Representación de los sistemas dinámicos

Función de transferencia (FT):

Al sistema le vamos a ingresar la señal **impulso unitario:**

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

Se obtiene la **respuesta al impulso**, $y(t) = h(t)$.

Si el sistema es lineal e invariante en el tiempo (LTI), uno puede obtener la salida(respuesta) frente a cualquier entrada(estimulo), con la operación matemática conocida con el nombre de **convolución.**

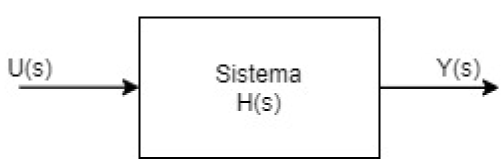
$$y(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Vamos a usar la transformada de Laplace unilateral:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = X(s)$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{u(t) * h(t)\} = U(s)H(s) = Y(s)$$

$$\boxed{\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}}}\ \boldsymbol{Funci\acute{o}n\ de\ transferencia}$$



$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$

Comentarios:

- Una función de transferencia es un modelo matemático porque nos permite expresar la ecuación diferencial que relaciona la variable de salida con la variable de entrada.

- Esta función es independiente de la magnitud y naturaleza de las señales de excitación, es una propiedad propia del sistema.
- No proporciona información acerca de la estructura física del sistema, podemos obtener funciones idénticas de muchos sistemas físicamente diferentes.
- Permite comprender el comportamiento del sistema.
- Proporciona una descripción completa de las características dinámicas del sistema.

Polinomio característico:

Dado la FT:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) y D(s) son funciones polinómicas en términos de la variable s. El polinomio característico es el denominador de mi función de transferencia, es decir D(s) es mi polinomio característico.

Ecuación característica:

$$D(s) = 0$$

Polos y ceros:

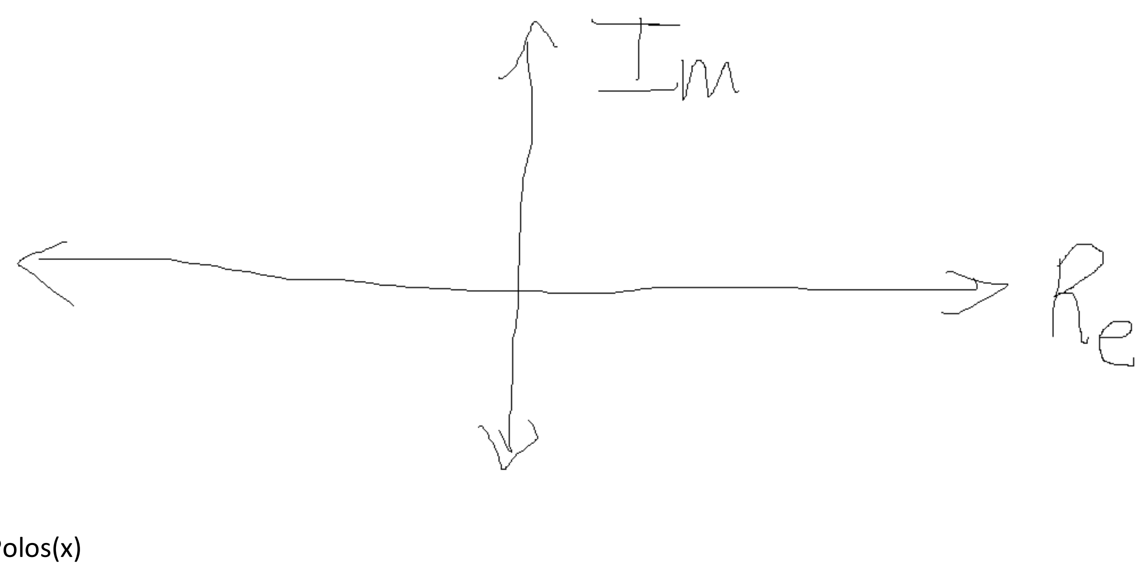
Los polos son las raíces del polinomio característico, es decir es la solución de la ecuación característica.

