Introducció a descomposició Dantzig - Wolfe (1961)

Aplicació de la dualitat Lagrangiana a Problemes lineals i quadràtics (6.6 Baizaraa)

Desc. D-W: Descomposició per PREUS

Es tracta d'aplicar la dualitat lagrangiana a problemes de P.L. del tipus:

$$
\begin{array}{rll}
 & Min_x & c^\top x \\
x \in R^n & s.t. & Ax = b \\
 & & Dx = d;\ x \geq 0
\end{array}
$$

On l'estructura de la matriu D (bloc diagonal) permet dualitzar les restriccions $Ax = b$ avantatjosament

$$
D = \begin{bmatrix} \boxed{D_1} & & & \\ & \boxed{D_2} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \boxed{D_K} \end{bmatrix}, \ A = [A_1 A_2 ... A_K]
$$

$$
d = (d_1, d_2, ..., d_K), \quad \begin{array}{l} c^\top = (c_1^\top, c_2^\top, ..., c_k^\top) \\ x = (x_1, x_2, ..., x_k) \end{array}
$$

Explícitament, el programa és llavors,

$$
(P) \quad
\begin{array}{rl}
Min_x & \sum_{l=1}^K c_\ell^\top x_\ell \\
s.t. & \sum_{l=1}^K A_\ell x_\ell = b \\
 & \left.\begin{array}{l} D_\ell x_\ell = d_\ell \\ x_\ell \geq 0 \end{array}\right\} \ell = 1, 2, ..., K
\end{array}
$$

Per comoditat, siguin ara els poliedres:

$$
X_\ell = \{x_\ell \in R^{n_\ell} \ / \ D_\ell x_\ell = d_\ell,\ x_\ell \geq 0\}
$$

(P) es reescriu:

$$
\begin{array}{rl}
Min_x & \sum_{\ell=1}^K c_\ell^\top x_\ell \\
 & \sum_{\ell=1}^K A_\ell x_\ell = b \ \ /\lambda \\
 & x_\ell \in X_\ell, \ \ \ell = 1, 2, ..., K
\end{array}
$$

i, dualizant $Ax = b$, la funció dual lagrangiana queda:

$$w(\lambda) = \; Min_x \quad \sum_{l=1}^{K} c_\ell^\top x_\ell - \lambda^\top (\sum_{l=1}^{K} A_\ell x_\ell - b)$$

$$x_\ell \in X_\ell, \; \ell = 1, 2, ..., K$$

$$\begin{array}{lll} w(\lambda) = \; Min_x & \sum_{l=1}^{K} (c_\ell - A_\ell^\top \lambda)^\top x_\ell - \lambda^\top b & \\ & & \rightarrow \; S_p^*(\lambda) \\ (D) & x_\ell \in X_\ell, \; \ell = 1, 2, ..., K & \end{array}$$

$\boxed{Max_\lambda \; w(\lambda)}$ (LD) $\rightarrow \lambda^*$

w és còncava no diferenciable . (gap nul $\rightarrow$ ja que la funció valor (terme dreta) és convexa)

Si P presenta una solució òptima acotada llavors hi ha un punt de sella de forma que:

$\forall x_D^* \in S_D(\lambda^*), \; \lambda^* \in S_{LD}$

$f(x_D^*) = w(\lambda^*) = f^* = f(x^*)$

a més a més si $x_d^* \in S_D^*(\lambda)$ llavors

$\partial w(\lambda) = \{b - Ax_D^* \; / x_D^* \in S_D^*(\lambda)\}$

L'avantatge de la descomposició està en que el problema (D) resulta en K problemes del tipus:

$$\begin{array}{lll} Min_x & \widetilde{c}_\ell^\top x_\ell & \ell = 1, 2, ..., K \\ & x_\ell \in X_\ell & \end{array}$$

$$(\widetilde{c}_\ell = c_\ell - A_\ell^\top \lambda)$$

Considerem ara $Y_\ell =$ conjunt dels vèrtexs de X_ℓ , (finit)

$$Y = \{y \in R^n \times ... \times R^n \; | y^\top = (y_1^\top ... y_K^\top), \; y_\ell \in Y_\ell \; l = 1, 2, ...K\}$$

Per tant la funció dual lagrangiana pot escriure's.

$$\boxed{w(\lambda) = \lambda^\top b + Min_{y \in Y} (c - A^\top \lambda)^\top y}$$

o equivalentment:

$$\begin{array}{lll} w(\lambda) \leq \lambda^\top B & + & (c - A^\lambda)^\top g_1 \\ w(\lambda) \leq \lambda^\top B & + & (c - A^\lambda)^\top g_2 \\ & \vdots & \\ w(\lambda) \leq \lambda^\top B & + & (c - A^\lambda)^\top g_q \end{array} \quad \begin{array}{l} g_\ell \in Y \\ (q = |Y|) \end{array}$$

i també:

$$\boxed{\begin{array}{ll} Max_{\theta,\lambda} & \theta \\ & \theta \leq \lambda^\top b + (c - A^\top \lambda)^\top g_\ell, \;\; l = 1, 2, ..., q \end{array}}$$

