Pràctica 2. RESOLUCIÓ D'UN PROBLEMA DE DISSENY DE XARXES PER DESCOMPOSICIÓ DE BENDERS

La descomposició de Benders pot aplicar-se a problemes de programació lineal i lineal entera mixta amb aquesta estructura:

$$\begin{array}{rl} Min_{\,x,\,y} & c^\top x + f^\top y \\ s.t: & Dx + Fy = d \\ & x \geq 0, \\ \texttt{(P)} & y \in Y \end{array}$$

on les variables x són continues i les variables y (variables de vincle) poden ser continues o bé discretes (Y pot ser un poliedre $P \subset R^p$ o bé $Y = P \cap Z^p$).

Suposem que es fixen les variables y a un valor determinat $\bar{y}$. Llavors el problema queda reduït a un problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rl} Min_{\,x} & z_P = c^\top x \\ s.t: & Dx = d - F\bar{y} \\ \texttt{(PRIMAL)} & x \geq 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} Max_{\,u} & z_D = (d - F\bar{y})^\top u \\ \texttt{(DUAL)} & D^\top u \leq c \end{array}$$

Si s'han generat una col.lecció de vèrtexos $\hat{v}^i$, $i = 1, 2, ...\mu$ i de raigs $\overrightarrow{w}^j$, $j = 1, 2, ...\nu$ del poliedre sobre el que es defineix el problema `(DUAL)` llavors el problema inicial `(P)` pot aproximar-se pel següent problema:

$$\begin{array}{rll} Min_{\,z,\,y} & z & \\ s.t: & f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^i - z \leq 0, & i = 1, 2, ..., \mu \\ & (d - Fy)^\top \overrightarrow{w}^j \leq 0, & j = 1, 2, ..., \nu \\ \texttt{(PROBLEMA MESTRE)} & y \in Y & \end{array}$$

En ser resolt, el *problema mestre* proporciona una aproximació al valor òptim de la f. objectiu del problema original `(P)`, $\bar{z}$, i un valor $\bar{y}$ per les variables de vincle. Aquest valor per les variables de vincle $\bar{y}$ poden usar-se per resoldre el problema `(DUAL)` o *subproblema*, el qual generarà nous vèrtexos i raigs $\hat{v}, \overrightarrow{w}$, que serviran per afegir noves constriccions al problema mestre etc.

<u>En la iteració ℓ</u>:

1. Resoldre el problema mestre $\rightarrow \bar{z}, \bar{y}$.
2. Resoldre el subproblema:
   (a) El subproblema `DUAL` no te solució ja que $D^\top u \leq c$ representa un poliedre buit; En aquest cas `STOP` ja que el problema `(P)` no te solució o bé no és acotat.
   (b) El subproblema `DUAL` sí te solució;
      i. $z_D = \infty$. Llavors s'ha generat al usar el símplex, un raig $\overrightarrow{w}^*$ t.q. $(d - Fy)^\top \overrightarrow{w}^* > 0$.
      <u>Per tant</u>, cal afegir la constricció $(d - Fy)^\top \overrightarrow{w}^* \leq 0$ a la definició del *problema mestre* i tornar a resoldre'l en una nova iteració.
      ii. $z_D < \infty$. Per tant es generarà un vèrtex $\hat{v}^*$.
         A.) Es verifica $f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^* - z \leq 0$. LLavors `STOP`.
         (En aquest cas es verifica que $\bar{z} \geq f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^* \geq f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^\ell$, $1 \leq \ell \leq \mu$.
         També es verificarà $(d - Fy)^\top w^p \leq 0$, $1 \leq p \leq \nu$.)
         Optim del problema f. objectiu $= \bar{z}$, variables de vincle $= \bar{y}$, variables duals $= \hat{v}^*$.

