Mis apuntes

Compilación de apuntes de matemáticas [1]

Carlos Rodríguez Jaso[2]

[1] Aquí irá el enlace a las fuentes.
[2] https://crdguez.github.io/about/

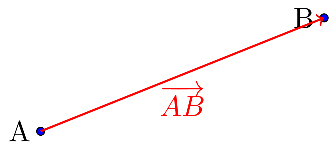
Índice general

1

Geometría

1.1. Vectores Libres

Dados dos puntos en el plano (A y B), podemos trazar una flecha que vaya del primero al segundo. A esta flecha la llamaremos vector (fijo) y se denota $\overrightarrow{AB}$.



- **Módulo**: La longitud del vector
- **Dirección**: La recta que contiene al vector y cualquiera de sus paralelas
- **Sentido**: El que va del origen al final o su contrario. Viene representado por punta "la cabeza de la flecha"

Dos vectores (fijos) son **equipolentes** cuando tienen el mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Un vector fijo y todos sus equipolentes forman lo que de denomina un **vector libre**. Se denota $\overrightarrow{v}$ o $\left[\overrightarrow{AB}\right]$ siendo $\overrightarrow{AB}$ un vector fijo representante de $\overrightarrow{v}$. Un vector libre viene determinado por sus coordenadas:

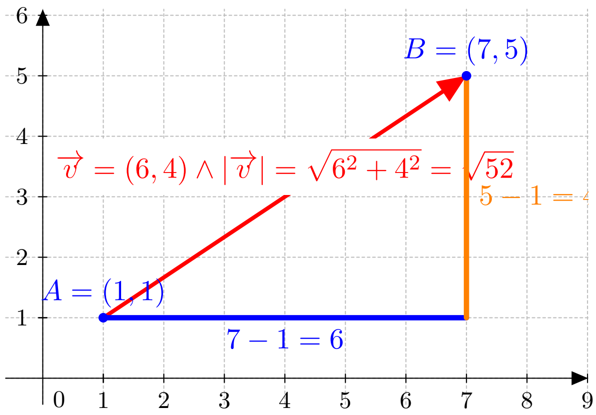
1.2. Coordenadas y módulo de un vector

Un vector se puede ver como el desplazamiento que tenemos que hacer horizontalmente y verticalmente para ir del origen al extremo del mismo. Al desplazamiento horizontal le llamaremos primera coordenada y al vertical, segunda.

- Dados $A(x_1, y_2), B(x_2, y_2) \rightarrow \overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$
- A partir de las coordenadas del punto podremos calcular su módulo. Dados $\overrightarrow{u}(x, y), \rightarrow |\overrightarrow{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.2.1. Ejemplo

Determina las coordenadas y el módulo del vector libre cuyo representante es el vector que va de $A(1, 1)$ a $B(7, 5)$



1.3. Operaciones con vectores

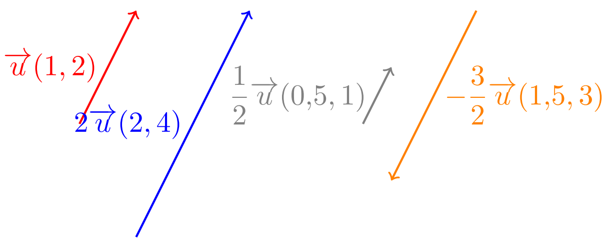
1.3.1. Producto de un número por un vector

Definición Dado $k \in \mathbb{R}$ y $\overrightarrow{u}$ se define $k \cdot \overrightarrow{u}$ como un $\overrightarrow{v}$ que:

- $|\overrightarrow{v}| = |k| \cdot |\overrightarrow{u}|$
- $\overrightarrow{v} /\!/ \overrightarrow{u}$
- Mismo sentido que $\overrightarrow{u}$ si $k > 0$ o sentido contrario si $k > 0$

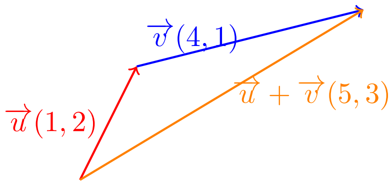
Además se cumple que si $\overrightarrow{u}(x_1, y_1) \rightarrow k\overrightarrow{u}(k \cdot x_1, k \cdot y_1)$

