

TRACCIA_104_2021



DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA

Nome: Carmelo; **Cognome:** Gugliotta; **Matricola:** 213477

restart :

with(inttrans) :

La risposta forzata di un sistema lineare e stazionario a tempo continuo al segnale $u(t)$, con $u(t)$ pari a:

$$u(t) := (e^{-t} \cos(t)) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$u(t)$

$$e^{-t} \cos(t) \text{ Heaviside}(t) \quad (1)$$

è pari a:

$$y(t) := \left(\frac{11}{5} \cdot e^{-\frac{3}{2}t} t^2 - \frac{412}{25} e^{-\frac{3}{2}t} t - 28 e^{-2t} + \frac{3512}{125} e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{316}{125} e^{-t} \cdot \sin(t) - \frac{12}{125} e^{-t} \cos(t) \right) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$y(t)$

$$\left(\frac{11 e^{-\frac{3}{2}t} t^2}{5} - \frac{412 e^{-\frac{3}{2}t} t}{25} - 28 e^{-2t} + \frac{3512 e^{-\frac{3}{2}t}}{125} + \frac{316 e^{-t} \sin(t)}{125} - \frac{12 e^{-t} \cos(t)}{125} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (2)$$

Determinare:

1) La funzione di trasferimento del Sistema ed i suoi poli e zeri

La funzione di trasferimento di un Sistema Lineare e Stazionario a tempo continuo, è una funzione di variabile complessa real-razionale, la quale caratterizza le proprietà interne del sistema e lega la trasformata di Laplace dell'uscita forzata alla trasformata di Laplace dell'ingresso.

$$G(s) = \frac{Ng(s)}{Dg(s)}$$

Abbiamo quindi che in un sistema lineare e stazionario la f.d.t del sistema si definisce come rapporto fra la L-trasformata della Risposta Forzata ed il suo ingresso nel dominio di Laplace.

Calcoliamo quindi la Trasformata di Laplace dei segnali.

Per la risposta forzata avremo:

$$Y(s) := s \rightarrow \text{simplify}(\text{laplace}(y(t), t, s), \text{power}) :$$

$$\frac{24 s^2 + 16 s - 8}{(2 s + 3)^3 (s^2 + 2 s + 2) (s + 2)} \quad (1.1)$$

N.B.: Il comando simplify è utilizzato per applicare eventuali semplificazioni.

Per l'ingresso, invece:

$$U(s) := s \rightarrow \text{simplify}(\text{laplace}(u(t), t, s), \text{power}) :$$

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2 s + 2} \quad (1.2)$$

Possiamo ora determinare la funzione di trasferimento del sistema, data dal rapporto di Y(s) e U(s):

$$G(s) := s \rightarrow \left(\text{simplify} \left(\frac{Y(s)}{U(s)} \right) \right) :$$

$$\frac{24 s - 8}{(s + 2) (2 s + 3)^3} \quad (1.3)$$

Per definizione, i numeri complessi o reali z_i con $i=1, \dots, m$ tali che

$$G(z_i) = 0$$

sono gli Zeri della funzione di trasferimento e rappresentano le radici del Numeratore.

$$\text{Zeri_sistema} := \text{solve}(\text{numer}((1.3)))$$

$$\text{Zeri_sistema} := \frac{1}{3} \quad (1.4)$$

Per definizione, i numeri complessi o reali p_i con $i=1, \dots, n$ tali che

$$\lim_{s \rightarrow p_i} G(s) = \infty$$

sono i Poli della funzione di trasferimento e rappresentano le radici del Denominatore.

$$\text{Poli_sistema} := \text{solve}(\text{denom}((1.3)))$$

$$\text{Poli_sistema} := -2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \quad (1.5)$$

Osservazione

La G(s) di un sistema lineare stazionario a tempo continuo presenta sempre un numero di poli finito, viene anche definito come sistema a dimensione finita. Il numero dei poli inoltre, una volta effettuate

le necessarie semplificazioni tra numeratore e denominatore, determina l'ordine del sistema.

2) I modi di evoluzione libera del sistema

I modi di evoluzione libera rappresentano il contributo, nel dominio del tempo, alla risposta da parte del sistema. Il numero dei modi presente nella risposta è uguale alla dimensione del sistema ovvero il numero di radici del polinomio caratteristico. Nel nostro caso avremo 4 modi di evoluzione libera.

Determiniamo i modi di evoluzione, calcolando la antitrasformata di Laplace della funzione di trasferimento, ottenendo così la risposta all'impulso nel dominio del tempo che è combinazione lineare dei modi di evoluzione libera.

$$G(s) = \frac{n(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_r)} \rightarrow g(t) = \left(C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_r e^{p_r t} \right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$G(s)$

$$\frac{24s - 8}{(s + 2)(2s + 3)^3} \quad (2.1)$$

$g := t \rightarrow \text{invlaplace}(G(s), s, t) :$

$g(t)$

$$56 e^{-2t} - \frac{e^{-\frac{3t}{2}} (11t^2 - 56t + 112)}{2} \quad (2.2)$$

$\text{expand}((2.2), \text{exp})$

$$56 e^{-2t} - \frac{11 e^{-\frac{3t}{2}} t^2}{2} + 28 e^{-\frac{3t}{2}} t - 56 e^{-\frac{3t}{2}} \quad (2.3)$$

$$\text{modi_liberi} := \left\{ \frac{1}{28} \cdot \text{op}(3, (2.3)), \frac{1}{56} \cdot \text{op}(1, (2.3)), -\frac{2}{11} \cdot \frac{1}{(2!)} \cdot \text{op}(2, (2.3)), \left(-\frac{1}{56} \right) \cdot \text{op}(4, (2.3)) \right\} \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$\text{modi_liberi} := \left\{ e^{-\frac{3t}{2}} t, \frac{e^{-\frac{3t}{2}} t^2}{2}, e^{-2t}, e^{-\frac{3t}{2}} \right\} \text{Heaviside}(t) \quad (2.4)$$

Osservazione

Nel caso di poli reali il modo del sistema è un segnale esponenziale.

$$(s - p_i) \rightarrow e^{p_i t} \cdot \text{Heaviside}(t)$$

Nel caso di poli reali multipli si avranno segnali esponenziali della forma

$$(s - p_i)^v \rightarrow \begin{matrix} e^{p_i t} \cdot \text{Heaviside}(t) \\ t \cdot e^{p_i t} \cdot \text{Heaviside}(t) \\ \frac{t^2}{(2!)} \cdot e^{p_i t} \cdot \text{Heaviside}(t) \\ \vdots \\ \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} \cdot e^{p_i t} \cdot \text{Heaviside}(t) \end{matrix}$$

3) La risposta del sistema al gradino unitario

L'ingresso che applicheremo al sistema è il seguente:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Tale funzione è nota come gradino unitario o funzione di Heaviside.

Presenta una discontinuità di prima specie in 0, continua nell'intervallo $[0, \infty)$, e di ordine esponenziale $\alpha = 0$, dunque Laplace trasformabile.

La sua trasformata è

$$U(s) = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt = \frac{1}{s}$$

L'integrale converge assolutamente per ogni numero complesso s contenuto nel piano di Gauss a destra dell'asse immaginario. ($\alpha = 0$)

Per determinare la Risposta al Gradino, si evidenzia che la trasformata di Laplace della risposta forzata è pari al prodotto algebrico della funzione di trasferimento del sistema per la trasformata di Laplace dell'ingresso.

$$Y_{forzata}(s) = G(s) \cdot U(s)$$

Avendo chiarito tale relazione sarà possibile in pochi passaggi determinare la Risposta al Gradino nel

dominio della variabile complessa 's', applicare l'antitrasformata di laplace e ottenere la Risposta desiderata.

$$\text{expand}\left(\text{invlaplace}\left(\left(\frac{G(s)}{s}\right), s, t\right), \text{exp}\right) \\ -\frac{4}{27} - 28 e^{-2t} + \frac{11 e^{-\frac{3t}{2}} t^2}{3} - \frac{124 e^{-\frac{3t}{2}} t}{9} + \frac{760 e^{-\frac{3t}{2}}}{27} \quad (3.1)$$

Osservando la formula (8) si notano 5 addendi.

- Il primo addendo è una 'costante'. Questa componente è legata algebricamente all'ingresso e assume l'appellativo di Risposta a Regime.
- Il secondo, terzo, quarto e quinto addendo, sono legati ai poli della funzione di trasferimento (modi di evoluzione libera del sistema) e assume l'appellativo di Risposta Transitoria.

N.B: la risposta forzata (Caso corrente: al gradino) di un sistema LTI-TC si lascia descrivere come la somma di una componente legata algebricamente all'ingresso e di una componente legata ai modi di evoluzione libera del sistema.

$$y_{\text{forzata}}(t) = y_{\text{regime}}(t) + y_{\text{transitoria}}(t)$$

$$y_{\text{gradino}} := t \mapsto (3.1) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$y_{\text{gradino}} := t \mapsto \left(-\frac{4}{27} - 28 \cdot e^{-2 \cdot t} + \frac{11 \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2}} \cdot t^2}{3} - \frac{124 \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2}} \cdot t}{9} + \frac{760 \cdot e^{-\frac{3 \cdot t}{2}}}{27} \right) \cdot \text{Heaviside}(t) \quad (3.2)$$

$$y_{\text{gradino}}(t) \\ \left(-\frac{4}{27} - 28 e^{-2t} + \frac{11 e^{-\frac{3t}{2}} t^2}{3} - \frac{124 e^{-\frac{3t}{2}} t}{9} + \frac{760 e^{-\frac{3t}{2}}}{27} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (3.3)$$

Osservazione

Estraiamo la componente transitoria (il secondo, terzo, quarto e quinto operando) e applichiamo il limite per t che tende all'infinito

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (op(2, (3.1)) + op(3, (3.1)) + op(4, (3.1)) + op(5, (3.1))) \\ 0 \quad (3.4)$$

Tale risultato non è inaspettato.

Infatti gli argomenti degli esponenziali sono negativi, e al crescere di t il loro risultato è pari a 0. Inoltre il Sistema è BIBO (Bounded Input Bounded Output) STABILE, in quanto, la funzione di trasferimento presenta poli a parte reale strettamente negativa.

Tale proprietà garantisce che, dato un ingresso limitato $u(t)$, ($\exists M > 0 : |u(t)| \leq M$), corrisponda una Uscita limitata. Per cui, al crescere di t , la Componente Transitoria della risposta si estinguerà e si avrà solo la Componente a Regime, segnale costante di ampiezza pari, in questo caso, al guadagno statico del sistema ottenibile tramite la seguente valutazione $G(s) \Big|_{s=0}$

N.B: Il guadagno statico (guadagno in continua) di un sistema dinamico LTI-TC (BIBO-STABILE) è il rapporto fra l'ampiezza del gradino della risposta a regime diviso per l'ampiezza del gradino in ingresso e si calcola valutando in 0 la FDT del Sistema.

$$y_{regime} := \lim_{t \rightarrow \infty} y_{gradino}(t) :$$

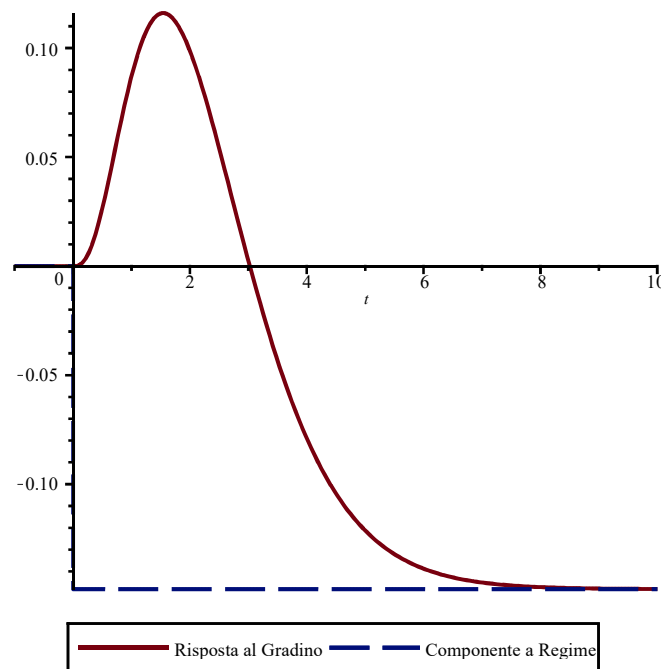
$$y_{regime} := \text{expand}(y_{regime}(t) \cdot \text{Heaviside}(t))$$

$$y_{regime} := - \frac{4 \text{ Heaviside}(t)}{27} \quad (3.5)$$

4) Grafico risposta al gradino unitario

Rappresentiamo graficamente la risposta al gradino unitario sovrapponendola con la sua componente di regime:

```
plot([y_gradino(t), y_regime(t)], t=-1 ..10, legend= ["Risposta al Gradino", "Componente a Regime"],
'linestyle'= [solid, dash])
```



- La risposta al gradino assume valore pari a 0 in $t=0$, perchè in quanto risposta forzata, presuppone che il sistema sia "in quiete" (condizioni iniziali nulle).

5) Un possibile modello ARMA del sistema

La rappresentazione di un sistema dinamico lineare stazionario a tempo continuo, mediante un'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$y''(t) + \alpha_1 y'^{n-1}(t) + \alpha_2 y'^{n-2}(t) + \dots + \alpha_n y(t) = \beta_0 u''(t) + \beta_1 u'^{m-1}(t) + \beta_2 u'^{m-2}(t) + \dots + \beta_m u(t)$$

$$\alpha_i \in \mathbb{R} \quad \beta_i \in \mathbb{R} \quad m \leq n$$

N.B: $m \leq n$ poichè affinché l'uscita dipenda dalla storia passata dell'ingresso (al massimo dal suo valore corrente), il secondo membro dell'equazione differenziale (Termine Sorgente) non deve presentare termini derivativi dell'ingresso superiori al massimo ordine di derivazione dell'uscita. (*Principio di Casualità*)

si chiama rappresentazione implicita ingresso-uscita o anche modello ARMA(Auto Regressive Moving Average).

Per ottenere una possibile rappresentazione I-U del sistema dinamico lineare e stazionario, si noti che nel dominio di Laplace la risposta forzata del sistema è pari al prodotto algebrico della L-trasformata dell'ingresso $U(s)$ per la funzione di trasferimento del sistema.

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ è una funzione di variabile complessa, rapporto di polinomi in 's' a coefficienti β_i , α_i reali (coefficienti della rappresentazione I-U).

$$G(s) = \frac{\beta_0 s^m + \beta_1 s^{m-1} + \beta_2 s^{m-2} + \dots + \beta_m}{s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \alpha_2 s^{n-2} + \dots + \alpha_n} = \frac{n_g(s)}{d_g(s)}$$

Possiamo quindi scrivere $Y(s)$ nella seguente forma

$$Y(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} U(s)$$

Otteniamo:

$$d_g(s) Y(s) = n_g(s) U(s)$$

N.B: $d_g(s)$ è il polinomio in 's' che moltiplica $Y(s)$ e assume l'appellativo di polinomio caratteristico del sistema dinamico.

$$\text{num}G := s \rightarrow \text{numer}(G(s)) :$$

$$\text{den}G := s \rightarrow \text{denom}(G(s)) :$$

$$\text{equa_in_s} := \text{den}G(s) \cdot Y_1(s) = \text{num}G(s) \cdot U_1(s)$$

$$\text{equa_in_s} := (s + 2) (2s + 3)^3 Y_1(s) = (24s - 8) U_1(s) \quad (5.1)$$

Sfruttando il Teorema della derivata e la proprietà di linearità di cui gode l'operatore Trasformata

Inversa di Laplace si ottiene:

$Modello_ARMA := invlaplace(equa_in_s, s, t) :$

$Modello_ARMA := subs\left(\left\{ invlaplace\left(Y_I(s) s^4, s, t\right)=y_1^{(4)}(t), invlaplace\left(Y_I(s) s^3, s, t\right)=y_1^{(3)}(t), \right.\right.$
 $invlaplace\left(Y_I(s) s^2, s, t\right)=y_1^{(2)}(t), invlaplace\left(Y_I(s) s, s, t\right)=y_1'(t), invlaplace\left(Y_I(s), s, t\right)$
 $\left.=y_1(t), invlaplace\left(U_I(s) s, s, t\right)=u_1'(t), invlaplace\left(U_I(s), s, t\right)=u_1(t)\right\}, Modello_ARMA) :$

$Modello_ARMA$

$$8 D^{(4)}(y_I)(t) + 52 D^{(3)}(y_I)(t) + 126 D^{(2)}(y_I)(t) + 135 D(y_I)(t) + 54 y_I(t) \quad (5.2)$$

$$= 24 D(u_I)(t) - 8 u_I(t)$$

Teorema della Derivata

Sia $f(t)$ una funzione right-sided L-trasformabile continua a tratti su $[0, +\infty)$. Se indico con $F(s)$ la sua L-trasformata allora:

$$\mathcal{L}(D(f(t))) = sF(s) - f(0^+)$$

La regione di convergenza di $F(s)$, è:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \alpha\}$$

La regione di convergenza di $\mathcal{L}(D(f(t)))$ è uguale a quella di $F(s)$.

$$\mathcal{L}(D(f(t))) \quad (5.3)$$

6) Risposta all'ingresso

L'ingresso che applicheremo al sistema è il seguente (definito tramite il costrutto PIECEWISE):

$$u_{pulse} := t \rightarrow \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases} :$$

Tale funzione è nota come Pulse, impulso rettangolare di ampiezza unitaria e durata 1 secondo. Presenta due discontinuità di prima specie in 0 e 1, continua a tratti nell'intervallo $[0, \infty)$, e di ordine esponenziale $\alpha = 0$, dunque Laplace trasformabile.

