

Suposem $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Definició 0.1 $v \in \mathbb{R}^n$ és un subgradient regular de f a \bar{x} si

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + v^\top (x - \bar{x}) + o(\|x - \bar{x}\|) \quad (1)$$

El conjunt de tots els vectors $v \in \mathbb{R}^n$ que verifiquen tal propietat (1) per a una funció f en un punt \bar{x} l'anomenem subdiferencial o conjunt subdiferencial regular de f a \bar{x} i el denotem per $\hat{\partial}f(\bar{x})$

Definició 0.2 $v \in \mathbb{R}^n$ és un subgradient de f a \bar{x} si $\exists \{x_k\} \rightarrow \bar{x}$ i, conjuntament, $f(x_k) \rightarrow f(\bar{x})$ tal que $\exists v_k \in \hat{\partial}f(\bar{x})$ i conjuntament $v_k \rightarrow v$. Si $\partial f(\bar{x})$ és el conjunt de tals direccions, llavors, en altres paraules:

$$\partial f(\bar{x}) = \limsup \hat{\partial}f(x) \quad (x \xrightarrow{f} \bar{x}) \quad (2)$$

Si f és continuament diferenciable a \bar{x} , llavors $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$ i "dins de $\partial f(\bar{x})$ " no hi han "direccions il·limitades".

Definició 0.3 Una funció f es diu Lipschitz-continua sobre un obert $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (o simplement Lipschitz o lipschitziana), si $\forall x, y \in A$ si existeix una constant $K_f < +\infty$ tal que, uniformement sobre A :

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K_f \|x - y\| \quad (3)$$

Teorema 0.4 (Rademacher) Sigui $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunt obert i sigui $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funció Lipschitz. Sigui $B \subset A$ el conjunt de punt s on F és diferenciable. Llavors $A \setminus B$ és negligible.

Proposició 0.5 (caracterització del subdiferencial de Clarke) Sigui $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funció Lipschitz sobre A i B el subconjunt de punts on f és diferenciable. Per a cada punt $\bar{x} \in A$ considerem el conjunt:

$$\bar{\nabla}f(\bar{x}) = \{v \mid \exists \{x_k\} \rightarrow \bar{x}, \text{ amb } x_k \in B, \nabla f(x_k) \rightarrow v\} \quad (4)$$

Llavors el subdiferencial de Clarke, $\partial^c f(\bar{x})$ pot caracteritzar-se com:

$$\partial^c f(\bar{x}) = \text{Hull}(\bar{\nabla}f(\bar{x})) \quad (5)$$