UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DIMES

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica
A.A. 2021-2022
I semestre

Ricerca Operativa

Giovanni Giallombardo

DIMES, Università della Calabria

Sommario

Riepilogo

Classificazione dei problemi di ottimizzazione

Problemi di ottimizzazione continua

Le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in \mathbb{R}^n$);

- Ottimizzazione vincolata se $S \subset \mathbb{R}^n$
- Ottimizzazione non vincolata se $S = \mathbb{R}^n$

Problemi di ottimizzazione discreta

Le variabili sono vincolate ad essere numeri interi ($x \in \mathbb{Z}^n$);

- Ottimizzazione a numeri interi se $S \subseteq \mathbb{Z}^n$
- Ottimizzazione combinatoria se $S \subseteq \{0, 1\}^n$

Problemi di ottimizzazione mista

Presenza simultanea di variabili continue e variabili discrete.

Programmazione Lineare Intera

Programmazione Lineare Intera

$$(PLI)\quad \begin{cases} \min \quad c^\top x & & \\ \qquad\quad Ax & = & b \\ \qquad\quad x & \geq & 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

- $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$
- $b \in \mathbb{Z}^m$
- $c \in \mathbb{Z}^n$
- $S = \Omega(PLI)$ la regione ammissibile
- $x^*(PLI)$ il punto di minimo
- $z^*_{PLI} = c^\top x^*(PLI)$ il valore della funzione obiettivo all'ottimo

Rilassamento lineare STRUMENTO FONDAMENTALE

Definizione

Dato un problema di programmazione lineare intera

$$(PLI) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

TRASCURANDO INTERAMENTE I VINCOLI DI INTEREZZA

si definisce problema rilassato lineare (PL) di (PLI) il seguente problema di programmazione lineare

$$(PL) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

Notazione

- $P = \Omega(PL)$ è la regione ammissibile
- $x^*(PL)$ è la soluzione ottima di (PL)
- $z^*_{PL} = c^\top x^*(PL)$ è il valore ottimo di (PL)

Rilassamento lineare

Risolvere il rilassato lineare fornisce informazioni sul problema di (*PLI*)

Relazioni tra (PLI) ed il suo Rilassato Lineare (PL)

1. Se (*PL*) è inammissibile, allora (*PLI*) è inammissibile
2. $z^*(PL)$ è un *Lower Bound* sul valore ottimo (incognito) del problema (*PLI*) :

$$L = z^*(PL) \leq z^*(PLI)$$

SOTTOINSIEME DI CASI FORTUNATI.

3. Se $x^*(PL)$ ha coordinate intere, allora è soluzione ottima di (*PLI*)

Proprietà di interezza

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. Si dice che il poliedro P gode della *proprietà di interezza* se tutti i vertici di P sono vettori a componenti intere.

Proprietà di interezza

Proprietà di interezza

Definizione

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ un poliedro. Si dice che il poliedro P gode della *proprietà di interezza* se tutti i vertici di P sono vettori a componenti intere.

Totale unimodularità CONDIZIONE SUFFICIENTE

Una matrice $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ è detta *Totalmente Unimodulare* (Totally Unimodular Matrix: TUM) se per ogni sua sottomatrice quadrata non singolare B si ha: $|det(B)| = 1$. IL DET. IN VALORE ASSOLUTO È PARI A 1

CONCETTO ASSOCIATO ALLE MATRICI

IN UNA MATRICE DI TAL TIPO GLI ELEMENTI SONO PARI AD 1, -1, 0 CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ SIA TOTALMENTE UNIMODULARE

Proprietà di interezza

Consideriamo il poliedro

$$P_{fs} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\ x \geq 0\}$$ [IN FORMA STANDARD]

che costituisce la regione ammissibile di un problema di PL in Forma Standard:

Proposizione

Se A è TUM e $b \in \mathbb{Z}^m$, il poliedro P_{fs} gode della proprietà di interezza.

