

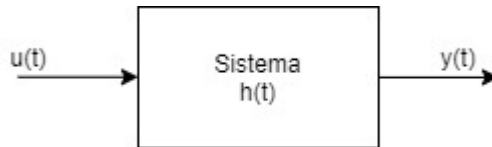
Representación de los sistemas dinámicos

Función de transferencia (FT):



Al sistema le vamos a ingresar la señal **impulso unitario**:

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$



Se obtiene la **respuesta al impulso**, $y(t) = h(t)$.

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI), uno puede obtener la salida (respuesta) frente a cualquier entrada (estimulo), con la operación matemática conocida con el nombre de **convolución**.

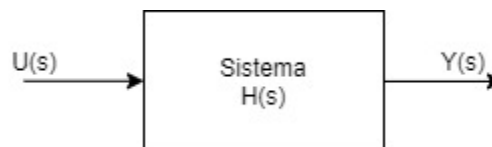
$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Vamos a usar la transformada de Laplace unilateral:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) * h(t)\} = U(s)H(s) = Y(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}} \text{ *Función de transferencia* }$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Comentarios:

- Una función de transferencia es un modelo matemático porque nos permite expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.
- Esta función es independiente de la magnitud y naturaleza de las señales de excitación, es una propiedad propia del sistema.

- No proporciona información acerca de la estructura física del sistema, podemos obtener funciones idénticas de muchos sistemas físicamente diferentes.
- Permite comprender el comportamiento del sistema.
- Proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema.

Polinomio característico:

Dado la FT:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$N(s)$ y $D(s)$ son funciones polinómicas en términos de la variable s . El polinomio característico es el denominador de mi función de transferencia, es decir $D(s)$ es mi polinomio característico.

Ecuación característica:

$$D(s) = 0$$

Polos y ceros:

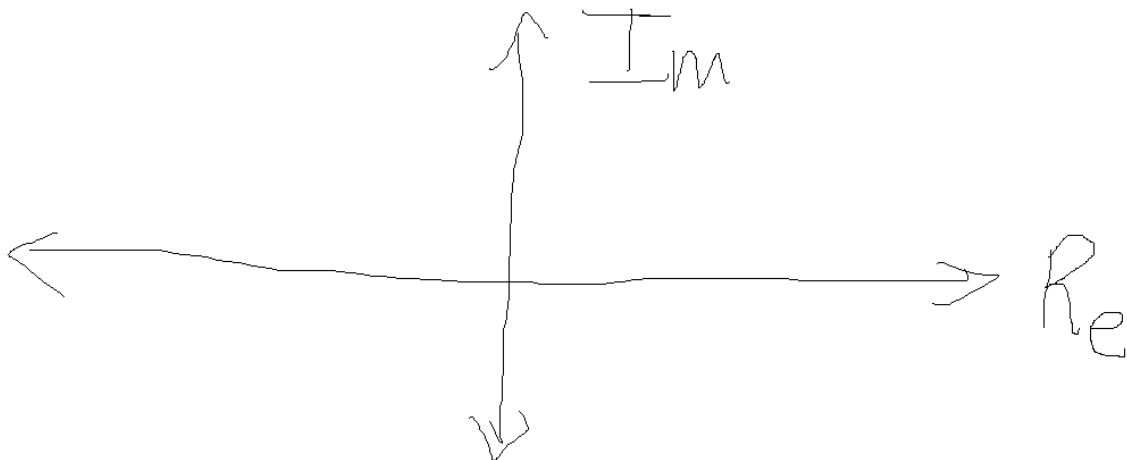
Los polos son las raíces del polinomio característico, es decir es la solución de la ecuación característica.

Los ceros son las raíces del numerador, es decir se resuelva la ecuación $N(s) = 0$.

Estabilidad:

Un sistema es estable si todas las partes reales de los polos del mismo son menores que 0.

