Fórmula de Gauvin-Dubeau i funció de pertorbació

Font:
J. Gauvin, F. Dubeau (1982) "Differential properties pf the marginal function in mathematical programming". Math. Prog. Study pp 101-119
K. Shimizu, Y. Ishizuka, J. F. Bard. "Nondifferentiable and Two-level Mathematical Programming". Kluwer Academic Publishers 1997. (Cap 6)

Sigui un problema del tipus:

$$\begin{array}{lll} V(y) = & Min_{\,v} & f(v,y) \\ & (P) & \begin{array}{ll} h(v,y)=0 & /\ \lambda \ \ \Rightarrow\ S^*(y) \\ g(v,y)\geq 0 & /\ \mu \end{array} \end{array}$$

Sent $S^*(y)$ el conjunt de solucions per valor dels paràmetres y.

$$\boxed{L(v,y,\lambda,\mu) = f - \lambda^\top h - \mu^\top g}$$

llavors és definit el conjunt de Kuhn-Tucker com;

$K(v,y) \triangleq \{(\lambda,\mu)\in R^p\times R^q \mid verificant\ K-T\}$, que és un poliedre

Fixat v, llavors $\boxed{KT(y) \triangleq \bigcup_{v\in S^*(y)} K(v,y)}$

Suposem que es verifica que f és contínua diferenciable a $R^n\times\{y\}$

Sigui $v^*\in S(\bar{y})$ un òptim local del problema (P) i suposem que

$$(H) \qquad K(v^*,\bar{y})\neq\emptyset \text{ compacte i convex } \forall y\in E(\bar{y})$$

$\swarrow$ (Fòrmula de Gauvin-Dubeau)
Proposició 1: Si el problema (P) és convex en un entorn de $\bar{y}$ $(\forall_y \in E(y))$ i es verifiquen:

1. presenta a $\bar{y}$ un conjunt solucions unitari: $S(\bar{y})=\{\bar{v}\}$
2. Al punt $(\bar{v},\ \bar{y})$ es verifica (H) (o sigui $K(\bar{v},\bar{y})\neq\emptyset$ i es compacte i convex)

o alternativament es verifica que $f(.,.),\ g(.,.),\ h(.,.),$ són convexes i h és afí. En aquestes condicions:

$$\boxed{\partial\, V(y) = \bigcup_{(\lambda,\mu)\in KT(\bar{y})} \nabla_y\, L(\bar{v},\bar{y},\lambda,\mu)}$$

Lema 1: Sigui Y convex

$$p_A(y) = Min_{\,x\in X} \begin{array}{l} f(x) \\ Ax=y \end{array} \mapsto P_A$$

i suposem que f és convexa sobre $\mathcal{F}+\varepsilon\, B$,

$$\text{Sent} \qquad \mathcal{F} = \{\ x \mid \exists y\in Y,\ Ax=y\ \} = Imf\ A(y)$$

$$(\ A(y) = \{\ x\in R^n \mid Ax=y\ \}\ :\ Y\mapsto R^n)$$

Llavors es verifica que, si Lips $f=\hat{k}<+\infty$, sobre $\mathcal{F}+\varepsilon\, B$, la funció de pertorbació $P_A(y)$ és convexa i el conjunt solució $P_A(y)$ és convex.