PRENDIAMO I VERTICI E VERIFICHIAMO L'INTEREZZA DEI VERTICI QUESTO SIGNIFICA CHE

Dimostrazione

Ogni sottomatrice B di A formata da m colonne linearmente indipendenti è una base di A, e determina la soluzione di base:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ \underset{\text{VAR. FUORI BASE}}{0} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{[SE È AMMISSIBILE È ANCHE UN VERTICE]}$$

I VERTICI DI UN POLIEDRO IN FS SONO LE SOL. DI BASE

Dimostrazione

Ricordando la formula per il calcolo della matrice inversa:

$$B^{-1} = \frac{B^{adj}}{(\det(B))}$$

CIASCUN ELEMENTO 1 0 -1 E EVENTUALMENTE 0

VALE 1 O -1

ALLORA OTTENGO UNA MATRICE DI 1 -1 O 0

E SE MOLTIPLICO PER UN VETTORI DI INTERI

è immediato verificare che $B^{-1} \in \mathbb{Z}^{m \times m}$.

Quindi, essendo $b \in \mathbb{Z}^m$ per ipotesi, ogni soluzione di base del sistema $Ax = b$ ha componenti intere.

In particolare, hanno componenti intere le soluzioni di base ammissibili, ovvero i punti estremi del poliedro che rappresenta la regione ammissibile del problema.

MA ALLORA NON VALE SE NON IN FS?
CERCHIAMO DI NON PASSARE DALLA FS

Proprietà di interezza

In generale, per un poliedro descritto da diseguaglianze

Proposizione

ORLATA DI UNA MATRICE IDENTITÀ

Se la matrice $A \in \mathbb{Z}^{m \times q}$ è TUM allora $[A \mid I] \in \mathbb{Z}^{m \times (q+m)}$ è TUM.

Dimostrazione

Consideriamo una sottomatrice $B \in \mathbb{Z}^{r \times r}$ di $[A|I]$ e dimostriamo che $\det(B) \in \{-1, 0, 1\}$.

IDENTITÀ È TUM MATRICE DI SOLI 0 ED 1

1. B è una sottomatrice di I. La tesi vale banalmente.
2. B è una sottomatrice di A. Ma A è TUM e quindi la tesi vale.

Proprietà di interezza

Dimostrazione

3. B è formata da $k < r$ colonne di A e da $r - k$ colonne di I.

   Permutiamo le colonne di B in modo da raggruppare tutte le colonne di A a sinistra e quelle di I a destra.

   Permutiamo le righe in modo tale da scrivere B nella seguente forma:

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & I_{r-k} \end{bmatrix}$$

   dove A_1 e A_2 sono sottomatrici di A e I_{r-k} è una matrice identità di ordine $r - k$.

   Poiché le permutazioni di righe e colonne possono solo cambiare il segno del determinante, si ottiene: $|det(B)| = det(A_1)$, e quindi la tesi vale, essendo A_1 una sottomatrice quadrata di A.

Proprietà di interezza

Dalla dimostrazione della proposizione discende che se la matrice originale è TUM, anche la matrice orlata (forma standard) è TUM.

Inoltre, l'equivalenza tra P e P_{fs} assicura che esiste una corrispondenza biunivoca tra vertici dell'uno e dell'altro poliedro.

Teorema

Sia $P = P(A, b)$ un poliedro in $\mathbb{R}^n$ comunque definito. Se A è Totalmente Unimodulare e $b \in \mathbb{Z}^m$, allora P gode della proprietà di interezza.

Matrici totalmente unimodulari

Condizione necessaria

Se $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ è TUM, allora $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ per ogni $i = 1, \ldots, m$ e per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Non si tratta di una condizione sufficiente, infatti

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

soddisfa la condizione necessaria, ma non è TUM perché $det(A) = 2$.

ABBIAMO BISOGNO DI UNA PROPRIETÀ DI INTERE ≥ 1

Matrici totalmente unimodulari

Condizione sufficiente

Sia A una matrice con elementi $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$. Se valgono le seguenti condizioni, allora A è TUM.

1. Ogni colonna ha al più due componenti non nulle;
2. Gli indici delle righe di A possono essere partizionati in due sottoinsiemi Q_1 e Q_2 tali che, per ogni colonna A_j di A si abbia:
    1. Se A_j ha due elementi non nulli $a_{ij} = a_{hj}$ (dello stesso segno), allora $i \in Q_1$ e $h \in Q_2$ (o viceversa);
    2. Se A_j ha due elementi non nulli $a_{ij} = -a_{hj}$ (di segno opposto), allora i e h appartengono allo stesso insieme Q_1 o Q_2.

Dimostrazione

Per induzione sulla dimensione delle sottomatrici di A.

