Ricerca Operativa

Carmelo Gugliotta 213477

Anno 2021/2022

Contents

1 Lezione n1

1.1 Ricerca Operativa - Operations Research

È una disciplina della matematica applicata che ha come oggetto la definizione di modelli e la messa a punto di metodi per la soluzione di problemi decisionali (decision-making) che si manifestano in diversi ambiti della vita reale.

1.1.1 Potenziali Applicazioni

- **Produzione Industriale**
  -Pianificazione della produzione
  -Gestione delle scorte
  -Localizzazione e dimensionamento di impianti.
- **Progettazione e gestione di reti**
- **Oranizzazione**
  -Progect management
  -Manutenzione di beni
  -Turnistica
- **Economia**
  -Pianificazione degli investimenti
  -Gestione portafoglio
- **Machine Learning**
  -Diagnostica medica
  -Riconoscimento di immagini
  -Dna squencing

1.1.2 Fasi di un processo decisionale

- **Analisi del problema**
  Intervistare l'esperto del dominio (chi lavora in un contesto ben preciso) e acquisire tutte le informazioni sulle attività correnti che si possono affrontare tramite tecniche specifiche
- **Costruzione del modello**
  Costruzione di un modello matematico che si presta a una risoluzione del problema proposto con opportune ipotesi semplificative (No modelli articolati Si modelli semplici)
- **Analisi del modello e Soluzione numerica**
  Essenzialmente significa capire se esiste un algoritmo per il modello proposto, se siamo vicini a qualcosa che è già esistente lo adottiamo, se siamo lontani dobbiamo creare qualcosa di nuovo basandoci su specifiche regole matematica.

- **Validazione del modello**
  Verificare se il risultato prodotto dall'algoritmo è valido o meno,se non ha senso il problema risiede o nel modello o nell'algoritmo.

1.1.3 Problemi di Ottimizzazione: Definizioni e classificazione

I problemi di Ottimizzazione riguardano la ricerca di Massimi e Minimi di funzioni a più variabili.

Consideriamo una funzione reale $f : R^n \to R$ e un insieme $S \subseteq R^n$, un problema di Ottimizzazione (P) coinsiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f tra i punti dell'insieme S

$$\begin{cases} min \quad f(x) \\ subject \quad to \quad x \in S \end{cases} \tag{P}$$

- $x \in R^n$ viene chiamato vettore delle variabili di decisione
- f viene chiamata funzione obiettivo
- S viene chiamato insieme ammissibile
- $x \in S$ rappresenta una soluzione ammissibile

Il problema può essere formulato in modo equivalente osservando che

$$minf(x) = -max(-f(x))$$

Quindi:

$$\begin{cases} max \quad -f(x) \\ subject \quad to \quad x \in S \end{cases} \tag{P}$$

- I problemi di massimo e di minimo sono equivalenti a meno del segno
- x $\in R^n$ è un vettore
- f è una funzione di n variabili reali $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

Definizioni:
Il problema di ottimizzazione P si dice inammissibile se

$$S = \emptyset$$

cioè se non esistono soluzioni ammissibili.

Il problema di ottimizzazione P si dice illimitato (inferiormente) se

$$\forall M > 0 \quad \exists x \in S \text{ tale che } \quad f(x) < -M$$

Si dice che il problema di ottimizzazione P ammette soluzione ottima (finita) se

$$\exists x_* \in S \quad \text{tale che} \quad f(x_*) \leq f(x) \quad \forall x \in S$$

il punto x_* è detto soluzione ottima globale e il corrispondente valore $f(x_*)$ si dice valore ottimo

1.1.4 Classificazione

- **Problemi di ottimizzazione continua**
  le variabili possono assumere tutti i valori reali ($x \in R^n$);
  - Ottimizzazione vincolata se $S \subset R^n$)
  - Ottimizzazione non vincolata se $S = R^n$
- **Problemi di ottimizzazione discreta**
  le variabili sono vincolate ad essere numeri interi $x \in Z^n$;
  - Ottimizzazione a numeri interi se $S \subseteq Z^n$
  - Ottimizzazione combinatoria se $S \subseteq \{0, 1\}^n$
- **Problemi di ottimizzazione mista**
  Presenza simultanea di variabili continue e variabili discrete

1.2 Problemi di programmazione Lineare

1.2.1 Problema di programmazione matematica

L'insieme ammissibile (regione ammissibile) S viene descritto mediante un insieme di diseguaglianze

$$S = \{x \in R^n : g_1(x) \geq b_1, ..., g_m(x) \geq b_m\}$$

dove $g_i : R^n \to R, b_i \in R,$ per ogni $i = 1, ..., m.$

Ogni disuguaglianza $g_i(x) \geq b_i$ prende nome di **vincolo** e l'insieme ammissibile è formato da tutti quei punti $x \in R^n$ che sono soluzione del sistema di disuguaglianze.

$$\begin{cases} g_1(x) \geq b_1 \\ . \\ . \\ . \\ g_m(x) \geq b_m \end{cases} \tag{1}$$

Nota bene che : Per quanto riguarda i Vincoli di diseguaglianza si ha che $g_i \leq b_i$ può essere riscritto come $-g_i(x) \geq -b_i$ Invece per quando riguarda i Vincoli di eguaglianza $g_i(x) = b_i$ può essere riscritto mediante la coppia di vincoli

$$\begin{cases} g_1(x) \geq b_1 \\ -g_m(x) \geq -b_1 \end{cases} \tag{2}$$

Inoltre avremo che un vincolo di diseguaglianza $g_i(x) \geq b_i$ si dice

- **SODDISFATTO** in un punto $\bar{x}$ *se* $g_i(\bar{x}) \geq b_i$
- **VIOLATO** in un punto $\bar{x}$ *se* $g_i(\bar{x}) < b_i$
- **ATTIVO** in un punto $\bar{x}$ *se* $g_i(\bar{x}) = b_i$
- **RIDONDANTE** se la sua eliminazione non modifica l'insieme ammissibile

1.3 Problema di programmazione matematica

$$\begin{cases} \min\ f(x) \\ \text{s.t. } g_1(x) \geq b_1 \\ \qquad g_2(x) \geq b_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad g_m(x) \geq b_m \end{cases} \tag{3}$$

- Quando le funzioni $f, g_1, ..., g_m$ sono tutte lineari il problema si dice P **problema di programmazione lineare**
- Quando almeno una delle funzioni $f, g_1, ..., g_m$ non è lineare il problema P si dice **problema di programmazione non lineare**

2 Lezione n2 01 10 2021

2.1 Funzione Lineare Obiettivo (funzione costo)

Considerando n coefficienti reali $c_1, ..., c_n$ Allora avremo :

$$f(x) = f(x_1, ..., x_2) = c1x1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

Ove $x_1, x_2, ..., x_n$ prendono il nome di variabili decisionali.

2.2 Vincoli

Identificati da $m \times n$ coefficienti reali (n per ogni vincolo)

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}$$

$$g_i(x) = g_i(x_1, ..., x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$$

2.3 Problemi di programmazione lineare (PL)

I problemi che saranno maggiormente analizzati in maniera generali saranno rappresentati nella seguente forma

$$\begin{cases} \text{min } c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n \\ \text{s.t. } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \tag{4}$$

Notiamo che la seguente forma generale può essere riscritta utilizzando alcune convenzioni algebriche come il prodotto righe per colonne per rappresentare i prodotti scalari. Avremo quindi:

$$\begin{cases} \text{min } c^Tx \\ \text{s.t. } Ax \geq b \end{cases} \tag{5}$$

Rappresentazioni grafiche e Risoluzioni grafiche in R^2 su power point

2.3.1 Forma Standard e Ipotesi fondamentale

Si chiama Problema di Programmazione Lineare in Forma Standard un problema di PL definito come segue:

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t. } \ Ax b \\ \qquad Ix \geq 0 \end{cases} \tag{6}$$

dove $A \in R^{m \times n}$, $b \in R^m$ e $c \in R^n$. Si osservi attentamente il vincolo di eguaglianza e il vincolo sul segno delle variabili.

la forma esplicitata precedentemente è equivalente alla seguente:

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t. } \ Ax \geq b \\ \qquad -Ax \geq -b \\ \qquad Ix \geq 0 \end{cases} \tag{7}$$

Le **ipotesi fondamentali** sono le seguenti:

- $m < n$
  Escludiamo il sistema quadrato a priori perché stiamo ottimizzando. E ci interessano solo sistemi rettangolari.
- **rango(A) = m**
  Rango pieno e per il teorema di Rouché-Capelli avremo ∞^{n-m} soluzioni.

2.4 Geometria della Programmazione Lineare

Introduciamo alcune definizioni fondamentali in R^N:

- **Poliedri**
  Un poliedro è un insieme che può essere descritto come un insieme finito di disuguaglianze lineari. Nello specifico come:

  $$\{x \in R^n : Ax \geq b\}$$

  Dove A è una matrice $m \times n$ e $b \in R^m$.
  Un poliedro è l'intersezione di un numero finito di semispazi.
- **Semispazi** Sia $a \in R^n$ un vettore n-dimensionale, e b uno scalare. L'insieme

  $$\{x \in R^n : a^T x \geq b\}$$

  si chiama **semispazio**

- **Iperpiani** Sia $a \in R^n$ un vettore n-dimensionale, e b uno scalare. L'insieme

$$\{x \in R^n : a^T x = b\}$$

si chiama **iperpiano**. Quindi, un iperpiano è la frontiera del corrispondente semispazio. Inoltre a è ortogonale all'iperpiano, quindi a tutte le direzioni contenute nell'iperpiano.

N.B: Il gradiente dell'iperpiano identifica la direzione di crescita.

- **Insiemi Convessi**
Un insieme $S \subset R^n$ è **convesso** se comunque siano scelti $x, y \in S$ e $\lambda \in$ [0,1] si ha che

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

Si osserva che $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ per $\lambda \in$ [0,1] definisce il **segmento che congiunge** x **e** y, quindi S è convesso se ogni coppia del segmento congiungente è appartenente a S

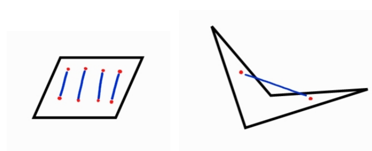

Figure 1: Insieme Convesso e Insieme non Convesso

- **Combinazione convessa**
Consideriamo k vettori $x^{(1)}, ...x^{(k)}$ e k scalari non negativi $\lambda_1, ..., \lambda_k$ tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} = 1$

Il vettore

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$$

Si chiama **combinazione convessa** dei k vettori $x^{(1)}, ...x^{(k)}$

- **Involucro convesso**
L'insieme di tutte le combinazioni convesse di $x^{(1)}, ...x^{(k)}$ si chiama **involucro connesso** dei vettori $x^{(1)}, ...x^{(k)}$

- **Punti Estremi**
Consideriamo un poliedro P. Un vettore $x \in P$ si dice **punto estremo** di P se non esistono coppie di punti $y, z \in P$, entrambi diversi da x. e uno scalare $\lambda \in$ [0,1] tali che

$$x = \lambda y + (1 - \lambda)z$$

N.B: x è espresso come combinazione convessa.

Figure 2: Punto Estremo e Punto non Estremo

- **Vertici**
  Consideriamo un poliedro P. Un vettore $x \in P$ si dice **vertice** di P se esiste $c \in R^n$ tale che:

  $$c^T x < c^T y \quad \forall y \in P, y \neq x$$

  N.B: c è un versore.

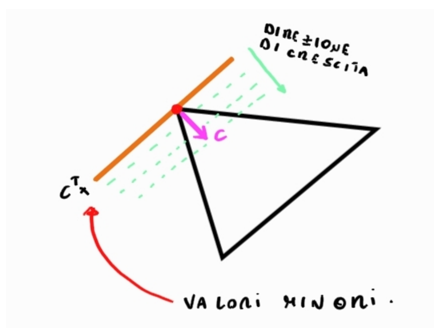

Figure 3:

2.4.1 Risultati Utili

Teoremi Utili per definire la struttura sottostante ai problemi di programmazione lineare.

- L'intersezione di insiemi convessi è convessa;
- Un poliedro è un insieme convesso;
- Una combinazione convessa di un numero finito di elementi di un insieme convesso appartiene a quell'insieme;
- l'involucro convesso di un numero finito di vettori è un insieme convesso.

3 Lezione n3 08 10 2021

Ritorniamo a discutere della Forma Standard di un Problema di Programmazione Lineare:

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ \text{s.t. } \ Ax b \\ \qquad Ix \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

Si osservi che viene indicato con X l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni:

$$X = \{x \in R^n : Ax = b\}$$

e invece con $\Omega(P)$ la **Regione ammissibile** del problema **(P)**:

$$\Omega(P) = \{x \in R^n : Ax = b, x \geq 0\} = X \cap R^n_+ \subset X$$

Inoltre le ipotesi fondamentali, discusse precedentemente, garantiscono che il sistema di equazioni abbia infinite soluzioni (∞^{n-m} e che sia sempre possibile esplicitare m componenti di x in funzione delle rimanenti $n - m$.

Le motivazioni, per tali ipotesi, sono le seguenti:

- $m > n$: il sistema è sovradeterminato, ovvero vi sono più equazioni che variabili e si prospettano due possibili situazioni. **Sistema incompatibile** e **Sistema Compatibile**. Se il sistema è incompatibile allora non vi sono soluzioni, se invece è compatibile allora vi è la possibilità di liberarsi al più di $m - n$ equazioni l.dipendenti (superflue).
- $m = n$: se $rango(A) = m$, allora A è non singolare ed il sistema ammette un'unica soluzione: $X = \{\hat{x}\}$:
  - se $\hat{x}$, allora $\Omega(P) = \{\hat{x}\}$ e $x^* = \hat{x}$;
  - se $det(A) = 0$ almeno un equazione può essere eliminata;
- $m < n$: se il rango non fosse pari ad m,eliminando le eventuali eq. rindondanti (righe), si otterrebbe un sistema equivalente a quello iniziale con matrice dei coefficienti di rango massimo.

3.1 Riduzione alla forma Standard

Come facciamo a trasformare un generico problema di PL in un problema caratterizzato da vincoli di eguaglianza e variabili vincolati in segno?
Per qualunque funzione $f(x)$, e qualunque insieme ammissibile Ω, si ha che la trasformazione di un problema di massimizzazione in uno di minimo e viceversa si effettua in tal modo:

Il punto ottimo x^* del problema di massimo coincide con il punto di ottimo del problema di minimo, ed i valori ottimi dei due problemi sono l'uno l'opposto dell'altro.

