UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DIMES

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica
A.A. 2021-2022
I semestre

Ricerca Operativa

Giovanni Giallombardo

DIMES, Università della Calabria

Sommario

1. Il Duale del Problema del Massimo Flusso
2. Correttezza e complessità dell’Algoritmo di Ford-Fulkerson
3. Programmazione lineare intera
4. Proprietà basilari

Riepilogo

Problema del Massimo Flusso

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

Dati

- $V = \{1, \dots, m\}$ è l'insieme dei nodi, $|V| = m$
- $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi, $|E| = n$
- $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle divergenze nei nodi
- u_{ij} è la capacità (finita) su ogni arco $(i, j) \in E$

Ipotesi

Sulla rete esistono due nodi speciali:

- Il nodo s è l'unico nodo sorgente e ha solo archi uscenti
- Il nodo t è l'unico nodo terminale e ha solo archi entranti
- Tutti gli altri nodi sono di transito, $b_i = 0$, per ogni $i \in V \setminus \{s, t\}$

Variabili decisionali

$f_{ij} \geq 0$ rappresenta la quantità di flusso che transita lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$.

Max flow problem (MFP)

$$(MFP)\begin{cases} \max \quad v = \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} \\ \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 \qquad \forall i \in V \setminus \{s,t\} \\ 0 \le f_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in E \end{cases}$$

MFP come problema di circolazione

Indichiamo con $h = (-1, 0_{m-2}^\top, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} \max & & & v & & \\ & Af & + & hv & = & 0 \\ & f & & & \le & u \\ & f & & & \ge & 0 \end{cases}$$

Cammini aumentanti

Idea

Se una distribuzione ammissibile di flusso f non è ottima, è possibile inviare altro flusso da s a t. In particolare, è possibile determinare una nuova soluzione ammissibile con miglior valore della funzione obiettivo modificando il flusso solo sugli archi di un opportuno cammino da s a t.

Definizione

Dato il grafo $G = \langle V, E \rangle$ ed una distribuzione di flusso ammissibile f di valore v su G, si definisce *cammino aumentante per f su G* una catena $\mathcal{P}$ da s a t tale che, posto

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$$

dove $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$ sono, rispettivamente, i sottoinsiemi degli archi di $\mathcal{P}$ concordi e discordi rispetto all'orientamento $s \to t$, si abbia:

$$\begin{cases} f_{ij} < u_{ij} & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} > 0 & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^- \end{cases}$$

Cammini aumentanti

Proposizione

Sia $G = \langle V, E\rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità u_{ij} sugli archi; sia f una distribuzione ammissibile di flusso su G di valore v.
Se esiste $\mathcal{P}$ cammino aumentante per f, allora la seguente distribuzione di flusso:

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} - \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^- \\ f_{ij} & (i,j) \notin \mathcal{P} \end{cases}$$

è ammissibile, con valore di flusso $v' = v + \hat{\delta} > v$.

Corollario (condizione necessaria di ottimalità)

Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora f non è soluzione ottima per il problema del massimo flusso su G.

Ricerca del cammino aumentante

Visita del grafo in due fasi

- Fase in avanti: Tecnica di propagazione di etichette
- Fase all'indietro: Ricostruzione del cammino mediante lettura delle etichette

Etichette

L'etichetta del nodo i ha due campi: $[pred(i), incr(i)]$

- $pred(i) = \pm k$, con $k \in V$, indica il nodo che precede i nel cammino parziale da s ad i, con segno $+$ o $-$ a seconda che l'arco tra k ed i sia concorde o discorde rispetto all'orientamento del cammino
- $incr(i)$ contiene il massimo incremento ammissibile di flusso sugli archi del cammino parziale da s ad i.

IN ESERCITAZIONE VERSIONE TABELLARE.

Algoritmo di Ford e Fulkerson con flusso iniziale f di valore v

$\Delta v = 0$, $W^* = \emptyset$, *esisteCamminoAumentante* = False, $\hat{\delta} := 0$
repeat
  for all $j \in V$ **do**
    $pred(j) := 0$, $incr(j) := +\infty$
  end for
  $W := \{s\}$
  while $W \neq \emptyset$ **and** $t \notin W$ **do**
    estrai il nodo i da W, $W := W \setminus \{i\}$
    for all $j \notin W$ **do**
      if $(i, j) \in E$ **and** $f_{ij} < u_{ij}$ **then**
        $pred(j) := +i$, $incr(j) := \min\left\{incr(i), u_{ij} - f_{ij}\right\}$
        $W := W \cup \{j\}$
        if $j = t$ **then**
          esisteCamminoAumentante := True
        end if
      end if
      if $(j, i) \in E$ **and** $f_{ji} > 0$ **then**
        $pred(j) := -i$, $incr(j) := \min\left\{incr(i), f_{ji}\right\}$
        $W := W \cup \{j\}$
      end if
    end for
  end while