Ejemplos



1.3.2. Suma y resta de vectores

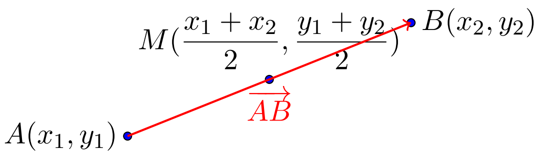
Definición de suma Dados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se define la suma como el vector que si los ponemos seguidos va del origen del primer vector al extremo del segundo vector. Además se cumple que si $\overrightarrow{u}(x_1, y_1)$ y $\overrightarrow{v}(x_2, y_2) \rightarrow \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$



Definición de resta Dados $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ se define la resta como la suma del primero con el opuesto del segundo. Además se cumple que si $\overrightarrow{u}(x_1,y_1)$ $y\overrightarrow{v}(x_2,y_2) \rightarrow \overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}(x_1-x_2,y_1-y_2)$

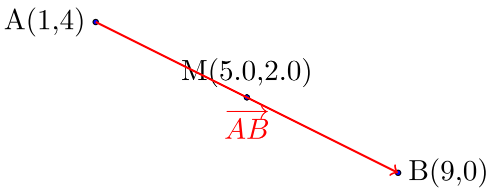
1.4. Punto medio de un segmento

Dados dos puntos del plano, $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, el punto medio es $M(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2})$.



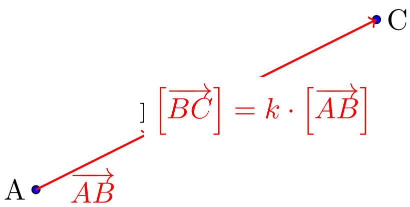
La demostración es sencilla aplicando la propiedad geométrica que cumple el punto medio: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$

1.4.1. Ejemplo



1.5. Puntos alineados

Dados los puntos A, B y C estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ son colineales, o tienen la misma dirección, y por tanto: $\exists k \in \mathbb{R}| \left[\overrightarrow{BC}\right]=k\cdot\left[\overrightarrow{AB}\right]$

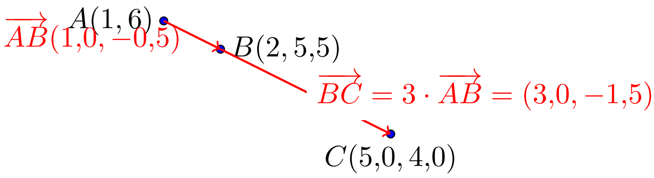


o bien:

Si $\left[\overrightarrow{AB}\right] = \overrightarrow{u}(u1, u2)$ y $\left[\overrightarrow{BC}\right] = \overrightarrow{v}(v1, v2)$, se cumple:

$$\frac{v1}{u1} = \frac{v2}{u2}$$

1.5.1. Ejemplo

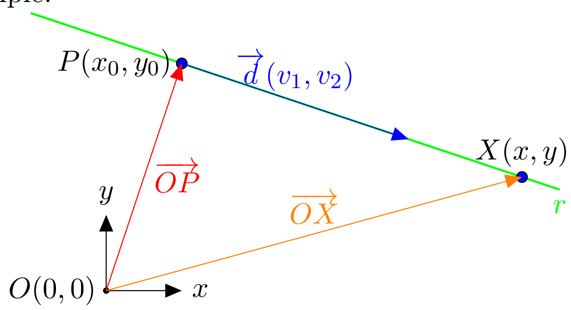


Están alineados porque $\left[\overrightarrow{BC}\right] = 3 \cdot \left[\overrightarrow{AB}\right]$, o bien porque:

$$\frac{3}{1} = \frac{-1{,}5}{-0{,}5}$$

1.6. Ecuaciones de la recta

Podemos definir la recta como el lugar geométrico formado por el conjunto de puntos del plano que a partir de un punto fijo siguen una misma dirección. Dado un punto $P(x_0, y_0)$ y un vector $\overrightarrow{d}(v_1, v_2)$, en la recta r se cumple:



$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}$$

Como $\overrightarrow{PX}$ y $\overrightarrow{d}$ son colineales:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{d}$$