Ogni sottomatrice di A con un solo elemento ha determinante che vale 0, 1 o -1.

Assumiamo che tutte le sottomatrici quadrate non singolari di ordine $k-1$ abbiano determinante in modulo pari ad 1 e dimostriamo che lo stesso accade per le sottomatrici di ordine k.

VEDIAMO COSA SUCCEDE

Calcoliamo il determinante di una sottomatrice quadrata B di ordine k

Dimostrazione

1. B contiene una colonna tutta nulla: allora $det(B) = 0$.
2. B contiene una colonna con un solo elemento non nullo a_{ij}: allora $det(B) = \pm a_{ij} \cdot det(M_{ij})$. Per ipotesi di induzione $det(M_{ij}) \in \{0, 1, -1\}$. Quindi $det(B) \in \{0, 1, -1\}$.
3. MOLTO PARTICOLARE ↗ IN CIASCUNA DELLE COLONNE
   Tutte le colonne di B contengono due elementi non nulli. In questo caso, grazie all'ipotesi 2 del teorema, per ciascuna colonna $j = 1, \dots, k$ si ha

   SULLA SINGOLA COLONNA — SULLA SINGOLA COLONNA

   $$\sum_{i \in Q_1} a_{ij} = \sum_{i \in Q_2} a_{ij}$$

   Sia $d_i^\top$ la $i-$esima riga di B. Dalla precedente relazione si ricava:

   SOMMA COLONNE SI OTTENGONO RIGHE

   $$\sum_{i \in Q_1} d_i^\top - \sum_{i \in Q_2} d_i^\top = 0^\top$$

   RIGHE DI INDICE i IN Q2

   → PROVA DI DIP. LINEARE

   ovvero le righe di B sono linearmente dipendenti. Pertanto $det(B) = 0$.

Matrici totalmente unimodulari

Teorema

Per tutte le matrici a componenti $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ che soddisfano la condizione 1 della condizione sufficiente, la condizione 2 è anche condizione necessaria per la Totale Unimodularità. NO DIM.

Matrici di incidenza

Il Teorema si applica, in particolare, alle matrici di incidenza dei grafi, le cui colonne hanno esattamente due elementi non nulli di valore ± 1.

Nel caso di grafo orientato, ogni colonna della matrice di incidenza contiene esattamente un elemento pari ad 1 ed un elemento pari a -1, in corrispondenza, rispettivamente, dei nodi origine e destinazione dell'arco cui è associata.

La condizione 2 viene soddisfatta ponendo tutti gli indici di riga in Q_1 (in questo caso $Q_2 = \emptyset$) o viceversa; quindi la matrice di incidenza di un grafo orientato è Totalmente Unimodulare

Metodi di soluzione per problemi di PLI

Strategie di risoluzione

Se P è un poliedro che gode della proprietà di interezza il problema

$$(PLI)\begin{cases} \min & c^\top x \\ & x \in S = P \cap \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

può essere risolto mediante l'algoritmo del simplesso.

Altrimenti ...

Strategie naive

- Calcolare la soluzione ottima $x^*(PL)$ del rilassato lineare ed approssimare le sue componenti frazionarie all'intero più vicino.
  - ✓ ~~La soluzione potrebbe essere inammissibile~~
  - ✓ ~~La soluzione potrebbe essere lontana dall'ottimo~~
  - ✓ ~~La soluzione potrebbe essere priva di significato~~
- Enumerazione totale delle soluzioni ammissibili

Strategie di risoluzione

Algoritmi esatti

Sono detti esatti gli algoritmi che forniscono in output la soluzione ottima del problema.

Gli algoritmi di questa classe sono tutti di complessità esponenziale nella dimensione dell'istanza.

- Metodi dei piani di taglio (cutting-plane)
- Metodi Branch-and-bound
- Metodi Branch-and-cut

Algoritmi euristici

Algoritmi polinomiali in grado di determinare una soluzione ammissibile del problema, sperabilmente di buona qualità, ma senza nessuna garanzia di ottimalità.

ALGORITMI DI TIPO DUALE: IN SALITA VISTO CHE STO MINIMIZZANDO.