Los ceros son las raíces del numerador, es decir se resuelva la ecuación $N(s) = 0$.

Estabilidad:

Un sistema es estable si todas las partes reales de los polos del mismo son menores que 0.

Mapa de polos y ceros:



Polos(x)

Ceros(o)

Ejemplo:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 8y(t) = 2x(t), CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 8Y(s) = 2X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(s^2 + 4s + 8) = 2X(s)$$

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2 + 4s + 8}}$$

$$\boldsymbol{s^2 + 4s + 8\ Pol.\ caract.}$$

$$\boldsymbol{s^2 + 4s + 8 = 0\ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

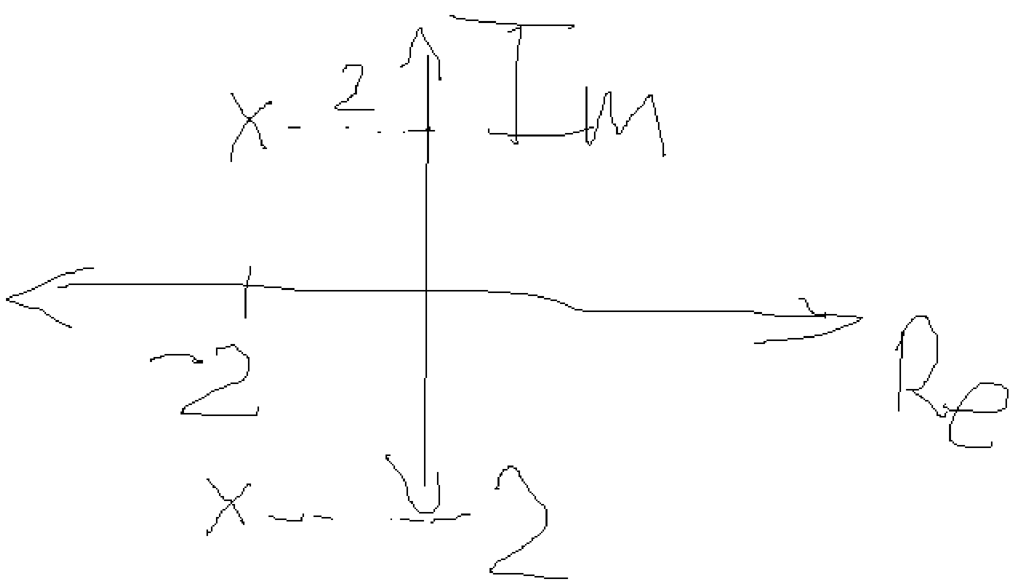
$$s^2 + 4s + 8 = 0$$

$$s_1 = -2 + 2i$$

$$s_2 = -2 - 2i$$

Ceros del sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:



Otro ejemplo:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)\,, CI = 0$$

Nos vamos a Laplace

$$3s^2Y(s) + 5Y(s) = 5X(s)$$

Encontramos FT:

$$Y(s)(3s^2 + 5) = 5X(s)$$

$$\boldsymbol{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}}$$

$$\boldsymbol{3s^2 + 5\ Pol.\ caract.}$$

$$\boldsymbol{3s^2 + 5 = 0\ Ec. carac.}$$

Los polos del sistema:

$$\boldsymbol{s_1 = \sqrt{\frac{5}{3}}\,i}$$

$$\boldsymbol{s_2 = -\sqrt{\frac{5}{3}}\,i}$$

Ceros de sistema: no tiene

Mapa de polos y ceros:

