:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Para describir el estado del sistema, se busca escribir un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu \quad (\text{Ecuaciones de estado})$$

Del mismo modo se requiere expresar la/s salida/s del sistema, para esto se usa la ecuación de salida:

$$y = g(x, u) = Cx + Du \quad (\text{Ecuación de salida})$$

Si el sis

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu$$

$$y = g(x, u) = Cx + Du$$

**Vector de entrada:**

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

**Vector de salida:**

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

**Matriz de estado:**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

**Matriz de entrada:**

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{n \times p}$$

**Matriz de salida:**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

**Matriz de transmisión directa:**

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$$

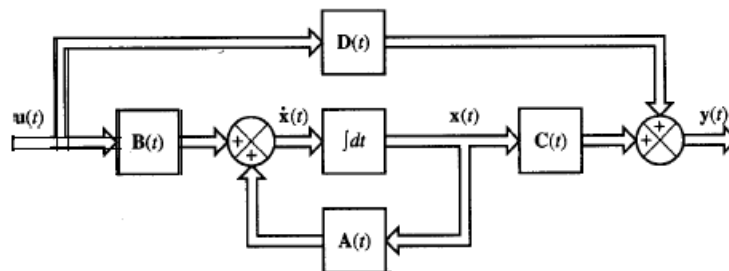


Diagrama de bloques de un sistema representado en espacio de estados

Comentarios:

- Se puede aplicar a sistemas SISO hasta MIMO.
- Se pueden estudiar de la misma forma sistemas variantes e invariantes en el tiempo.
- Los problemas formulados con este enfoque son muy fáciles de programar.
- Las ecuaciones de estado describen no solamente la relación entre la entrada y salida, sino también el comportamiento interno del sistema bajo cualquier condición inicial.
- Se pueden representar sistemas no lineales.

Ejemplos G2:

Ejemplos G54: