LEZIONE N9 05 11 2021

TEOREMA DEGLI SCARTI COMPLEMENTARI

DATA LA COPPIA DI PROBLEMI DUALI SIMMETRICI (SI NOTI CHE LA SCELTA NON È UN LIMITE SULLA GENERALITÀ DELL'AFFERMAZIONE):

$$(P)\begin{cases}\min\ c^T x\\ Ax \geq b\\ x \geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\min\ b^T y\\ A^T y \leq c\\ y \geq 0\end{cases}$$

LE SOLUZIONI AMMISSIBILI $x \in \Omega(P)$ E $y \in \Omega(D)$ SONO OTTIMALI, RISPETTIVAMENTE PER (P) E (D) SE E SOLO SE ESSE SODDISFANO LE SEGUENTI RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ

$$\begin{cases}x^T(c - A^T y) = 0\\ (Ax-b)^T y = 0\end{cases}$$

VETTORE SCARTO DEL DUALE

SE AVESSI SCELTO LA FS TALE CONDIZIONE SAREBBE STATA VALIDA QUALSIASI y PRESA POICHÉ $(Ax-B)$ IN FS È UN VETTORE NULLO

DIMOSTRAZIONE

RIFORMULIAMO I PROBLEMI (P) E (D) IN FORMA STANDARD, CON VETTORI DELLE VARIABILI AUSILIARIE s E σ (SIGMA):

$$(P)\begin{cases}\min\ c^T x\\ Ax - s = b\\ x \geq 0\\ s \geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}b^T y\\ A^T y + \sigma = c\\ y \geq 0\\ \sigma \geq 0\end{cases}$$

VARIABILI DI SURPLUS — VARIABILI DI SLACK

L'AMMISSIBILITÀ DI x E y CI CONSENTE DI SCRIVERE:

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$
$$s = Ax - b \geq 0 \qquad \sigma = c - A^T y \geq 0$$

TALI ELEMENTI LI ABBIAMO VISTI PRECEDENTEMENTE PIÙ SPECIFICATAMENTE NELLE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ

POSSIAMO QUINDI RISCRIVERE LE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ TRA x E y COME:

$$\begin{cases}x^T\sigma = 0\\ s^T y = 0\end{cases}$$

SI NOTI CHE PER OGNI COPPIA DI SOLUZIONI AMMISSIBILI $x \in \Omega(P)$ E $y \in \Omega(D)$, IL TEOREMA DI DUALITÀ DEBOLE ASSICURA CHE IL GAP DI DUALITÀ È NON NEGATIVO:

$$c^T x - b^T y \geq 0$$ [SI LIMITANO A VICENDA]

VALE INOLTRE:

$$x \text{ OTTIMALE PER } (P) \text{ E } y \text{ OTTIMALE PER } (D) \iff c^T x - b^T y = 0$$

TALE RISULTATO DERIVA DALLA DUALITÀ FORTE ($\Longrightarrow$) E DAL COROLLARIO DELLA DUALITÀ DEBOLE ($\Longleftarrow$) FOCALIZZANDOCI SULL'AZZERAMENTO DEL GAP DI DUALITÀ E DIMOSTRANDO CHE EQUIVALE AL SODDISFACIMENTO DELLE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÀ, RIUSCIREMO A DIMOSTRARE IL TEOREMA DI PARTENZA (PARLEREMO QUINDI DI OTTIMALITÀ SENZA PARLARE DI BASI)

SI OSSERVA INFATTI CHE UNA VOLTA AGGIUNTE LE VARIABILI DI SLACK POSSIAMO AFFERMARE:

$$c^T x = (A^T y + \sigma)^T x = y^T A x + \sigma^T x$$
$$b^T y = (Ax - s)^T y = (Ax)^T y - s^T y$$

DA CUI SI OTTIENE

$$c^T x - b^T y = \cancel{y^T (Ax)} + \sigma^T x - \cancel{(Ax)^T y} + s^T y = \sigma^T x + s^T y$$

ABBIAMO RICAVATO UN ESPRESSIONE ALTERNATIVA DEL GAP DI DUALITÁ CHE UTILIZZA LE VARIABILI DECISIONALI, E RICORDANDO CHE x, y, s, σ SONO TUTTE NON NEGATIVE

$$c^T x - b^T y = 0 \iff \sigma^T x + s^T y = 0 \iff \begin{cases} \sigma^T x = 0 \\ s^T y = 0 \end{cases}$$