         Com criteri pràctic d'aturada pot adoptar-se $f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^* - \bar{z} \leq \epsilon$

         B.) Es verifica $f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^* - z > 0$.
         <u>Per tant</u>, cal afegir la constricció $f^\top y + (d - Fy)^\top \hat{v}^* - z \leq 0$ a la definició del *problema mestre* i tornar a resoldre'l en una nova iteració.

L'esquema anterior s'extén sense cap dificultat al cas en que les variables y són enteres. La única particularitat és que el *problema mestre* esdevé un problema de programació lineal entera.

Disseny de xarxes. Descripció de la pràctica

Considereu el problema de decidir quins arcs d'una xarxa de transports o de transmissions, són necessaris o no en termes econòmics. Suposem que una xarxa presenta una configuració inicial $G' = (N, A')$ i que es considera la possibilitat de ampliar-la amb un nou conjunt d'arcs $\hat{A}$, de forma que la xarxa final pugui arribar a ser $G = (N, A)$ amb $A = A' \cup \hat{A}$. La qüestió és ara quins dels arcs de $\hat{A}$ convindrà afegir de forma que el cost total sigui mínim. Aquest cost està format per dues components:

a) per una part la incorporació de cada nou arc $a \in \hat{A}$ presenta un cost fix f_a (compra+instal.lació).

b) un cop en funcionament, un arc $a \in \hat{A}$ presentarà un cost per cada unitat de flux que es transporti durant un periode d'amortització de la inversió. Suposarem a més a més que aquest cost unitari depen de l'origen dins de la xarxa del que provingui el flux.

D'aquesta forma, si K dessigna el conjunt d'origens dins la xarxa, el cost al llarg de tot aquest periode d'amortització pot formular-se com:

$$\text{cost total} = \sum_{\ell \in K} \sum_{a \in A} c_a^\ell x_a^\ell + \sum_{a \in \hat{A}} f_a y_a$$

essent les variables $y_a = 1$ si s'afageix l'arc $a \in \hat{A}$ a la xarxa i 0 altrament.

Formularem ara el problema en forma matricial. Sigui B la matriu d'incidències nusos-arcs de la xarxa, x^ℓ el vector de fluxes que s'originen a $\ell \in K$, Suposem que g_ℓ és el flux total que surt de l'origen $\ell \in K$ i que si $D(\ell)$ és el conjunt de destinacions corresponents a l'origen ℓ, llavors $g_{\ell,j}$ és el flux que arriba a $j \in D(\ell)$, de forma que:

$$g_\ell = \sum_{j \in D(\ell)} g_{\ell,j}$$

Sigui el vector t^ℓ amb tantes components com nusos. La component t_i^ℓ corresponent al nus $i \in N$ és: $t_i^\ell = -g_{\ell,i}$ si $i \neq \ell$ i $t_i^\ell = g_\ell$ si el nus i és precisament l'origen ℓ.

D'aquesta forma els fluxes x^ℓ obeeixen a les equacions:

$$Bx^\ell = t^\ell, \; x^\ell \geq 0$$

Vegeu-ne un exemple a la pàgina final.

El problema de disseny de la xarxa pot formular-se matricialment segons:

$$\begin{array}{ll}
Min_{\;x,y} & \sum_{\ell \in K} c^{\ell\top} x^\ell + f^\top y \\
(1) & Bx^\ell = t^\ell, \;\; \ell \in K \\
(2) & x_a^\ell \leq \rho\, y_a, \;\; \ell \in K, \; a \in \hat{A} \\
(3) & x^\ell \geq 0 \\
 & y \in \{0,1\}^{|\hat{A}|}
\end{array}$$

De forma escalar:

$$\begin{array}{lll}
Min_{\;x,y} & \sum_{\ell \in K} \sum_{a \in A} c_a^\ell x_a^\ell + \sum_{a \in \hat{A}} f_a y_a & \\
 & \sum_{r \in I(i)} x_{r,i}^\ell \; - \; \sum_{s \in E(i)} x_{i,s}^\ell \; = \; t_i^\ell, & i \in N, \; \ell \in K \\
 & x_a^\ell \leq \rho\, y_a, & a \in \hat{A}, \; \ell \in K \\
 & x_a^\ell \geq 0, & a \in A, \; \ell \in K \\
 & y_a \in \{0,1\}, & a \in \hat{A}
\end{array}$$

