

Sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden en su forma canónica es un sistema cuya función de transferencia es la siguiente

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (1)$$

De esta manera se puede observar que los polos del sistema son:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (2)$$

Los parámetros del sistema ξ y ω_n (factor de amortiguamiento y frecuencia natural no amortiguada, respectivamente) si nos referimos a un sistema físico, son constantes características de cada sistema y son mayores o iguales (caso del factor de amortiguamiento) que 0. Entonces **observando (2)** se puede afirmar lo siguiente

$$\xi \geq 0, \omega_n > 0 \in \mathbb{R}, \text{ por lo tanto el producto } \xi\omega_n \geq 0$$

Siguiendo con esta idea el comportamiento temporal de la respuesta del sistema frente a una entrada específica dependerá de los valores posibles que pueda adquirir el parámetro ξ . De esta manera se pueden tener 4 posibles casos:

Caso 1 Sistema sobre amortiguado $\xi > 1$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar que el término $\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ cumple que:

$$\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} > 0 \in \mathbb{R} \quad \forall \xi > 1$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos diferentes para este caso, donde el factor de amortiguamiento toma valores mayores que 1. De esta forma los polos del sistema son:

$$s_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$s_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Dado que los polos del sistema son ambos reales y diferentes, falta establecer en donde se ubicarían en el plano complejo y determinar si el sistema es estable o inestable (recordar que la estabilidad depende de la ubicación de la parte real de los polos en el plano complejo). Si se factoriza ω_n en (2) se obtiene que:

$$\omega_n \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

Se sabe que $\omega_n > 0$, por lo tanto, se requiere analizar el factor $-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}$ de la expresión anterior para establecer la ubicación de los polos y por lo tanto la estabilidad del sistema. Si se supone lo siguiente:

$$-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} < 0$$

$$\pm \sqrt{\xi^2 - 1} < \xi$$

$$(\pm \sqrt{\xi^2 - 1})^2 < (\xi)^2$$

$$\xi^2 - 1 < \xi^2$$

$$\boxed{-1 < 0}$$

Se puede verificar que esta inecuación **siempre** es válida, bajo el supuesto planteado. Si se plantea la inecuación con el símbolo mayor que(>) , se corrobora fácilmente que el supuesto es imposible, así se concluye que el factor $-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1} < 0 \in \mathbb{R} \forall \xi > 1$, por lo tanto también se puede concluir que los polos descritos en (3) y en (4) son siempre menores que 0, de esta manera el sistema es estable. Ahora bien, ¿qué polo estará más cerca al origen? Claramente se puede observar que el polo descrito en (4) será el polo mas alejado del origen mientras que el polo descrito en (3) será el polo más cerca del origen.

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)}$$

Si la entrada del sistema $x(t)=u(t)$, se puede calcular la salida, $y(t)$, como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \implies Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s_1 t} + Ce^{s_2 t})u(t)} \quad (5)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} < 0$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (5) desaparecen después de cierto tiempo, y solo prevalece el valor de A.

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = \omega_n^2$$

Por lo tanto, las constantes A, B y C serán:

$$A = \frac{k\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \Big|_{s=0} = \frac{k\omega_n^2}{s_1 s_2} = k = A > 0 \text{ if } k > 0$$

$$B = \frac{k\omega_n^2}{s(s-s_2)} \Big|_{s=s_1} = \frac{k\omega_n^2}{s_1(s_1-s_2)} = \frac{ks_2}{s_1-s_2} = B < 0 \text{ if } k > 0$$

$$C = \frac{k\omega_n^2}{s(s-s_1)} \Big|_{s=s_2} = \frac{k\omega_n^2}{s_2(s_2-s_1)} = \frac{ks_1}{s_2-s_1} = C > 0 \text{ if } k > 0$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 2 Sistema críticamente amortiguado $\xi = 1$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar que el termino $\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$ cumple que:

$$\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} = 0 \quad \forall \xi = 1$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos iguales para este caso, donde el factor de amortiguamiento toma valores iguales a 1. De esta forma los polos del sistema son un par de polos reales iguales negativos, lo que conlleva a que el sistema es estable:

$$\boxed{s_1 = -\omega_n < 0 \in \mathbb{R} \quad \forall \xi = 1} \quad (6)$$

$$\boxed{s_2 = -\omega_n < 0 \in \mathbb{R} \quad \forall \xi = 1} \quad (7)$$

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s-s_1)^2}$$

Si la entrada del sistema $x(t)=u(t)$, se puede calcular la salida, $y(t)$, como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \implies Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s-s_1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{(s-s_1)^2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s_1 t} + Cte^{s_1 t})u(t)} \quad (8)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} < 0$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (8) desaparecen después de cierto tiempo, y solo prevalece el valor de A .

