Algorisme de Dantzig (1959) de Cutting Plane.

Es tracta d'anar generant constriccions per anar reproduïnt el problema:

$$(P_\infty)\quad \begin{array}{ll} Max_{(z,\lambda,\mu)} & z \\ & z \leq f(x) - \lambda^\top h(x) - \mu^\top g(x);\ \forall x \in X \\ & \mu \geq 0 \end{array}$$

L'algorisme és :
0) Determinar $x_0 \in X$ factible $(h(x_0) = 0,\ g(x_0) \geq 0)$ k=0.

1) Resoldre

$$\begin{array}{lll} & Max_{(z,\lambda,\mu)} & z \\ & \swarrow & z \leq f(x_\ell) - \lambda^\top h(x_\ell) - \mu^\top g(x_\ell) \quad \ell = 0,1,2,...,k \\ (z_k, \lambda_k, \mu_k) & & \mu \geq 0 \end{array}$$

2) Resoldre

$$\begin{array}{lll} & Min & f(x) - \lambda_k^\top h(x) - \mu_k^\top g(x) = w(\lambda_k, \mu_k) \\ & \swarrow & x \in X \\ x_{k+1} & & \end{array}$$

- Si $w(\lambda_k, \mu_k) = f(x_{k+1}) - \lambda_k^\top h(x_{k+1}) - \mu_k^\top g(x_{k+1}) < z_k$ continuar
- Si $w(\lambda_k, \mu_k) = z_k$ STOP.

Cal observar que el problema (P_∞) té infinites constriccions i que , de fet, és una representació del dual lagrangià.

$$\boxed{\begin{array}{ll} Max & w(\lambda,\mu) \\ & (\lambda,\mu) \in D \end{array}}$$

Generació de solucions primals (cas convex)

Cal observar que l'algorisme de Dantzig pot no generar, en acabar, una solució primal del problema original (s'entén primal factible). Com exemple consideri's un problema PL

$$\begin{array}{ll} Min_{\ x} & C^\top x \\ & Ax = b \\ & x \leq c \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} (h \text{ afí}) \\ (\ X = \{\ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\ \}\ ) \\ (\ g(x) = c - x,\ \ h = 0\ ) \end{array}$$

Observacions: la passa 0 sí determina un punt factible $x_0 \in X$ $g(x) \geq 0$.
Suposem que x_0 és factible: $x_0 \in X,\ h(x_0) = 0,\ g(x_0) \geq 0$.
siguin x_ℓ $\ell = 0,1,2,...k$ punts obtinguts en la maximització de la funció dual lagrangià (per exemple usant Cutting plane de Dantzig); llavors el problema:

$$\left.\begin{array}{ll} z_k = Min\,_{\alpha} & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j f(\hat{x}_j) \\ \\ & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j g(\hat{x}_j) \geq 0 \\ & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j h(\hat{x}_j) = 0 \\ & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_j = 1 \ \ , \ \alpha_j \geq 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \ \ \widetilde{x} = \sum_{j=0}^{k} \alpha^* \hat{x}_j$$

si $z_k - w(\lambda_k, \mu_k) \leq \epsilon$ llavors $f(\widetilde{x}) \leq z^* + \epsilon$

$$\text{sent} \quad z^* = Min\,_{x \in X} \quad \begin{array}{l} f(x) \\ g(x) \geq 0 \ \ , \ h(x) = 0 \end{array}$$