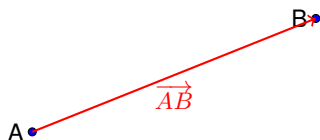


## Geometría Analítica

### 1 VECTORES LIBRES

Dados dos puntos en el plano (A y B), podemos trazar una flecha que vaya del primero al segundo. A esta flecha la llamaremos vector (fijo) y se denota  $\overrightarrow{AB}$ .



- **Módulo:** La longitud del vector
- **Dirección:** La recta que contiene al vector y cualquiera de sus paralelas
- **Sentido:** El que va del origen al final o su contrario. Viene representado por punta "la cabeza de la flecha"

Dos vectores (fijos) son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Un vector fijo y todos sus equipolentes forman lo que se denomina un **vector libre**. Se denota  $\vec{v}$  o  $[\overrightarrow{AB}]$  siendo  $\overrightarrow{AB}$  un vector fijo representante de  $\vec{v}$ . Un vector libre viene determinado por sus coordenadas:

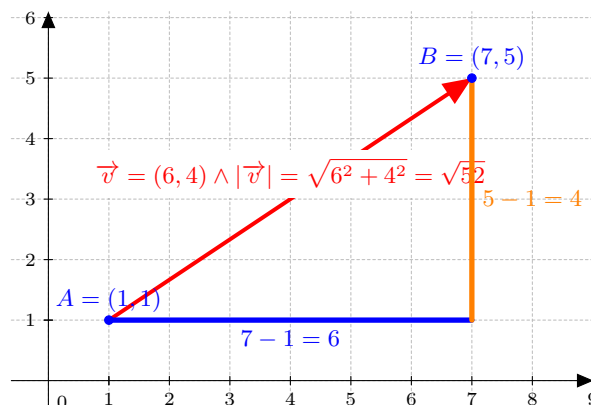
### 2 COORDENADAS Y MÓDULO DE UN VECTOR

Un vector se puede ver como el desplazamiento que tenemos que hacer horizontalmente y verticalmente para ir del origen al extremo del mismo. Al desplazamiento horizontal le llamaremos primera coordenada y al vertical, segunda.

- Dados  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- A partir de las coordenadas del punto podremos calcular su módulo. Dados  $\vec{u}(x, y), \rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

#### 2.1. Ejemplo

Determina las coordenadas y el módulo del vector libre cuyo representante es el vector que va de  $A(1, 1)$  a  $B(7, 5)$



### 3 OPERACIONES CON VECTORES

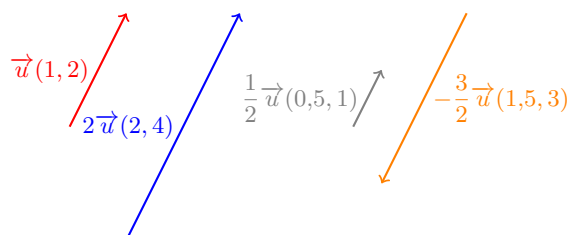
#### 3.1. Producto de un número por un vector

**Definición** Dado  $k \in \mathbb{R}$  y  $\vec{u}$  se define  $k \cdot \vec{u}$  como un  $\vec{v}$  que:

- $|\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{u}|$
- $\vec{v} \parallel \vec{u}$
- Mismo sentido que  $\vec{u}$  si  $k > 0$  o sentido contrario si  $k < 0$

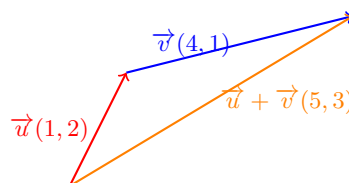
Además se cumple que si  $\vec{u}(x_1, y_1) \rightarrow k\vec{u}(k \cdot x_1, k \cdot y_1)$