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = \omega_n^2$$

Por lo tanto, las constantes A , B y C serán:

$$A = \left. \frac{k\omega_n^2}{(s-s_1)^2} \right|_{s=0} = \frac{k\omega_n^2}{s_1^2} = k = A > 0 \text{ if } k > 0$$

$$B = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{k\omega_n^2}{s} \right] \right|_{s=s_1} = - \left. \frac{k\omega_n^2}{s^2} \right|_{s=s_1} = -k = B < 0 \text{ if } k > 0$$

$$C = \left. \frac{k\omega_n^2}{s} \right|_{s=s_1} = \frac{k\omega_n^2}{s_1} = -k\omega_n = C < 0 \text{ if } k > 0$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 3 Sistema subamortiguado $0 < \xi < 1$:

Si se toma la ecuación (2) y se reescribe el factor $\omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ como $j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, se tiene que:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\sigma \pm \omega_d j \in \mathbb{C} \forall 0 < \xi < 1} \quad (9)$$

Donde

$\sigma = \xi\omega_n$, constante de amortiguamiento, parte Real de los polos

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, frecuencia de amortiguamiento, parte Imaginaria de los polos

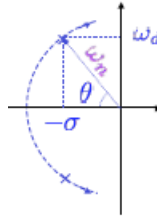


Figura 1. Diagrama de polos y ceros, caso subamortiguado

De esta forma los polos del sistema son un par de polos complejos conjugados cuya parte real es menor que 0, lo que conlleva a que el sistema sea estable:

$$\boxed{s_1 = -\sigma + \omega_d j \in \mathbb{C} \forall 0 < \xi < 1} \quad (10)$$

$$\boxed{s_2 = -\sigma - \omega_d j \in \mathbb{C} \forall 0 < \xi < 1} \quad (11)$$

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Si la entrada del sistema $x(t)=u(t)$, se puede calcular la salida, $y(t)$, como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \implies Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-s_1} + \frac{C}{s-s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + Be^{s_1 t} + Ce^{s_2 t})u(t)} \quad (12)$$

Nota: recordar que ambos polos $s_{1,2} \in \mathbb{C}$, por lo tanto, ambas exponenciales que aparecen en (12) son exponenciales complejas

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = \omega_n^2$$

Por lo tanto, las constantes A, B y C serán:

$$A = \left. \frac{k\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)} \right|_{s=0} = \frac{k\omega_n^2}{s_1 s_2} = k = A > 0 \text{ if } k > 0$$

$$B = \left. \frac{k\omega_n^2}{s(s-s_2)} \right|_{s=s_1} = \frac{k\omega_n^2}{s_1(s_1-s_2)} = \frac{k s_2}{s_1-s_2} = \frac{k(-\sigma - \omega_d j)}{-\sigma + \omega_d j + \sigma + \omega_d j} = \frac{k(-\sigma - \omega_d j)}{2\omega_d j}$$

Se sabe que (ver Figura 1) la forma polar de los números complejos expresados en el numerador y denominador, son respectivamente:

$$-\sigma - \omega_d j = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} e^{j(\pi+\theta)} = \omega_n e^{j(\pi+\theta)}$$

$$\omega_d j = \omega_d e^{j\pi/2}$$

Entonces

$$B = \frac{k\omega_n e^{j(\pi+\theta)}}{2\omega_d e^{j\pi/2}} = \frac{k e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$C = B^* = \frac{k e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}$$

Ahora reemplazando los resultados de estas constantes en la expresión (12) se tiene que:

$$y(t) = \left(k + \frac{ke^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{s_1t} + \frac{ke^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{s_2t} \right) u(t)$$

$$y(t) = \left(k + \frac{ke^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\sigma+\omega_dj)t} + \frac{ke^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{(-\sigma-\omega_dj)t} \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\sigma t}e^{j\omega_d t} + \frac{e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}}{2\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\sigma t}e^{-j\omega_d t} \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left(e^{j(\frac{\pi}{2}+\theta)}e^{j\omega_d t} + e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}e^{-j\omega_d t} \right) \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left(e^{j(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta)} + e^{-j(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta)} \right) \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left(\cos\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) + j\sin\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) + \cos\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) - j\sin\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{-\sigma t}}{2\sqrt{1-\xi^2}} \left(2\cos\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 + \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos\left(\omega_d t + \frac{\pi}{2} + \theta\right) \right) u(t)$$

Se sabe que:

$$\cos\left(\omega_d t + \theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\omega_d t + \theta)$$

De esta manera la respuesta de un sistema de segundo orden cuando la entrada es un escalón unitario es:

$$\boxed{y(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \theta) \right) u(t)} \quad (13)$$

Con

$$\cos \theta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\xi \omega_n}{\omega_n} = \xi$$

$$\theta = \cos^{-1} \xi$$

De esta manera se puede observar que la salida tiende a k cuando el tiempo tiende a infinito.

