Dualitat Lagrangiana. Definicions

Definició de Punt de Sella: Donada una funció $L(x,u)$ definida sobre dos grups de variables $x \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^n$; $L : S \times U \ \rightarrow \ \mathbb{R}$
llavors $(\bar{x}, \bar{u}) \in S \times U$ es diu punt de sella si

$$L(\bar{x}, u) \leq L(\bar{x}, \bar{u}) \leq L(x, \bar{u})$$

Considerem ara un problema d'optimització:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} Min_{\,x} & f(x) \\ F & \left\{ \begin{array}{l} h(x) = 0 \\ g(x) \geq 0 \\ x \in X \end{array} \right. \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{c} \lambda \\ \mu \end{array}} \leftarrow \text{L.M.} \qquad \begin{array}{l} h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p \\ g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q \end{array}$$

on no suposen a priori condicions de regularitat (o qualificació de les contriccions) i X pot ser qualsevol tipus de conjunt:

- Es defineix per (P) la funció lagrangiana com:

$$\boxed{L(x, \lambda, \mu) \triangleq f(x) - \lambda^\top h(x) - \mu^\top g(x)}$$

- Funció Dual Lagrangiana $w(\lambda, \mu)$ per (P)

$$\boxed{w(\lambda, \mu) \triangleq Inf_{\,x \in X} L(x, \lambda, \mu)}$$

  El domini de w es defineix com el dels punts (λ, μ) on w és finita.

$$D \triangleq \{ \ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q_+ \mid w(\lambda, \mu) < +\infty \ \}$$

- Definició de problema dual lagrangià de (P)

$$(LD) \quad \begin{array}{ll} Max & w(\lambda, \mu) \\ & (\lambda, \mu) \in D \end{array}$$

  (fer observació de la conveniència de la dualització de segons quines constriccions)

Teoremes de Dualitat i Punt de Sella

Teorema Feble

Sigui x factible de (P) ,$(h(x) = 0, \ g(x) \geq 0, \ x \in X)$.
Sigui (λ, μ) factibles de (LD), $(\mu \geq 0)$.
Llavors $\boxed{f(x) \geq w(\lambda, \mu)}$

La diferència $g(x, \lambda, \mu) = f(x) - w(\lambda, \mu) \ \ (\geq 0)$ és diu gap de dualitat per (P) al punt (x, λ, μ).

Demo

$w(\lambda,\mu) = Inf\{\ L(x,\lambda,\mu)\mid x\in X\ \}\ \le\ f(x)-\lambda^\top h(x)-\mu^\top g(x)\ \le\ f(x)$
$(\mu\ge 0\ ,\ g(x)\ge 0)$

(Observar que si x^* resol (D) $(\lambda,\mu),\ \mu\ge 0$ i es verifica $\mu^\top g(x^*)=0\ \Rightarrow\ w(\lambda,\mu)=f(x^*)$)

Corol·lari 1 $f^* = Inf\{\ f(x)\mid x\in F\ \}\ge Sup\{\ w(\lambda,\mu)\mid \mu\ge 0\ \} = w^*$
gap de $(P) \stackrel{\triangle}{=} f^*-w^*$

Corol·lari 2 Si $f^*=w^*$ llavors $x^*(\lambda^*,\mu^*)$ resolen (P) i (LD) respectivament.

Corol·lari 3 si $f^*=-\infty\ \Rightarrow\ w(\lambda,\mu)=-\infty\ \ \forall(\lambda,\mu),\ \mu\ge 0$

Corol·lari 4 si $w^*=\infty\ \Rightarrow\ (P)$ és infactible $(F=\emptyset)$

Teorema del punt de Sella

Condició necessària i suficient per que $L(x,\lambda,\mu)$ de (P) tingui punt de sella $(\bar x,\bar\lambda,\bar\mu)$ és que:

a) $f^*=f(\bar x)=w(\bar\lambda,\bar\mu)=w^*$ (gap=$\emptyset$)

b) $g(\bar x)\ge 0\ \ h(\bar x)=0\ (\bar x\in F)$

c) $\bar\mu^\top g(\bar x)=0$ (compl)

Teorema. Verificació de les condicions Kuhn Tucker per punts de sella

Sigui $\bar x\in F$ satisfent K-T per (P)

$$\nabla f(\bar x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^\top \bar\mu + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^\top \bar\lambda$$

$$\bar\mu g^\top(\bar x)=0\ \ ,\ \bar\mu\ge 0.$$

i suposem que (P) verifica :

a) f convexa.
Sigui ara:

$$I(x)=\{\ 1\le i\le g\mid g(x)=0\ \}$$

b) g_i convexa localment a $\bar x$, $i\in I(\bar x)$

c) si $\bar\lambda_\ell\ne 0\ \Rightarrow\ h_\ell(\bar x)$ afí llavors $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ és punt de sella de L per (P).

En particular els problemes convexos verifiquen l'existència de Punts de Sella que són els que verifiquen K-T

Teorema de Dualitat Forta (Karlin) (Teo. 6.2.4)

Sigui X convex no buit
f , g convexes, h afí.

Condicions de qualificació.

a) $\exists \tilde{x} \in X$ t.q. $g(\tilde{x}) > 0$ i $h(\tilde{x}) = 0$

b) $0 \in int\, h(X)$; $h(X) = \{ h(x) \mid x \in X \}$

Verificant-se tot això es cumplirà que:

1) $f^* = w^*$ (gap de dualitat nul)

2) si $f^* < +\infty$ llavors w^* s'assoleix a un punt (λ^*, μ^*), $w^* = w^*(\lambda^*, \mu^*)$ i més a més $\mu^* \geq 0$.

3) si $f^* < +\infty$ per x^*, $f^* = f(x^*)$, hi ha complementarietat $g(x^*)^\top \mu^* = 0$

(per curiositat: què passa si no hi han constriccions h?)
Són mes <u>condicions suficients</u> per l'existència d'un punt de sella