Se si hanno Vincoli di diseguaglianza si opera in tal modo:

- **di** $\leq$: $a_i^T x \leq b_i$
  Allora viene definita una variabile ausiliaria di **slack** $\{s_i : s_i = b_i - a_i^T x\}$ e il vincolo viene trasformato in:
  $$a_i^T x + s_i = b_i$$
  $$s_i \geq 0$$
- **di** $\geq$: $a_i^T x \geq b_i$
  Allora viene definita una variabile ausiliaria di **surplas** $\{s_i : s_i = a_i^T x - b_i\}$ e il vincolo viene trasformato in:
  $$a_i^T x - s_i = b_i$$
  $$s_i \geq 0$$

Attenzione alle notazioni:

Se si ha invece una **Variabile libera in segno** devono essere effettuate maggiori ragionamenti.
Consideriamo una variabile x_j del problema originale che non sia vincolata in segno. Vengono introdotte due variabili **non negative** x_j^+ e x_j^- che rispettano la seguente condizione:
$$x_j = x_j^+ - x_j^-$$
E si sostituisce nella funzione obbiettivo e nei vincoli, la variabile libera in segno scomparirà ed al suo posto compariranno due variabili vincolate in segno.

Consideriamo invece un punto qualunque $\vec{x} \in R^n$:

- $s_i = 0 \iff$ il vincolo i è soddisfatto ed attivo (Significa che il vincolo sta limitando "attivamente" le scelte possibili) in $\vec{x}$.
- $s_i > 0 \iff$ il vincolo i è soddisfatto ma non attivo in $\vec{x}$.
- $s_i < 0 \iff$ il vincolo i è violato in $\vec{x}$.

Vari Esempi su Samsung Notes

3.2 Soluzioni di base

Scriviamo il sistema di equazioni evidenziando le colonne della matrice A

$$Ax = b \iff \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

Osserviamo che il rango(A)=m se e solo se esiste almeno un gruppo di m colonne in A linearmente indipendenti.
Indichiamo con $I_b = \{j_1, j_2, ..., j_m\}$ gli indici corrispondenti a una gruppo di m colonne di A linearmente indipendenti e con $I_n = \{j_{m+1}, ..., j_n\}$ i rimanenti indici. Avremo quindi la possibilità di distinguere due matrici, **di base** e **non di base**. E si ha quindi

$$Ax = b \iff Bx_B + Nx_N = b$$

$$Bx_B = b - Nx_N$$

Moltiplicando ambo i membri dell'equazione ottenuta per la matrice di base inversa si ricava:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) =$$

Si definisce **Soluzione di base** del sistema di equazioni (corrispondente alla base B) la soluzione che esi ottiene ponendo x_N)

$$x_B = B^{-1}$$

La soluzione di base x si dice **non degenere** se tutte le componenti di x_B sono diverse da zero, **degenere** se x_B h almeno una componente nulla, **ammissibile** se $x_B \geq 0$ **non ammissibile** se x_B ha almeno una componente negativa.

3.2.1 Proposizione

Sia X l'insieme delle soluzioni del sistema $Ax = b$, con $A \in R^{m \times n}, rango(A) = m < n$.
$x \in X$ è una soluzione di base $\iff$ se le componenti non nulle di$x$ corrispondono a colonne linearmente indipendenti della matrice A.
DIMOSTRAZIONE

- $\Longrightarrow$:
  Discende dalla definizione.

- $Longleftarrow$:
  Indichiamo $p \leq n$ il numero di componenti non nulle. Senza perdita di generalità, permutando gli indici delle sue componenti, x può essere scritto nella forma:

  $$x = (x_1, x_2, ..., x_p, 0, ..., 0$$

  Per ipotesi le colonne scelte $A_1, ..., A_p$ sono linearmente indipendenti perciò $p \leq m$.

- Se $p = m$:
  Allora ho finito e x è soluzione di base non degenere.
- Se $p < m$:
  Essendo il rango(A)=m, esistono certamente $m - p$ colonne di A che unite ad $A_1, ...A_p$ formano un insieme di **m** colonne linearmente indipendenti. Si ha infatti:

  $$B = [A_1, ..., A_p, A_{p+1}, ..., A_m]$$

  e x è soluzione di base degenere (Componenti in base nulle).

4 Lezione n4 14 10 2021

4.1 Teorema Fondamentale della PL

4.2 Teorema

Sia P il problema di programmazione lineare in forma standard, sotto le ipotesti $A \in R^m$, $rango(A) = m < n$.

- Se esiste soluzione ammissibile per P, allora esiste una soluzione ammissibile di base per P.
- Se esiste soluzione ottima per P, allora esiste una soluzione ottima di base P.

4.2.1 Dimostrazione

- **Dimostrazione 1**:
  Supponiamo esista una soluzione ammissibile, che indichiamo con $\overline{x} \in \Omega(P)$ e ciò significa che $A\overline{x} = b$ che possiamo riscrivere come:

  $$A_1\overline{x_1} + ... + A_1\overline{x_n} = b$$

  Ora riordiniamo le colonne in modo tale che le prime p componenti siano **non nulle** e le restanti $n - p$ risultano componenti nulle, separando le componenti nulle da quelle non nulle, e verifichiamo, per quelle non nulle se le colonne corrispondenti sono linearmente indipendenti o meno.

  $$\overline{x_1}, ..., \overline{x_p} \neq 0$$

  $$\overline{x_{p+1}}, ..., \overline{x_n} = 0$$

  Siccome, le prime p componenti sono non nulle, ed è una soluzione ammissibile posso riscrivere:

  $$\overline{x_1}, ..., \overline{x_p} > 0$$

  Ora vi sono due casi:

  - (a) **Caso Semplice**:
    Se $A_p, ..., A_p$ sono linearmente indipendenti allora si ha che $\overline{x}$ è soluzione di base ammissibile. Se si volesse mettere in relazione p e m allora si potrebbe dire che $p \leq m$, minore allora soluzione degenere (qualcuna nulla) , uguale allora non degenere.
  - (b) **Caso generico**:
    Se $A_1, ..., A_p$ sono linearmente dipendenti quindi noi abbiamo una soluzione ammissibile che però non è di base. Costruiamo da questa, una soluzione di base tramite un processo iterativo.
    Siccome le colonne sono **L.D** allora possiamo affermare che $\exists$ scalari

$d_1, ..., d_p$ non tutti nulli tali che $A_1 d_1 + ... + A_p d_p = 0$ inoltre si ha $\overline{x} \in \Omega(P)$ quindi possiamo scrivere:

$$A_1 \overline{x_1} + ... + A_p \overline{x_p} = b$$

Sottraendo da quest'ultima la precedente moltiplicata per un ϵ arbitrario diverso da 0, tale da perturbare le componenti del vettore $\overline{x}$, e si ottiene:

$$A_1(\overline{x_1} - \epsilon d_1) + ... + A_p(\overline{x_p} - \epsilon d_p) = b \quad \forall \epsilon \in R$$

Ponendo inoltre

$$d = (d_1, ..., d_p, 0, ..., 0)^T \in R^n$$

otteniamo la forma compatta:

$$A(\overline{x} - \epsilon d) = b \quad \forall \epsilon \in R$$

Quindi:

$$(\overline{x} - \epsilon d) \in X \quad \forall \epsilon \in R$$

Abbiamo scoperto un modo per spostarci da $\overline{x}$ senza violare i vincoli di eguaglianza; si noti che perturbando le componenti del vettore $\overline{x}$ qualcheduna potrebbe diventare negativa,e dobbiamo imporre le seguenti condizioni:

- **a** $(\overline{x} - \epsilon d) \geq 0$, e quindi $(\overline{x} - \epsilon d) \in \Omega(P)$.
- **b** Si vuole garantire che almeno una tra le prime p componenti di $\overline{x} - \epsilon d)$ si a nulla, questo perché riduco il numero di colonne che fanno parte della soluzione ammissibile (Rendere il vettore **L.I.**, se non si ottiene si effettua la ri-iterazione del procedimento).