Caso 4 Sistema marginalmente estable $\xi = 0$:

Si se toma la ecuación (2) se puede observar los polos del sistema son:

$$\boxed{s_1 = \omega_n j \in \mathbb{I} \quad \forall \xi = 0} \quad (14)$$

$$\boxed{s_2 = -\omega_n j \in \mathbb{I} \quad \forall \xi = 0} \quad (15)$$

Dado esto se puede concluir que el sistema tiene dos polos complejos no repetidos sobre el eje imaginario (sin parte real). Debido a esto el sistema se denomina marginalmente estable.

Así el sistema descrito por (1) se puede expresar de la siguiente manera:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$$

Si la entrada del sistema $x(t)=u(t)$, se puede calcular la salida, $y(t)$, como sigue:

$$Y(s) = H(s)X(s), X(s) = \frac{1}{s} \quad ==> \quad Y(s) = \frac{k \omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega_n^2}$$

O también una posible expansión por fracciones parciales sería:

$$Y(s) = \frac{k \omega_n^2}{s(s^2 + \omega_n^2)} = \frac{k \omega_n^2}{s(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - s_1} + \frac{C}{s - s_2}$$

Aplicando la transformada inversa a la expresión anterior se puede observar que:

$$\boxed{y(t) = (A + B e^{s_1 t} + C e^{s_2 t})u(t)} \quad (16)$$

Se puede probar que el producto de los polos es:

$$s_1 s_2 = \omega_n^2$$

De esta manera el cálculo de las constantes A, B y C expresadas en (16) son:

$$A = \frac{k \omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} \Big|_{s=0} = \frac{k \omega_n^2}{s_1 s_2} = k = A > 0 \text{ if } k > 0$$

$$B = \frac{k \omega_n^2}{s(s - s_2)} \Big|_{s=s_1} = \frac{k \omega_n^2}{s_1(s_1 - s_2)} = \frac{k s_2}{s_1 - s_2} = \frac{k(-\omega_n j)}{\omega_n j + \omega_n j} = \frac{-k \omega_n j}{2 \omega_n j} = -\frac{k}{2} = B < 0 \text{ if } k > 0$$

$$C = B^* = -\frac{k}{2} = C < 0 \text{ if } k > 0$$

Tomando estos valores y los polos descritos en (14) y (15) y sustituyendo en (16), se tiene que:

$$y(t) = \left(k - \frac{k}{2} e^{\omega_n j t} - \frac{k}{2} e^{-\omega_n j t} \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 - \frac{1}{2} (e^{\omega_n j t} + e^{-\omega_n j t}) \right) u(t)$$

$$y(t) = k \left(1 - \frac{1}{2} (\cos(\omega_n t) + j \sin(\omega_n t) + \cos(\omega_n t) - j \sin(\omega_n t)) \right) u(t)$$

$$\boxed{y(t) = k(1 - \cos(\omega_n t))u(t)} \quad (17)$$

De esta manera se puede observar que la salida estaría oscilando en valores de 0 y 2k cuando el tiempo tiende a infinito.

Nota: Se adiciona un script realizado en Matlab donde se puede ver gráficamente las respuestas obtenidas con anterioridad.

Estabilidad:

- Un sistema es **estable** si todos sus polos están situados en el semiplano complejo negativo.
- Un sistema es **inestable** si algún polo se ubica en el semiplano complejo positivo o si existen polos múltiples en el eje imaginario o en el origen.
- Un sistema es **marginalmente estable** si existe una pareja simple (no repetida) de polos imaginarios (parte real es 0), estando el resto de los polos en el semiplano negativo.
- Los polos que ubican en el semiplano negativo originan respuestas que se atenúan más rápido, si están mas alejados del eje imaginario. Se denominan **polos dominantes** aquellos que se ubican mas cerca del eje imaginario.
- Los polos complejos conjugados dan lugar a respuestas oscilatorias con frecuencia mas elevada cuando mayor es la distancia al eje real.