La sua trasformata è

$$U_{pulse} := s \rightarrow laplace(u_{pulse}(t), t, s) :$$

$$U_{pulse}(s)$$

$$\frac{1 - e^{-s}}{s} \quad (6.1)$$

Caratterizzato da una regione di convergenza:

$$\Omega = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \alpha\}; \quad \alpha = 0;$$

Si vuole determinare la Risposta forzata, ed è noto che che la trasformata di laplace della risposta forzata è pari al prodotto algebrico della funzione di trasferimento del sistema moltiplicata per la trasformata di laplace dell'ingresso.

Si avrà quindi che:

$$Y_{pulse}(s) := G(s) \cdot U_{pulse}(s) :$$

$$\frac{(24s - 8)(1 - e^{-s})}{(s + 2)(2s + 3)^3 s} \quad (6.2)$$

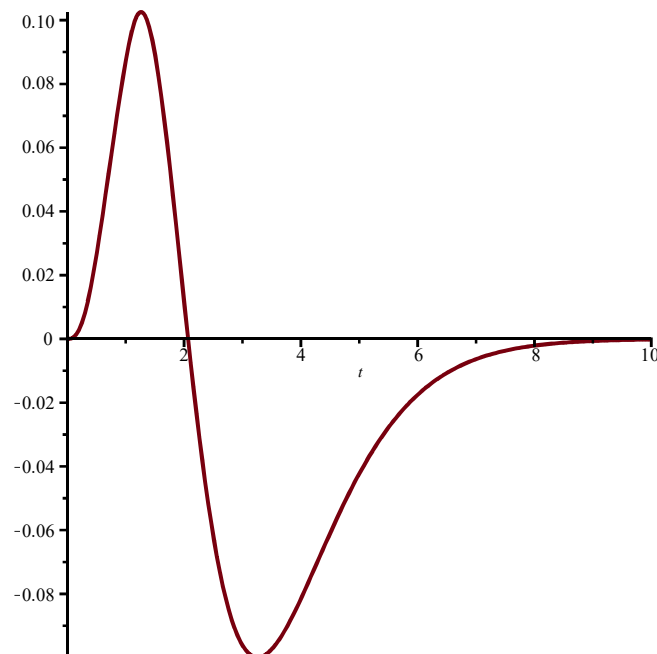
Applichiamo l'antitrasformata di laplace per ottenere la Risposta desiderata nel dominio del tempo.

$$y_{pulse} := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{pulse}(s), s, t) \cdot \text{Heaviside}(t) :$$

$$y_{pulse}(t) = \left(-\frac{4 \text{Heaviside}(1 - t)}{27} - 28 e^{-2t} + \frac{e^{-\frac{3t}{2}} (99t^2 - 372t + 760)}{27} \right. \\ \left. + \frac{(756 e^{2-2t} - e^{\frac{3}{2}} - \frac{3t}{2} (99t^2 - 570t + 1231)) \text{Heaviside}(-1 + t)}{27} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (6.3)$$

Rappresentiamo graficamente la risposta ottenuta:

$\text{plot}([y_{pulse}(t)], t=0..10)$



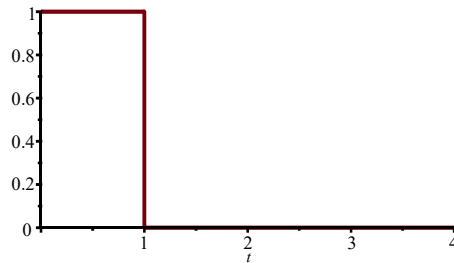
Osservazione

Si vuole verificare che il risultato ottenuto è esattamente quello desiderato.

L'ingresso di durata finita, può essere riscritto come la differenza di due gradini unitari, di cui uno shiftato di esattamente 1 secondo.

$$u(t) = \text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - 1)$$

`plot([Heaviside(t) - Heaviside(t - 1)], t=0..4)`



Determiniamo ora la trasformata di Laplace dell'ingresso $u(t)$.

$$\mathcal{L}(u(t))(s) = \mathcal{L}(\text{Heaviside}(t) - \text{Heaviside}(t - 1))(s) = \mathcal{L}(\text{Heaviside}(t))(s) - \mathcal{L}(\text{Heaviside}(t - 1))(s) = \mathcal{L}(u_1(t))(s) - \mathcal{L}(u_2(t))(s)$$

La regione di convergenza sarà data dall'intersezione delle singole regioni di convergenza.

$$\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$$

N.B: La trasformata di Laplace è un oggetto che opera su segnali temporali e gode di una proprietà in particolare, la linearità.

Calcoliamo quindi la trasformata di Laplace di $u_1(t)$.

$$\mathcal{L}(u_1(t))(s) = \int_0^{\infty} u_1(t) e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^{-s\alpha}}{s} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

La regione di convergenza è data da tutti i numeri complessi $s \in \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}(s) > 0$.

Per calcolare la trasformata di Laplace di $u_2(t)$ sfruttiamo il Teorema del ritardo finito.

Teorema del ritardo finito

Sia $f(t)$ una funzione di classe L (L-trasformabile) e sia $F(s)$ la sua trasformata di Laplace. Sia ora $f(t-T)$ un nuovo segnale ottenuto a partire da $f(t)$ e ritardandolo nel tempo di $T > 0$ unità di tempo.

Vale il seguente risultato:

$$\mathcal{L}(f(t - T))(s) = e^{-sT} F(s)$$

La regione di convergenza della L-Trasformata ottenuta è uguale alla regione di convergenza di $F(s)$.

N.B: e^{-sT} è l'operatore ritardo finito e non è una funzione razionale, non è identificabile, infatti, come rapporto di polinomi.

Otteniamo dunque

$$\mathcal{L}(\text{Heaviside}(t - 1))(s) = e^{-s} \cdot \mathcal{L}(\text{Heaviside}(t))(s) = \frac{e^{-s}}{s}$$

La regione di convergenza è data da tutti i numeri complessi $s \in \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}(s) > 0$.

$$\mathcal{L}(u(t))(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Si noti come la L-trasformata ottenuta è pari alla L-trasformata determinata al passaggio (6.1).

La risposta forzata del sistema LTI-TC a tale ingresso ,sfruttando le proprietà di linearità e tempo-invarianza, si lascia descrivere come:

$$y_{forzata}(t) = y_1(t) - y_2(t)$$

- $y_1(t)$ è la risposta al gradino unitario
- $y_2(t)$ è la risposta ad un gradino ritardato di 1 secondo e quindi per la proprietà di tempo-invarianza si lascia riscrivere come $y_1(t - 1)$

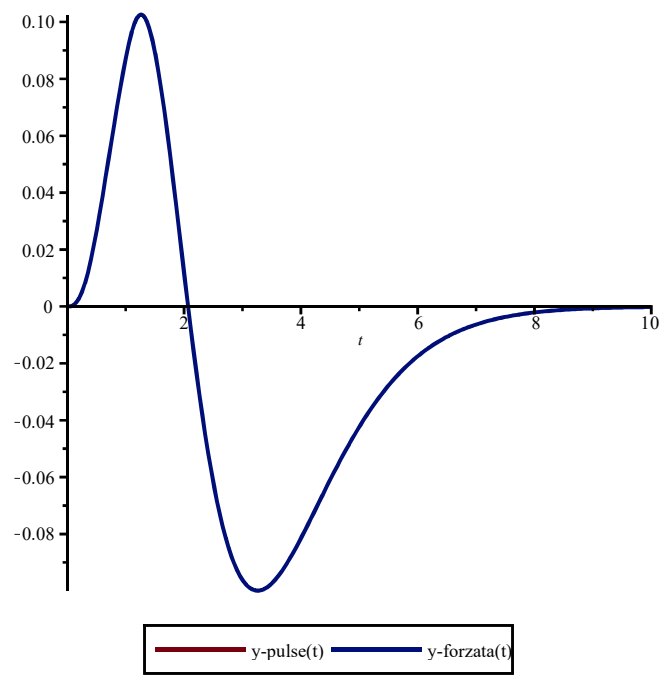
Avremo quindi

$$y_{forzata} := t \rightarrow (y_{gradino}(t) - y_{gradino}(t - 1)) :$$

$$y_{forzata}(t) = \left(-\frac{4}{27} - 28e^{-2t} + \frac{11e^{-\frac{3t}{2}}t^2}{3} - \frac{124e^{-\frac{3t}{2}}t}{9} + \frac{760e^{-\frac{3t}{2}}}{27} \right) \text{Heaviside}(t) - \left(-\frac{4}{27} - 28e^{2-2t} + \frac{11e^{\frac{3}{2}-\frac{3t}{2}}(-1+t)^2}{3} - \frac{124e^{\frac{3}{2}-\frac{3t}{2}}(-1+t)}{9} + \frac{760e^{\frac{3}{2}-\frac{3t}{2}}}{27} \right) \text{Heaviside}(-1+t) \quad (6.4)$$