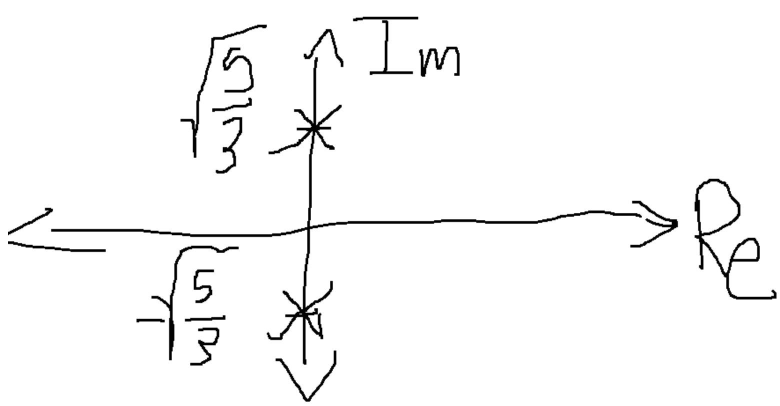
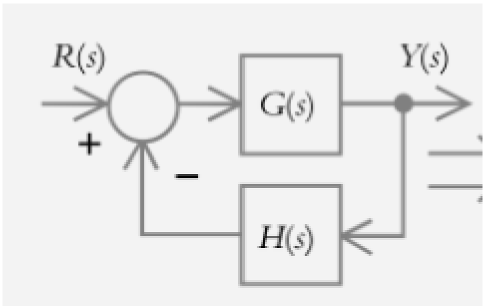


Diagrama de bloques (DB):

Diagrama de bloques (Realimentación negativa/positiva):



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

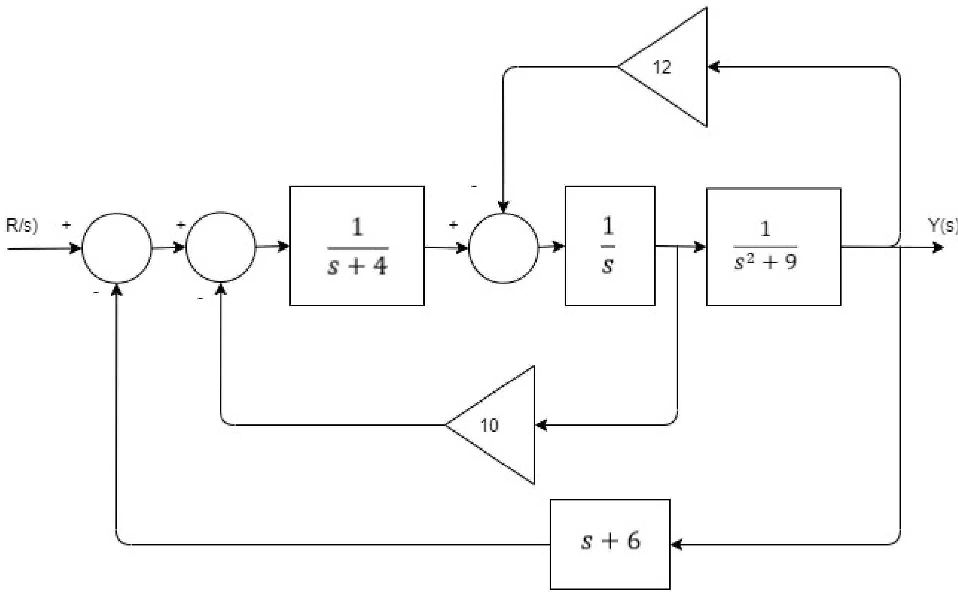
$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)}, H(s) = \frac{C(s)}{D(s)}$$

$$T(s) = \frac{\frac{A(s)}{B(s)}}{1 \pm \frac{A(s)}{B(s)}\frac{C(s)}{D(s)}} = \frac{A(s)}{B(s)\left(\frac{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}{B(s)D(s)}\right)} = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}$$

