

## INTRODUCCION

### ¿Qué es un sistema?:

#### Ideas de estudiantes:

- Un modelo matemático, un proceso que relaciona una señal de entrada y de salida.
- Un conjunto de elementos que interactúan para lograr un objetivo.
- Un sistema dinámico depende del tiempo.

#### Definición:

Un sistema son un conjunto de elementos que interactúan entre sí, y que teniendo en cuenta propiedades y leyes físicas, a partir de estímulos (señales de entrada) generan respuestas (señales de salida) para cumplir una o varias tareas específicas.

### ¿Qué es una señal?

#### Ideas de estudiantes:

- Es una función que nos permite describir el comportamiento físico de algo en especial.
- Es una magnitud mediante la cuál se pueden transmitir mensajes.
- Es una variable que depende de algún elemento físico exterior.

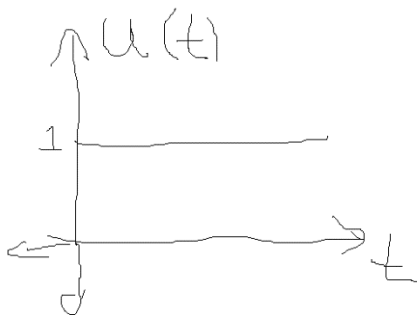
#### Definición:

Es una función que permite describir el comportamiento de algún fenómeno físico. Por ejemplo, desplazamiento es una señal de naturaleza mecánica, corriente y la tensión eléctrica son señales de naturaleza eléctrica, el calor y la temperatura son señales de naturaleza térmica, el caudal es una señal de naturaleza hidráulica.

#### Tipos de señales

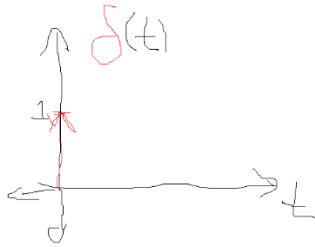
-Función escalón unitario o Función de Heaviside

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



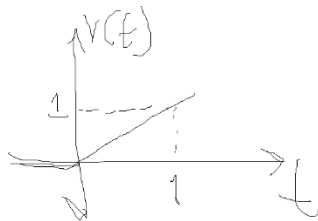
- Función Impulso unitario o Función Delta Dirac

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



- Función rampa unitaria

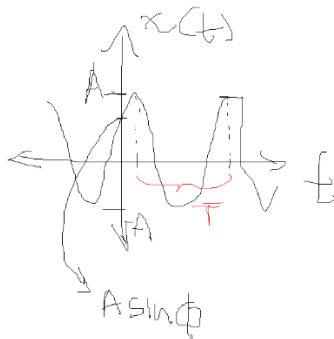
$$r(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



- Función tipo seno

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$



**Señales de entrada:** reciben el nombre de estímulos o señales de excitación.

**Señales de salida:** reciben el nombre de respuestas o variables de interés.

**Parámetros:** los parámetros son los coeficientes que acompañan a nuestras variables dependientes (señales de entrada y salida, y todas sus derivaciones).

## Clasificación de los sistemas

### Características de memoria:

- **Estáticos:** es básicamente un sistema que no tiene memoria. Eso quiere decir que la evolución en el tiempo de la salida/salidas solamente depende de lo que ocurra en la entrada/entradas en el momento actual. Se modelan usando ecuaciones algebraicas.

$$v(t) = Ri(t)$$

$$y(t) = 3x(t) + \cos(x(t))$$

- **Dinámicos:** es un sistema que tiene memoria. Es un sistema cuya salida/salidas depende de lo que ocurre en el momento actual, pasado y/o futuro de la entrada y/o salida. Estos sistemas son modelados usando ecuaciones integro/diferenciales. La característica de memoria se asocia a los elementos que almacenan energía.

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

$$5\ddot{x}(t) + 3x(t) = F(t)$$

### Características espaciales:

- **Parámetros concentrados (EDO):** el modelo matemático de estos sistemas se hace a partir de ecuaciones diferenciales ordinarias. Es decir que la variable independiente es una sola, generalmente es el tiempo.

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = F(t)$$

- **Parámetros distribuidos (EDP):** el modelo matemático de estos sistemas se hace a partir de ecuaciones diferenciales parciales. Es decir que la variable independiente no es una sola, además del tiempo tenemos variables espaciales (altura, profundidad, ancho..., x, y, z).

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{Ec. de calor})$$

### Continuidad de la variable independiente (tiempo)

- **Continuos:** la variable independiente es continua (en un intervalo podemos obtener infinitos valores).
- **Discretos:** la variable independiente es discreta (en un intervalo tenemos finitos valores).
- **Híbridos:** combinación de los anteriores.

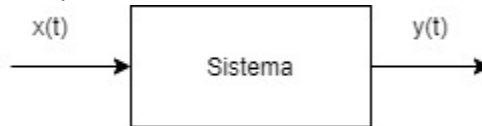
### Dependiendo de su naturaleza:

- **Determinístico:** que el modelo que describe el comportamiento del sistema es determinista. El modelo matemático, a partir de unas condiciones iniciales se puede predecir su comportamiento y es único.