La constant ρ ha de triar-se prou gran de forma que si $y_a = 1$ llavors el màxim valor que pugui pendre x_a^ℓ sigui inferior a ρ. Pot pendre's $\rho > \sum_{\ell \in K} g_\ell$.

Per tal d'escriure el *problema mestre* podem expressar les constriccions (1), (2) de la forma matricial segons (1'), (2'):

$$(1'),\ (2')\quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathcal{B} & 0 & ... & 0 & -F \\ 0 & \mathcal{B} & ... & 0 & -F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -F \\ 0 & 0 & ... & \mathcal{B} & -F \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \mathrm{x}^{\ell_1} \\ \mathrm{x}^{\ell_2} \\ \vdots \\ \mathrm{x}^{\ell_{|K|}} \\ \hline y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} \mathcal{T}^{\ell_1} \\ \mathcal{T}^{\ell_2} \\ \vdots \\ \mathcal{T}^{\ell_{|K|}} \end{array}\right),\quad \mathrm{x}^{\ell} \geq 0,\ \ell \in K$$

essent:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline I_{\hat{A}}|\,0 & I_{\hat{A}} \end{array}\right),\quad \mathrm{x}^{\ell} = \left(\frac{x^{\ell}}{\sigma^{\ell}}\right), \mathcal{T}^{\ell} = \left(\frac{t^{\ell}}{0}\right),\ F = \rho \left(\frac{0}{I_{\hat{A}}}\right)$$

En les anteriors expressions $I_{\hat{A}}$ denota la matriu identitat de grandària $|\hat{A}|$. Escrivim ara les constriccions (1') bloc a bloc i les variables duals θ^{ℓ} que comporten:

$$\mathcal{B}\mathrm{x}^{\ell} - Fy = \mathcal{T}^{\ell} \ \mid\ \theta^{\ell}$$

equivalentment:

$$\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline I_{\hat{A}}|\,0 & I_{\hat{A}} \end{array}\right) \left(\frac{x^{\ell}}{\sigma^{\ell}}\right) - \rho \left(\frac{0}{I_{\hat{A}}}\right) = \left(\frac{t^{\ell}}{0}\right) \ \Bigg|\ \left(\frac{u^{\ell}}{\tau^{\ell}}\right) (= \theta^{\ell})\ ,\ \ell \in K$$

De forma escalar:

$$\begin{array}{ll} Bx^{\ell} & = t^{\ell} \quad |u^{\ell} \\ x_a^{\ell} + \sigma_a^{\ell} - \rho y_a & = 0 \quad |\tau_a^{\ell} \end{array}$$

Si es pren $\rho > \sum_{\ell \in K} g_{\ell}$, llavors, per $\bar{y}$ fixat, el subproblema descomposa en $|K|$ subproblemes:

$$\begin{array}{lll} Min_{\ x,y} & c^{\ell\top} x^{\ell} & \\ & Bx^{\ell} = t^{\ell}, \quad |u^{\ell} & \\ (\texttt{SUBP}\ \ \ell) & x_a^{\ell} \leq \rho\, \bar{y}_a, \quad |\tau_a^{\ell-},\ \ a \in \hat{A} & \rightarrow\ (\hat{x}^{\ell}, \hat{u}^{\ell}, \hat{\tau}^{\ell+}, \hat{\tau}^{\ell-}) \\ & x^{\ell} \geq 0, \quad\quad |\tau^{\ell+} & \end{array}$$

La seva solució verificarà, pel arc $a = (i,j) \in A$:

$$c_a^{\ell} = \hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell} + \tau_a^{\ell+} - \tau_a^{\ell-}$$