Algoritmo di Ford e Fulkerson con flusso iniziale f di valore v

if *esisteCamminoAumentante* **then**
  $\hat{\delta} := incr(t)$, $\Delta v := \Delta v + \hat{\delta}$, $j := pred(t)$, $f_{jt} := f_{jt} + \hat{\delta}$
  while $j \neq s$ **do**
    if $pred(j) > 0$ **then**
      $f_{pred(j),j} := f_{pred(j),j} + \hat{\delta}$
    else
      $f_{j,pred(j)} := f_{j,pred(j)} - \hat{\delta}$
    end if
    $j := pred(j)$
  end while
else
  $W^* := \{s\}$, $v_{max} := v + \Delta v$, $f^* := f$
  for all $j \in V$ **do**
    if $j \neq s$ **and** $pred(j) \neq 0$ **then**
      $W^* := W^* \cup \{j\}$
    end if
  end for
end if
until esisteCamminoAumentante
return f^*, $v_{\max}$, W^*

Flussi e Sezioni $s - t$

Sezione $s - t$

Consideriamo una rete di flusso $G = \langle V, E \rangle$ con sorgente s e terminale t.

Si definisce sezione s-t (oppure taglio che separa s da t) una partizione $(W, \overline{W})$ dell'insieme V in due insiemi W e $\overline{W}$ tali che:

$$W \cup \overline{W} = V, \quad W \cap \overline{W} = \emptyset, \quad s \in W, \quad t \in \overline{W}$$

Gli archi del grafo che hanno un estremo in W e l'altro in $\overline{W}$:

$$(i, j) \in E \text{ tali che } \; i \in W, j \in \overline{W} \; \text{ oppure } \; i \in \overline{W}, j \in W$$

sono detti archi del taglio (se tali archi venissero rimossi il grafo risulterebbe sconnesso).

Si definisce capacità della sezione s-t $(W, \overline{W})$ la capacità complessiva degli *archi in avanti del taglio*:

$$C(W, \overline{W}) = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} u_{ij}$$

Flussi e Sezioni $s - t$

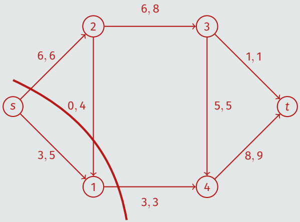
Proposizione

Sia data una rete di flusso $G = \langle V, E \rangle$ con sorgente s e terminale t. Per ogni flusso ammissibile f di valore v, per ogni $(W, \overline{W})$ sezione $s - t$, si ha:

$$v = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ji}$$

cioè il valore del flusso presente sul grafo può essere misurato come flusso netto che attraversa il taglio.

Esempio: $\mathbf{W} = \{\mathbf{s}, \mathbf{1}\}$ $\overline{\mathbf{W}} = \{\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{t}\}$



Flussi e Sezioni s − t

Teorema di Ford e Fulkerson (max flow - min cut)

Sia $G = \langle V, E \rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità $u_{ij} > 0$ sugli archi $(i, j) \in E$.

CAPIRE PERCHÉ SONO I TEOREMI DELLA DUALITÀ

ENUNCIATO

1. Per ogni flusso ammissibile f di valore v e per ogni sezione $s - t$ $(W, \overline{W})$ si ha:

$$v \leq C(W, \overline{W})$$

ENUNCIATO

2. Esiste una sezione $s - t$, $(W^*, \overline{W}^*)$, tale che:

$$v^* = C(W^*, \overline{W}^*)$$

ENUNCIATO

3. Un flusso ammissibile f ed una sezione $s - t$ $(W, \overline{W})$ sono il flusso di valore massimo e la sezione di capacità minima se e solo se

$$\begin{cases} f_{ij} = u_{ij} & \forall (i, j) \in E : i \in W, j \in \overline{W} \\ f_{ij} = 0 & \forall (i, j) \in E : i \in \overline{W}, j \in W \end{cases}$$

IL PROBLEMA DI SEZ DI CAPACITÀ MINIMA SU UN GRAFO

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

Problema di massimo flusso come problema di circolazione

PROBLEMA DI MASSIMO

$$(MFP)\quad \left\{\begin{array}{lcccl} \max & & v & & \\ Af & + & hv & = & 0 \\ f & & & \leq & u \\ f & & & \geq & 0 \end{array}\right.$$

VINCOLI DI UGUAGLIANZA

VINCOLI DI DISE

VINCOLI IN SEGNO

GENERANO NEL DUALE

VAR. NON VINC. IN SEGNO

dove $h = (-1, 0_{m-2}^{\top}, 1)^{\top}$ è la colonna di incidenza dell'arco fittizio (t, s).