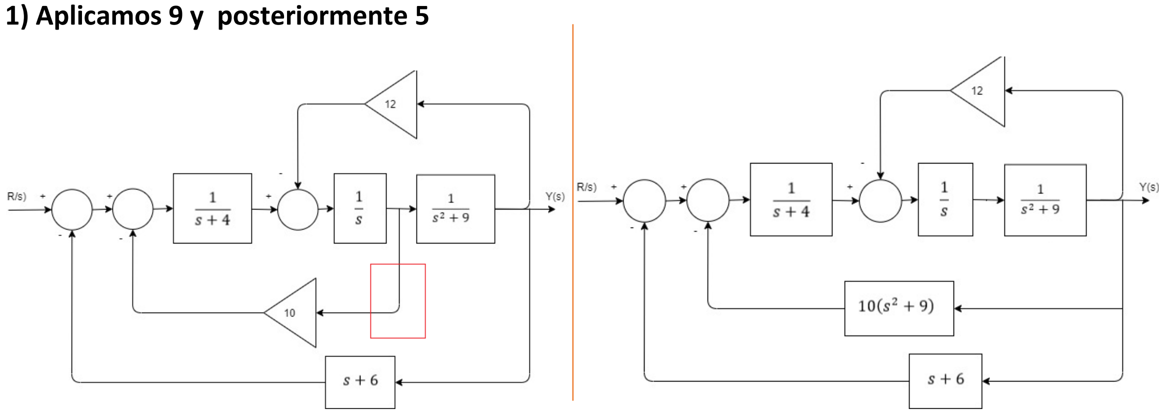
$$\boxed{\boldsymbol{T(s) = \frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s) \pm A(s)C(s)}}}$$

Ejemplos:

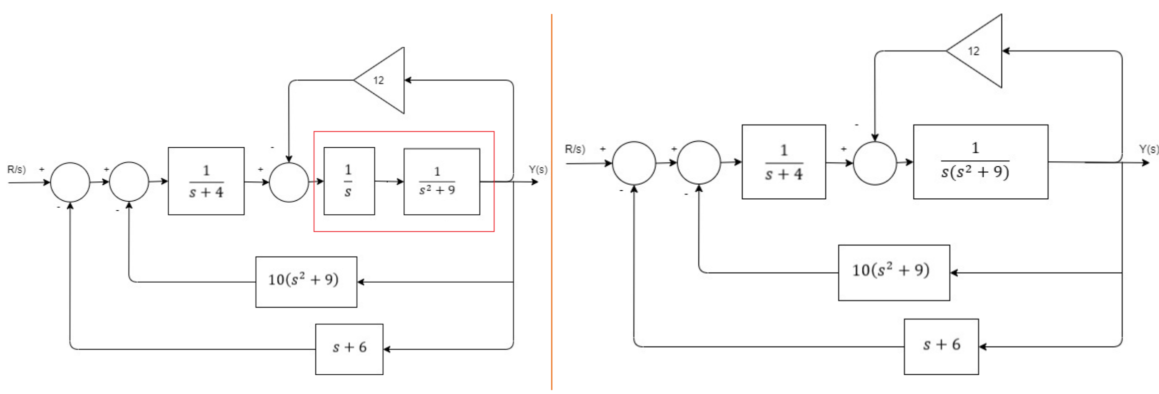
Encontrar la FT $H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$, del sistema descrito a continuación (use algebra de bloques):