Per soddisfare la condizione **(a)** dobbiamo considerare un oggetto composto dal vettore $\overline{x}$, dallo scalare ϵ e dal vettore d. Quindi stiamo considerando un sistema a p variabili nell'incognita ϵ. Dobbiamo quindi identificare i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento, contemporaneo, delle p disuguaglianze e le soluzioni dipendono dal coefficiente $d_i, \forall i = 1, ..., p$.

$$\overline{x_i} - \epsilon d_i \geq 0 \rightarrow \begin{cases} \forall \epsilon \in R \text{ se } d_i = 0 \\ \forall \epsilon \leq \frac{\overline{x_i}}{d_i} \text{ se } d_i > 0 \\ \forall \epsilon \geq \frac{\overline{x_i}}{d_i} \text{ se } d_i < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Ponendo:

$$\epsilon_1 = \begin{cases} -\infty \text{ se } d_i \geq 0 \forall i \\ max\{\frac{\overline{x_i}}{d_i} : d_i < 0\} \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{10}$$

$$\epsilon_2 = \begin{cases} \infty \text{ se } d_i \leq 0 \forall i \\ min\{\frac{\overline{x_i}}{d_i} : d_i > 0\} \text{ altrimenti} \end{cases} \tag{11}$$

E otteniamo:

$$(\overline{x} - \epsilon d) \geq 0 \quad \forall \epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2] \text{ con } \epsilon_1 < 0 < \epsilon_2 \tag{12}$$

Si noti che almeno uno dei due estremi è necessariamente finito, poiché se fossero simultaneamente infiniti allora si avrebbe che ogni d_i sia nullo ma ciò non è possibile. Scegliendo l'estremo finito almeno una delle disuguaglianze del sistema $\overline{x_i} - \epsilon d_i \geq 0$ sarà soddisfatta per uguaglianza (=0), quindi almeno una delle prime p componenti di $\overline{x} - \epsilon d$ sarà pari a 0, garantendo il soddisfacimento della condizione (b).

Arrivati a questo punto si effettua il test di indipendenza lineare sulle colonne di A corrispondenti alle sue componenti non nulle. Se la **L.I** è raggiunta abbiamo costruito una soluzione di base; in caso di esito negativo si dovrà reiterare il procedimento.

- **Dimostrazione 2**:
  Supponiamo esista una soluzione ottima x^* del problema P :

  $$x^* = (x_1^*, ..., x_p^*, 0, ..., 0)^T \text{ con } p \leq n \tag{13}$$

  - **Caso Semplice**:
    Se $A_1, ..., A_p$ sono linearmente indipendenti allora x^* è soluzione di base e abbiamo finito
  - **Caso Generico**: Se x^* non è soluzione di base, è possibile costruire

    $$(x^* - \epsilon d) \in \Omega(P) \quad \forall \epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2] \tag{14}$$

    Assegnando ad ϵ uno dei valori estremi (purchè finito), e individuando una soluzione di base ammissibile con al più $p-1$ componenti positive. Ma ovviamente dobbiamo stare attenti a non perdere la specifica di ottimalità.
    In particolare il corrispondente valore della funzione obiettivo ($c^T x^*$), al variare di ϵ, è il seguente:

    $$c^T (x^* - \epsilon d) = c^T x^* - \epsilon (c^T d) \tag{15}$$

    Apparentemente sembra che, attraverso una scelta opportuna di ϵ potrei avere una riduzione della funzione obiettivo. Ma questo non accade poiché necessariamente, $c^T d = 0$, quindi si conclude che la funzione ottima continua a valere $c^T x^*$. Non viene alterata l'ottimalità della soluzione.
    Infatti, se fosse $c^T d \neq 0$:

    $$\text{Se } c^T d < 0 \to \forall \epsilon \in [\epsilon_1, 0) \quad c^T (x^* - \epsilon d) < c^T x^* \tag{16}$$

    $$\text{Se } c^T d > 0 \to \forall \epsilon \in (0, \epsilon_2] \quad c^T (x^* - \epsilon d) < c^T x^* \tag{17}$$

i **Nel primo caso** stiamo dicendo che $\forall\epsilon \in [\epsilon_1, 0) \quad c^T(x^* - \epsilon d)$ è più piccola di $c^T x^*$ che però è il valore ottimo del nostro problema: quindi stiamo cadendo in contraddizione.

ii **Nel secondo caso** stiamo dicendo che $\forall\epsilon \in (0, \epsilon_2] \quad c^T(x^* - \epsilon d)$ è più piccola di $c^T x^*$ che però è il valore ottimo del nostro problema: quindi stiamo cadendo in contraddizione.

- **Approfondimenti dimostrazione**:

1. Nella dimostrazione 1 si è utilizzata la proprietà:

$$\overline{x} \in \Omega(P) \text{ma non di base} \rightarrow \exists d \in R^n : (\overline{x} - \epsilon d) \in \Omega(P) \quad \forall\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2] \tag{18}$$

E noto l'insieme:

$$\Gamma = \{x = \overline{x} - \epsilon d : \epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]\} \tag{19}$$

In termini geometrici possiamo dire che:

$$\overline{x} \in \Omega(P) \text{ non di base } \rightarrow \text{è interno al segmento } \Gamma \subset \Omega(P) \tag{20}$$

2. Nella dimostrazione 2 si è provato che:

x^* soluzione ottima non di base $\rightarrow$ è interno ad un segmento Γ ortogonale a c i cui infiniti punti sono soluzioni ottime per P.

Il segmento ammissibile all'interno del quale si trova la soluzione ottima non di base x^* deve essere ortogonale al gradiente della funzione obiettivo $\triangledown z = c$, e quindi collineare alle linee di livello della funzione.