Variabili duali

Variabili libere in segno associate alle equazioni di continuità

$$\lambda_i \qquad \forall i \in V$$

↳ VINCOLI DI UGUAGLIANZA

Variabili non negative associate ai vincoli di capacità

$$\gamma_{ij} \geq 0 \qquad \forall (i,j) \in E$$

↳ VINCOLI DI DISEGUAGLIANZA

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

γ

Duale simmetrico del problema di massimo flusso

CONTIENE TUTTE LE CAPACITÁ SUL GRAFO

$$
D(MFP)\begin{cases}
\min & 0^\top \lambda + u^\top \gamma \\
& A^\top \lambda + \gamma \geq 0 \\
& h^\top \lambda = 1 \\
& \gamma \geq 0
\end{cases}
$$

PERCHE STIAMO SCRIVENDO DEI VINCOLI ASSOCIATI AD f ED $f \geq 0$

POICHÉ ASSOCIATO A V

Duale simmetrico in forma estesa

$$
D(MFP)\begin{cases}
\min & \sum_{(i,j)\in E} u_{ij}\gamma_{ij} \\
& \lambda_i - \lambda_j + \gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \\
& \lambda_t - \lambda_s = 1 \\
& \gamma_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E
\end{cases}
$$

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

Soluzioni ammissibili e sezioni s − t

Ad ogni sezione $s - t$ del grafo G è possibile associare una soluzione ammissibile del problema duale:

QUANDO

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \forall i \in W \\ 1 & \forall i \in \overline{W} \end{cases} \qquad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \forall (i,j) : \underset{\text{TESTA}}{i} \in W, \underset{\text{CODA}}{j} \in \overline{W} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

QUANDO

Infatti: SE FACCIO TALI SCELTE

$$\lambda_i - \lambda_j + \gamma_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \in W, j \in W \quad 0 - 0 + 0 \;\; \gamma_{ij} \\ 0 & \text{se } i \in W, j \in \overline{W} \quad 0 - 1 + 1 \\ 1 & \text{se } i \in \overline{W}, j \in W \quad 1 - 0 + 0 \\ 0 & \text{se } i \in \overline{W}, j \in \overline{W} \quad 1 - 1 + 0 \end{cases}$$

CON QUESTA SCELTA ABBIAMO

$\lambda_t - \lambda_s = 1$

ECCO PERCHÉ TRASCURATO

$\lambda_t \in \overline{W} = 1$

$\lambda_s \in W = 0$

$\boxed{1 - 0 = 1}$

Il valore della funzione obiettivo risulta

$$u^\top \gamma = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} u_{ij} = C(W, \overline{W})$$

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

Il problema $D(MFP)$ è il problema di determinare la sezione $s - t$ di capacità minima?

$D(MFP)$ è un problema di PL che ammette infinite soluzioni ammissibili a valori reali, di cui quelle associate alle sezioni $s - t$ sono solo un piccolo sottoinsieme (a valori binari).

Tuttavia, il Teorema di Ford-Fulkerson afferma che esiste una sezione $s - t$ la cui capacità eguaglia il valore massimo del flusso, ovvero che il problema $D(MFP)$ ha una soluzione ottima corrispondente ad una sezione $s - t$ del grafo.

IL PROBLEMA NASCE COME PROBLEMA NEL CONTINUO
SONO PIÚ FACILI (IN QUESTO MOMENTO) RISPETTO A PROBLEMI NEL DISCRETO

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

Quindi $D(MFP)$ è il problema della sezione di capacità minima, Minimum Cut Problem (MCP), ed il Teorema di Ford e Fulkerson è un compendio della Teoria della Dualità per tale coppia di problemi duali:

- l'enunciato 1. è il teorema di dualità debole
- l'enunciato 2. è il teorema di dualità forte
- l'enunciato 3. è il teorema degli scarti complementari

VEDIAMO MEGLIO NELLA PROSSIMA SLIDE

Il Duale del Problema del Massimo Flusso

NON TUTTE (PERCHÉ ABBIAMO VINCOLI DI EGUAGLIANZA)

Ricaviamo le relazioni di complementarietà per la coppia di problemi duali MFP e MCP:

$$\begin{cases} f_{ij} \cdot (\lambda_i - \lambda_j + \gamma_{ij}) & = 0 \quad \forall (i,j) \in E \\ (u_{ij} - f_{ij}) \cdot \gamma_{ij} & = 0 \quad \forall (i,j) \in E \end{cases}$$

Dal primo gruppo di relazioni si ottiene:

QUANDO IL FLUSSO SU UN ARCO È STRETTAMENTE POSITIVO

$$f_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i - \lambda_j + \gamma_{ij} = 0$$

ALLORA STIAMO ESCLUDENDO $i \in \overline{W}$, $j \in W$

($\Leftrightarrow$)

$\boxed{\text{DATO IL TAGLIO, GLI ARCHI DA } t \text{ VERSO } s \text{ DEVONO ESSERE SCARICHI.}}$

$$\lambda_i - \lambda_j + \gamma_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = 0$$

SE IO OSSERVO UN ESTREMO $\overline{W}$ E L'ALTRO W ALLORA L'ARCO È SCARICO

Dalle relazioni del secondo gruppo:

ARCHI CHE NON SATURANO

$$f_{ij} < u_{ij} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{ij} = 0$$

SIGNIFICA CHE NON SIAMO SUGLI ARCHI IN AVANTI NEL TAGLIO

$$\gamma_{ij} > 0 \quad \Rightarrow \quad f_{ij} = u_{ij}$$

ARCO ij SATURO

SIGNIFICA $i \in W$ E $j \in \overline{W}$
ARCO CHE ATTRAVERSA IL TAGLIO DA s VERSO t
"IN AVANTI"

Correttezza e complessità dell’Algoritmo di Ford-Fulkerson

Correttezza dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson

Proposizione

Sia $G = \langle V, E \rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità finite $u_{ij} \in \mathbb{Z}^n_+ \; \forall (i,j) \in E$. Se l'algoritmo di Ford-Fulkerson viene inizializzato scegliendo una distribuzione di flusso a valori interi: $f^{(0)} \in \mathbb{Z}^n$, esso termina in un numero finito di iterazioni fornendo in output la distribuzione ottima di flusso f^* ed il valore massimo di flusso v^*. Se $f^{(0)} = 0$, il numero di iterazioni è non maggiore di v^*.

Dimostrazione

La correttezza del criterio di arresto dell'algoritmo è conseguenza della dimostrazione del secondo enunciato del Teorema di Ford-Fulkerson. Sia $f^{(0)} \in \mathbb{Z}^n$ e sia $f^{(k)}$ la distribuzione di flusso ammissibile alla k-sima iterazione; se $f^{(k)}$ ha componenti intere, l'incremento di flusso $\delta^{(k)}$ sarà anch'esso intero, e di conseguenza la proprietà di interezza si conserva anche all'iterazione successiva: $f^{(k+1)} \in \mathbb{Z}^n$. Ne segue che $\delta^{(k)} \in \mathbb{Z} \; \forall k$. Il caso peggiore che può verificarsi è, quindi, $\delta^{(k)} = 1 \; \forall k$. Ciò prova la tesi: nel caso peggiore, partendo da $f^{(0)} = 0$, l'algoritmo si arresterà dopo un numero di iterazioni pari a v^*.

Complessità dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson

Proposizione

L'Algoritmo di Ford-Fulkerson ha complessità pseudopolinomiale.

Dimostrazione

Osserviamo che

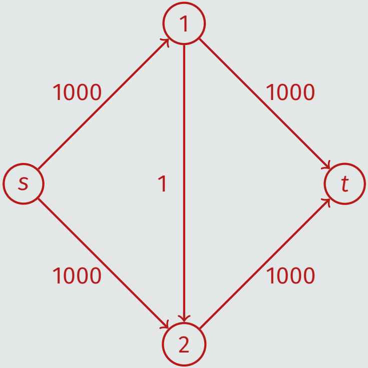
$$v^* \leq Q := \min \{C(\{s\}, V \setminus \{s\}), C(V \setminus \{t\}, \{t\})\}$$

Il numero di iterazioni non potrà dunque superare Q. Il costo della singola iterazione può essere valutato considerando la fase in avanti, ovvero visita del grafo per propagare le etichette e la fase all'indietro, in cui si ricostruisce il cammino e si aggiornano i flussi sui suoi rami.