1.6.1. Ecuación vectorial

Se obtiene a partir de las coordenadas de la expresión anterior :

$$(x, y) = (x_0, y_0) + \lambda \cdot (v_1, v_2)$$

1.6.2. Ecuaciones paramétricas

Se obtienen separando cada coordenada del expresión anterior:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot v_1 \\ y = y_0 + \lambda \cdot v_2 \end{cases}$$

1.6.3. Ecuación continua

Se obtienen de la anterior despejando λ en cada ecuación e igualando la expresiones:

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

1.6.4. Ecuación implícita o general

Operando y reduciendo la expresión anterior llegaremos a una de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

1.6.5. Ecuación explícita

Despejando la y en la ecuación anterior obtendremos

$$y = mx + n$$

donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen

Vector director y pendiente de una recta: Dada una recta r de pendiente m entonces el vector $\overrightarrow{v}(1, m)$ es un vector director de la recta. Y al revés, si $\overrightarrow{d}(v_1, v_2)$ es un vector director de la recta, entonces $m = \dfrac{v_2}{v_1}$ es la pendiente de la recta

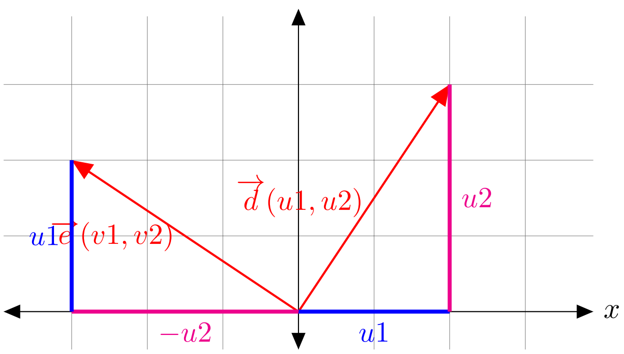
1.6.6. Ejemplo

Dada la recta que pasa por $P(1, 3)$ y de dirección la marcada por edl vector $\overrightarrow{d}(3, -1)$ determina la ecuación de la misma en sus diferentes variantes:

- Ecuación vectorial: $(x, y) = (1, 3) + \lambda \cdot (3, -1)$
- Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 3 - \lambda \end{cases}$
- Ecuación continua: $\dfrac{x - 1}{3} = 3 - y$
- Ecuación general: $3y + x - 10 = 0$
- Ecuación explícita: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{10}{3}$

1.7. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Dado $\overrightarrow{d}(u1, u2)$ y un vector perpendicular del mismo módulo $\overrightarrow{e}(v1, v2)$:

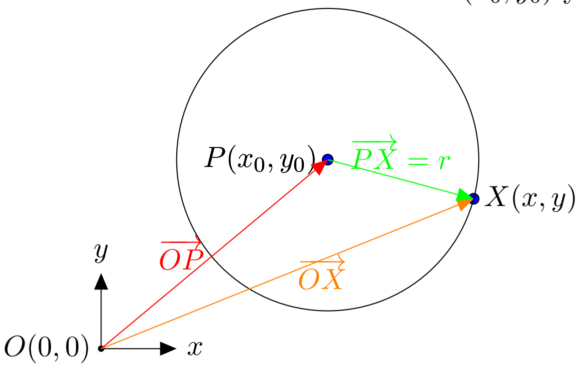


Se cumple que $\overrightarrow{e}(v1, v2) = (-u2, u1)$ y por tanto:

- Para que dos rectas sean paralelas basta con que tengan la misma dirección
- Dada una recta con vector director $\overrightarrow{d}(v_1, v_2)$, un vector director de las rectas perpendiculares será $\overrightarrow{e}(-v_2, v_1)$. Además si m y m' son las pendientes de las rectas perpendiculares, se cumple: $m \cdot m' = -1$

1.8. Ecuación de la circunferencia

Dada una circunferencia de centro $P(x_0, y_0)$ y de radio r:



Los puntos $X(x, y)$ de la misma cumplen:

$$\left|\overrightarrow{PX}\right| = r$$

Como $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX}$, luego $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$- Por tanto:

$$\left|\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right| = r$$

Pasando a coordenadas:

$$|(x - x_0, y - y_0)| = r$$

Y por el teorema de Pitágoras obtenemos la ecuación de la circunferencia:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

1.8.1. Ejemplo

Determina la ecuación de la circunferencia con centro $P(3, 1)$ y radio 3:

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$