4.3 Teorema Soluzioni di base e Punti estremi

4.3.1 Teorema

Sia P un problema di Programmazione Lineare in Forma Standard, e $\Omega(P)$ la sua regione ammissibile.
$\overline{x} \in \Omega(P)$ è una **soluzione di base ammissibile** per P se e solo se $\overline{x}$ è un **punto estremo** del poliedro $\Omega(P)$

4.3.2 Dimostrazione

- $\Rightarrow$:
Supponiamo che $\overline{x}$ è una soluzione ammissibile di base:

$$\overline{x} = (\overline{x_1}, ..., \overline{x_p}, 0, ..., 0)^T \quad A_1, ..., A_p \text{ Linearmente indipendenti} \tag{21}$$

Ipotizziamo, per assurdo, che $\overline{x}$ non sia un punto estremo di $\Omega(P)$. Allora :

$$\exists u, v \in \Omega(P) : \overline{x} = \lambda u + (1 - \lambda)v \text{ per qualche } \lambda \in (0, 1) \tag{22}$$

In altre parole stiamo dicendo che esistono due punti u, v , tale per cui la nostra soluzione può essere riscritta come combinazione strettamente convessa di u, v. Quindi $\overline{x}$ non è un punto estremo.
Poiché $\lambda > 0, (1-\lambda) > 0$ e $u_j \geq 0, v_j \geq 0 \ \forall j = 1, ..., n$ deve valere:

$$u_j = v_j = 0 \quad \forall j \in \{1, .., n\} \text{ tale che } \overline{x_j} = 0 \tag{23}$$

Quindi in corrispondenza degli zeri valgono 0 anche tutte le componenti di u, v e avremo:

$$u = (u_1, ..., u_p, 0, ..., 0)$$

$$v = (v_1, ..., v_p, 0, ..., 0)$$

Ma allora, essendo $\overline{x}, u, v \in \Omega(P)$, si ottiene:

$$\sum_{j=1}^{p} A_j \overline{x_j} = \sum_{j=1}^{p} A_j u_j = \sum_{j=1}^{p} A_j v_j = b \tag{24}$$

Che contraddice l'indipendenza lineare dei vettori $A_1, ..., A_p$ perchè esiste un vettore di non tutti zeri che genera il vettore nullo.

- $\Leftarrow$:
  Sia $\overline{x}$ un punto estremo del poliedro $\Omega(P)$. Se per assurdo, $\overline{x}$ fosse una soluzione ammissibile di base per (P), esso sarebbe un punto interno del segmento $\Gamma \subset \Omega(P)$ contraddiciendo l'ipotesi che $\overline{x}$ sia un punto estremo di $\Omega(P)$. NON IN BASE

4.4 Teorema fondamentale della PL dal punto di vista Geometrico

4.4.1 Teorema

Sia P il problema di Programmazione Lineare in Forma Strandard, sotto le ipotesi : $A \in R^{m \times n}, rango(A) = m < n$.

1. Se il poliedro $\Omega(P)$ è non vuoto allora esiste almeno un punto estremo in $\Omega(P)$.

2. Se il problema P ammette ottimo finito, allora uno dei punti estremi di $\Omega(P)$ è soluzione ottima.

LEZIONE N5 11/10/2021

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

ALGORITMO CHE SI BASA, ESCLUSIVAMENTE, SULL'ENUNCIATO DEL TEOREMA FONDAMENTALE.

CONSIDERIAMO UN PROBLEMA P DI PROGRAMMAZIONE LINEARE IN FORMA STANDARD

PRIMA FASE

```
1:  if Ω(P) ≠ ∅ then
2:      calcola una soluzione ammissibile di base x̄ di Ω(P)      ▷ inizializzazione
3:  else
4:      exit                                                    ▷ (P) è inammissibile.
5:  end if
```

SECONDA FASE

```
6:  if x̄ è soluzione ottima per (P) then                   1   ▷ test di ottimalità
7:      x* := x̄, z* := cᵀx̄
8:      exit                                                ▷ x* è la soluzione ottima
9:  end if
10: if esiste una sba x adiacente a x̄ con cᵀx ≤ cᵀx̄ then     2   ▷ cambio di sba
11:     x̄ := x, go to 6
12: else
13:     exit                                                ▷ (P) è inferiormente illimitato.
14: end if
```

SI OSSERVI PIÙ ATTENTAMENTE LA SECONDA FASE CHE RAPPRESENTA IL CUORE DELL'ALGORITMO

CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ PER SOLUZIONI DI BASE [TEST DI OTTIMALITÀ]

IL PUNTO DI PARTENZA È RICONOSCERE SE LA SOLUZIONE x_B PUÒ ESSERE RISCRITTA COME:

$$x_B = B^{-1}(b - Nx_N) = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

SIA IL GENERICO VETTORE $x \in \Omega(P)$, CHE RAPPRESENTA LA NOSTRA SOLUZIONE, COSÌ COSTRUITO:

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ x_N \end{pmatrix}$$

NEL CASO IN CUI $x_N = 0$ ALLORA $x = \bar{x}$ CHE È LA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE ASSOCIATA ALLA MATRICE B COSÌ CARATTERIZZATA:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$$

CON VALORE DI FUNZIONE OBBIETTIVO $\rightarrow$ $\boxed{c^T\bar{x} = c_B^T\bar{x}_B = c_B^T B^{-1}b}$

SI RICORDA CHE UNA SOLUZIONE È OTTIMA, QUANDO UNA QUALSIASI ALTRA SOLUZIONE AMMISSIBILE HA VALORE DI FUNZIONE OBBIETTIVO NON MIGLIORE:

$$c^T\bar{x} \le c^Tx \quad \forall x \in \Omega(P)$$

N.B. APPARTENERE A $\Omega(P)$ SIGNIFICA ESSERE SOLUZIONE DEL SISTEMA ED ESSERE COSTITUITI DA COMPONENTI NON NEGATIVE

L'OBBIETTIVO È DETERMINARE UNA CONDIZIONE CHE IMPLICA LA DISUGUAGLIANZA SOPRA RIPORTATA.

QUINDI VALUTIAMO LA FUNZIONE OBBIETTIVO ASSOCIATA ALLA SOLUZIONE GENERICA x :

$$c^T x = c^T_B x_B + c^T_N x_N$$

$$= c^T_B (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c^T_N x_N$$

ABBIAMO SOSTITUITO IL VALORE DI x_B E SVILUPPATO

$$= c^T_B B^{-1} b - c^T_B B^{-1} N x_N + c^T_N x_N$$

$$= c^T_B \bar{x}_B + (c^T_N - c^T_B B^{-1} N) x_N$$

ABBIAMO RACCOLTO PER x_N E MESSO IN RISALTO CHE $B^{-1}b$ SONO LE COMPONENTI IN BASE DI $\bar{x}$, SOSTITUENDO TALE QUANTITÁ CON $\bar{x}_B$

$$= c^T \bar{x} + (c^T_N - c^T_B B^{-1} N) x_N$$

$$c^T x = c^T \bar{x} + \hat{c}^T_N x_N$$

SI OSSERVI CHE $\bar{x}$ HA COME COMPONENTE DI BASE $\bar{x}_B$ E TUTTE LE ALTRE NULLE QUINDI POSSIAMO DIRE $c^T_B \bar{x}_B = c^T \bar{x}$

INOLTRE TALE QUANTITÁ $(c^T_N - c^T_B B^{-1} N)$ ALTRO NON É CHE IL VETTORE DEI COEFFICIENTI DEI COSTI RIDOTTI CHE INDICO CON $\hat{c}^T_N x_N$

LA SOLUZIONE GENERICA CHE STIAMO CONSIDERANDO $[x_N \geq 0]$, ALLORA BASTERÁ CHE $[\hat{c}^T_N \geq 0]$. SE SI VERIFICA TALE CONDIZIONE, ALLORA IL RISULTATO DELLA MOLTIPLICAZIONE SCALARE SARÁ $\hat{c}^T_N x_N \geq 0$ E ALLORA $\longrightarrow$ $c^T x = c^T \bar{x} + \hat{c}^T_N x_N \geq c^T \bar{x}$

SE I COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO SONO TUTTI NON NEGATIVI, ALLORA LA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE CORRENTE É UNA SOLUZIONE OTTIMA.