La prima fase ha un costo computazionale lineare nel numero degli archi del grafo: $O(|E|)$; la seconda un costo lineare nel numero degli archi del cammino aumentante: $O(|V|)$. Essendo $|V| < |E|$, il costo dell'iterazione è $O(|E|) = O(n)$; di conseguenza la complessità computazionale dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson è $O(n \cdot Q)$, ovvero l'algoritmo è *pseudopolinomiale*.

Complessità dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson

Esempio



Programmazione lineare intera

Classificazione dei problemi di ottimizzazione

Problemi di ottimizzazione continua

Le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in \mathbb{R}^n$);

- Ottimizzazione vincolata se $S \subset \mathbb{R}^n$
- Ottimizzazione non vincolata se $S = \mathbb{R}^n$

Problemi di ottimizzazione discreta

Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in \mathbb{Z}^n$);

- Ottimizzazione a numeri interi se $S \subseteq \mathbb{Z}^n$
- Ottimizzazione combinatoria se $S \subseteq \{0, 1\}^n$ NUMERI INTERI

Problemi di ottimizzazione mista

Presenza simultanea di variabili continue e variabili discrete.

Programmazione Lineare Intera

Un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI) è caratterizzato da:

- Funzione obiettivo lineare
- Vincoli lineari
- Variabili decisionali che possono assumere solo valori interi

Programmazione lineare intera

$$(PLI)\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Ottimizzazione combinatoria

$$\begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \in \{0,1\}^n \end{cases}$$

Notazione e ipotesi

$$(PLI)\quad \begin{cases} \min \quad c^\top x & \\ \qquad\quad Ax = b & \\ \qquad\quad\; x \geq 0, & x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

- $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$
- $b \in \mathbb{Z}^m$
  → COSTI
- $c \in \mathbb{Z}^n$
  → REGIONE AMMISSIBILE VETTORI DI COMPONENTI INTERI CHE RISPETTA $Ax > B$
- $S = \Omega(PLI)$ la regione ammissibile
- $x^*(PLI)$ il punto di minimo
- $z^*_{PLI} = c^\top x^*(PLI)$ il valore della funzione obiettivo all'ottimo

Motivazioni

- Variabili intere per rappresentare quantità indivisibili
- Variabili binarie per rappresentare scelte alternative
- Variabili binarie indicatrici
- Variabili binarie per rappresentare vincoli disgiuntivi

Proprietà basilari

Rilassamento PROPRIETÀ IMPORTANTISSIMA

Definizione

Dato un problema di ottimizzazione

$$(P) \begin{cases} \min & f(x) \\ & x \quad \in \mathcal{F} \end{cases}$$

si definisce problema rilassato $(\overline{P})$ di (P) il seguente problema di ottimizzazione

REGIONE AMMISSIBILE DEL P DI PART CONTENUTA NELLA REGIONE AMMISSIBILE

$$(\overline{P}) \begin{cases} \min & \bar{f}(x) \\ & x \quad \in \overline{\mathcal{F}} \end{cases}$$

tale che

1. $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$
2. $\bar{f}(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathcal{F}$

VAL FUNZIONE OBB DEL PROBLEMA RILASSATO

Rilassamento lineare

Definizione

Dato un problema di programmazione lineare intera

$$(PLI) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

A VARIABILI INTERI

si definisce problema rilassato lineare (PL) di (PLI) il seguente problema di programmazione lineare

$$(PL) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

ELIMINANDO I VALORI DI INTEREZZA.

DATO L'ALGORITMO DEL SIMPLESSO E VISTO IL RILASSAMENTO SAPPIAMO RISOLVERLO

Notazione

- $P = \Omega(PL)$ è la regione ammissibile
- $x^*(PL)$ è la soluzione ottima di (PL)
- $z^*_{PL} = c^\top x^*(PL)$ è il valore ottimo di (PL)

Rilassamento lineare

Rilassamento lineare

$$(PLI)\begin{cases} \min c^\top x \\ x \in S \end{cases} \qquad (PL)\begin{cases} \min c^\top x \\ x \in P \end{cases}$$

(PL) è un problema rilassato di (PLI), infatti

- $S \subset P$
- Le funzioni obiettivo sono identiche

Difficoltà

I vincoli di interezza sulle variabili distruggono tutte le proprietà matematiche del problema PL.

