LEZIONE N11 18/11/2021

PROBLEMA DEL FLUSSO DI COSTO MINIMO

CONSIDERIAMO UN GRAFO ORIENTATO $G = \langle V, E \rangle$

- $V = \{1, \dots, m\}$ INSIEME DEI NODI, $|V| = m$.
- $E \subseteq V \times V$ È L'INSIEME DEGLI ARCHI, $|E| = n$.
- $b \in \mathbb{R}^m$ È IL VETTORE DELLE DIVERGENZE NEI NODI.
- $c \in \mathbb{R}^n$ È IL VETTORE DEI COSTI UNITARI DI FLUSSO SUGLI ARCHI.
- u_{ij} È LA CAPACITÀ SU OGNI ARCO $(i,j) \in E$

SUFFICIENTEMENTE AMPIA DA NON COSTITUIRE UNA LIMITAZIONE SUL FLUSSO CHE PUÒ TRANSITARE LUNGO L'ARCO (i,j) $\forall (i,j) \in E$

LE VARIABILI DECISIONALI $f_{ij} \geq 0$ RAPPRESENTA LA QUANTITÀ DI FLUSSO CHE TRANSITA LUNGO L'ARCO (i,j) PER OGNI $(i,j) \in E$

IL PROBLEMA HA QUESTA FORMULAZIONE

$$(MCFP) \begin{cases} \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} f_{ij} \\ \underbrace{\sum_{j:(i,j) \in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} f_{ji}}_{\text{DIVERGENZA}} = b_i \quad \forall i \in V \\ f_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \end{cases}$$

VETTORE DEI FLUSSI $\in \mathbb{R}^n$

MATRICE DI INCIDENZA

$$(MCFP) \begin{cases} \min c^T f \\ A f = b \\ f \geq 0 \end{cases} \quad \text{(FORMA COMPATTA)}$$

ESEMPIO DI VINCOLI DI CONSERVAZIONI DEL FLUSSO SU PDF

AMMISSIBILITÀ DI (MCFP)

LA COLONNA DI A ASSOCIATA ALL'ARCO $(i,j) \in E$ SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$A_{(i,j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \hat{e}_i - \hat{e}_j$$

OVE $\hat{e}_i \in \mathbb{R}^m$ È L'i-ESIMO VETTORE DELLA BASE CANONICA

PROPRIETÀ 1 → È IMMEDIATO VERIFICARE CHE LA SOMMA DELLE RIGHE DI A È UN VETTORE IDENTICAMENTE NULLO. CIOÈ INDICANDO CON $e \in \mathbb{R}^m$ UN VETTORE CON COMPONENTI TUTTE PARI AD 1 VALE $e^T A = 0^T$ DA CUI DISCENDE LA PROPRIETÀ RANGO$(A) \leq m - 1$

PROPRIETÀ 2 → $\Omega(MCFP) \neq \emptyset \Rightarrow e^T b = \sum_{i \in V} b_i = 0$ (CONDIZIONE NECESSARIA DI AMMISSIBILITÀ)
INFATTI:

$$\exists \bar{f} \in \Omega(MCFP) \Rightarrow A\bar{f} = b \Rightarrow e^T A \bar{f} = e^T b \Rightarrow 0^T \bar{f} = 0 = e^T b$$

OVVIAMENTE RISULTA:

$$\sum_{i \in V} b_i \neq 0 \Rightarrow \Omega(MCFP) = \emptyset$$

REGIONE DI AMMISSIBILITÀ VUOTA
PROBLEMA NON RISOLVIBILE
SE LA SOMMA ALGEBRICA DELLE DIVERGENZE È DIVERSO DA 0

CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI NEI PROBLEMI DI FLUSSO

$$\begin{cases} \min & c^\top f \\ & Af = b \\ & f \geq 0 \end{cases}$$

- $f \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei flussi
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è la matrice di incidenza del grafo, le cui colonne sono ordinate secondo l'ordinamento del vettore f
- $rango(A) \leq m - 1$
- $\sum_{i \in V} b_i = 0$
- $\tilde{A}$ è la sottomatrice ottenuta eliminando una riga da A, e $\tilde{b}$ è il corrispondente vettore delle divergenze

TEOREMA UNA SOTTOMATRICE QUADRATA DI ORDINE $[m-1]$ DI $\hat{A}$ É UNA BASE SE E SOLO SE LE SUE COLONNE CORRISPONDONO AGLI ARCHI DI UN ALBERO RICOPRENTE L'INSIEME DEI NODI V DEL GRAFO

PROCEDIAMO CON LA DIMOSTRAZIONE SUDDIVISA IN DUE LEMMI

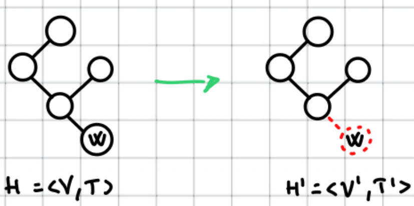
LEMMA 1 → SIA $H = \langle V, T \rangle$ UN ALBERO RICOPRENTE I NODI DEL GRAFO G, SIA B LA SOTTOMATRICE CORRI-SPONDENTE DI $\hat{A}$. ALLORA, OPPORTUNATAMENTE PER MUTANDO LE SUE RIGHE E LE SUE COLONNE, B PUÒ ESSERE POSTA IN FORMA TRIANGOLARE SUPERIORE CON ELEMENTI DIAGONALI NON NULLI ($\Rightarrow \det(B) \neq 0$)

DIMOSTRAZIONE → LA DIM. É PER INDUZIONE SU $|V|$.