Mapa de polos y ceros:



Polos(x)

Ceros(o)

Ejemplos:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t), CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 8Y(s) = 2X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(s^2 + 4s + 8) = 2X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 8}$$

$$s^2 + 4s + 8 \text{ Pol. caract.}$$

$$s^2 + 4s + 8 = 0 \text{ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

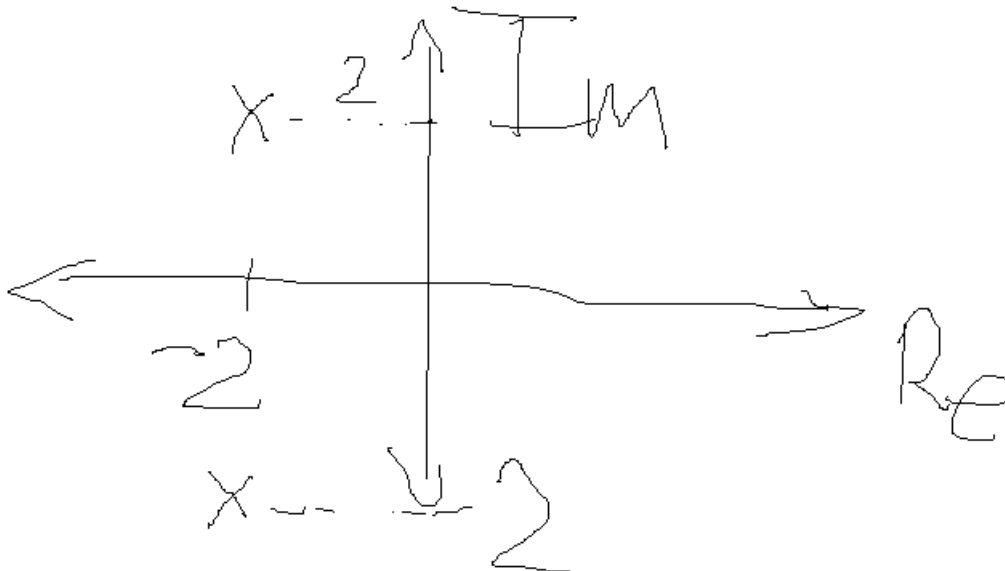
$$s^2 + 4s + 8 = 0$$

$$s_1 = -2 + 2i$$

$$s_2 = -2 - 2i$$

Ceros del sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:



Otro ejemplo:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t), CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(3s^2 + 5) = 5X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

$$3s^2 + 5 \text{ Pol. caract.}$$

$$3s^2 + 5 = 0 \text{ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

$$s_1 = \sqrt{\frac{5}{3}} i$$

$$s_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}} i$$

Ceros de sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:

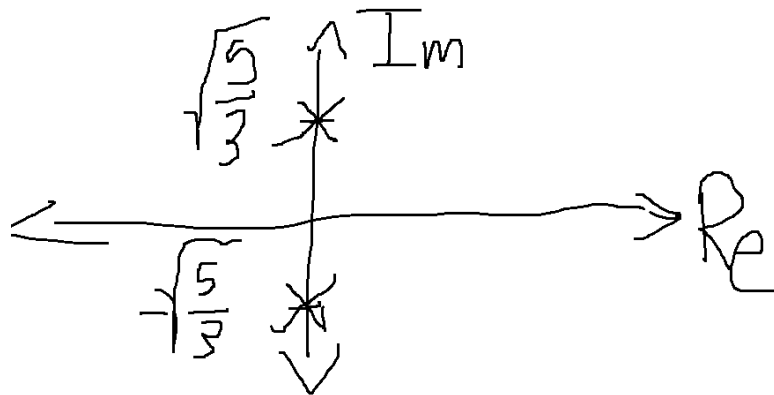
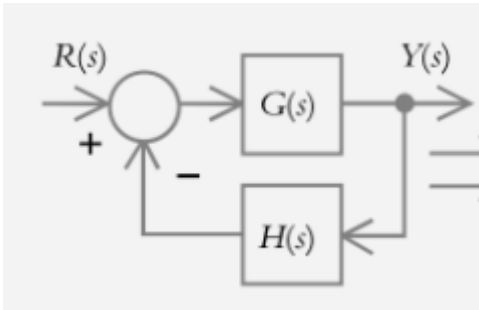