1) Aplicamos 9 y posteriormente 5



2) Aplicamos 5

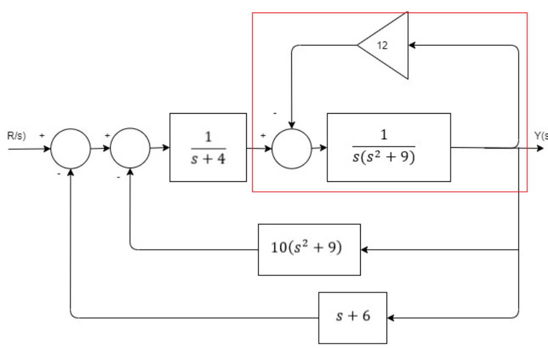


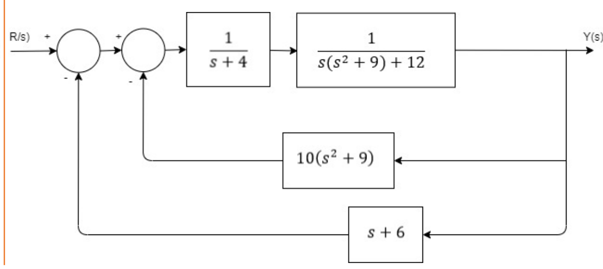
3) Aplicamos 11

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}$$

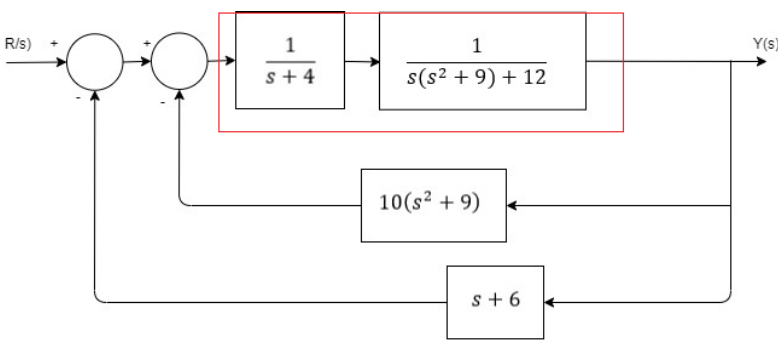
$$G(s) = \frac{A}{B} = \frac{1}{s(s^2+9)}, H(s) = \frac{12}{1} = \frac{C}{D}$$

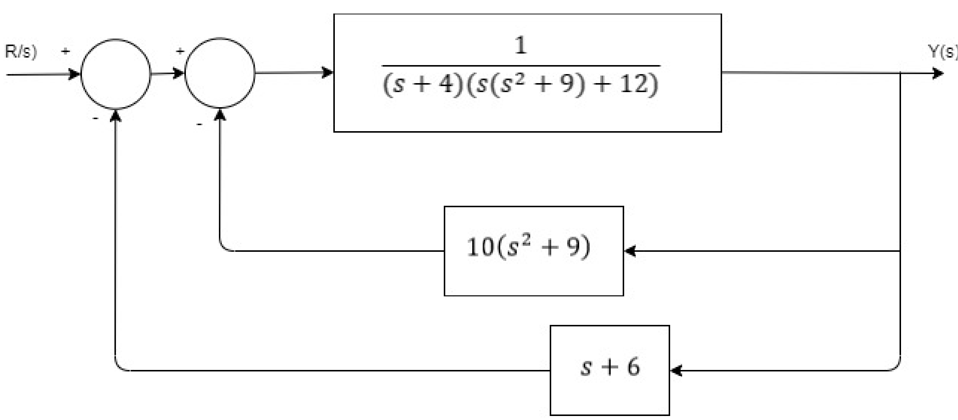
$$\boxed{T(s)=\frac{A(s)D(s)}{B(s)D(s)\pm A(s)C(s)}}$$