PASSO 1 ↦ BASE DELL'INDUZIONE É $|V| = 2$. ALLORA $|T| = 1$, OVVERO L'ALBERO HA UN SOLO ARCO CON COLONNA, AD ESEMPIO $(1,-1)^T$. RIMOSSA UNA RIGA SI OTTIENE $B = [\mp 1]$ E LA TESI VALE.

PASSO K ↦ PER IPOTESI DI INDUZIONE, ASSUMIAMO CHE LA TESI VALGA QUANDO H É UN ALBERO RICOPRENTE V CON $|V| = K$, E DIMOSTRIAMO CHE LA TESI CONTINUA A VALERE PER $H = \langle V, T \rangle$ CON $|V| = K+1$;

PASSO K+1 ↦ SIA DUNQUE $H = \langle V, T \rangle$ CON $|V| = K+1$; SIA ω UNA FOGLIA. RIMUOVENDO DA H LA FOGLIA ω E L'UNICO ARCO CHE SU ω INCIDE, SI OTTIENE UN SOTTOGRAFO DI H CHE É A SUA VOLTA UN ALBERO $H' = \langle V', T' \rangle$, CON $|V'| = |V - \{\omega\}| = K$.



PER L'IPOTESI DI INDUZIONE, LA SOTTAMATRICE B' DI $\hat{A}$ ASSOCIATA AGLI ARCHI DI H' É TRIANGOLARE SUPERIORE CON ELEMENTI DIAGONALI NULLI. PER OTTENE-RE LA MATRICE CORRISPONDENTE ALL'ALBERO H BASTERÁ ORLARE B CON LA RIGA ASSOCIATA AL NODO W E LA COLONNA ASSOCIATA ALL'ARCO INCIDENTE

$$B' = \begin{pmatrix} \pm1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot \\ & \pm1 & & & \vdots \\ & & \pm1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \pm1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \pm1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & 0 \\ & \pm1 & & & \vdots & 0 \\ & & \pm1 & & \vdots & \mp1 \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \pm1 \end{pmatrix}$$

NESSUNO DEGLI ARCHI T' INCIDE SUL NODO ω; PERCIÓ, AGGIUNGENDO LA NUOVA RIGA IN BASSO E LA NUOVA COLONNA A DESTRA, LA MATRICE B SARÁ ANCH'ESSA TRIANGOLARE SUPERIORE CON ELEMENTI DIAGONALI NON NULLI

ESEMPIO LEMMA 1 SU PDF

LEMMA 2 → SE B É UNA BASE DI $\hat{A}$, ALLORA GLI ARCHI CORRISPONDENTI ALLE SUE COLONNE FORMANO UN ALBERO RICOPRENTE I NODI DEL GRAFO G

Dimostrazione ...

Gli archi del grafo corrispondenti alle colonne di B sono in numero pari ad $m-1$; per dimostrare che tali archi formano un albero ricoprente i nodi di G, proviamo che essi individuano un sottografo aciclico di G.

Supponiamo, per assurdo, che un loro sottoinsieme formi un ciclo $\mathcal{C}$.

Scegliamo ad arbitrio un orientamento del ciclo e partizioniamo gli archi in due insiemi $\mathcal{C}^+$ e $\mathcal{C}^-$, tali che $\mathcal{C}^+$ sono i rami concordi con l'orientamento scelto e $\mathcal{C}^-$ quelli discordi, quindi

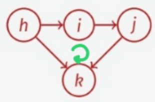
$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-.$$

... Dimostrazione

Di conseguenza osserviamo che:

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{C}^+} A_{(i,j)} - \sum_{(i,j)\in\mathcal{C}^-} A_{(i,j)} = 0$$

che contraddice l'indipendenza lineare delle colonne di B.



In verso orario otteniamo:

COLONNA CORRISPONDENTE A $A(h,i)$

$$A_{(h,i)} + A_{(i,j)} + A_{(j,k)} - A_{(h,k)} = [\hat{e}_h - \hat{e}_i] + \hat{e}_i - \hat{e}_j + \hat{e}_j - \hat{e}_k - \hat{e}_h + \hat{e}_k = 0$$

DISCORDE RISPETTO AL VERSO ORARIO

COME DETTO IN PRECEDENZA LEMMA 1 , LEMMA 2 CONSENTONO DI DIMOSTRARE COMPLETAMENTE IL TEOREMA SULLA CARATTERIZZAZIONE DELLE BASI NEI PROBLEMI DI FLUSSO.

La dimostrazione del Lemma 1 è costruttiva, e la forma triangolare della base è molto importante perché:

- Nota la base B, è facile determinare le componenti di base della soluzione corrispondente, f_B, risolvendo il sistema:

$$B \cdot f_B = \tilde{b}$$

- Se le divergenze dei nodi sono numeri interi, $b \in \mathbb{Z}^m$, allora tutte le soluzioni di base, e quindi la soluzione ottima di base, del problema *MCFP* avranno componenti intere. Infatti gli elementi diagonali della matrice B hanno valore $B_{ii} \in \{-1, 1\}$, e le uniche divisioni necessarie nella risoluzione del sistema triangolare hanno tali elementi come divisori.

NON TROVIAMO f_N (CHE É NULLA) POICHÉ SOSTANZIALMENTE STIAMO PARLANDO DI UNA SOLUZIONE DI BASE COSTITUITA QUINDI DA n ARCHI E MATRICE DI RANGO $m-1$ QUINDI $n-(m-1)$ COMPONENTI NULLE E LE RIMANENTI SONO ASSOCIATE AGLI ARCHI DI UN ALBERO RICOPRENTE.