Per determinar els valors dels multiplicadors τ cal tenir present lo següent. Donada una solució del *master problem* per les variables de decisió $\bar{y}_a,\ a \in \hat{A}$, la resolució del `SUBP` ℓ es faria eliminant els arcs $a \in \hat{A}$ pels que $\bar{y}_a = 0$. Llavors, és clar que:

- Si $a = (i,j) \notin \hat{A}$, $\hat{\tau}_a^{\ell-} = 0$.
- Si $a = (i,j) \in \hat{A}$ i a més a més $\bar{y}_a > 0$, llavors $\tau_a^{\ell-} = 0$, mentre que $\tau^{\ell+}$ pot ser nul o positiu. En tot cas es tindrà que: $\hat{\tau}_a^{\ell+} = c_a^{\ell} - (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell})$
- Si $a = (i,j) \in \hat{A}$ i a més a més $\bar{y}_a = 0$:
  - Si $c_a^{\ell} - (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell}) < 0$ llavors: $\hat{\tau}_a^{\ell+} = 0$, $\ \hat{\tau}_a^{\ell-} = -c_a^{\ell} + (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell})\,(> 0)$. (en aquest cas si s'afegis l'arc $a \in \hat{A}$ entraria amb flux > 0 per l'article ℓ)
  - Si $c_a^{\ell} - (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell}) \geq 0$ llavors: $\hat{\tau}_a^{\ell-} = 0$, $\ \hat{\tau}_a^{\ell+} = c_a^{\ell} - (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell})\,(> 0)$. (en aquest cas si s'afegis l'arc $a \in \hat{A}$ entraria amb flux 0 per l'article ℓ)

Per tant, en aquest cas en que $\bar{y}_a = 0$ l'expressió per τ_a^{ℓ} és:

$$\tau_a^{\ell-} = max\{\ 0,\ (\hat{u}_i^{\ell} - \hat{u}_j^{\ell}) - c_a^{\ell}\ \}$$

Estructura final del Master Problem:

Tenint en compta la formulació compacta (1'), (2') i que el subproblema mai proporcionarà raigs llavors, la estructura del *master problem* en la iteració M serà:

$$\begin{array}{rl} Min_{\,y,z} & z \\ s.t: & z \geq f^\top y + \sum_{\ell \in K} (\mathcal{T}^\ell + Fy)^\top \hat{\theta}^{\ell,s}, \; s = 1,2,3,...M \\ & y \in Y = \{0,1\}^{|\hat{A}|} \end{array}$$

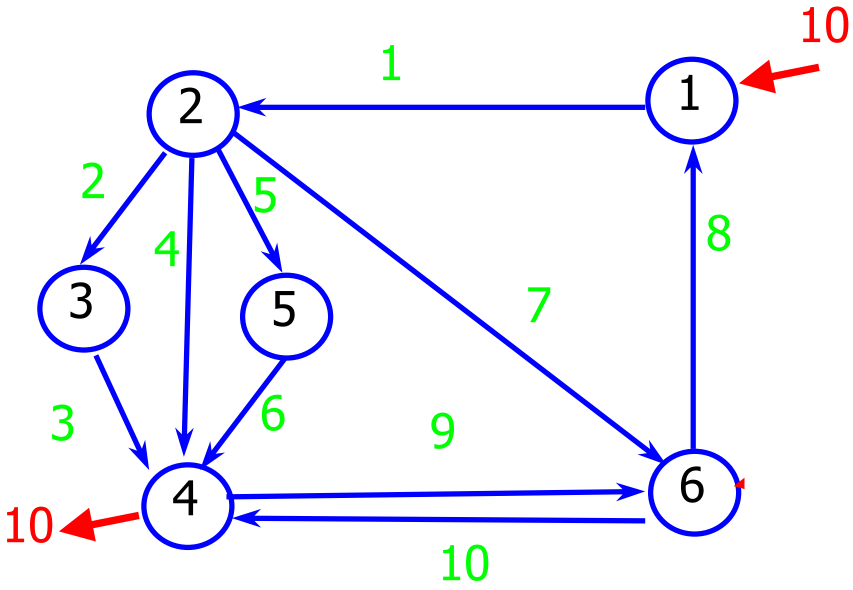
Queda per tant, aclarir ara quina serà l'expressió del terme $(\mathcal{T}^\ell + Fy)^\top \hat{\theta}^\ell$:

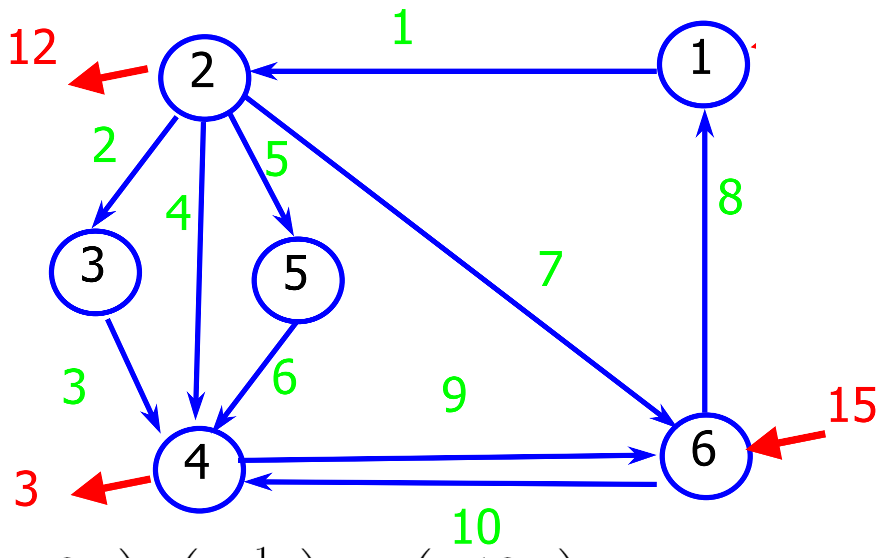
(s'omet el superíndex s)

$$(\mathcal{T}^\ell + Fy)^\top \hat{\theta}^\ell = \left(\begin{pmatrix} t^\ell \\ 0 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right)^\top \begin{pmatrix} \hat{u}^\ell \\ \hat{\tau}^{\ell-} \end{pmatrix} = t^{\ell\top} \hat{u}^\ell + \rho \sum_{\substack{a \in \hat{A} \\ \bar{y}_a = 0}} \hat{\tau}_a^{\ell-} y_a$$

Finalment cal destacar que el *subproblema* també pot triar-se de resoldre en la forma `(PRIMAL)` i, per dualitat, $c^{\ell\top} \hat{x}^\ell = t^\ell \hat{u}^\ell$