##### 3.1.1. Ejemplos



#### 3.2. Suma y resta de vectores

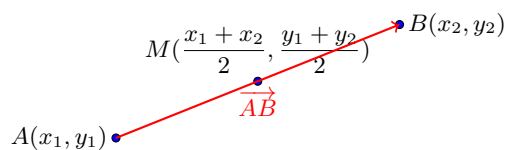
**Definición de suma** Dados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se define la suma como el vector que si los ponemos seguidos va del origen del primer vector al extremo del segundo vector. Además se cumple que si  $\vec{u}(x_1, y_1)$  y  $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} + \vec{v}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



**Definición de resta** Dados  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  se define la resta como la suma del primero con el opuesto del segundo. Además se cumple que si  $\vec{u}(x_1, y_1)$  y  $\vec{v}(x_2, y_2) \rightarrow \vec{u} - \vec{v}(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$

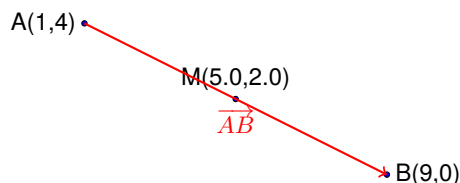
## 4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Dados dos puntos del plano,  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$ , el punto medio es  $M(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$ .



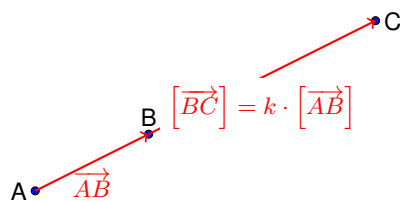
La demostración es sencilla aplicando la propiedad geométrica que cumple el punto medio:  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

### 4.1. Ejemplo



## 5 PUNTOS ALINEADOS

Dados los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  estarán alineados si los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BC}$  son colineales, o tienen la misma dirección, y por tanto:  $\exists k \in \mathbb{R} \mid [\overrightarrow{BC}] = k \cdot [\overrightarrow{AB}]$

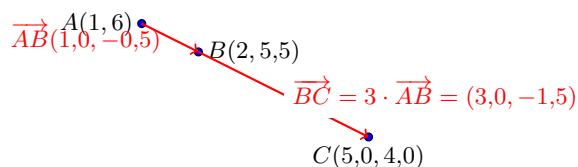


o bien:

Si  $[\overrightarrow{AB}] = \vec{u}(u_1, u_2)$  y  $[\overrightarrow{BC}] = \vec{v}(v_1, v_2)$ , se cumple:

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2}$$

### 5.1. Ejemplo

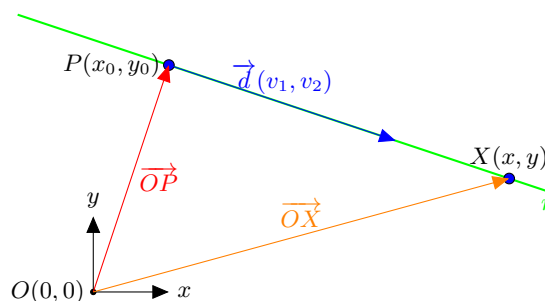


Están alineados porque  $[\overrightarrow{BC}] = 3 \cdot [\overrightarrow{AB}]$ , o bien porque:

$$\frac{3}{1} = \frac{-1,5}{-0,5}$$

## 6 ECUACIONES DE LA RECTA

Podemos definir la recta como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos del plano que a partir de un punto fijo siguen una misma dirección. Dado un punto  $P(x_0, y_0)$  y un vector  $\vec{d}(v_1, v_2)$ , en la recta  $r$  se cumple:



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Como  $\overrightarrow{PX}$  y  $\vec{d}$  son colineales:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{d}$$

### 6.1. Ecuación vectorial

Se obtiene a partir de las coordenadas de la expresión anterior:

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2)$$

### 6.2. Ecuaciones paramétricas

Se obtienen separando cada coordenada de la expresión anterior:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

### 6.3. Ecuación continua

Se obtienen de la anterior despejando  $\lambda$  en cada ecuación e igualando las expresiones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