4) Aplicamos de nuevo 5



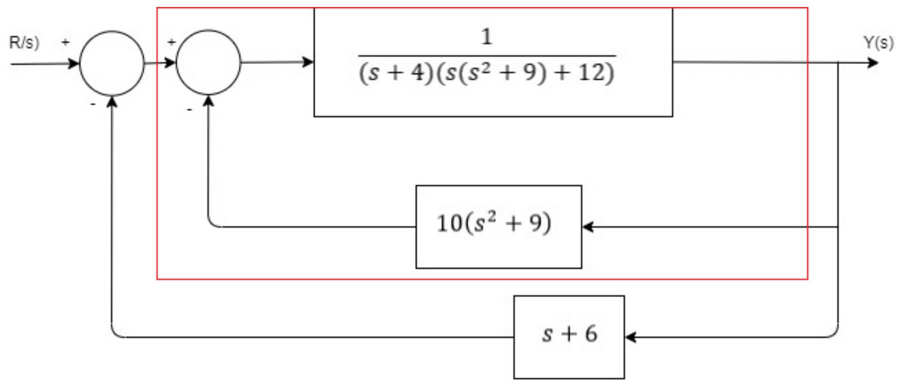


$$T(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

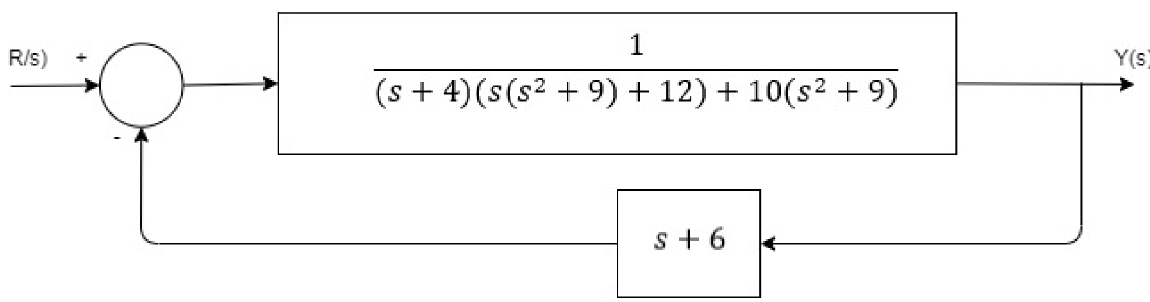
$$G(s)=\frac{A}{B}=\frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)},H(s)=\frac{10(s^2+9)}{1}=\frac{C}{D}$$

$$\boxed{\boldsymbol{T(s)} = \frac{\mathbf{1}}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)}}$$

5) Aplicamos 11



$$\boxed{\boldsymbol{T(s)} = \frac{\mathbf{1}}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)}}$$



Finalmente aplicando 11 una vez más:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+4)(s(s^2+9)+12)+10(s^2+9)+s+6}$$

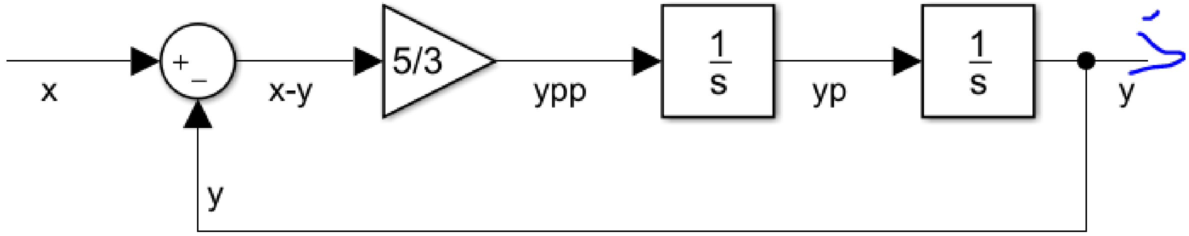
$$\frac{1}{(s+4)(s^3+9s+12)+10s^2+90+s+6} = \frac{1}{s^4+9s^2+12s+4s^3+36s+48+10s^2+96+s}$$

$$\boldsymbol{H(s)} = \frac{\boldsymbol{Y(s)}}{\boldsymbol{R(s)}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^4+4s^3+19s^2+49s+144}}$$

