Tècniques per reobtenir la solució primal

Que fer després d'haver resolt una relaxació Lagrang. ?
suposem que s'ha resolt el dual lagrangiano

$$\begin{array}{ll} Max & w(\lambda,\mu) \\ & \lambda,\ \mu \in D \end{array} \rightarrow \lambda^*, \mu^*$$

O sigui que en l'iteració final s'haurá resolt el problema:

$$\widetilde{x} \leftarrow \begin{array}{ll} Min & f(x) - \lambda^{*t}h(x) - \mu^{*t}g(x) \\ & x \in X \end{array}$$

Si s'està en presència d'un gap de dualitat, llavors x no serà òptim del problema (P) primal. Si el gap és nul llavors $\tilde{x}$ pot no ser-ho tampoc . El següent resultar proporciona una forma immediata de reconèixer si hi ha un gap o no.

<u>(Teorema 6.5.1 Bazaraa)</u>
Sigui $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})$ amb $\widetilde{\mu} \geq 0$ i $\widetilde{x}$ una solució del problema

$$\begin{array}{ll} Min & f(X) - \lambda^{*t}h(x) - \mu^{*t}g(x) \\ & x \in X \end{array} \rightarrow \widetilde{x}$$

Llavor $\widetilde{x}$ també és la solució del problema:

$$\begin{array}{ll} Min_x & f(x) \\ \widetilde{F} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} h(x) = h(\widetilde{x}) \\ g_i(x) \geq g_i(\widetilde{x}),\ i \in I_+(\mu) \end{array} \right. \\ & x \in X \end{array}$$

($I_+(\mu) \stackrel{\triangle}{=} \{i \leq l \leq q \ / \ \mu_e > 0\}$)

És obvi comprovar que si $g(\widetilde{x} \geq 0$, $h(\widetilde{x}) = 0$ i a més a més $\widetilde{\mu} g(\widetilde{x}) = 0$ llavors

a) $\widetilde{x}$ és una solució de (P)

b) $\widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu}$ és una solució de (LD)

<u>Demostració del teorema 6.5.1</u>

Ja que $\widetilde{x}$ resol la relaxació $\begin{array}{ll} Min & f(X) - \lambda^{*t}h(x) - \mu^{*t}g(x) \\ & x \in X \end{array}$

$f(x) - \widetilde{\lambda}^\top h(x) - \widetilde{\mu}^\top g(x) \geq f(\widetilde{x}) - \widetilde{\lambda}^\top h(\widetilde{x}) - \widetilde{\mu}^\top g(\widetilde{x}) \ \ \forall x \in \widetilde{F}$

ja que $h(x) = h(\widetilde{x})$, $\forall x \in \widetilde{F}$ llavors

$$f(x) - \widetilde{\mu}^\top g(x) \geq f(\widetilde{x}) - \widetilde{\mu}^\top g(\widetilde{x})$$
$$f(x) + \widetilde{\mu}^\top (g(\widetilde{x}) - g(x)) \geq f(\widetilde{x})$$

però ja que $x \in \widetilde{F}$ és $g_l(\widetilde{x}) - g_l(x) \leq 0,\ \forall l \in I_+(\mu) \Rightarrow$
$\Rightarrow \mu^\top(g(\widetilde{x}) - g(x)) \leq 0 \ \Rightarrow\ f(x) \geq f(\widetilde{x})$

O sigui que efectivament $\widetilde{x}$ és una solució de

$$Min_x\{f(x) \mid h(x) = h(\widetilde{x}),\ g_\ell(x) \geq g_\ell(\widetilde{x});\ \ell \in I_+(\mu)\}$$

Per tant un cop resolt la relaxació i determinats $(\widetilde{x}, \widetilde{\lambda}, \widetilde{\mu})$ cal comprovar:

a) La factibilitat de $\widetilde{x}$: $h(\widetilde{x}) = 0,\ \ g(\widetilde{x}) \geq 0$

b) La complementarietat $\widetilde{\mu}^\top g(\widetilde{x}) = 0$