Rappresentando graficamente $y_{forzata}(t)$ e sovrapponendola alla $y_{pulse}(t)$ precedentemente ottenuta sarà noto che esse esprimono la stessa quantità.

```
plot([y_pulse(t), y_forzata(t)], t=0..10, legend=["y-pulse(t)", "y-forzata(t)"], 'linestyle'=[solid, solid])
```



with(inttrans) :
 with(PolynomialTools) :
 with(DynamicSystems) :
 with(plots) :

Diagramma di Bode

Il Diagramma di Bode è una rappresentazione grafica del modulo della risposta in frequenza $|G(j\omega)|$ e della sua fase $\angle(G(j\omega))$ al variare entrambi di $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Mediante la rappresentazione del Diagramma di Bode si costruiscono quindi due diagrammi cartesiani in cui la variabile indipendente è la pulsazione ω e le variabili dipendenti sono, rispettivamente, il modulo e la fase di $G(j\omega)$.

Per facilitare lo studio su un elevato spettro di pulsazioni sia il diagramma del modulo sia il diagramma delle fasi vengono rappresentati in ascissa su scala logaritmica (l'unità di misura è la decade) e questo permette sostanzialmente la possibilità di rappresentare con dovuto dettaglio grandezze che variano in campi notevolmente estesi (alte frequenze) o estremamente ridotti (basse frequenze).

Nel diagramma dei moduli si rappresenta il modulo espresso in decibel (o dB) della risposta in frequenza al variare della pulsazione sull'asse delle ascisse.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$$

Nel diagramma delle fasi si rappresentano i valori assunti dall'argomento della risposta in frequenza del sistema per diversi valori di ω . In questo caso sull'asse delle ordinate gli angoli possono essere espressi in radianti o in gradi sessagesimali.

Si noti che questo tipo di grandezza è già logaritmica, infatti la fase è la parte immaginaria del logaritmo della risposta in frequenza.

Il vantaggio che si ottiene dalla rappresentazione logaritmica, oltre a quelli citati precedentemente, è che i diagrammi di Bode si lasciano descrivere tramite la somma di diagrammi elementari grazie alla proprietà del logaritmo (modulo in dB e fase).

Affinchè una generica funzione possa essere rappresentata mediante il diagramma di Bode, deve essere riscritta in una forma particolare, nota come Forma di Bode.

Sia $G(s)$ caratterizzata, per facilità, solo da poli e zeri reali, la forma di bode di $G(s)$ è

$$G(s) = K_b \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \frac{s}{\Omega_i} \right)}{s^\mu \prod_{i=1}^n \left(1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \frac{s}{\omega_i} \right)}$$

- K_b è il Guadagno di Bode

$$K_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu G(s)$$

- μ rappresenta il numero di poli nell'origine che la funzione presenta.
- $\Omega_i = |Z_i|$ e $\omega_i = |P_i|$ denotano le pulsazioni di rottura di poli e zeri reali (non nell'origine)

- l'operatore segno tiene conto della locazione dello zero e del polo reale (non nell'origine) rispetto all'asse immaginario

Dall'analisi della forma di Bode di una funzione di trasferimento mediante restrizione sull'asse $j\omega$ si ha:

$$|G(j\omega)|_{dB} = |K_b|_{dB} + \sum_{i=1}^m \left| 1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \cdot \frac{j\omega}{\Omega_i} \right|_{dB} - \mu \cdot |j\omega|_{dB} - \sum_{i=1}^n \left| 1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \cdot \frac{j\omega}{\omega_i} \right|_{dB}$$

$$\angle(G(j\omega)) = \angle(K_b) + \sum_{i=1}^m \angle \left(1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \frac{j\omega}{\Omega_i} \right) - \mu \angle(j\omega) - \sum_{i=1}^n \angle \left(1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \frac{j\omega}{\omega_i} \right)$$

Dati alcuni concetti teorici disegniamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento assegnata

$$G := s \mapsto \frac{121(8s - 1)}{10s^2(s^2 + s + 121)} :$$

$$G(s) = \frac{968s - 121}{10s^2(s^2 + s + 121)} \quad (1)$$

Calcolo i poli e gli zeri della Funzione di Trasferimento

$$\begin{aligned} \text{poli}G &:= [\text{solve}(\text{denom}(G(s)) = 0, s)] \\ \text{poli}G &:= \left[0, 0, -\frac{1}{2} + \frac{1\sqrt{483}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{1\sqrt{483}}{2} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{zeri}G &:= [\text{solve}(\text{numer}(G(s)), s)] \\ \text{zeri}G &:= \left[\frac{1}{8} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Determino il numero di effetti integrali (poli nell'origine) presenti ed elimino quest'ultimi dalla lista dei poli.

$$\begin{aligned} \mu &:= \text{numboccur}(\text{poli}G, 0) \\ \mu &:= 2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{poli}G := \text{remove}(x \mapsto x = 0, \text{poli}G) :$$

Il numero di zeri ed il numero di poli (al netto degli effetti integrali) della funzione di trasferimento sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \text{nz} &:= \text{numelems}(\text{zeri}G) \\ \text{nz} &:= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$np := \text{numelems}(\text{poli}G)$$

$$np := 2 \quad (6)$$

Calcolo le pulsazioni di taglio della Funzione di Trasferimento:

$$\Omega_t := \text{abs}(\text{zeri}G)$$

$$\Omega_t := \left[\frac{1}{8} \right] \quad (7)$$

Si consideri il termine trinomio in s presente nella funzione di trasferimento assegnata

$$s^2 + s + 121$$

Analizzandolo, si determina che non è scomponibile su \mathbb{R} . Le radici sono quindi complesse e coniugate ed il discriminante è negativo

$$1 - 4 \cdot 121 < 0$$

Possiamo allora scrivere il trinomio non scomponibile nella seguente forma alternativa

$$s^2 + 2 \delta \omega_n s + \omega_n^2$$

Dove con $\omega_n > 0$ (misurata in $\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$) indichiamo la pulsazione naturale della coppia di radici complesse

e coniugate e con δ , quantità adimensionale, indichiamo lo smorzamento della coppia di radici del trinomio. Per il principio di identità dei polinomi, assegnato un trinomio non scomponibile è sempre possibile ricavare smorzamento e pulsazione naturale dalla soluzione del seguente sistema simmetrico elementare

$$\begin{cases} 2 \delta \omega_n = c_1 \\ \omega_n^2 = c_2 \end{cases}$$

Otteniamo dunque:

$$\omega_n := \sqrt{121}$$

$$\omega_n := 11 \quad (8)$$

$$\delta := \frac{1}{2 \omega_n} \cdot 1$$

$$\delta := \frac{1}{22} \quad (9)$$

Le locazioni di una coppia di radici complesse e coniugate di un trinomio non scomponibile in termini pulsazione naturale e smorzamento è la seguente

$$p_{1,2} = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

Essendo $0 < \delta < 1$ abbiamo infatti radici complesse e coniugate a parte reale strettamente negative

Determino il Guadagno di Bode

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu \cdot G(s)$$

$$K_b := -\frac{1}{10} \quad (10)$$

Raccolti tutti questi dati, possiamo scrivere la Forma di Bode:

$$G_{bode} := s \rightarrow (K_b) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{nz} \left(1 + \text{sign}(-\text{zeri}G[i]) \cdot \frac{s}{\Omega_t[i]} \right)}{s^\mu} \cdot \frac{1}{\frac{s^2}{(\omega_n)^2} + \frac{(2 \cdot \delta \cdot \omega_n s)}{(\omega_n)^2} + \frac{(\omega_n^2)}{(\omega_n)^2}} : \quad (11)$$

$$G_{bode}(s) = -\frac{1 - 8s}{10s^2 \left(\frac{1}{121}s^2 + \frac{1}{121}s + 1 \right)}$$

e quindi per valutare i diagrammi di Bode dobbiamo valutare la $G(j\omega)$

$$G_{bode}(j \cdot \omega) = -\frac{-8j\omega + 1}{10j^2\omega^2 \left(\frac{1}{121}j^2\omega^2 + \frac{1}{121}j\omega + 1 \right)} \quad (12)$$

Valutiamo il **Diagramma dei Moduli**

$$|G(j\omega)|_{dB} = \left| -\frac{1}{10} \right|_{dB} + |1 - 8j\omega|_{dB} - \mu \cdot |j \cdot \omega|_{dB} - \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j \cdot 2 \cdot \delta \cdot \frac{\omega}{\omega_n} \right|_{dB}$$

$$\text{Guadagno_in_dB} := 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) :$$

$$\text{evalf}(\text{Guadagno_in_dB}) = -20. \quad (13)$$

Il Guadagno in dB vale -20 e quindi il diagramma dei moduli presenta uno slittamento negativo (attenuazione)

Valutiamo ora il termine successivo, ovvero, il contributo nel diagramma dei moduli di uno zero nel semipiano destro (a fase non minima).