Piani di taglio

~~Costituiscono l'elemento unificante dei tre met~~odi

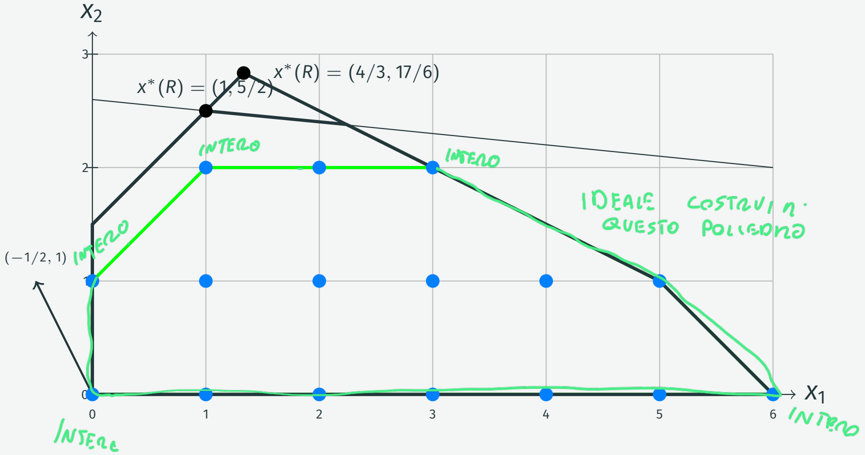
Si minimizza la funzione obiettivo su regioni ammissibili che, partendo dal poliedro $P = \Omega(PL)$, si ottengono introducendo (uno per ogni iterazione) nuovi vincoli lineari, detti appunto *piani di taglio*.

Ciascun taglio esclude dal nuovo poliedro la soluzione ottima del rilassato lineare precedente, ma non esclude alcun punto di S.

Si genera una sequenza di poliedri via via più piccoli, tutti contenenti S, fino all'individuazione di un poliedro il cui vertice ottimo ha tutte le componenti intere: tale punto sarà la soluzione ottima $x^*(PLI)$.

Si determina la soluzione ottima procedendo dall'esterno della regione ammissibile, e generando una sequenza di lower bounds di valore crescente; la condizione di arresto è associata all'ammissibilità (ovvero l'interezza). Per tale ragione vengono detti algoritmi di tipo duale.

Esempio



x_2
3
2
1
0
$x^*(R) = (4/3, 17/6)$
$x^*(R) = (1, 5/2)$
INTERO
INTERO
IDEALE COSTRUIRE QUESTO POLIGONO
$(-1/2, 1)$
INTERO
0
1
2
3
4
5
6
x_1
INTERO
INTERO

Branch-and-bound

Esplorano dall'interno la regione ammissibile S, e perciò sono algoritmi di tipo primale.

L'esplorazione della regione ammissibile è guidata dal confronto di lower e upper bounds sulla funzione obiettivo, allo scopo di evitare di ispezionare intere parti di S in cui la soluzione ottima non può trovarsi.

Generano una sequenza di soluzioni ammissibili, fino a determinare quella ottima, nel momento in cui l'insieme S sarà stato completamente esplorato.

I due schemi risolutivi hanno pregi e difetti opposti.

Gli algoritmi più recenti e più efficienti attualmente disponibili fondono le peculiarità positive di entrambi, oltre ad importanti risultati della teoria poliedrale; da qui il nome Branch-and-cut.

Algoritmo Brach-and-bound

Strategia

Cerca la soluzione ottima del problema

$$(PLI) \begin{cases} \min & c^\top x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \quad x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

effettuando una esplorazione intelligente della regione ammissibile S (enumerazione parziale delle soluzioni ammissibili).

Ipotesi

- $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ è un poliedro limitato $\Rightarrow |S| < +\infty$.

Principi fondamentali:

- Branching
- Bounding

NON SO RISOLVERLO

Branching

Suddividere il problema originario in tanti sottoproblemi auspicabilmente più semplici da risolvere.

Consideriamo una partizione della regione ammissibile S:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k, \qquad S_i \cap S_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, k\}, i \neq j$$

e definiamo il sottoproblema i-esimo

$$(S_i) \begin{cases} \min c^\top x \\ x \in S_i \end{cases}$$

e siano $x^*(S_i)$, $z^*(S_i)$, rispettivamente, la soluzione ottima ed il valore ottimo.