XARXES MULTIARTICLE



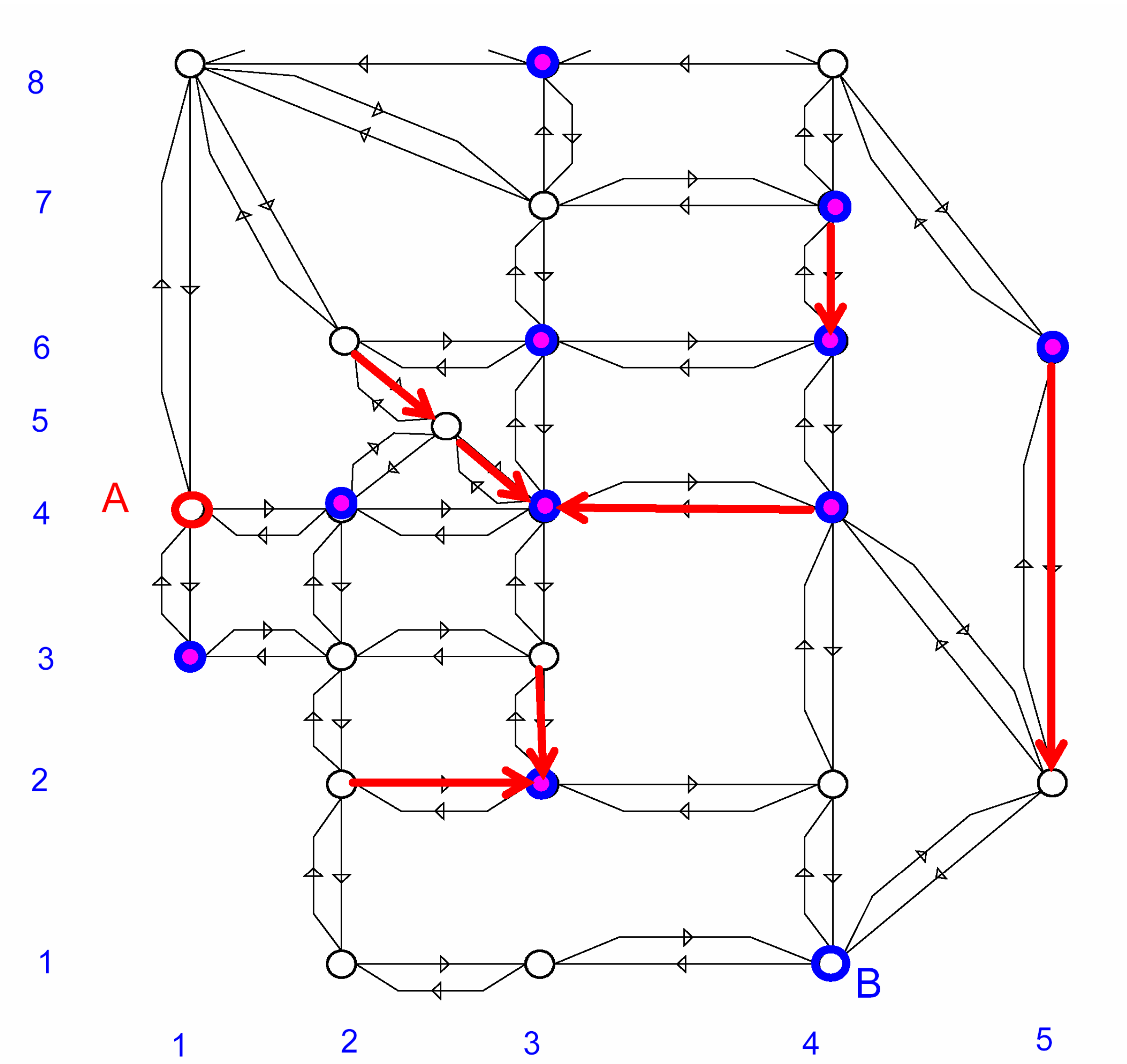


$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ \vdots \\ x_9^1 \\ x_{10}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \\ \vdots \\ x_9^2 \\ x_{10}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Flujo total: $x = x^1 + x^2$

EXERCICI DE DISSENY DE XARXES USANT DESCOMPOSICIÓ DE BENDERS



--------→ X

- Els arcs en vermell són els que opcionalment poden afegir-se o no.
- Assignar a cada nus coordinades (x,y) segons la quadricula.

- Orígens nusos A, B.
- Els nusos en blau-grana són les destinacions.

Adoptar com costs c dels arcs: 150+quadrat de les distàncies euclidianes entre els nusos d'acord amb les seves coordinades (x,y) assignades.

Adoptar com a número de viatges de cada origen a cada destinació =10
Adoptar com costs d'inversió f dels arcs en veremell el valor 10*distància euclidiana