LEZIONE N8 03/11/2021

TEOREMA DI DUALITÁ DEBOLE

DATI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE IN FORMA STANDARD E IL SUO DUALE, PER OGNI $x \in \Omega(P)$ E OGNI $y \in \Omega(D)$ VALE:

$$b^T y \le c^T x$$ [LE FUNZIONI OBIETTIVO SI LIMITANO A VICENDA]

- DIMOSTRAZIONE

SIANO $\bar{x} \in \Omega(P)$, $\bar{y} \in \Omega(D)$ DUE SOLUZIONI SPECIFICHE AMMISSIBILI. SE METTIAMO INSIEME TUTTI I VINCOLI CHE VENGONO SODDISFATTI DA QUESTI DUE VETTORI OTTENIAMO CHE:

$$A\bar{x} = b, \ \bar{x} \ge 0, \ \underline{A^T\bar{y} \le c}$$ CONCENTRIAMOCI SU QUESTA DISUGUAGLIANZA.

MOLTIPLICHIAMO AMBO I MEMBRI PER $\bar{x}$ AMBO I MEMBRI OTTENIAMO:

$$\bar{y} A\bar{x} \le c^T \bar{x}$$

DA CUI SEGUE, ESSENDO $A\bar{x} = b$, $\bar{x} \ge 0$:

$$\bar{y}^T b \le c^T x$$

IL PRODOTTO SCALARE É COMMUTATIVO QUINDI ABBIAMO OTTENUTO LA TESI.

- OSSERVAZIONI

IN OGNI COPPIA DI PROBLEMI DUALI, IL VALORE DELL'OBIETTIVO DEL PROBLEMA DI MASSIMO IN QUALUNQUE PUNTO AMMISSIBILE É SEMPRE NON MAGGIORE DEL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO DEL PROBLEMA DI MINIMO IN QUALUNQUE PUNTO AMMISSIBILE.

QUINDI QUANDO SI CONSIDERA IL PUNTO DI OTTIMO (SE ESISTE) DEL PROBLEMA PRIMALE DI MINIMO, IL VALORE DELLA FUNZIONE DUALE IN UN ARBITRARIO PUNTO AMMISSIBILE COSTITUISCE UN ESTREMO INFERIORE (LOWER BOUND)

$$b^T\bar{y} \le c^T x^* \quad \forall \bar{y} \in \Omega(D), \qquad b^T y^* \le c^T \bar{x} \quad \forall \bar{x} \in \Omega(P), \qquad b^T y^* \le c^T x^*$$

QUINDI LE DUE FUNZIONI OBIETTIVO $z(x) = c^T x$, $w(y) = b^T y$ VALUTATE NELLE RISPETTIVE REGIONI AMMISSIBILI, SI LIMITANO A VICENDA E LA DIFFERENZA É DETTA GAP DI DUALITÁ

$$c^T x - b^T y \ge 0 \quad \forall x \in \Omega(P), \ \forall y \in \Omega(D)$$

PRIMO COROLLARIO SULLA DUALITÁ DEBOLE

PER OGNI COPPIA DI PROBLEMI DUALI (P) E (D)

$$\bar{x} \in \Omega(P), \quad \bar{y} \in \Omega(D), \quad b^T\bar{y} = c^T\bar{x}$$

[COND. SUFFICIENTE DI OTTIMALITÁ IMPORTANTISSIMA]

$$\Downarrow$$

$\bar{x}$ É SOLUZIONE OTTIMA (P) E $\bar{y}$ É SOLUZIONE OTTIMA DI (D)

SI DIMOSTRA, PER ASSURDO, CHE SE SUPPONESSIMO CHE $\bar{y}$ NON SIA OTTIMALE PER (D). ALLORA DEVE ESISTERE UNA $\tilde{y} \in (D)$ TALE CHE $b^T\tilde{y} > b^T\bar{y}$ CIÓ IMPLICA CHE

$$b^T\tilde{y} \geq b^T\bar{y} = c^T\bar{x}$$

CHE CONTRADDICE IL TEOREMA DI DUALITÁ DEBOLE. PER LA PRIMA VOLTA

É EMERSO UN RISULTATO SULLA CONDIZIONE SUFFICIENTE DELL'OTTIMALITÁ DOVE NON EMERGE UNA

SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE.