(amb un n^{o} molt llarg de constriccions)

Reescrivim:

$$(LD) \quad \begin{array}{ll} Max_{\theta,\lambda} & \theta \\ & \theta \le \lambda^\top \gamma_\ell + c_\ell^\top y_\ell, \;\; \ell = 1,2,...,q \quad |\alpha_\ell \end{array}$$

(α_ℓ variable dual) ($\gamma_\ell \overset{\triangle}{=} b - Ay_\ell$)

També

$$Min_{\;\theta,\lambda} \; -\theta$$

$$(LD) \quad \begin{pmatrix} 1-\gamma_1^\top \\ 1-\gamma_2^\top \\ \vdots \\ 1-\gamma_q^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \lambda \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c_1^\top y_1 \\ c_2^\top y_2 \\ \vdots \\ c_q^\top y_q \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} Max_\alpha & \sum_{\ell=1}^q (c^\top y_\ell)\alpha_\ell \qquad\qquad \to \sum_{\ell=1}^q (c^\top y_\ell)\alpha_\ell = -\theta \\ & \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \alpha_\ell \le 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{llll} & Min_\beta & \sum_{\ell=1}^q (c^\top y_\ell)\beta_\ell = Z^* = \theta & (\beta_\ell = -\alpha_\ell) \\ (P') & & \sum_{\ell=1}^q \beta_\ell = 1, \;\; \gamma_\ell \ge 0 \quad\quad | \;\theta & Master \\ & & \sum_{\ell=1}^q \beta_\ell \gamma_\ell = 0, \quad\quad\quad\quad | \;\lambda & program \end{array} \right.$$

N^{o} molt alt de variables (vèrtexs de X. $|Y| = q$)

Cal observar que el problema (P') no és sinó una forma d'expressar el problema original (P) segons el conjunt de vèrtexs Y.

Ara bé. Suposem que tenim un subconjunt de vèrtexs Y', $|Y'| = q' < q$ llavors plantegem el problema (P') per Y' hauria de donar un valor $z^* \ge z^*$; ja que el gap de dualitat és 0.

Cal fixar-se que el dual de (P') ha de ser precisament LD i d'aquí els LM (θ, λ) de (P') han de ser les variables de (LD)

Algorisme de Dantzig - Wolfe. (Desc per Preus)

0) Consideri's calcular un conjunt inicial de vèrtexs $Y^{(0}$

en la passa (n :
1) Resoldre el problema (P') per $Y^{(n}$, $|Y^{(n}| = q_n$

$$
(P') \quad
\begin{array}{ll}
Min_\beta & \sum_{\ell=1}^{q_n} (c^\top y_\ell)\beta_\ell \\
 & \sum_{\ell=1}^{q_n} \beta_\ell \gamma_\ell = 0 \quad | \ \lambda^{(n} \\
 & \sum_{\ell=1}^{q_n} \beta_\ell = 1 \qquad | \ \theta^{(n} \\
 & \beta_\ell \geq 0
\end{array}
$$

Master problem

$(\gamma_\ell = b - Ay_\ell, \ y_\ell \in Y^{(n)})$

Si no ATURADA **llavors**:
2) Amb els L.M. $\lambda^{(n}, \theta^{(n}$ obtinguts per la resolució de (P').
Calcular el valor de la funció dual lagrangiana

$$
w(\lambda^{(n)}) = b^\top \lambda^{(n} + \quad Min_x \quad \sum_{i=1}^{k} (c_i - A^\top \lambda^{(n)})^\top x_i \qquad x_i \in X_i
$$

(per desc.) $\swarrow$

$$
\boxed{\begin{array}{ll} Min_{x_i} & (c_i - A_i^\top \lambda^{(n)})^\top x_i \\ & x_i \in X_i \\ & i = 1, 2, ..., K \end{array}} \longrightarrow \text{nou vèrtex, } \hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_K \end{pmatrix}
$$

$$
w(\lambda^{(n)}) = b^\top \lambda^{(n} + \sum_{i=1}^{K} (c_i - A^\top \lambda^{(n)})\hat{x}_i = c^\top \hat{x} + \hat{\gamma}\lambda^{(n}; (\hat{\gamma} = b - A\hat{x})
$$

$$
Y^{(n+1} = Y^{(n} \cup \{\hat{x}\}
$$

- Si $w(\lambda^{(n)}) \geq \theta^{(n}$: ATURADA = true

$n \leftarrow n + 1$;
FiSi
GO TO 1

En acabar, la solució x^* s'obté: $x^* = \sum_{\ell=1}^{q_n} \beta_\ell y_\ell$

$$
w(\lambda^{(n)}) = \sum_{i=1}^{K} c_i \hat{x}_i^*, \qquad \text{solució } \ x^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^* \\ \hat{x}_2^* \\ \vdots \\ \hat{x}_K^* \end{pmatrix}
$$

$\nearrow$
(gap nul de dualitat)

en la pràctica l'aturada es produeix quan:

$$
\theta^{(n} - w(\lambda^{(n)}) \leq \varepsilon
$$