Diagrama de bloques (DB):

Diagrama de bloques (Realimentación negativa/positiva):



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

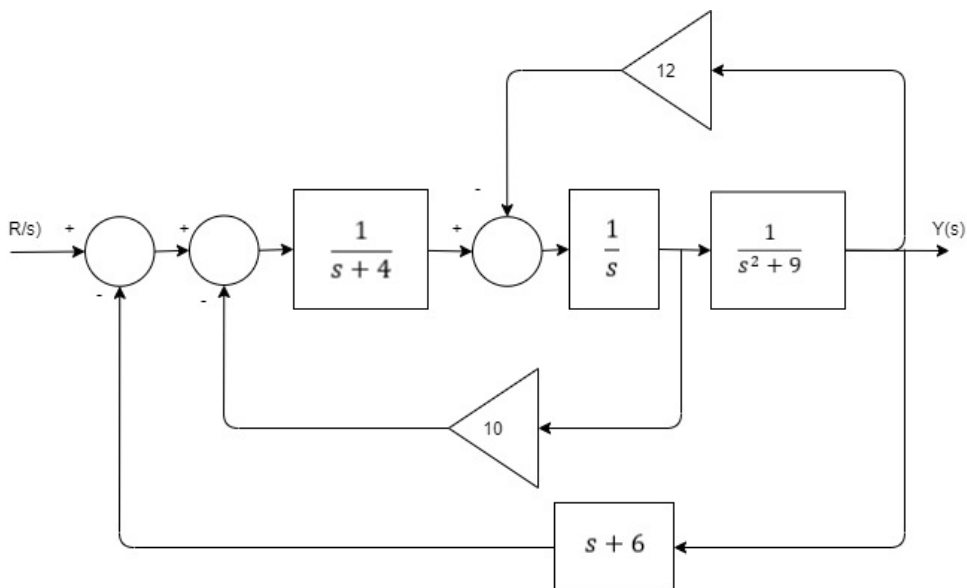
$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 \pm \frac{A(s)}{B(s)} \frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)}{B(s) \left(\frac{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}{B(s)D(s)} \right)} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

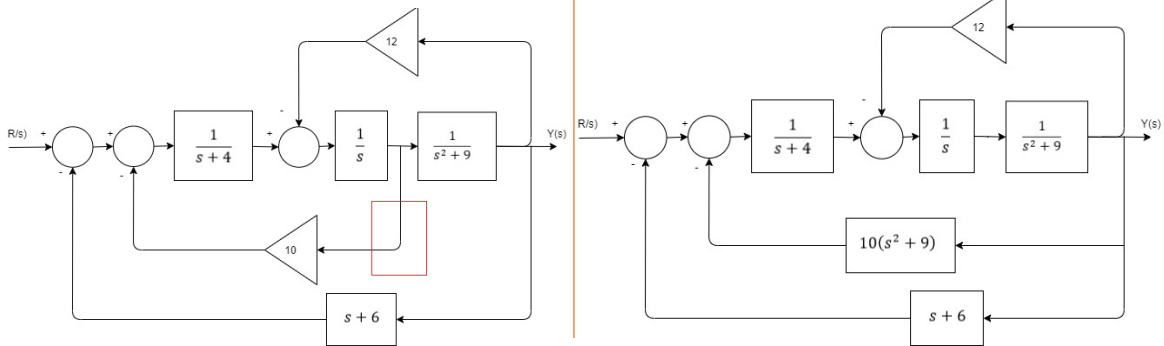
$$T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

Ejemplo:

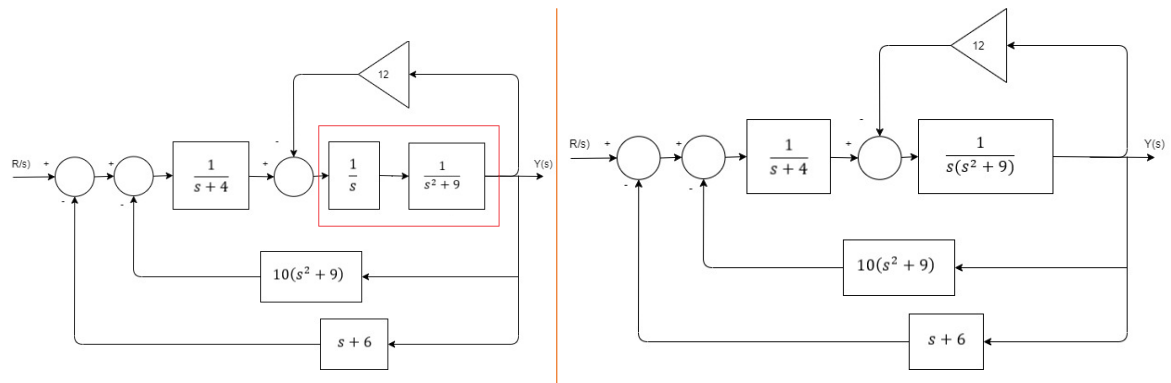
Encontrar la FT $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, del sistema descrito a continuación (use algebra de bloques):



1) Aplicamos 9 y posteriormente 5



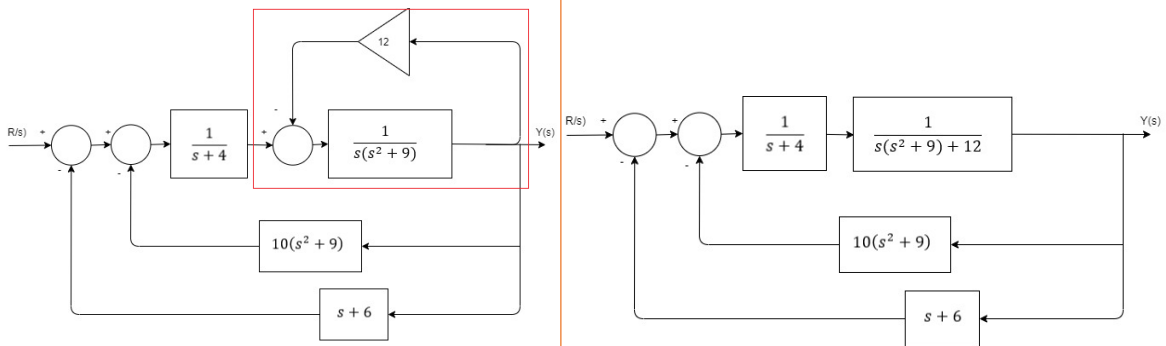
2) Aplicamos 5



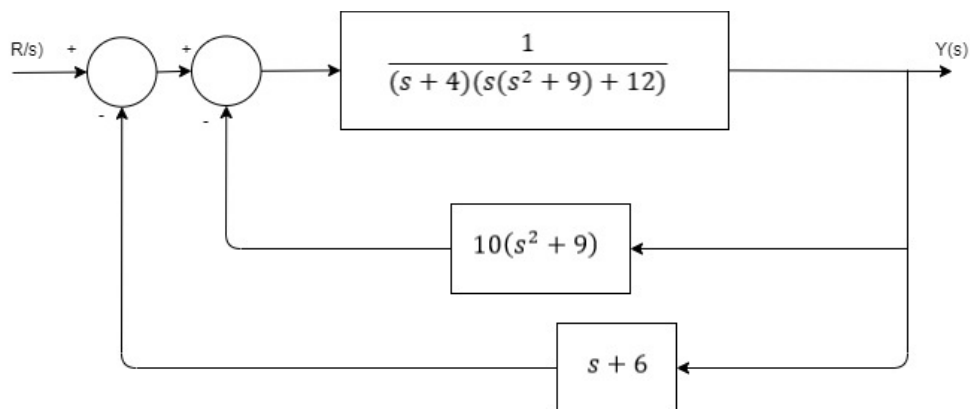
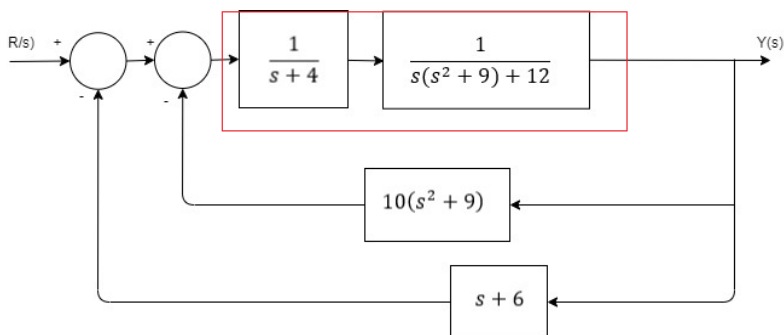
3) Aplicamos 11