Regione ammissibile

La regione ammissibile di (*PLI*) è legata a quella di (*PL*):

INSIEME DISCRETO DI PUNTI ALL'INTERNO DEL POLIEDRO

$$S = P \cap \mathbb{Z}^n$$

REGIONE CONTINUA POLIEDRO

Le soluzioni ammissibili del problema di PLI sono tutti e soli i punti che, soddisfacendo i vincoli lineari, appartengono al poliedro P, ed inoltre hanno coordinate intere.

S è solo un insieme discreto di punti contenuti in P.

Nessuno dei risultati basilari dimostrati per la Programmazione Lineare è applicabile ai problemi di PLI.

Non sono disponibili condizioni di ottimalità, ma solo la definizione di punto di minimo globale:

$$c^\top x^* \leq c^\top x \;\; \forall x \in S$$

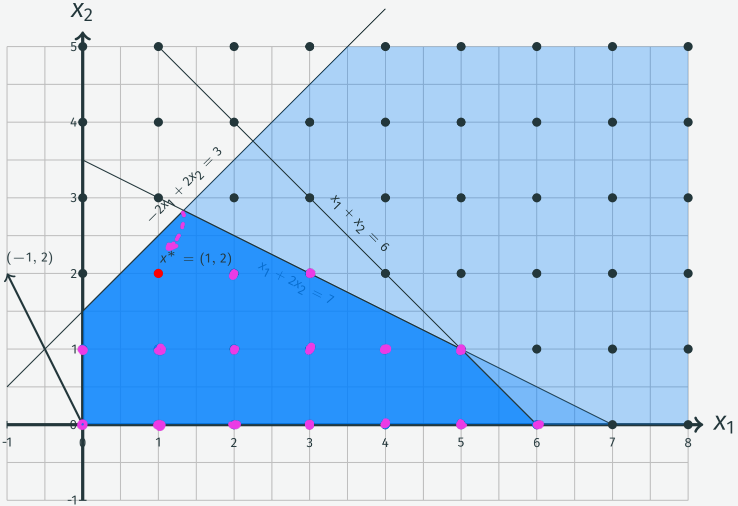
Esempio

ESEMPIO

$$
\begin{cases}
\max & -x_1 + 2x_2 \\
& -2x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 7 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 \;,\; x_2 \geq 0, \text{ intere}
\end{cases}
$$

PROBLEMI
A DUE
VARIABILI
NO SIMPLESSO
MA DISEGNO

Esempio



Rilassamento lineare

Relazioni tra (PLI) ed il suo Rilassato Lineare (PL)

1. $P = \emptyset \Rightarrow S = \emptyset$ P CONTIENE S
2. $z^*(PL) \leq z^*(PLI)$
3. $x^*(PL) \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow x^*(PL) \in S \Rightarrow x^*(PL) = x^*(PLI)$

COORDINATE INTERE

Infatti

1. Conseguenza della proprietà $S \subset P$
2. Conseguenza della definizione di ottimo globale per il problema (PL), tenendo conto che $S \subset P$
3. Se la soluzione ottima del rilassato lineare è ammissibile per il problema (PLI), allora è anche la soluzione ottima del problema (PL), come conseguenza della proprietà 2.

Rilassamento lineare

Risolvere il rilassato lineare fornisce informazioni sul problema di (PLI)

Relazioni tra (PLI) ed il suo Rilassato Lineare (PL)

1. Se (PL) è inammissibile, allora (PLI) è inammissibile
2. $z^*(PL)$ è un *Lower Bound* sul valore ottimo (incognito) del problema (PLI) :
$$L = z^*(PL) \leq z^*(PLI)$$
3. Se $x^*(PL)$ ha coordinate intere, allora è soluzione ottima di (PLI)

PUNTO DI OTTIMO

Rilassamento lineare

Caso "fortunato"

Se si verifica la condizione 3, per risolvere il problema (*PLI*) basta risolvere il suo rilassato lineare (*PL*). [ELIMINARE i suoi vincoli di interezza]

Ricordando che, per il Teorema Fondamentale della PL, la soluzione ottima del problema (*PL*) è un vertice o punto estremo del poliedro *P*, ciò accade quando il vertice ottimo è un punto a coordinate intere.

Esistono poliedri i cui vertici siano *tutti* punti a componenti intere? si

Proprietà di interezza

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. Si dice che il poliedro P gode della *proprietà di interezza* se tutti i vertici di P sono vettori a componenti intere.