APPROFONDIMENTO

ABBIAMO TRASFORMATO LA FUNZIONE OBIETTIVO ORIGINALE DEL PROBLEMA (P), NELLA FUNZIONE RIDOTTA ALLO SPAZIO DELLE VARIABILI FUORI BASE :

$$z(x) = c^T x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \longrightarrow \hat{z}(x_N) = c^T \bar{x} + \hat{c}^T_N x_N : \mathbb{R}^{(n-m)} \to \mathbb{R}$$

PER EFFETTO DI TALE TRASFORMAZIONE, IL PROBLEMA ORIGINALE DIVENTA UN PROBLEMA RIDOTTO EQUIVALENTE A (P) PURCHÉ x_N SIA TALE DA MANTENERE $x_B \geq 0$

$$\begin{cases} \min & z(x) \\ \text{s.t.} & x \in \Omega(P) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \min & \hat{z}(x_N) = c^T \bar{x} + \hat{c}^T_N x_N \\ \text{s.t} & x_N \geq 0 \end{cases}$$

ESEMPIO SU POWER POINT

CAMBIO DELLA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE [CAMBIO DELLA SBA]

SIA $\bar{x}$ UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE PER (P); SCRIVIAMO ORA LA FORMA CANONICA RISPETTO ALLA BASE B (PROBLEMA RIDOTTO FORMALE)

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_B \\ \bar{x}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \min \ \underbrace{0^T}_{\text{VETTORE NULLO}} x_B + \hat{c}_N^T x_N \\ I \cdot x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\ x_B \geq 0 \quad x_N \geq 0 \end{cases}$$

SUPPONIAMO NON VALGA LA CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMALITÀ IN $\bar{x}$: $\hat{c}_N \ngeq 0$

ALLORA, ESISTE ALMENO UN COEFFICIENTE DI COSTO RIDOTTO NEGATIVO, IN CORRISPONDENZA DI UNA VARIABILE FUORI BASE:

$$\hat{c}_{\underbrace{K}_{\text{INDICE CHE INDICA LA VARIABILE K-ESIMA}}} = \hat{c}_{N(J)} < 0 \qquad \text{PER QUALCHE } J \in \{1, \dots, n-m\}$$

COME PROCEDIAMO?

SI NOTI CHE NEL PUNTO CORRENTE, LA VARIABILE $x_{N(J)}$ VALE 0, ALLORA AUMENTIAMO IL SUO VALORE DI UN $\delta > 0$, MANTENENDO PERÒ NULLE LE ALTRE VARIABILI NON IN BASE, LA FUNZIONE OBBIETTIVO NEL NUOVO PUNTO x DIMINUISCE:

VARIAZIONE FUNZIONE OBIETTIVO $\rightarrow$ $\Delta z = z(x) - z(\bar{x}) = c^T x - c^T \bar{x} = \hat{c}_{N(J)} \cdot \delta < 0$

> ATTENZIONE: IL VALORE DI δ DOVRÀ ESSERE TALE DA GARANTIRE CHE LA NUOVA SOLUZIONE x SIA AMMISSIBILE PER (P) MA NON PUÒ ESSERE ARBITRARIAMENTE GRANDE.

PONENDO x_N PARI A $\delta \hat{e}_J$, OVE $\hat{e}_J \in \mathbb{R}^{n-m}$ È IL J-ESIMO VETTORE DELLA BASE CANONICA, E SOSTITUENDO NEL SISTEMA SI OTTIENE

$$x_N = \delta \hat{e}_J = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x_B = \bar{x}_B - B^{-1} N x_N = \bar{x}_B - \delta \cdot (B^{-1} N) \hat{e}_J$$

OVE $(B^{-1}N) \cdot \hat{e}_J$ È LA J-ESIMA COLONNA DELLA MATRICE $B^{-1}N$, CHE POSSIAMO SCRIVERE COME $B^{-1} \cdot (N \hat{e}_J) = B^{-1} A_{N(J)} = B^{-1} A_K \in \mathbb{R}^m$ E CHE INDICHIAMO CON d

PER MANTENERE L'AMMISSIBILITÁ, OCCORRE DETERMINARE $\delta \geq 0$ IN MODO TALE CHE

$x_B = \bar{x}_B - \delta \cdot d \geq 0$

OVVERO SI HA LA NECESSITÁ DI RISOLVERE IL SISTEMA DI m DISEGUAGLIANZE LINEARI NELLA SOLA INCOGNITA δ

$$\bar{x}_B - \delta d_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$$

LA SOLUZIONE DELLA i-ESIMA DISEGUAGLIANZA DIPENDE DAL COEFFICIENTE d_i:

$$\bar{x}_{B(i)} - \delta d_i \geq 0 \begin{cases} \forall \delta \geq 0 & \text{SE } d_i \leq 0 \\ \delta \leq \bar{x}_{B(i)} / d_i & \text{SE } d_i > 0 \end{cases}$$

DA CUI SI RICAVA CHE IL SISTEMA É SODDISFATTO $\forall \delta \in [0, \bar{\delta}]$ DOVE $\bar{\delta} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_{B(i)}}{d_i} : d_i > 0 \right\}$

SI NOTI CHE SCEGLIENDO $\delta := \bar{\delta}$ OTTENIAMO IL MASSIMO DECREMENTO AMMISSIBILE PER LA FUNZIONE OBBIETTIVO E UNA NUOVA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE.

PER COMODITÁ, INDICHIAMO i^* L'INDICE DELLA DISEGUAGLIANZA DEL SISTEMA, A CUI CORRISPONDE IL MINIMO DI TALI RAPPORTI

$$i^* = \arg\min \left\{ \frac{\bar{x}_{B(i)}}{d_i} : d_i > 0 \right\}$$

PONENDO $\delta := \bar{\delta}$ LA DISEGUAGLIANZA i^* SARÁ SODDISFATTA PER UGUAGLIANZA E LA COMPONENTE DI INDICE $B(i^*)$ DELLA NUOVA SOLUZIONE SI ANNULLA: SIA $B(i^*) = h$

CONSIDERIAMO L'INSIEME DI INDICI DI COLONNA $B' = \{B \setminus \{B(i^*)\}\} \cup \{N(j)\}$

SI PUÓ DIMOSTRARE CHE LA MATRICE OTTENUTA DA B SOSTITUENDO LA COLONNA $A_{B(i^*)} = A_h$ CON LA COLONNA $A_{N(j)} = A_k$ É ANCORA UNA BASE.

LE DUE BASI B E B' SI DICONO ADIACENTI PERCHE SI DIFFERENZIANO PER UN SOLO ELEMENTO

- $\rightarrow$ x_k VARIABILE CHE ENTRA IN BASE
- $\rightarrow$ x_h VARIABILE CHE ESCE DALLA BASE.