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad H(s) = \frac{12}{1} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

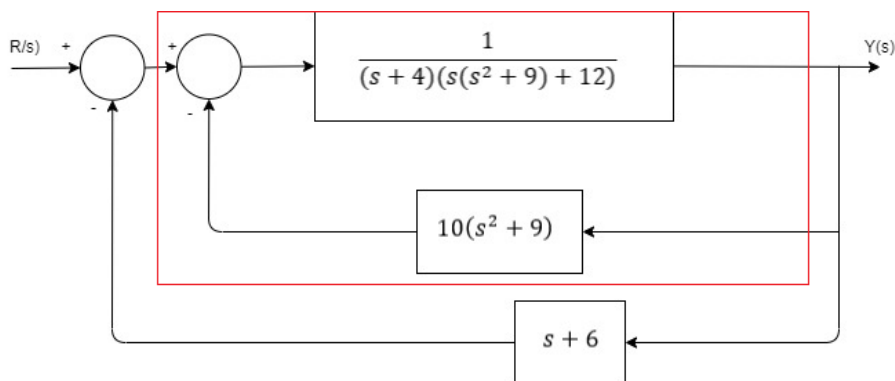
$$T(s) = \frac{1}{s(s^2+9) + 12}$$



4) Aplicamos de nuevo 5

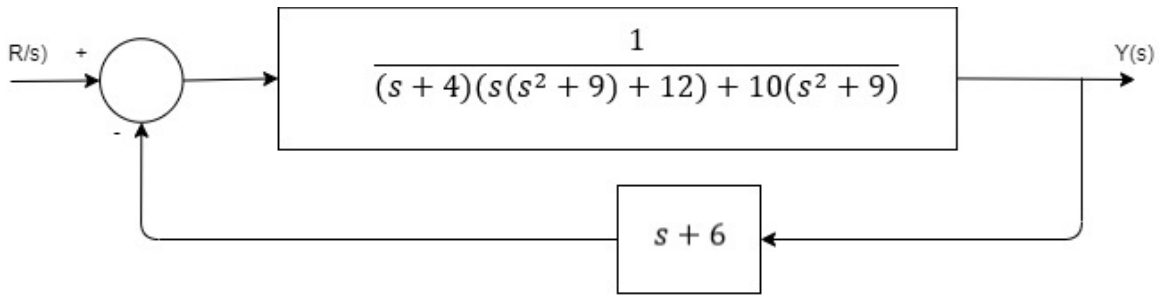


5) Aplicamos 11



$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)} = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad H(s) = \frac{10(s^2+9)}{1} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)} = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12) + 10(s^2+9)}$$



$$G(s) = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)} = \frac{A(s)}{B(s)}, \quad H(s) = \frac{s+6}{1} = \frac{C(s)}{D(s)}$$

Finalmente aplicando 11 una vez más:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)+s+6}$$