Branching

La partizione introdotta consente di scrivere il problema (PLI) come

$$z^*_{PLI} = \min\left\{c^\top x : x \in S\right\} = \min\left\{z^*(S_i) : i \in \{1, \ldots, k\}\right\}$$

Affinché l'approccio sia efficiente, dovrebbero verificarsi le due condizioni seguenti

- il singolo sottoproblema sia decisamente più facile da risolvere del problema originario;
- il numero di sottoproblemi non sia troppo grande.

Si tratta di condizioni contrapposte: il singolo sottoproblema è tanto più facile da risolvere quanto più piccola è la sua regione ammissibile, cioè quanto più grande è k.

Il caso limite si ha per $|S_i| = 1$ per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, cioè $k = |S|$, che coincide con l'enumerazione totale delle soluzioni ammissibili.

IL METODO SI TRADUCE CON

Branching

Partizionando inizialmente S in un piccolo numero k di sottinsiemi si può procedere con la seguente

Strategia iterativa

1. esamina il sottoproblema (S_i)
2. se il sottoproblema (S_i) è sufficientemente facile, risolvilo
3. altrimenti, separa ulteriormente la regione S_i in parti, ovvero genera due o più sottoproblemi di (S_i)

Branching

Schema algoritmico

LISTA VUOTA ≡ HO ESPLORATO TUTTI I SOTTOPROBLEMI

Si mantiene una lista di sottoproblemi non ancora risolti dalla quale si estrae iterativamente il sottoproblema candidato corrente (S_i).

CONSERVO FINCHÉ NON TROVO DI MEGLIO

Se (S_i) può essere risolto, si passa ad esaminare un altro problema candidato; altrimenti, partizionando S_i si generano nuovi sottoproblemi da aggiungere alla lista.

Si continua fino all'esaurimento della lista di sottoproblemi da esaminare.

Indicando la migliore soluzione ammissibile disponibile ad una certa iterazione come ottimo corrente, all'arresto della procedura l'ottimo corrente coinciderà con l'ottimo globale del problema (PLI).

La cardinalità finita della regione S garantisce che questa procedura terminerà in un numero finito di passi.

Tecniche di branching

Partizionare la regione ammissibile di un problema (o sottoproblema) di *PLI*, rispetto ad una variabile opportunamente scelta, detta variabile di branching:

- variable fixing, mediante assegnamento di valori interi ammissibili alla variabile di branching
- separazione binaria, mediante introduzione di vincoli disgiuntivi

Variable fixing

Sia x_j la variabile su cui intendiamo effettuare la separazione.

Se x_j deve soddisfare i vincoli:

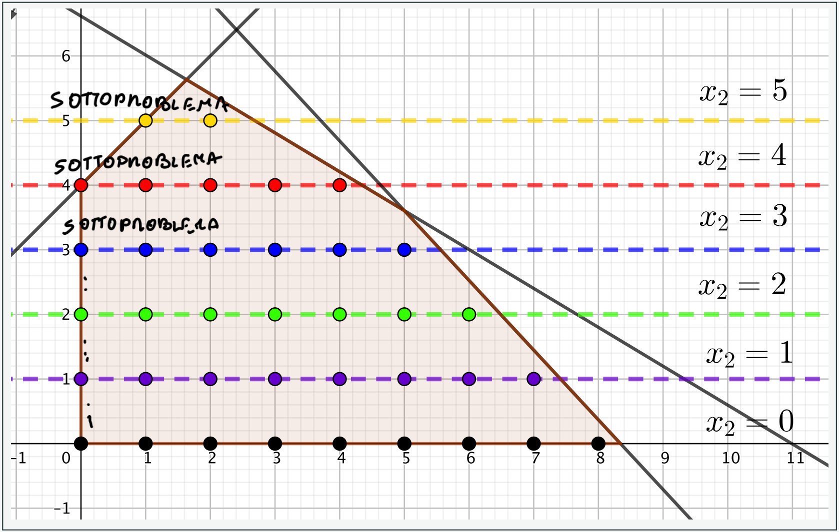
$$l_j \leq x_j \leq u_j, \quad x_j \in \mathbb{Z}$$

con $l_j, u_j \in \mathbb{Z}$, allora S può essere partizionata in tante parti quanti sono i valori interi ammissibili per x_j, cioè $k = u_j - l_j + 1$,

S può essere partizionata in $k = u_j - l_j + 1$ parti, tante quanti sono i valori interi ammissibili per x_j, ponendo:

$$\begin{bmatrix} S_1 = \{x \in S : x_j = l_j\} \\ S_2 = \{x \in S : x_j = l_j + 1\} \\ \dots \\ S_k = \{x \in S : x_j = u_j\} \end{bmatrix}$$

Variable fixing



Variable fixing

Ogni nodo dell'albero di Branch-and-Bound potrà dare luogo a molte ramificazioni estendendosi in ampiezza.