DEVONO ESSERE NECESSARIAMENTE NULLE

MA L'AZZERAMENTO AVVIENE SE E SOLO SE X OTTIMALE PER (P) E y OTTIMALE PER (D)

(SODDISFACIMENTO GAP DI DUALITÁ)

(SODDISFACIMENTO RELA. COMPLEMENTARIETÁ)

LETTURA DA DESTRA A SINISTRA

C.V.D

OSSERVAZIONI

LE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÁ IMPONGONO CHE:

- A VARIABILI POSITIVE DI UN PROBLEMA CORRISPONDONO VINCOLI ATTIVI NEL SUO DUALE.
- A VINCOLI NON ATTIVI DI UN PROBLEMA CORRISPONDONO VARIABILI NULLE NEL SUO DUALE.

INFATTI:

$$x^T (c - A^T y) = x^T \sigma = 0 \iff \sum_{j=1}^{n} x_j \sigma_j = 0 \iff x_j \sigma_j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$(Ax - b)^T y = s^T y = 0 \iff \sum_{i=1}^{m} s_i y_i = 0 \iff s_i \cdot y_i = 0 \quad \forall = 1, \dots, m$$

RICORDA IL PRODOTTO SCALARE É NULLO SE I VETTORI SONO ORTOGONALI.

SE TALE PRODOTTO DEVE ANNULARSI SIGNIFICA CHE A VARIABILI DUALI STRETTAMENTE POSITIVE DEVE ANNULARSI LA VARIABILE DI SURPLUS DEL PRIMALE ASSOCIATA E QUINDI DEVE ESSERE SODDISFATTO PER UGUAGLIANZA IL CORRISPONDENTE VINCOLO DEL PRIMALE E VICEVERSA; SE IL VINCOLO DEL PRIMALE ~~È~~ NON È SODDISFATTO PER UGUAGLIANZA ALLORA DEVE ANNULARSI LA VARIABILE DEL DUALE.

PERTANTO LE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÁ SONO SODDISFATTE SE E SOLO SE

$$\forall j = 1, \dots, n \quad x_j = 0 \text{ OR } \sigma_j = 0$$

$$\forall i = 1, \dots, m \quad y_i = 0 \text{ OR } s_i = 0$$

SI NOTI CHE SE I VETTORI x E y SODDISFANO LE RELAZIONI SONO DETTI TRA LORO COMPLEMENTARI

SE IL PROBLEMA (P) É IN FORMA STANDARD LE RELAZIONI DI COMPLEMENTARIETÁ SI RIDUCONO A

$$x^T (c - A^T y) = 0$$

DA CUI É FACILE DI MOSTRARE CHE IL VETTORE $y^* = (B^T)^{-1} c_B$ (DIM. TEO. DI DUALITÁ FORTE) É IL VETTORE COMPLEMENTARE DELLA SOLUZIONE OTTIMA DI BASE x^*

$$x^{*T} (c - A^T y^*) = x_B^{*T} [c_B - B^T (B^T)^{-1} c_B] + x_N^{*T} [c_N - N^T (B^T)^{-1} c_B] = 0$$

PER LO STESSO MOTIVO, OGNI VETTORE $\bar{y} = (B^T)^{-1} c_B$ COSTRUITO RISPETTO ALLA BASE AMMISSIBILE B DI A, È COMPLEMENTARE ALLA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \hline \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1} b \\ 0 \end{pmatrix}$$

E LE CORRISPONDENTI FUNZIONI OBIETTIVO COINCIDONO.

ALTRI APPROFONDIMENTI:

Condizione necessaria e sufficiente di ottimalità

Sia (P) un problema di PL, (D) il suo duale, e sia $x \in \Omega(P)$.

$$x \text{ è soluzione ottima per } (P)$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists y \in \Omega(D) \text{ tale che } x \text{ ed } y \text{ sono complementari.}$$

Dimostrazione

($\Rightarrow$) Se x è ottima per (P), per il Teorema di dualità forte esiste y ottima (e quindi ammissibile) per (D), e, per la condizione necessaria del Teorema degli scarti complementari, x ed y sono complementari.