### 6.4. Ecuación implícita o general

Operando y reduciendo la expresión anterior llegaremos a una de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

### 6.5. Ecuación explícita

Despejando la  $y$  en la ecuación anterior obtendremos

$$y = mx + n$$

donde  $m$  es la pendiente y  $n$  la ordenada en el origen

**Vector director y pendiente de una recta:** Dada una recta  $r$  de pendiente  $m$  entonces el vector  $\vec{v}(1, m)$  es un vector director de la recta. Y al revés, si  $\vec{d}(v_1, v_2)$  es un vector director de la recta, entonces  $m = \frac{v_2}{v_1}$  es la pendiente de la recta

## 6.6. Ejemplo

Dada la recta que pasa por  $P(1, 3)$  y de dirección la marcada por el vector  $\vec{d}(3, -1)$  determina la ecuación de la misma en sus diferentes variantes:

■ Ecuación vectorial:  $(x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (3, -1)$

■ Ecuaciones paramétricas:  $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$

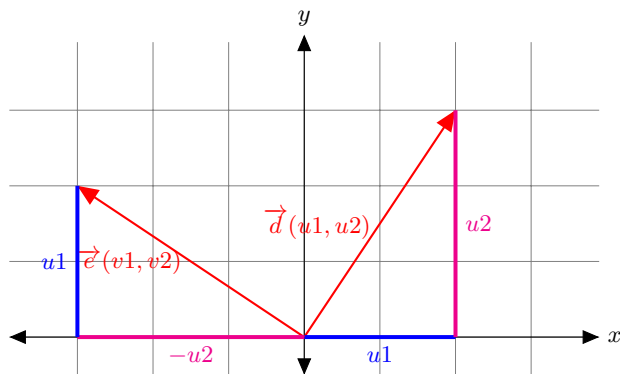
■ Ecuación continua:  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1}$

■ Ecuación general:  $3y + x - 10 = 0$

■ Ecuación explícita:  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

## 7 CONDICIONES DE PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dado  $\vec{d}(u_1, u_2)$  y un vector perpendicular del mismo módulo  $\vec{e}(v_1, v_2)$ :

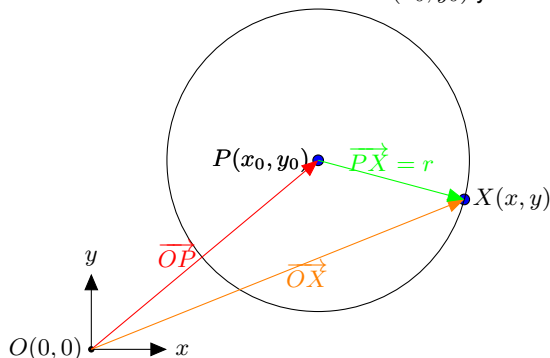


Se cumple que  $\vec{e}(v_1, v_2) = (-u_2, u_1)$  y por tanto:

- Para que dos rectas sean paralelas basta con que tengan la misma dirección
- Dada una recta con vector director  $\vec{d}(v_1, v_2)$ , un vector director de las rectas perpendiculares será  $\vec{e}(-v_2, v_1)$ . Además si  $m$  y  $m'$  son las pendientes de las rectas perpendiculares, se cumple:  $m \cdot m' = -1$

## 8 ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA

Dada una circunferencia de centro  $P(x_0, y_0)$  y de radio  $r$ :



Los puntos  $X(x, y)$  de la misma cumplen:

$$|\vec{PX}| = r$$

Como  $\vec{OP} + \vec{PX} = \vec{OX}$ , luego  $\vec{PX} = \vec{OX} - \vec{OP}$ . Por tanto:

$$|\vec{OX} - \vec{OP}| = r$$

Pasando a coordenadas:

$$|(x - x_0, y - y_0)| = r$$

Y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

### 8.1. Ejemplo

Determina la ecuación de la circunferencia con centro  $P(3, 1)$  y radio 3:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$