SECONDO COROLLARIO SULLA DUALITÁ DEBOLE

SIA (P)-(D) UNA COPPIA DI PROBLEMI DUALI IN CUI (P) É UN PROBLEMA DI MINIMO. SE (P) É INFERIORMENTE ILLIMITATO, ALLORA (D) É INAMMISSIBILE.

SI DIMOSTRA, PER ASSURDO CHE, SE ESISTESSE $\bar{y} \in \Omega(D)$ ALLORA SI AVREBBE:

$$b^T\bar{y} \leq c^T x \quad \forall x \in \Omega(P)$$

CONTRADDICENDO L'IPOTESI CHE LA FUNZIONE c^Tx SIA INFERIORMENTE ILLIMITATA SU $\Omega(P)$.

TEOREMA DELLA DUALITÁ FORTE

SIA DATA LA SEGUENTE COPPIA DI PROBLEMI DUALI IN FORMA STANDARD (SCELTA NON BANALE):

$$(P)\begin{cases} \min & c^Tx \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (D)\begin{cases} \max & b^Ty \\ & A^Ty \leq c \end{cases}$$

SE (P) AMMETTE OTTIMO FINITO, ALLORA (D) AMMETTE OTTIMO FINITO ED I VALORI DELLE FUNZIONI OBIETTIVO ALL'OTTIMO COINCIDONO:

$$c^Tx^* = b^Ty^*$$

DIMOSTRAZIONE

QUI ENTRANO IN GIOCO LE SOLUZIONI AMMISSIBILI DI BASE E LE CONDIZIONI DI OTTIMALITÁ.

SIA x^* SOLUZIONE OTTIMA PER (P), CHE PER IL TEOREMA FONDAMENTALE, POSSO AFFERMARE CHE É UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE E INDICO CON B LA MATRICE ASSOCIATA DI BASE.

$$x^* = \begin{pmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

IN CORRISPONDENZA DELLA SOLUZIONE x^* POSSO AFFERMARE CHE VALE LA SEGUENTE RELAZIONE:

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

QUESTO PERCHÉ SE x^* É UNA SOLUZIONE NON DEGENERE QUESTA AFFERMAZIONE É GIUSTIFICATA DALLA CONDIZIONE NECESSARIA DI OTTIMALITÀ (SIAMO SICURI CHE VALE).

ANCHE SE LA SOLUZIONE FOSSE DEGENERE TRA TUTTE LE BASI CHE LO CARATTERIZZANO POTREI COMUNQUE TROVARNE UNA CON COSTI NON NEGATIVI.

COSTRUIAMO LA $y^* \in \mathbb{R}^m$ CHE CI INTERESSA:

$y^* = (B^{-1})^T c_B$ CHE É EQUIVALENTE $\underline{y^{*T}} = c_B^T B^{-1}$

CALCOLO ORA $c^T x^*$, ESSENDO UNA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE POSSO ESPRIMERLA COME:

$$c^T x^* = c_B^T (B^{-1} b) = (\underline{c_B^T B^{-1}})\, b = y^{*T} b$$

ABBIAMO QUINDI SCOPERTO CHE I VALORI DI FUNZIONE OBIETTIVO SONO UGUALI.

PERO ANCORA NON ABBIAMO FINITO, POICHÉ QUESTO É POSSIBILE FARLO INDIPENDENTEMENTE SE LA SOLUZIONE x^* É OTTIMA O MENO (SI NECESSITÁ SOLAMENTE CHE x^* SIA SAB).

UTILIZZIAMO ORA IL PRIMO COROLLARIO DELLA DUALITÁ DEBOLE PER OTTENERE L'AMMISSIBILTÁ DI y^* PER DIMOSTRARE L'OTTIMALITÁ (y^*).