Ogni sottoproblema avrà una variabile in meno rispetto al problema padre, perché la variabile di branching è stata fissata ad un preciso valore.

I sottoproblemi di livelli più profondi possono essere visti come completamento della soluzione dei loro progenitori.

Ogni nodo di livello l avrà $n - l$ incognite, a completamento delle l già fissate lungo il cammino che lo connette al nodo radice dell'albero.

Separazione binaria

Fissato un valore intero $\alpha \in [l_j, u_j]$, l'insieme S può essere suddiviso in due parti ponendo:

REGIONE AMMISSIBILE

VALORE RISPETTO AL QUALE VOGLIO EFFETTUARE LA SEP

$$S_1 = \{x \in S : x_j \leq \alpha\}$$

INTERO

REGIONE AMM:

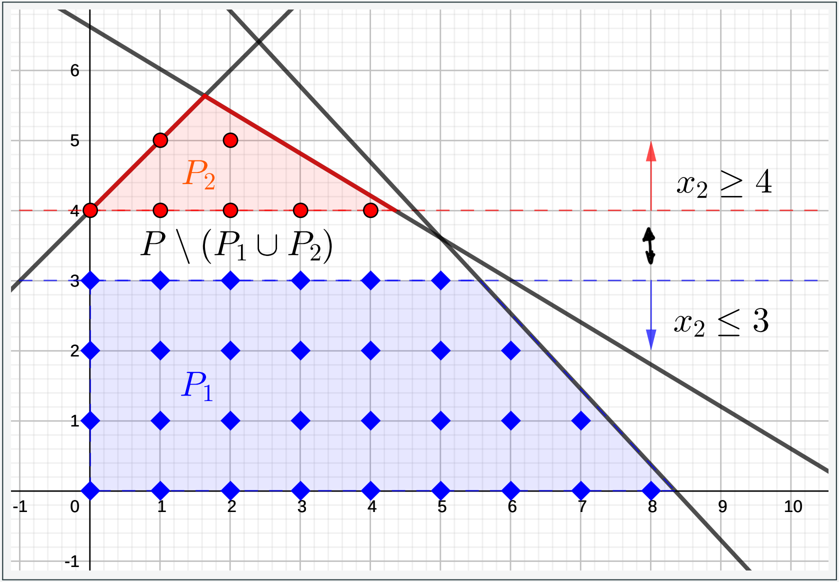
INTERO

$$S_2 = \{x \in S : x_j \geq \alpha + 1\}$$

I due vincoli introdotti per definire i sottoproblemi in sono mutuamente esclusivi, e ciò garantisce che i sottoinsiemi S_1 e S_2 siano disgiunti.

Si genera un albero in cui ogni nodo ha esattamente due figli (e perciò binario), e con caratteristiche opposte rispetto a quelle osservate per il variable fixing.

Separazione binaria



Osservazioni

1. Nel caso di problemi a variabili binarie, le due tecniche di branching coincidono. Fissata la variabile di branching x_j la tecnica di variable fixing genera:

$$S_1 = \{x \in S : x_j = 0\}$$
$$S_2 = \{x \in S : x_j = 1\}$$

   che coincide con la separazione binaria ottenuta ponendo $\alpha = 0$, tenendo conto delle limitazioni $0 \leq x_j \leq 1$.

2. Entrambe le tecniche di branching introdotte definiscono correttamente una partizione dell'insieme $S = \Omega(PLI)$, e non del poliedro $P = \Omega(PL)$.
   La parte del poliedro P esclusa dalla separazione non contiene alcun punto di S, semplicemente perché, per costruzione:

$$\alpha < x_j < \alpha + 1 \;\Rightarrow\; x_j \notin \mathbb{Z} \qquad \forall x \in P \setminus \{P_1 \cup P_2\}$$