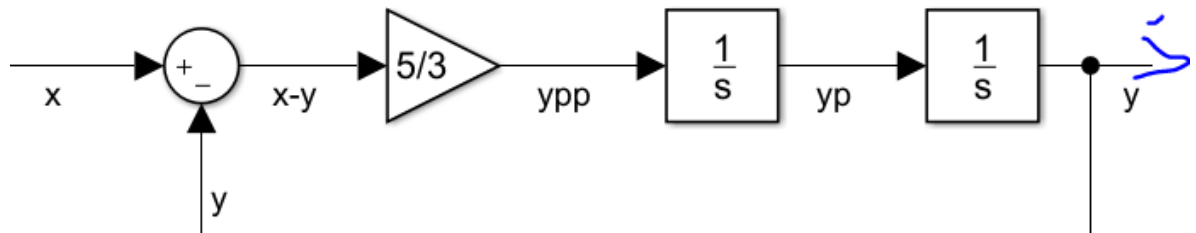
$$\frac{1}{(s+4)(s^3+9s+12)+10s^2+90+s+6} = \frac{1}{s^4+9s^2+12s+4s^3+36s+48+10s^2+96+s}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^4+4s^3+19s^2+49s+144}$$

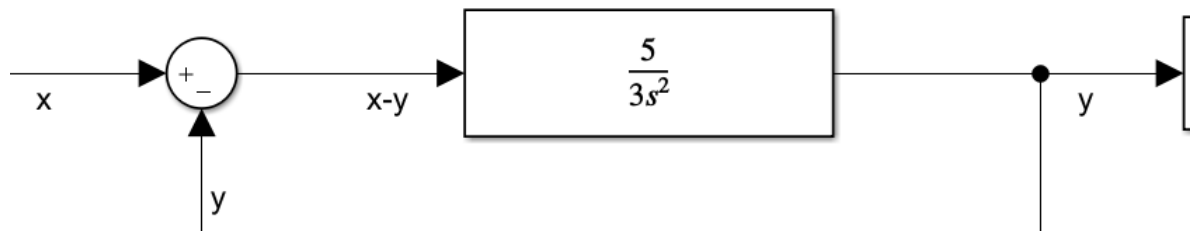
Otro ejemplo:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t), \quad CI = 0$$

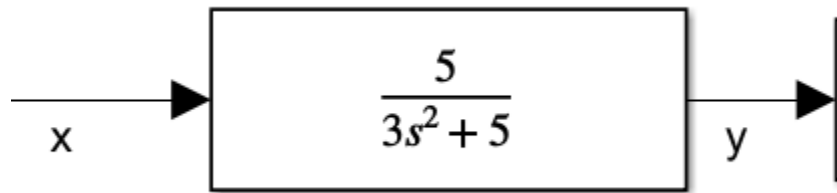
$$\ddot{y}(t) = \frac{(5x(t) - 5y(t))}{3} = (x(t) - y(t)) \frac{5}{3}$$



1) Aplicamos 5

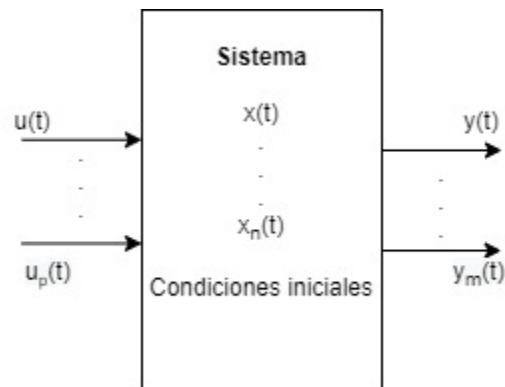


2) Aplicamos 11



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

Representación en Variables de Estado (VE):



Estado: representa la mínima cantidad de información de modo que el conocimiento de este en $t = t_0$ (condiciones iniciales) junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema (evolución de los estados) para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$.