PROBLEMA ILLIMITATO INFERIORMENTE

NEL CASO IN CUI $d_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ IL SISTEMA DI DISEGUAGLIANZE

$$\bar{x}_{\beta(i)} - \delta d_i \geq 0 \quad \text{É SODDISFATTO} \quad \forall \delta \geq 0$$

MA CIÓ EQUIVALE A DIRE CHE LA SOLUZIONE $x_B = \bar{x}_B - \delta d \geq 0$ É AMMISSIBILE

COMUNQUE SI SCELGA $\delta \geq 0$ E IL VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO DECRESCE ILLIMITATAMENTE AL CRESCERE DEL VALORE DI δ $[\, c^T x = c^T \bar{x} - \hat{c}_{N(j)} \cdot \delta \,]$

IN TAL CASO L'AGORITMO SI ARRESTA.

SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE DEGENERE

SE IL VALORE DI $\bar{\delta}$ VIENE RAGGIUNTO IN CORRISPONDENZA

DI PIÚ DISEGUAGLIANZE, ALTRETTANTE COMPONENTI CON INDICE IN β DELLA NUOVA SOLUZIONE

x ASSUMERANNO VALORE NULLO, MA SOLO UNA DI ESSE POTRÁ ESSERE CONSIDERATA VARIABILE

USCENTE DALLA BASE E DI CONSEGUENZA LA NUOVA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE x SARÁ

CERTAMENTE DEGENERE.

LA SCELTA DELLA VARIABILE USCENTE DI BASE IN QUESTO CASO NON É UNIVOCA

RIASSUNTO SECONDA FASE. DELL' ALGORITMO

Input: Una base ammissibile B, $\bar{x}_B = B^{-1}b$, $\bar{x}_N = 0$, $c^\top \bar{x} = c_B^\top B^{-1} b$

1: Calcola $\hat{c}_N^\top = c_N^\top - c_B^\top B^{-1} N$ COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO
2: **if** $\hat{c}_N^\top \geq 0$ **then** ▷ test di ottimalità
3: $\quad x^* := \bar{x}$, $z^* := c^\top \bar{x}$, **exit** ▷ x^* è la soluzione ottima
4: **end if** COLONNA CON COSTO RIDOTTO NEGATIVO
5: Scegli $k \in \mathcal{N} : \hat{c}_k = \hat{c}_{\mathcal{N}(j)} < 0$, calcola $d = B^{-1} A_k$ ▷ x_k entra in base
6: **if** $d \leq 0$ **then**
7: $\quad$ **exit** ▷ (P) è inferiormente illimitato.
8: **else** ALTRIMENTI DETERMINARE IL MINIMO DEI RAPPORTI
9: $\quad$ Calcola $\bar{\delta} = \min \{ \bar{x}_{\mathcal{B}(i)} / d_i : d_i > 0 \}$
10: $\quad$ Scegli $h = \mathcal{B}(i^*)$ tale che $\bar{\delta} = \bar{x}_{\mathcal{B}(i^*)} / d_{i^*}$ ▷ x_h esce dalla base
IDENTIFICHIAMO LA VARIABILE CHE DEVE USCIRE DALLA BASE
11: $\quad$ Calcola

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x}_B - \bar{\delta} d \\ \bar{\delta} \hat{e}_j \end{pmatrix}, \quad c^\top x = c^\top \bar{x} + \hat{c}_k \cdot \bar{\delta}$$

POSITIVO
NEGATIVO
QUELLA DI PARTENZA

12: $\quad \mathcal{B} := \mathcal{B} \setminus \{h\} \cup \{k\}$, $\mathcal{N} := \mathcal{N} \setminus \{k\} \cup \{h\}$, $\bar{x} := x$, **go to 1**
13: **end if**

COSA SUCCEDE SE AL PASSO 5 E AL PASSO 10

2

Notazione

Variabili di base

$$x_B = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{B}(1)} \\ \vdots \\ x_{\mathcal{B}(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Coefficienti di costo delle variabili di base

$$c_B = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{B}(1)} \\ \vdots \\ c_{\mathcal{B}(m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Variabili fuori base

$$x_N = \begin{pmatrix} x_{\mathcal{N}(1)} \\ \vdots \\ x_{\mathcal{N}(n-m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Coefficienti di costo delle variabili fuori base

$$c_N = \begin{pmatrix} c_{\mathcal{N}(1)} \\ \vdots \\ c_{\mathcal{N}(n-m)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

Soluzioni del sistema $Ax = b$ rispetto alla base B:

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}(b - N x_N) \\ &= B^{-1} b - B^{-1} N x_N \end{aligned}$$

Notazione

Indichiamo gli indici delle colonne in base con

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(1), \dots, \mathcal{B}(m)\}$$

e gli indici delle colonne fuori base con

$$\mathcal{N} = \{\mathcal{N}(1), \dots, \mathcal{N}(n-m)\}$$

Matrice di base

$$B = \left(A_{\mathcal{B}(1)} \mid A_{\mathcal{B}(2)} \mid \cdots \mid A_{\mathcal{B}(m)} \right)$$

Matrice non di base

$$N = \left(A_{\mathcal{N}(1)} \mid A_{\mathcal{N}(2)} \mid \cdots \mid A_{\mathcal{N}(n-m)} \right)$$

LEZIONE N6 21/10/2021

CONDIZIONI SUFFICIENTI DI OTTIMALITÁ

NELLA PRECEDENTE LEZIONE ABBIAMO INTRODOTTO E UTILIZZATO IL SEGUENTE TEOREMA

→ DATA UNA BASE AMMISSIBILE B DELLA MATRICE A DEL PROBLEMA (P) IN FORMA STANDARD, SE IL VETTORE DEI COSTI RIDOTTI É NON NEGATIVO

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

ALLORA LA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE ASSOCIATA ALLA BASE B É OTTIMA PER (P).

COROLLARIO: DATA UNA BASE AMMISSIBILE B DELLA MATRICE A DEL PROBLEMA (P) IN FORMA STANDARD, SE IL VETTORE DEI COSTI RIDOTTI É POSITIVO

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0$$

ALLORA LA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE ASSOCIATA ALLA BASE B É L'UNICA SOLUZIONE OTTIMA PER (P)

TEOREMA

SIA $\bar{x}$ UNA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE NON DEGENERE PER IL PROBLEMA (P). SE $\bar{x}$ É SOLUZIONE OTTIMA PER (P) ALLORA I COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO $\hat{c}_N$ SONO NON NEGATIVI.

DIMOSTRAZIONE

SIA $\bar{x}$ UNA SOLUZIONE DI BASE NON DEGENERE PER (P) E IPOTIZZIAMO PER ASSURDO $\hat{c}_N \not\geq 0$

SCELTO UN COEFFICIENTE DI COSTO RIDOTTO NEGATIVO E FACENDO ENTRARE IN BASE LA CORRISPONDENTE VARIABILE CON VALORE $\bar{\delta} > 0$, É POSSIBILE COSTRUIRE UNA NUOVA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE x CON VALORE DI FUNZIONE OBIETTIVO $c^T x < c^T \bar{x}$ CONTRADDICENDO L'OTTIMALITÁ DI $\bar{x}$

SOLUZIONE DI BASE DEGENERE

PRECEDENTEMENTE SI É OSSERVATO, CHE SE IL VALORE DI $\bar{\delta}$ VIENE RAGGIUNTO IN CORRISPONDENZA DI PIÚ DI UGUAGLIANZE, ALTRETTANTE COMPONENTI CON INDICE IN B DELLA NUOVA SOLUZIONE x ASSUMERANNO VALORE NULLO, MA SOLO UNA DI ESSE POTRÁ ESSERE CONSIDERATA VARIABILE USCENTE DALLA BASE E DI CONSEGUENZA LA NUOVA SOLUZIONE AMMISSIBILE DI BASE x SARÁ CERTAMENTE DEGENERE.