($\Leftarrow$) Se esiste y ammissibile per (D) e complementare di x, per la condizione sufficiente del Teorema degli scarti complementari x è ottima per (P) e y è ottima per (D).

Data una soluzione ammissibile $\bar{x}$ per (P), è possibile stabilire se $\bar{x}$ sia o no soluzione ottima per (P)

Test di ottimalità

Considerando la coppia primale-duale simmetrica, si impone il soddisfacimento delle relazioni di complementarietà risolvendo

$$\begin{cases} A_j^\top y = c_j & \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \bar{x}_j > 0 \\ y_i = 0 & \forall i \in \{1, \dots, m\} : \quad a_i^\top \bar{x} > b_i \end{cases}$$

e indicando con $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ una sua soluzione. Sono possibili i seguenti casi:

- Il sistema è incompatibile $\implies$ $\bar{x}$ non è soluzione ottima per (P).
- $\bar{y} \notin \Omega(D)$ $\implies$ $\bar{x}$ non è soluzione ottima per (P).
- $\bar{y} \in \Omega(D)$ $\implies$ $\bar{x}$ è soluzione ottima per (P).

Data una soluzione ottima x^* per (P), è possibile determinare la soluzione ottima y^* per (D)

Determinazione dell'ottimo duale

Considerando la coppia primale-duale simmetrica, si impone il soddisfacimento delle relazioni di complementarietà risolvendo

$$\begin{cases} A_j^\top y = c_j & \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad x_j^* > 0 \\ y_i = 0 & \forall i \in \{1, \dots, m\} : \quad a_i^\top x^* > b_i \end{cases}$$

In tal caso, il sistema ammetterà sempre almeno una soluzione $y^* \in \Omega(D)$, come garantito dalla condizione necessaria di ottimalità; inoltre, per il Teorema degli scarti complementari y^* è soluzione ottima per (D).

INTERPRETAZIONE DELLA SOLUZIONE DUALE

Consideriamo la coppia primale duale E CI CONCENTRIAMO SULLA FS

$$(P) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \max & b^\top y \\ & A^\top y \leq c \end{cases}$$

e indichiamo con x^* e y^* le soluzioni ottime per (P) e (D).

Perturbiamo il termine noto b_i di una quantità Δ, e consideriamo la coppia primale duale

$$(P_\Delta) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b + \Delta e_i \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (D_\Delta) \begin{cases} \max & (b + \Delta e_i)^\top y \\ & A^\top y \leq c \end{cases}$$

VARIAZIONE DI UNO SOLO DEI COEFFICIENTI DEL DUALE

$\Uparrow$

i-ESIMO TERMINE NOTO PERTURBATO

e indichiamo con $x^*(\Delta)$ la soluzione ottima per (P).

IN SINTESI STIAMO DICENDO CHE SE IL PROBLEMA INIZIALE VIENE PERTURBATO QUESTO NON IMPLICA NECESSARIAMENTE CHE DEVO RISOLVERE NUOVAMENTE IL PROBLEMA MA POSSO UTILIZZARE LE SOLUZIONI OTTENUTE PRECEDENTEMENTE.

Se x^* è non degenere ($B^{-1}b > 0$), per valori sufficientemente piccoli di Δ la base corrispondente rimane ammissibile per (P), cioè $B^{-1}(b + \Delta e_i) > 0$.

I coefficienti di costo ridotto non risentono della perturbazione, pertanto la soluzione y^* costruita come

$$y^{*\top} = c_B B^{-1}$$

soddisfa (SEMPRE SE NON VI SONO PROBLEMI SULL'AMMISSIBILITÀ):

$$c^\top x_\Delta^* = (b + \Delta e_i)^\top y^* = b^\top y^* + \Delta e_i^\top y^* = c^\top x^* + \Delta y_i^*$$

da cui otteniamo che

$$y_i^* = \frac{c^\top x_\Delta^* - c^\top x^*}{\Delta}$$

cioè y_i^* rappresenta la variazione della funzione obiettivo corrispondente alla variazione unitaria del termine noto i-esimo.

ESEMPIO SU PDF.