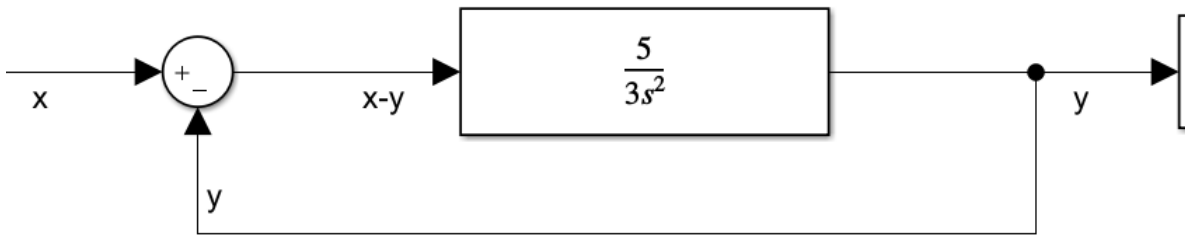
Ejemplos:

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)\,, CI = 0$$

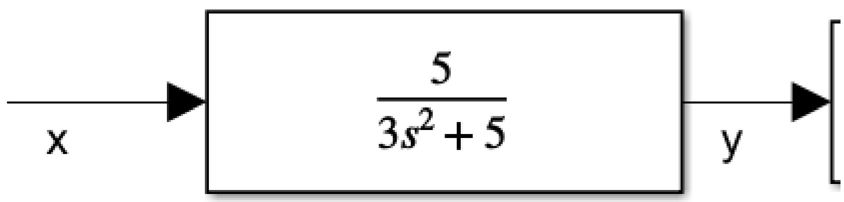
$$\ddot{y}(t) = \frac{\big(5x(t) - 5y(t)\big)}{3} = \big(x(t) - y(t)\big)\frac{5}{3}$$



1) Aplicamos 5

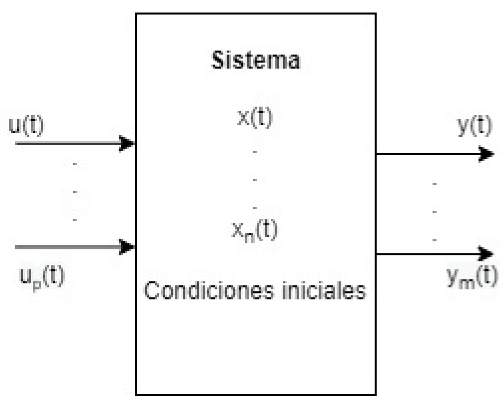


2) Aplicamos 11



$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

Representación en Variables de Estado (VE):



Estado: representa la mínima cantidad de información de modo que el conocimiento de este en $t = t_0$ (condiciones iniciales) junto con el conocimiento de la entrada para $t \geq t_0$, determina por completo el comportamiento del sistema (evolución de los estados) para cualquier instante de tiempo $t \geq t_0$.

Las variables necesarias para describir el estado de un sistema son llamadas **variables de estado (VE).** En términos generales el estado de un sistema de orden n es descrito por un conjunto de n variables representadas en el **vector de estado**:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}_{nx1}$$

Para describir el estado del sistema, se busca escribir un conjunto de n ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) \quad (\boldsymbol{Ecuaciones\ de\ estado})$$

Del mismo modo se requiere expresar la/s salida/s del sistema, para esto se usa la ecuación de salida:

$$\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})(\boldsymbol{Ecuaci\acute{o}n\ de\ salida})$$

Si el sistema es invariante y lineal, entonces:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{nx1} = A_{nxn}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{nx1}} + B_{nxp}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{px1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y} = g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}}$$

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{mx1}} = C_{mxn}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{nx1}} + D_{mxp}\boldsymbol{u}_{\boldsymbol{px1}}$$

Vector de entrada:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}_{px1}$$

Vector de salida:

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}_{mx1}$$

Matriz de estado:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{nxn}$$

Matriz de entrada:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}_{nxp}$$

Matriz de salida:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Matriz de transmisión directa:

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mp} \end{pmatrix}_{mxp}$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}}$$

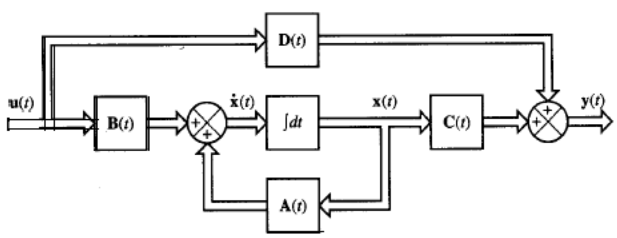


Diagrama de bloques de un sistema representado en espacio de estados

Comentarios:

- Se puede aplicar a sistemas SISO hasta MIMO.
- Se pueden estudiar de la misma forma sistemas variantes e invariantes en el tiempo.
- Los problemas formulados con este enfoque son muy fáciles de programar.
- Las ecuaciones de estado describen no solamente la relación entre la entrada y salida, sino también el comportamiento interno del sistema bajo cualquier condición inicial.
- Se pueden representar sistemas no lineales.

Ejemplos:

$$\mathrm{H(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{R(s)}} = \frac{1}{\mathrm{s^4 + 4s^3 + 19s^2 + 49s + 144}}$$

$$\mathrm{Y(s)\ (s^4 + 4s^3 + 19s^2 + 49s + 144) = R(s)}$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^4}+4\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^3}+19\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}+49\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}+144\mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathrm{r}(\mathrm{t})$$

Seleccionar los estados:

$$x_1=y(t), x_2=\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}, x_3=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}, x_4=\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^3}$$

Seleccionar las entradas:

$$\mathrm{u}(\mathrm{t})=\mathrm{r}(\mathrm{t})$$

La salida:

$$\mathrm{y}_{\mathrm{ss}}(\mathrm{t})=y(t)=x_1$$

Derivar los estados:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}}=\frac{dy(t)}{dt}=x_2$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}}=\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}=x_3$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{3}}=\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^3}=x_4$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{4}}=\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^4}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^4}+4\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^3}+19\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}+49\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}+144\mathrm{y}(\mathrm{t})=\mathrm{r}(\mathrm{t})$$

$$\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^4}=\mathrm{r}(\mathrm{t})-4\frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^3}-19\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^2}-49\frac{\mathrm{dy}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}}-144\mathrm{y}(\mathrm{t})$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{4}}=\frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^4}=u-4x_4-19x_3-49x_2-144x_1$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{ss}}=C\boldsymbol{x}+D\boldsymbol{u}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\\\dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\-\mathbf{144}&-\mathbf{49}&-\mathbf{19}&-\mathbf{4}\end{pmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}[\boldsymbol{u}]}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{ss}}=(\mathbf{1}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{0}\quad\mathbf{0})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\\\boldsymbol{x}_3\\\boldsymbol{x}_4\end{bmatrix}}$$

Repaso:

$$4x - 19y - 49z = 15$$

$$-2x + 9y = 0$$

$$2x - 9z = -5$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-19} & \mathbf{-49} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-9} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{15} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-5} \end{bmatrix}$$

Ejemplos:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{5}{3s^2 + 5}$$

$$Y(s)(3s^2 + 5) = 5X(s)$$

$$3\ddot{y}(t) + 5y(t) = 5x(t)$$

Seleccionar los estados:

$$x_1 = y(t), \qquad x_2 = \frac{\mathrm{dy(t)}}{\mathrm{dt}}$$

Seleccionar las entradas:

$$u = x(t)$$

La salida:

$$\mathrm{y_{ss}(t)} = y(t) = x_1(t)$$

Derivar los estados:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{1}} = \frac{dy(t)}{dt} = x_2$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} = \frac{\mathrm{d^2y(t)}}{\mathrm{dt^2}} = ?$$

$$\ddot{y}(t) = \frac{5\big(x(t) - y(t)\big)}{3}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_{\mathbf{2}} = \frac{\mathrm{d^2y(t)}}{\mathrm{dt^2}} = \frac{5}{3}u - \frac{5}{3}x_1$$

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{ss}} = C\boldsymbol{x} + D\boldsymbol{u}}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\end{pmatrix}[u]}$$

$$\boxed{y_{ss} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0}) \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}$$