Las variables necesarias para describir el estado de un sistema son llamadas **variables de estado (VE)**. En términos generales el estado de un sistema de orden n es descrito por un conjunto de n variables representadas en el **vector de estado**:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Para describir el estado del sistema, se busca escribir un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x} = f(x, u, t) \quad (\text{Ecuaciones de estado})$$

Del mismo modo se requiere expresar la/s salida/s del sistema, para esto se usa la ecuación de salida:

$$y = g(x, u, t) \quad (\text{Ecuación de salida})$$

Si el sistema es invariante y lineal, entonces:

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

Vector de entrada:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}_{p \times 1}$$

Vector de salida:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

Matriz de estado:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Matriz de entrada:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{n \times p}$$

Matriz de salida:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Matriz de transmisión directa:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$$

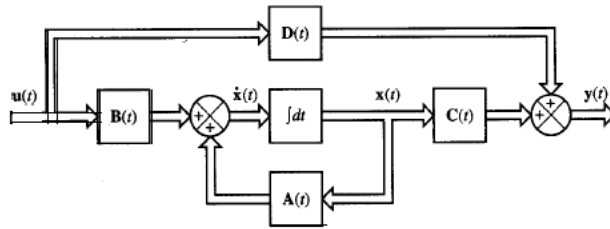


Diagrama de bloques de un sistema representado en espacio de estados

Comentarios:

- Se puede aplicar a sistemas SISO hasta MIMO.
- Se pueden estudiar de la misma forma sistemas variantes e invariantes en el tiempo.
- Los problemas formulados con este enfoque son muy fáciles de programar.
- Las ecuaciones de estado describen no solamente la relación entre la entrada y salida, sino también el comportamiento interno del sistema bajo cualquier condición inicial.
- Se pueden representar sistemas no lineales.

Ejemplo:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^4 + 4s^3 + 19s^2 + 49s + 144}$$

$$Y(s) (s^4 + 4s^3 + 19s^2 + 49s + 144) = R(s)$$

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} + 4 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + 19 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 49 \frac{dy(t)}{dt} + 144 y(t) = r(t)$$

Seleccionar los estados:

$$x_1 = y(t), x_2 = \frac{dy(t)}{dt}, x_3 = \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, x_4 = \frac{d^3 y(t)}{dt^3}$$

Seleccionar las entradas:

$$u = r(t)$$

La salida:

$$y_{ss}(t) = x_1$$

Derivar los estados:

$$\dot{x}_1 = \frac{dy(t)}{dt} = x_2, \dot{x}_2 = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x_3, \dot{x}_3 = \frac{d^3 y(t)}{dt^3} = x_4$$

$$\dot{x}_4 = \frac{d^4 y(t)}{dt^4} = ?$$

$$\frac{d^4 y(t)}{dt^4} = r(t) - 4 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} - 19 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 49 \frac{dy(t)}{dt} - 144 y(t)$$

$$\dot{x}_4 = \frac{d^4 y(t)}{dt^4} = u - 4x_4 - 19x_3 - 49x_2 - 144x_1$$

$$\boxed{\dot{x} = Ax + Bu}$$

$$\boxed{y_{ss} = Cx + Du}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = u - 4x_4 - 19x_3 - 49x_2 - 144x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -144 & -49 & -19 & -4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} [u]$$

$$\boxed{y_{ss} = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}$$

Repaso:

$$4x - 19y - 49z = 15$$

$$-2x + 9y = 0$$

$$2x - 9z = -5$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -19 & -49 \\ -2 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

$$Y(s)(3s^2 + 5) = 5X(s)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)$$

Seleccionar los estados:

$$x_1 = y(t), \quad x_2 = \frac{dy(t)}{dt}$$

Seleccionar las entradas:

$$u = x(t)$$

La salida:

$$y_{ss}(t) = y(t) = x_1(t)$$

Derivar los estados:

$$\dot{x}_1 = \frac{dy(t)}{dt} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = ?$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{5(x(t) - y(t))}{3}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{5}{3}u - \frac{5}{3}x_1$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}}$$

$$\boxed{\mathbf{y}_{ss} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\frac{5}{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} [\mathbf{u}]}$$

$$\boxed{\mathbf{y}_{ss} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0}) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$