DI FATTI:

$\underbrace{A^T y^* \le c}_{\boxed{\text{VINCOLI DEL PROBLEMA DUALE}}}$ POSSIAMO RISCRIVERLO COME $\begin{bmatrix} B^T \\ N^T \end{bmatrix} y^* \le \begin{pmatrix} c_B \\ c_N \end{pmatrix}$ CHE ALTRO NON É CHE IL SEGUENTE SISTEMA DI DISEGUAGLIANZE

$$\begin{cases} B^T y^* \le c_B \\ N^T y^* \le c_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} B^T y^* \le c_B \\ N^T y^* \le c_N \end{cases} \equiv \begin{cases} [y^*]B \le c_B^T \\ [y^*]N \le c_N^T \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c_B^T B^{-1} B \le c_B^T \\ c_B^T B^{-1} N \le c_N^T \end{cases}$$

SOSTITUIAMO CON I VALORI PRECEDENTEMENTE DETERMINATI

1 GRUPPO DI DISEGUAGLIANZE SODDISFATTO PER UGUAGLIANZA

2 GRUPPO RAPPRESENTA I COEFF. DI COSTO RIDOTTO

$$\begin{cases} c_B^T \equiv c_B^T \\ c_N^T - c_B^T B^{-1} N \ge 0 \end{cases}$$

L'AMMISSIBILITÀ DI y^* È LEGATA ALLA NON NEGATIVITÀ DEI COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO DEL PRIMALE.

SE È AMMISSIBILE ALLORA L'OTTIMALITÀ DELLA y^* È VERIFICATA PER IL PRIMO COROLLARIO DEL TEOREMA DELLA DUALITÀ DEBOLE.

APPROFONDIMENTI

1

Per ogni base B di A cui corrisponde una soluzione ammissibile di base $\bar{x}$ per (P):

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

è sempre possibile costruire il vettore

$$\bar{y} = \left(B^\top\right)^{-1} c_B \quad \text{tale che} \quad c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y}.$$

- $\bar{x}_B$ è l'unica soluzione del sistema: $B \cdot x_B = b$
- $\bar{y}$ è l'unica soluzione del sistema: $B^\top \cdot y = c_B$

2

Consideriamo la coppia di soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$

$$c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y} \implies \bar{y} \text{ è superottima per } (D).$$

SUPEROTTIMA NEL SENSO CHE HA UN VALORE DI FUNZIONE OBIETTIVO CHE SICURAMENTE È PIÙ GRANDE DEL MASSIMO DELLA FUNZIONE OBIETTIVO DEL DUALE

Infatti, essendo $\bar{x} \in \Omega(P)$, per il Teorema di Dualità Debole si ha:

$$b^\top y \le c^\top \bar{x} = b^\top \bar{y} \qquad \forall y \in \Omega(D)$$

ma $\bar{y}$ potrebbe essere non ammissibile per (D).

In realtà, la dimostrazione evidenzia che

$$\bar{y} \in \Omega(D) \iff \hat{c}_N \ge 0 \iff \bar{x} \text{ è ottimo per } (P)$$

3

Il vettore $\bar{y}$ soddisfa per uguaglianza i vincoli in (D) corrispondenti alla base B, ed i costi ridotti associati alla base B in (P) sono le slack dei rimanenti vincoli duali valutate in $\bar{y}$.

Introducendo nei vincoli duali le variabili di slack denotate con σ_B e σ_N, il sistema in Forma Standard diventa:

$$\begin{cases} B^\top y + \sigma_B = c_B \\ N^\top y + \sigma_N = c_N \end{cases}$$

Si verifica che per $\sigma_B = 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned} y &= (B^\top)^{-1} c_B &&= \bar{y} \\ \sigma_N &= c_N - N^\top (B^\top)^{-1} c_B &&= \hat{c}_N \end{aligned}$$

$\bar{y}$ è detto il vettore complementare di $\bar{x}$.

4

L'enunciato del Teorema di Dualità Forte può essere riformulato come segue:

Per ogni coppia di problemi duali, l'uno ha ottimo finito se e solo se l'altro ha ottimo finito.

Inoltre, il corollario della dualità debole assicura che:

Per ogni coppia di problemi duali, se uno è illimitato, allora l'altro è inammissibile.

RIASSUMENDO

Approfondimenti

min \ max	Ottimo finito	Illimitato superior.	Inamm.
Ottimo finito	Sì	No	No
Illimitato inferior.	No	No	Sì
Inamm.	No	Sì	Sì