Abbiamo la seguente approssimazione:

1. BF, $\omega < \Omega_t[1]$, $|1 - 8j\omega|_{dB} \approx 0$;
2. AF, $\omega > \Omega_t[1]$, $|1 - 8j\omega|_{dB}$ si approssima con una semiretta di pendenza $20 \frac{dB}{decade}$ che ha origine in corrispondenza di 0 dB a partire da $\frac{1}{8} \frac{rad}{sec}$

N.B: Il contributo sui moduli di uno zero o polo reale è indipendente dalla posizione dello zero(polo) rispetto all'asse immaginario, due numeri complessi e coniugati hanno lo stesso modulo.

Consideriamo ora i due poli nell'origine

$$-\mu |j\omega|_{dB} = -20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) = -20 \mu \cdot x$$

il contributo sul diagramma dei moduli è una retta di pendenza $-40 \frac{dB}{decade}$

Consideriamo ora il fattore legato ai poli complessi e coniugati nel semipiano sinistro

$$-|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}|_{dB}$$

Tale fattore si ottiene dalla restrizione sull'asse immaginario della forma di bode di una coppia di poli complessi e coniugati aventi pulsazione natura $\omega_n \geq 0$ e smorzamento $0 < \delta < 1$

$\omega_n; \delta;$

11

$\frac{1}{22}$

(14)

sfruttando l'approssimazione senza risonanza hanno il seguente comportamento

$$1. BF, \frac{\omega}{\omega_n} < 1, -|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}|_{dB} \approx -20 \log_{10}(1) = 0$$

si approssima quindi con la retta 0_{dB}

$$2. AF, \frac{\omega}{\omega_n} > 1, -|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n}|_{dB} \approx -40 \log_{10}(\omega) + 40 \log_{10}(\omega_n)$$

ed in questo caso il diagramma si approssima con una semiretta di pendenza $-40 \frac{dB}{decade}$ che ha origine

in 0_{dB} in corrispondenza della pulsazione naturale $\omega_n = 11 \frac{rad}{sec}$

Valutiamo il **Diagramma delle Fasi**

$$\angle G(j\omega) = \angle \left(-\frac{1}{10} \right) + \angle (1 - 8j\omega) - \angle (j\omega)^\mu - \angle \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

$Guadagno_in_Fasi := \arg(K_b) :$

Il contributo del guadagno K_b è pari a π in quanto numero negativo e il contributo alla fase dei poli nell'origine è pari a

$-\cdot \mu \frac{\pi}{2} = -\pi$. Il diagramma delle fasi in bassa frequenza avrà quindi una fase pari alla somma dei due contributi è cioè pari a 0° .

Valutiamo lo zero a fase non minima

$$\angle (1 - 8j\omega)$$

avremo le seguenti approssimazioni

$$1. BF, \omega < \Omega_t[1] \cdot 10^{-1}, \angle (1 - 8j\omega) \approx 0^\circ$$

$$2. AF, \omega > \Omega_t[1] \cdot 10^1, \angle (1 - 8j\omega) = -\angle (1 + 8j\omega) \approx -\frac{\pi}{2}$$

$$3. MF, \Omega_t[1]10^{-1} < \omega < \Omega_t[1]10^1, \angle (1 - 8j\omega) \text{ è un segmento di pendenza } -\frac{\pi}{4} \frac{rad}{decade}$$

Analizziamo i poli complessi e coniugati senza valutare lo smorzamento

$$-\angle \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right)$$

Si ottiene il seguente comportamento

$$1. BF, \text{ si ha che } \left(\frac{\omega}{\omega_n} \approx 0 \right), -\angle \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta \frac{\omega}{\omega_n} \right) \approx 0^\circ$$

$$2. AF, \text{ si ha il termine } \left(\frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \text{ domina rispetto a tutto il resto, } -\angle \left(-\frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right) = -\pi$$

$$3. MF, \text{ le due rette sono raccordate da un segmento che in due decadi passa da } 0 \text{ a } -\pi \text{ quindi è un segmento che pendenza } -\frac{\pi}{2} \frac{rad}{decade}$$

Definiamo ora le funzioni modulo e fase (le fasi espresse in radianti), con approssimazione asintotica. Prestando molta attenzione al contributo dei poli complessi e coniugati sui moduli e sulle fasi. (Approssimazione senza risonanza)

Otteniamo:

$$f_a := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$f_{\hat{\alpha}} := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 40 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 1 \end{cases} :$$

$$g_a := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left(\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{1}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

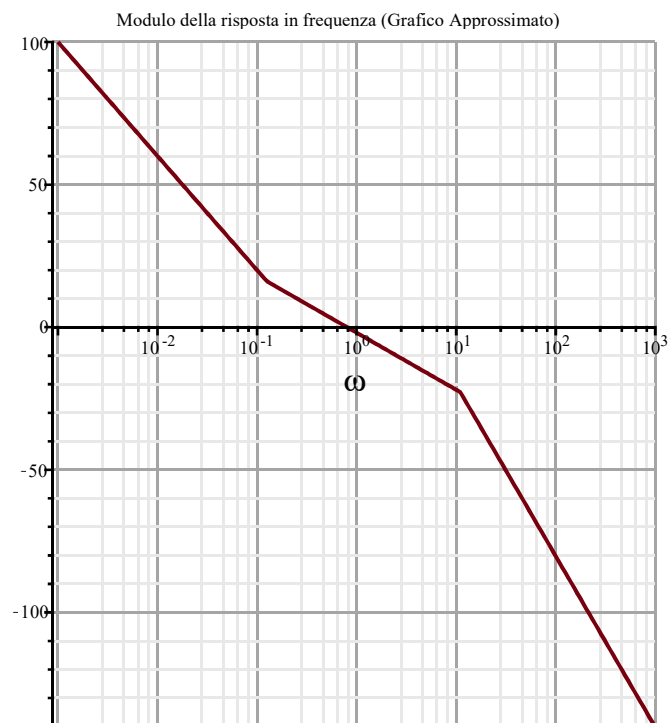
$$g_{\hat{\alpha}} := (\omega, \omega_c) \rightarrow \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{2} \cdot \log_{10} \left(\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{1}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \pi & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases} :$$

Calcolo ora la funzione modulo e fase, per la funzione di trasferimento assegnata utilizzando le approssimazioni asintotiche precedentemente ottenute:

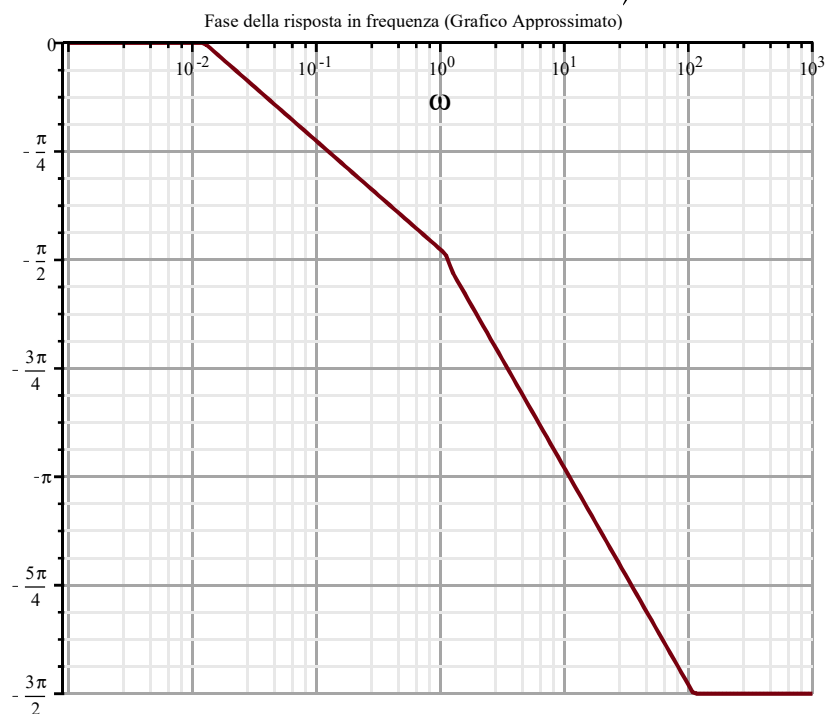
$$modulo_a := \omega \rightarrow Guadagno_in_dB - 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) + f_a(\omega, \Omega_t[1]) - f_{\hat{\alpha}}(\omega, \omega_n) :$$

$$fase_a := \omega \rightarrow \frac{(1 - \text{signum}(K_b))}{2} \cdot (\pi) - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \text{signum}(-zeriG[1]) \cdot g_a(\omega, \Omega_t[1]) - g_{\hat{\alpha}}(\omega, \omega_n) :$$

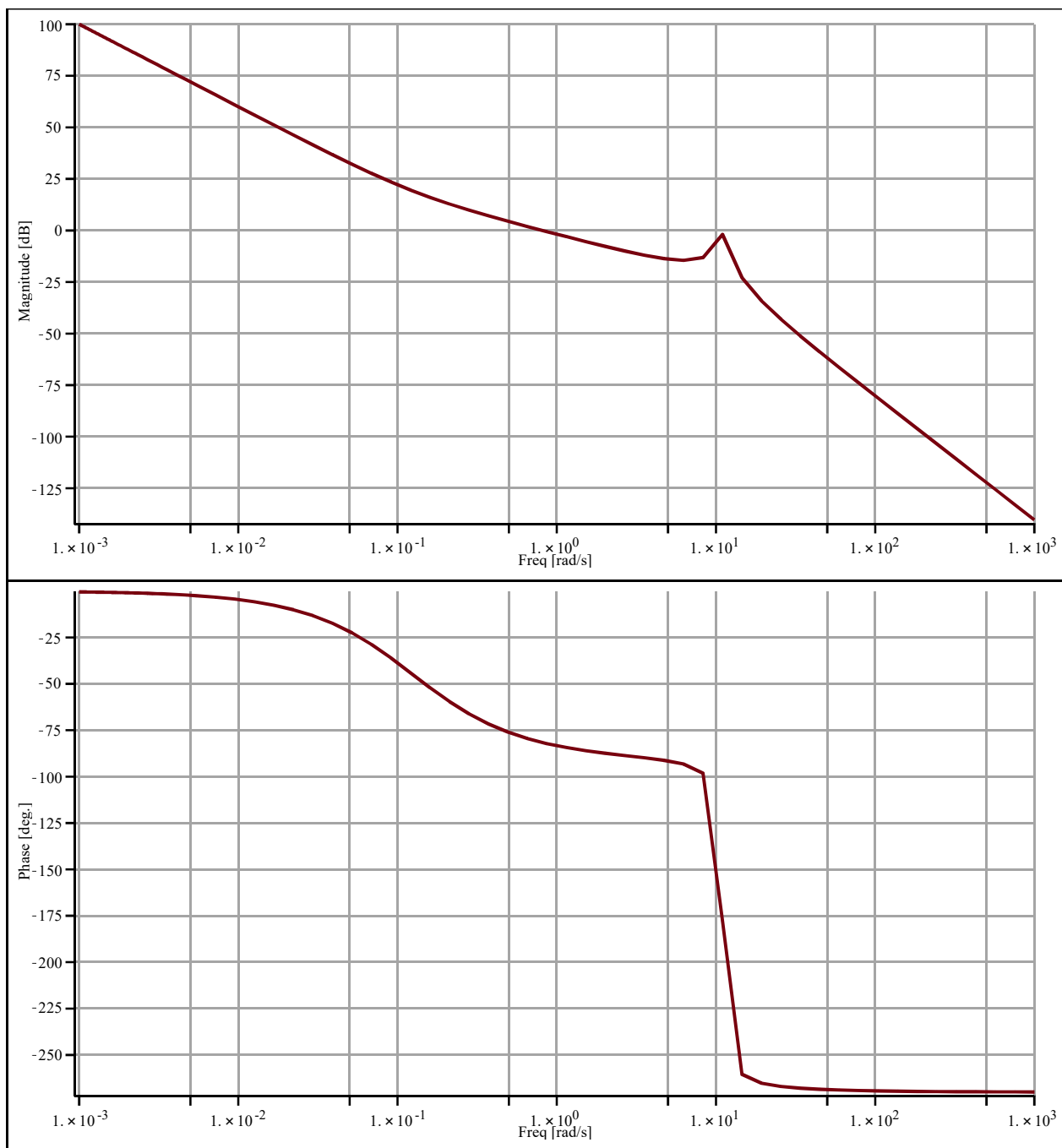
`semilogplot(moduloa(ω), ω = 10-3..103, axis = [gridlines], title
= "Modulo della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)")`



`semilogplot(fasea(ω), $\omega = 10^{-3}..10^3$, axis = [gridlines], tickmarks = [default, piticks], title = "Fase della risposta in frequenza (Grafico Approssimato)")`



`BodePlot(TransferFunction($G(s)$))`



Purtroppo, nel fattore

$$\frac{1}{s^2 + 2 \cdot \delta \cdot \omega_n s + \omega_n^2}$$

L'errore fra l'approssimazione proposta e la curva reale, sia in termini di modulo che di fase, dipende fortemente dal valore numerico assunto dallo smorzamento δ .

Infatti particolari valori di δ determinano una condizione nota con il nome di risonanza. Ovvero l'esistenza di un punto a tangente orizzontale se:

$$0 < \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Tale punto a tangente orizzontale è individuato dalle coordinate (ω_r, M_r)

- ω_r è detta pulsazione di risonanza ed in corrispondenza di tale valore il modulo del fattore di Bode legato ad una coppia di poli complessi e coniugati nel semipiano sinistro è massimo.
- M_r è definito picco di risonanza ed è il valore massimo dell'ordinata del diagramma dei moduli e nel caso $\delta \rightarrow 0$ si avrà $M_r \rightarrow \infty$ ottenendo così la pura risonanza.

$$\omega_r = \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\delta^2}; M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}$$

A questo punto arrivati possiamo affermare che il termine trinomio, in corrispondenza della pulsazione di risonanza

$$\omega_r := \omega_n \cdot \sqrt{1 - 2\delta^2} : evalf(\omega_r)$$

10.97724920 (15)

presenta un picco di risonanza pari a

$$M_r := \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}} : evalf(M_r)$$

11.01138128 (16)

che in dB è pari a:

$$M_{r, dB} := 20 \cdot \log_{10}(|M_r|) : evalf(M_{r, dB})$$

20.83683602 (17)

Ciò significa che nell'intorno della pulsazione di risonanza il diagramma dovrà essere rialzato di circa 20.83.

Andiamo a valutare la pendenza "iniziale" e la pendenza "finale" sul diagramma dei moduli (dB/decade)

$$Pendenza_iniziale := -20 \mu$$

Pendenza_iniziale := -40 (18)

$$Pendenza_finale := -20 \mu + 20(nz - np)$$

Pendenza_finale := -60 (19)

Per quanto riguarda le fasi, la questione è più articolata, si ha bisogno di separare i poli e gli zeri in base alla loro locazione rispetto all'asse immaginario.

n_{z+} il numero di zeri della funzione di trasferimento nel semipiano destro, in questo caso 1;

n_{z-} il numero di zeri della funzione di trasferimento nel semipiano sinistro, in questo caso 0;

n_{p+} il numero di poli della funzione di trasferimento nel semipiano destro, in questo caso 0;

n_{p-} il numero di poli della funzione di trasferimento nel semipiano sinistro, in questo caso 2;

Dunque ne consegue che, la fase asintotica in BF è pari a:

$$Fase_iniziale := \frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2}$$

$$Fase_iniziale := 0 \quad (20)$$

e quella in AF è pari a

$$\frac{1 - \text{signum}(K_b)}{2} \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + (n_{z-} - n_{z+}) \cdot \frac{\pi}{2} - (n_{p-} - n_{p+}) \cdot \frac{\pi}{2} = 0 - \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$$

$$Fase_finale := -\frac{3\pi}{2}$$

$$Fase_finale := -\frac{3\pi}{2} \quad (21)$$

$$sfasamento_relativo := Fase_finale - Fase_iniziale$$

$$sfasamento_relativo := -\frac{3\pi}{2} \quad (22)$$

Regioni di BF e AF su moduli e fasi:

- La regione di bassa frequenza nel diagramma dei moduli è data da tutte quelle pulsazioni a partire dalla continua (0 rad/sec) fino alla pulsazione dominante del diagramma.

$$\omega < \min(\omega_p, \Omega_i) \Rightarrow \omega < \Omega_t[1] \Rightarrow BF = \left[0, \frac{1}{8}\right]$$

- La regione di alta frequenza nel diagramma dei moduli si ottiene a partire dalla pulsazione di rottura più elevata.

$$\omega > \max(\omega_p, \Omega_i) \Rightarrow \omega > \omega_n \Rightarrow AF = [11, \infty)$$

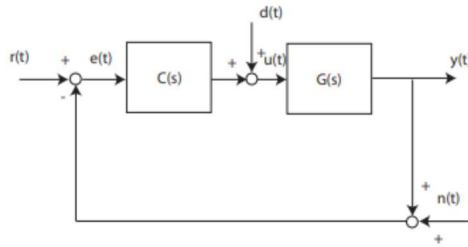
- La regione di bassa frequenza nel diagramma delle fasi è data da tutte quelle pulsazioni a partire dalla continua (0 rad/sec) fino alla pulsazione una decade prima della pulsazione di rottura più bassa.

$$\omega < \min\left(\frac{\omega_i}{10}, \frac{\Omega_i}{10}\right) \Rightarrow \omega < \frac{\Omega_t[1]}{10} \Rightarrow BF = \left[0, \frac{1}{80}\right]$$

- La regione di alta frequenza nel diagramma delle fasi si ottiene a partire dalla pulsazione una decade dopo la pulsazione di rottura più elevata.

$$\omega > \max(\omega_i \cdot 10, \Omega_i \cdot 10) \Rightarrow \omega > \omega_n \Rightarrow AF = [110, \infty)$$

c. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.



Supposta $G(s)$ la funzione di trasferimento dell'impianto

$$G := s \rightarrow \frac{1}{(0.2s + 1)^3} :$$

si vuole disegnare un controllore di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore non superiore al 30% per un riferimento a gradino
2. massima sovraelongazione $S_{\%} \leq 20$, tempo di assestamento $t_s \leq 1$

Precisione Statica

Per soddisfare questa richiesta è sufficiente valutare l'errore di inseguimento $e(t)$ dato, nel seguente caso, dalla relazione:

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

si ha che deve essere rispettato il seguente vincolo:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \leq 0.3$$

Applicando il Teorema del Valore Finale si ha che:

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1 + L(s)} \cdot \frac{R}{s} \Rightarrow \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1 + C(s)G(s)} \leq 0.3 :$$

Dallo studio della precedente disequazione si ottiene:

$$C(0) \geq \frac{1}{0.3} \cdot R - 1 \Rightarrow C(0) \geq 2,33$$

Notiamo che la funzione di trasferimento dell'impianto non presenta effetti integrali, ed in questo caso, per garantire un livello di errore di inseguimento al di sotto del 30% sarà necessario introdurre solamente un elemento di guadagno.

Per cui la scelta ricade su:

$$C(s) = K$$

Sarà sufficiente scegliere un controllore rappresentato da un costante K , tale per cui sia superiore o pari a 2,33 per rispettare la specifica richiesta.

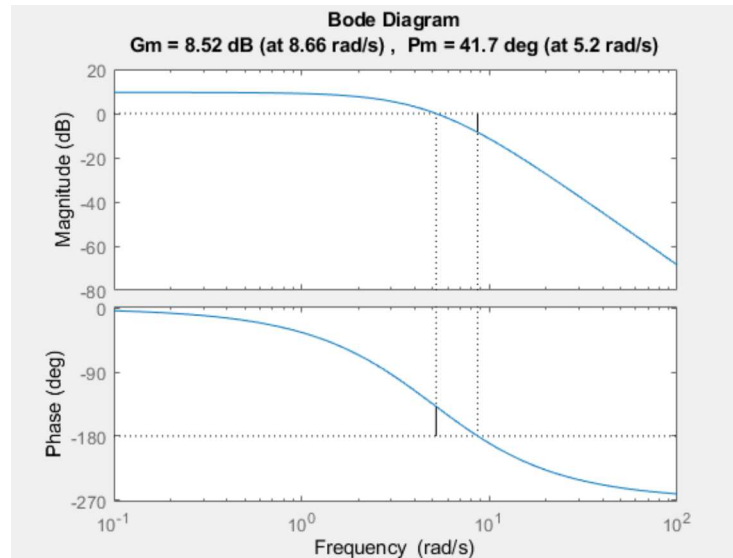
Supponiamo di scegliere $K=3$

La funzione d'anello sarà la seguente:

$$L := s \rightarrow 3 \cdot G(s) : L(s)$$

$$\frac{3}{(0.2s + 1)^3} \quad (1)$$

La funzione di anello è a fase minima e compatibile con il criterio di Bode. Rappresentiamo il diagramme dei moduli e delle fasi di L(s).



Il margine di fase è $\Phi_m = 41.7^\circ$ e la pulsazione di attraversamento è $\omega_c = 5.2 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

Compatibilità criterio di Bode

1. $K_b > 0 \rightarrow K_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu \cdot L(s) = \lim_{s \rightarrow 0} L(s) = 3$
2. $|L(j\omega)|_{dB}$ Funzione monotona decrescente
3. Al netto dei poli integrali Bibo-Stabile $\rightarrow L(s)_{Pol} = [-5 - 0.00002i, -5 + 0.00002i]$
4. ω_c unica

Precisione Dinamica

Analizziamo ora le specifiche dinamiche, è richiesta una massima sovraelongazione non superiore al 20% ed un tempo di assestamento non superiore a 1 sec. Ipotizzando che in media frequenza il sistema retroazionato si comporti come un sistema del II ordine possiamo scrivere la massima sovraelongazione in funzione dello smorzamento dei poli a ciclo chiuso.

$$S = e^{-\frac{\pi \cdot \delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$$

Sostituendo al primo membro 0.20(sovraelongazione critica), ricaviamo il valore adimensionale dello smorzamento critico, oltre la quale la massima sovraelongazione è al di sotto di 0.20 e quindi

compatibile con la specifica.

$$\delta := \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\log(0.20)} \right)^2}}$$

$$\delta := 0.4559498106 \quad (2)$$

Ricordiamo che il margine di fase può essere approssimato alla seguente quantità:

$$\Phi_m := 100 \cdot \delta$$

$$\Phi_m := 45.59498106 \quad (3)$$

Viene richiesto un tempo di assestamento non superiore a 1 sec. Tale quantità, se il sistema in media frequenza a ciclo chiuso è un sistema del II ordine è legata allo smorzamento e alla pulsazione naturale dalla seguente relazione:

$$t_s = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n}$$

Assegnando un tempo di assestamento critico pari a 2 e utilizzando il valore di δ determinato nei passaggi precedenti ottengo un valore critico per la pulsazione naturale, oltre la quale soddisfo la richiesta effettuata.

$$\omega_n := \frac{3}{\delta \cdot 1}$$

$$\omega_n := 6.579671556 \quad (4)$$

Il rapporto banda-passante/pulsazione naturale, dipendente dallo smorzamento mi permette di ricavare il valore critico della banda passante e otteniamo dunque:

$$\omega_{BW} := \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2} + \sqrt{4 \delta^4 - 4 \cdot \delta^2 + 2} \cdot \omega_n$$

$$\omega_{BW} := 8.685091669 \quad (5)$$

Tenendo conto che la pulsazione di attraversamento ω_c è un approssimante per difetto della banda passante

$$\omega_c \leq \omega_{BW}$$

Imponiamo sulla funzione di anello compensata un valore della pulsazione di attraversamento in modo tale che:

$$\omega_c > 8.685091669$$

Si ha quindi che i requisiti da soddisfare sono i seguenti:

$$\omega_c > 8.685091669 ; \Phi_m > 46^\circ$$

Scegliamo quindi una pulsazione di attraversamento pari a:

$$\omega_c^* = 9 \left(\frac{rad}{sec} \right)$$

In corrispondenza di tale valore della pulsazione di attraversamento, la funzione di anello non compensata fornisce i seguenti risultati di modulo e fase:

$$|L(j \cdot \omega_c^*)| = 0.3436 ; \angle (L(j \cdot \omega_c^*)) = -182.83^\circ$$

e quindi abbiamo che

$$\begin{cases} |L(j \cdot \omega_c^*)| < 1 \\ \pi - |\angle(L(j \cdot \omega_c^*))| < \Phi_m \end{cases}$$

La scelta ricade su una rete anticipatrice, affinché si abbia, nell'intorno della pulsazione di attraversamento scelta, un effetto di amplificazione ed un incremento sulla fase.

$$C_{lead}(s) = \frac{1 + s \cdot \tau_1}{1 + s \cdot \tau_2}$$

$$\tau_1 = T; \tau_2 = \alpha \cdot T$$

In cui $T > 0$ è la costante di tempo dello zero e $\alpha \cdot T > 0$ è la costante di tempo del polo. E si noti la presenza di uno solo polo ed uno solo zero nelle seguenti locazioni.

$$z_1 = -\frac{1}{T}; p_1 = -\frac{1}{\alpha T}$$

Il parametro α (adimensionale) deve soddisfare la seguente condizione:

$$0 < \alpha < 1$$

Si deduce quindi che lo zero assume l'appellativo di elemento dominante.

