Descomposició per recursos

Problema:

$$(P)\qquad \begin{array}{ll} Min_x & \sum_{l=1}^{K} c_\ell x_\ell \\ & \sum_{l=1}^{K} A_\ell x_\ell = b \\ & x_\ell \in X_\ell \;\; \ell = 1, 2, ..., K \end{array}$$

Consisteix en ubicar els recursos $y_1, y_2, ..., y_K$ a cada article verificant-se $\sum_{l=1}^{K} y_\ell = b$. D'aquesta forma el problema (P) pot reescriure's com

$$(P_\ell)\qquad \begin{array}{lll} Min_{x_\ell} & c_\ell x_\ell & = v_\ell(y_\ell) \leftarrow \text{funció marginal} \\ & A_\ell x_\ell = y_\ell, & x_\ell \in X_\ell \;\; \ell = 1, 2, ..., K \end{array}$$

Amb la definició de les funcions marginals $v_\ell(y_\ell)$ (P) pot expressar-se com:

$$(P')\qquad \begin{array}{lll} Min \;\; v(y) = & \sum_{l=1}^{K} v_\ell(y_\ell) & (v_\ell(y_\ell) \text{ és convexa no diferenciable}) \\ & \sum_{l=1}^{K} y_\ell = b, \;\; y_\ell \in Y_\ell & \end{array}$$

Y_ℓ és el conjunt de punts pels que P_ℓ presenta solució.

$$(P'_\ell)\qquad \boxed{\begin{array}{ll} Min_{x,\xi} & c_\ell x_\ell + \rho(\xi^+ + \xi^-) \\ & A_\ell x_\ell + \xi^+ - \xi^- = y_\ell \;\; | -u_\ell \leftarrow LM \\ & x_\ell \in X, \;\; \xi^+, \xi^- \geq 0 \\ & \ell = 1, 2, ..., K \\ \hline & (\rho \;\; \text{penalització}) \end{array}}$$

Si $y_\ell \in Y_\ell$ llavors els problemes P'_ℓ presenta solució amb $\xi^+ = \xi^- = 0$
Podem redefinir-se les funcions marginals segons

$$\begin{array}{ll} v'_\ell(y_\ell) = v_\ell(y_\ell) & si \; y_\ell \in Y_\ell \\ v'(y_b) = \uparrow & si \; y_\ell \notin Y_\ell \end{array}$$

Per tant, el següent problema (P'') ha de ser equivalent a (P')

$$\boxed{(P'')\qquad \begin{array}{ll} Min \;\; v'(y) & = \sum_{\ell=1}^{K} v'_\ell(y_\ell) \\ s.a: & \sum_{\ell=1}^{K} y_\ell = b \end{array}}$$

En resoldre (P') les avaluacions de la f. obj. v' poden fer-se resolent K subproblemes $P'_\ell(y_\ell)$

En general hi hauran dues opcions

1. Per programació lineal generalitzada.
2. Per mètode subgradient.

En tots els casos està implicada l'avaluació d'un element del conjunt subgradient $\partial v'(y_\ell)$

Recordar que $v'_\ell(y_\ell)$ és convexa no diferenciable i que si u_ℓ és variable dual de la constricció $A_\ell x_\ell + \xi^+ - \xi^- = y_\ell$ llavors es verifica que $\boxed{-u_\ell \in v'(y_\ell)}$

a) Solució per P.L. generalitzada

Sigui $u^j, j = 1, 2, ...L \leftarrow$ iteració en curs

$$u^j = \sum_{\ell=1}^{K} u^j_\ell \quad u^j_\ell \in \partial v'_\ell(y^j_\ell)$$

Iteració L:
①

$$\begin{array}{ll} Min_{z,y} & z \\ & z \geq v'(y^j) + u^j(y - y^j), \;\; j = 1, 2, ..., L \\ & \sum_{\ell=1}^{K} y_\ell = b \end{array} \qquad (y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_K \end{pmatrix})$$

$$\swarrow$$

$$y^{L+1}$$

② calcular les solucions de:

$$v'_\ell(y^{L+1}_\ell) = Min_{x,\xi} \quad \begin{array}{l} c_\ell x_\ell + \rho(\xi^+ + \xi^-) \\ A_\ell x_\ell + \xi^+ - \xi^- - y^{L+1}_\ell \;\; | \; - u^{L+1}_\ell \\ x_\ell \in X_\ell, \; \xi^+, \xi^- \geq 0 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$u^{L+1} = (u^{L+1}_1, u^{L+1}_2, \ldots, u^{L+1}_K)$$

$$v'(y^{L+1}) = \sum_{\ell=1}^{K} v'_\ell(y^{L+1}_\ell)$$

(tornar a ①)

b) Solució per algoritme subgradient:

$$y^{L+1} = y^L - \theta_\ell \cdot u^L \longrightarrow subgradient \quad (-u^L \in \partial v'(y^L))$$

la passa θ_ℓ ja s'ha explicat com obtenir la a priori
Donat que y^{L+1} <u>no</u> satisfà $\sum_{l=1}^{K} y_\ell^{LM} = b$ llavors resoldre el problema quadràtic.

$$\left.\begin{array}{ll} Min_y & \|y - y^{L+1}\|_2^2 \\ & \sum_{\ell=1}^{K} y_\ell = b \end{array}\right. \longrightarrow \; y^{L+1}$$