- **Estocástico:** son sistemas cuyo modelado se enfatiza en usar funciones probabilísticas. El modelo matemático, a partir de unas condiciones iniciales no se puede predecir y su comportamiento no es único.

#### Dependiendo de la cantidad de entradas y salidas:

- **SISO:** Single Input- Single Output



La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)$$

$$5\ddot{y}(t) - 15y(t) = 30x(t)$$

- **SIMO:** Single Input- Multiple Output



La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida, es un vector de salida. Estos vectores son vectores tipo columna. Es decir:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{y}_1(t) + 4\dot{y}_1(t) + 8y_1(t) = 2x(t)$$

$$4\ddot{y}_2(t) + 5\dot{y}_2(t) + 7y_2(t) = x(t) + 5y_1(t)$$

$$3\ddot{y}_1(t) + 5y_1(t) = 5x(t)$$

$$3\ddot{y}_2(t) + 7y_2(t) = y_1(t)$$

- **MISO:** Multiple Input- Single Output



La variable  $x(t)$  es la señal de entrada y es un vector de entradas. Estos vectores son vectores tipo columna. Es decir:

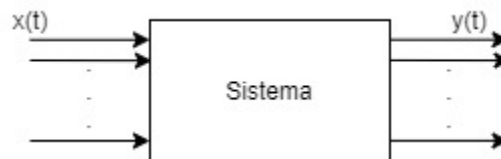
$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x_1(t) - 6x_2(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t)$$

- **MIMO:** Multiple Input- Multiple Output



La variable  $x(t)$  es la señal de entrada y es un vector de entradas. Estos vectores son vectores tipo columna. Es decir:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

La variable  $y(t)$  es la señal de salida y es un vector de salida. Estos vectores son vectores tipo columna. Es decir:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

$$8y_1(t) = 2x_1(t) + 4x_2(t)$$

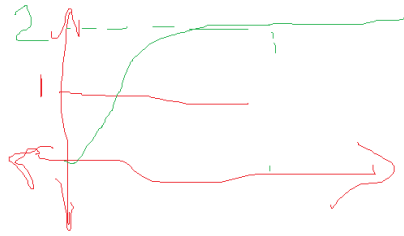
$$4\ddot{y}_2(t) + 5\dot{y}_2(t) + 7y_2(t) = x_2(t) + 5y_1(t)$$

$$3\ddot{y}_1(t) + 5y_1(t) = 5x_1(t) + x_3(t)$$

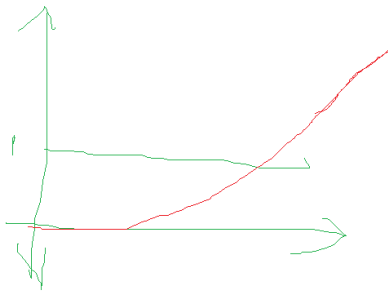
$$3\ddot{y}_2(t) + 7y_2(t) = y_1(t) + 6x_1(t) - 5x_2(t)$$

#### Estabilidad:

- **Estable:** es un sistema que cuando se le ingresa una entrada acotada (que después de un tiempo su valor tiende a un número o a un rango de números, tiende a un valor finito) la salida es acotada (que después de un tiempo su valor tiende a un número o a un rango de números, tiende a un valor finito).



- **Inestable:** es un sistema que cuando se le ingresa una entrada acotada (que después de un tiempo su valor tiende a un número o a un rango de números, tiende a un valor finito) la salida no es acotada (tiende a un valor infinito).



#### Variación de los parámetros o Invarianza Temporal:

- **Variantes en el tiempo:** son sistemas cuyos parámetros varían con respecto al tiempo.

$$\ddot{y}(t) + 4t\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x_1(t) - 6e^{-2t}x_2(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5e^t y(t) = 5\cos(t)x_1(t) + 4x_2(t)$$

- **Invariantes en el tiempo (parámetros fijos):** son sistemas cuyos parámetros son fijos en el tiempo.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x_1(t) - 6x_2(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x_1(t) + 4x_2(t)$$

|   |
|---|
| Si $T[x(n)] = y(n)$ entonces $T[x(n-k)] = y(n-k) \quad \forall x(n), k$ |
|---|



**Principio de superposición (Linealidad):**

$$T[a_1x_1(n) + a_2x_2(n)] = a_1T[x_1(n)] + a_2T[x_2(n)] \quad \forall a_1, a_2, x_1(n), x_2(n)$$



- **Lineales:** cumplen el principio de superposición.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t), CI = 0$$

$$y(t) = \frac{2x(t) - \ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t)}{8}$$

$$\ddot{y}(t) = 2x(t) - 4\dot{y}(t) - 8y(t)$$

La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

**Transformada de Laplace**

$$L\{x(t)u(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt = X(s)$$

Transformación (nos vamos a Laplace):

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 8Y(s) = 2X(s)$$

$$Y(s) = \frac{2X(s)}{s^2 + 4s + 8}$$

- 1) Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_1x_1(t) \rightarrow a_1X_1(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$Y_1(s) = \frac{2a_1X_1(s)}{s^2 + 4s + 8}$$

Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_2x_2(t) \rightarrow a_2X_2(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$Y_2(s) = \frac{2a_2X_2(s)}{s^2 + 4s + 8}$$

Sumo las salidas obtenidas:

$$Y_R(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{s^2 + 4s + 8}$$

- 2) Vamos a ingresar al sistema las entradas que ingresamos anteriormente, pero sumadas  $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ .

$$Y(s) = \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{s^2 + 4s + 8}$$

Finalmente comparamos las salidas de 2) y 1)

$$Y(s) = Y_R(s)$$

$$\frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{s^2 + 4s + 8} = \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{s^2 + 4s + 8}$$

Como son iguales, cumple el principio de superposición y es lineal.

$$\ddot{y}(t) + 4t^2\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8e^t y(t) = 2x(t)$$

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2 \sin t x(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t), CI = 0$$

La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

Transformación (nos vamos a Laplace):

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5X(s)$$

- 1) Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_1x_1(t) \rightarrow a_1X_1(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5a_1X_1(s)$$

$$Y(s) = \frac{5a_1X_1(s)}{3s^2 + 5} = Y_1(s)$$

Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_2x_2(t) \rightarrow a_2X_2(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5a_2X_2(s)$$

$$Y(s) = \frac{5a_2X_2(s)}{3s^2 + 5} = Y_2(s)$$

Sumo las salidas obtenidas:

$$Y_R(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{5a_1X_1(s)}{3s^2 + 5} + \frac{5a_2X_2(s)}{3s^2 + 5}$$



$$Y_R(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{3s^2 + 5}$$

- 2) Vamos a ingresar al sistema las entradas que ingresamos anteriormente, pero sumadas  $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ .

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))$$

$$Y(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{3s^2 + 5}$$

Finalmente comparamos las salidas de 2) y 1)

$$Y(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{3s^2 + 5}$$

$$Y_R(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s))}{3s^2 + 5}$$

$$Y(s) = Y_R(s)$$

- **No lineales:** no cumplen el principio de superposición.

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t) + 1, \quad CI = 0$$

La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

Transformación (nos vamos a Laplace):

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 8Y(s) = 2X(s) + \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{2X(s) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8}$$

- 1) Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_1x_1(t) \rightarrow a_1X_1(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$Y_1(s) = \frac{2a_1X_1(s) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8}$$

Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_2x_2(t) \rightarrow a_2X_2(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$Y_2(s) = \frac{2a_2X_2(s) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8}$$

Sumo las salidas obtenidas:

$$Y_R(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s) + \frac{1}{s})}{s^2 + 4s + 8}$$

- 2) Vamos a ingresar al sistema las entradas que ingresamos anteriormente, pero sumadas  $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ .

$$Y(s) = \frac{2X(s) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8}$$

$$Y(s) = \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8}$$

Finalmente comparamos las salidas de 2) y 1)

$$\frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{1}{s}}{s^2 + 4s + 8} \neq \frac{2(a_1X_1(s) + a_2X_2(s) + \frac{1}{s})}{s^2 + 4s + 8}$$

Como NO son iguales, NO cumple el principio de superposición y es NO lineal.

$$\begin{aligned} \ddot{y}(t) + 4(\dot{y}(t))^2 + 8y(t) &= 2x(t) \\ \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) &= 2\sin(x(t)) \\ \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8e^{y(t)} &= 2x(t) \\ \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) &= 2x(t)\dot{y}(t) \end{aligned}$$

**Otro ejemplo:**

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t) + 4, CI = 0$$

La variable  $x(t)$  es la señal de entrada.

La variable  $y(t)$  es la señal de salida.

Transformación (nos vamos a Laplace):

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5X(s) + \frac{4}{s}$$

- 1) Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_1x_1(t) \rightarrow a_1X_1(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5a_1X_1(s) + \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5a_1X_1(s) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5} = Y_1(s)$$

Vamos a ingresar al sistema la entrada  $a_2x_2(t) \rightarrow a_2X_2(s)$  y vemos cual es la salida ( $y(t) \rightarrow Y(s)$ )

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5a_2X_2(s) + \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5a_2X_2(s) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5} = Y_2(s)$$

Sumo las salidas obtenidas:

$$Y_R(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = \frac{5a_1X_1(s) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5} + \frac{5a_2X_2(s) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5}$$

$$Y_R(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{8}{s}}{3s^2 + 5}$$

- 2) Vamos a ingresar al sistema las entradas que ingresamos anteriormente, pero sumadas  $a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \rightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$ .

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{4}{s}$$

$$Y(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5}$$

Finalmente comparamos las salidas de 2) y 1)

$$Y(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{4}{s}}{3s^2 + 5}$$

$$Y_R(s) = \frac{5(a_1X_1(s) + a_2X_2(s)) + \frac{8}{s}}{3s^2 + 5}$$

$$Y(s) \neq Y_R(s)$$

Por lo tanto, el sistema descrito es NO lineal.

Otro ejemplos:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)y(t)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5e^{y(t)} = 5x(t)$$

$$3(\ddot{y}(t))^2 + 5y(t) = 5x(t)y(t)$$