In corrispondenza della pulsazione di attraversamento di progetto, in termini di risposta in frequenza si ottiene la seguente quantità

$$C_{lead}(j \cdot \omega_c^*) = M \cdot e^{j \cdot \theta}$$

Ove $M > 1$ rappresenta l'amplificazione necessaria per recuperare il valore unitario

$$M = \frac{1}{|L(j \omega_c^*)|} = \frac{1}{0.3436} \approx 2.9103$$

e per recuperare la fase dovrà fornire un valore in gradi in anticipo

$$\Theta > \Phi_m - (\pi - |\angle(L(j \cdot \omega_c^*))|) \approx 47.83^\circ$$

Scegliamo $\theta \approx 67.83^\circ$ e si ottiene:

$$\alpha = \frac{(M \cdot \cos(\theta) - 1)}{M \cdot (M - \cos(\theta))} = 0.0094$$

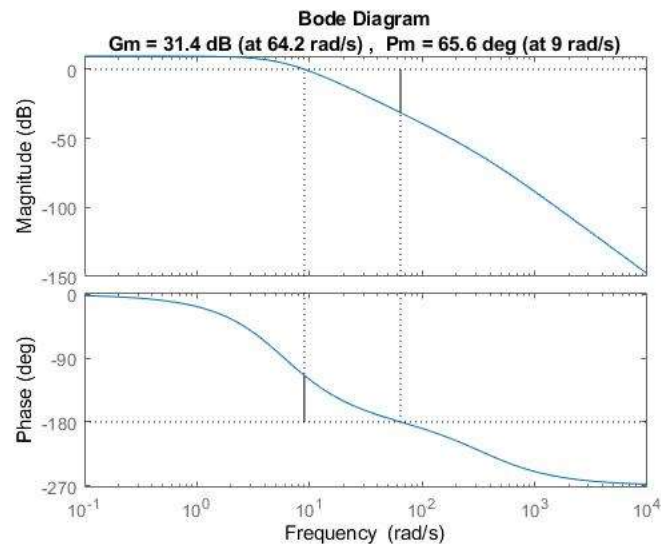
$$T = \frac{1}{\omega_c^*} \cdot \sqrt{\frac{1 - M^2}{\alpha^2 \cdot M^2 - 1}} = 0.3038$$

Otteniamo

$$C_{lead}(s) = \frac{105.93 \cdot (s + 3.292)}{(s + 348.7)}$$

La funzione di anello compensata:

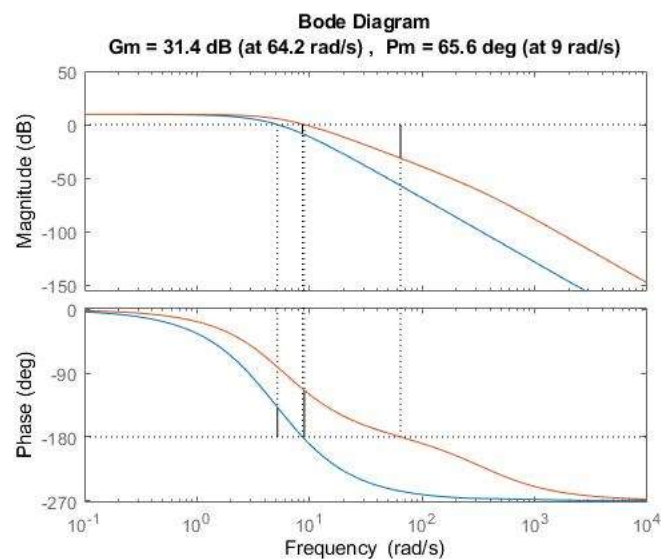
$$L(s) = 3 \cdot \frac{1 + 0.3038 s}{1 + 0.0028 s} \cdot \frac{1}{(0.2 s + 1)^3}$$



Si è raggiunto un margine di fase di 65.6° ed una pulsazione di attraversamento ω_c pari a $9 \frac{rad}{sec}$

Siamo giunti a una rete che rispetta le specifiche delineate precedentemente.

Paragoniamo la funzione di anello compensata con la funzione di anello non compensata ed effettuiamo alcune considerazioni:



Funzione di Anello compensata; Funzione di Anello non compensata;

E' evidente il comportamento della nuova funzione di anello in termini di posizionamento frequenziale,

rispetto alla precedente, sulle regioni di bassa, media ed altra frequenza.

BF: L'influenza della struttura della rete anticipatrice alle basse frequenze, nel diagramma dei moduli e nel diagramma delle fasi è quasi nulla, così da mantenere i livelli di precisione statica.

MF: La rete anticipatrice provoca un'amplificazione crescente ed un anticipo sulla fase;

AF: Viene effettuata una amplificazione costante pari $\frac{1}{\alpha}$ e un contributo trascurabile sulla fase.

Riguardo gli effetti sulle prestazioni del sistema retroazionato sulla risposta al gradino, si ha che l'incremento del margine di fase, provoca un aumento dello smorzamento e quindi si ha che diminuisce la massima sovraelongazione. Inoltre il tempo di assestamento, in via approssimata, diminuisce, poiché quest'ultimo è legato dalla seguente relazione:

$$t_s = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n}$$

E quindi se la pulsazione di attraversamento aumenta, aumenta la banda passante e aumenta anche la pulsazione naturale.

Andiamo però ad analizzare la struttura effettiva della funzione di trasferimento del sistema retroazionato.

$$\begin{aligned} T(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{39723 \cdot (s + 3, 292) (s + 5)^3 \cdot (s + 348, 7)}{(s + 5)^3 \cdot (s + 3, 332) (s + 348, 7) (s + 349) (s^2 + 11, 33 s + 149, 9)} \\ &= \frac{39723 \cdot (s + 3, 292)}{(s + 3, 332) (s + 349) (s^2 + 11, 33 s + 149, 9)} \end{aligned}$$

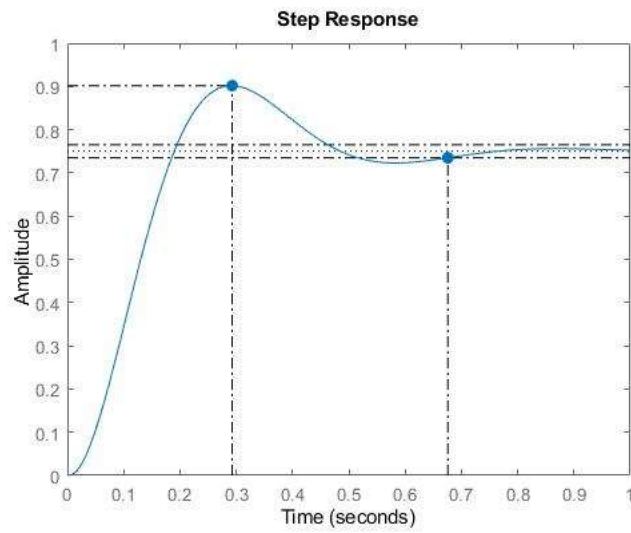
Si nota al denominatore un trinomio di secondo grado, ottenuto imponendo la pulsazione di attraversamento a $9 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ed un margine di fase a 65.6° , avente i seguenti parametri di smorzamento e pulsazione naturale:

$$\omega_n := \sqrt{149.9} \quad \omega_n := 12.24336555 \quad (6)$$

$$\delta := \frac{11.33}{2 \cdot 12.24} \quad \delta := 0.4628267974 \quad (7)$$

compatibili con le relazioni precedentemente ottenute.

Rappresentiamo ora la risposta al gradino del sistema regolato



Analizzando il grafico, ricaviamo che l'overshoot o massima sovraelongazione è del $S=20.2\%$ e il Settling time (tempo di assestamento) è di 0.67 sec.