LA SCELTA DELLA VARIABILE USCENTE DI BASE IN QUESTO CASO NON É UNIVOCA

INOLTRE È POSSIBILE CHE SI ABBIA $\bar{\delta} = 0$ QUANDO

$$\exists i \in \{1, \dots, m\} : \bar{x}_{B(i)} = 0, d_i > 0$$

CIOÈ QUANDO $\bar{x}$ È DEGENERE.

IN TAL CASO, SEBBENE $\hat{c}_{N(J)} < 0$ L'INCREMENTO AMMISSIBILE È NULLO, QUINDI

$$x = \bar{x} \qquad \Delta z = 0$$

MA CAMBIA LA BASE.

LA VARIABILE DI INDICE $k = N(J)$ ENTRA IN BASE CON VALORE NULLO, QUELLA DI INDICE $h = B(i)$, CHE ERA IN BASE CON VALORE NULLO, ESCE DI BASE.

SI EFFETTUA COSÌ UN CAMBIO DI BASE DEGENERE.

ATTENZIONE: IN TAL CASO C'È RISCHIO DI LOOP, CAMBIANO BASE CICLICAMENTE SENZA MAI SPOSTARCI DA $\bar{x}$

INDETERMINAZIONI E REGOLA DI BLAND

Nel caso in cui, esistano più coefficienti di costo ridotto negativi, si hanno più variabili fuori base il cui incremento promette un decremento della funzione obiettivo. Scegliere la variabile entrante in base equivale a scegliere la direzione di spostamento sulla frontiera della regione ammissibile, ovvero il vertice adiacente su cui muoversi, e la sequenza di tali scelte individua l'itinerario da seguire per raggiungere il vertice ottimo; perciò è importante per l'efficienza dell'algoritmo.

Si utilizza un approccio **greedy**, in particolare il **Criterio del massimo decremento atteso**

$$|\hat{c}_k| = \max \{ |\hat{c}_l| : l \in N, \hat{c}_l < 0 \}$$

L'INDETERMINAZIONE SI HA QUINDI SOLO NEL CASO IN CUI IL VALORE DI $\bar{\delta}$ SIA RAGGIUNTO IN CORRISPONDENZA DI PIÙ INDICI, OVVERO QUANDO IL NUOVO VERTICE OTTENUTO DALLA CORRENTE ITERAZIONE È DEGENERE.

REGOLA DI BLAND

$\boxed{1}$ → SCELTA DELLA VARIABILE ENTRANTE IN BASE:

$$J^* = \min \{ J \in \{1, \dots, n-m\} : \hat{c}_{N(J)} < 0 \}$$

$\boxed{2}$ → SCELTA DELLA VARIABILE USCENTE DI BASE

$$i^* = \min \{ i \in \{1, \dots, m\} : \bar{\delta} = \frac{\bar{x}_{B(i)}}{d_i} \}$$

ESEMPIO SU PDF

ALGORITMO DEL SIMPLESSO

ABBIAMO EFFETTUATO UN ANALISI APPROFONDITA DELLA SECONDA FASE DELL'ALGORITMO, ORA SI ANALIZZI LA PRIMA FASE QUI RIPORTATA

```
if Ω(P) ≠ ∅ then
    calcola una soluzione ammissibile di base x̄ di Ω(P)      ▷ inizializzazione
else
    exit                                                     ▷ (P) è inammissibile.
end if
```

OSSERVANDO É FACILE INTUIRE CHE, CONSIDERANDO UN PROBLEMA (P) DI PROGRAMMAZIONE LINEARE IN FORMA STANDARD, LA PRIMA FASE DETERMINA UNA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE PER IL PROBLEMA (P) OPPURE CERTIFICA L'INAMMISSIBILITÁ DEL PROBLEMA.

IPOTESI

SI ASSUME CHE $b > 0$

L'IPOTESI NON É RESTRITTIVA, SE ESISTESSE UNA COMPONENTE $b_i < 0$ BASTEREBBE RISCRIVERE L'EGUAGLIANZA CON IL SEGNO CAMBIATO.

CASO PARTICOLARE [TUTTE VINCOLI DI DISEGUAGLIANZE MINORE UGUALE]

CONSIDERIAMO UN PROBLEMA DI PL CON q VARIABILI m VINCOLI

$$\begin{cases} \min \ d^T y \\ D y \leq b \\ y \geq 0 \end{cases} \qquad \text{CON} \quad D \in \mathbb{R}^{m \times q}$$

OTTENIAMO LA FORMA STANDARD, INDICANDO CON s IL VETTORE DELLE VARIABILI DI SLACK

$$\begin{cases} \min \ d^T y \\ D y + I s = b \\ y \geq 0, \ s \geq 0 \end{cases}$$

PONENDO $n = m + q$; $A = [D \mid I] \in \mathbb{R}^{m \times n}$; $x^T = (y^T, s^T)$; $c^T = (d^T, 0^T)$ E SCEGLIENDO $B = I$ $N = D$ IL PROBLEMA É GIA IN FORMA CANONICA.

LA VARIABILE DI BASE x_B CORRISPONDONO ALLE VARIABILI DI SLACK s.

IN OLTRE $\bar{x}_B = b$ QUINDI L'AMMISSIBILITÁ É GARANTITA DALLA NON NEGATIVITÁ DI b.

INFINE, COEFFICIENTI DI COSTO DELLE VARIABILI DI BASE SONO NULLI, QUINDI I COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO SONO $\hat{c}_N = c_N = d$

PERTANTO LA SOLUZIONE DI BASE INIZIALE É IMMEDIATAMENTE DISPONIBILE.

CASO GENERALE

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

PROBLEMA GIÁ IN FORMA STANDARD, E COSTRUIAMO SULLA BASE DI QUEST'ULTIMO IL PROBLEMA ARTIFICIALE, INTRODUCENDO PER OGNI VINCOLO UNA VARIABILE, DETTA ARTIFICIALE, NON NEGATIVA

$$(P^{(a)})\begin{cases} \min & \rho = \sum_{i=1}^{m} x_i^{(a)} \\ s.t & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \underbrace{x_i^{(a)}}_{\geq 0} = b_i \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n \\ & x_i^{(a)} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m \end{cases} \xrightarrow{\text{FORMA COMPATTA}} (P^{(a)})\begin{cases} \min & \rho = e^T x^{(a)} \\ & Ax + Ix^{(a)} = b \\ & x \geq 0, \ x^{(a)} \geq 0 \end{cases}$$

CON $e \in \mathbb{R}^m$, $e = (1, 1, \dots, 1)^T$

SELEZIONIAMO $B = I$ E OTTENIAMO

- $\bar{x}^{(a)} = b$ LE VARIABILI IN BASE ARTIFICIALI CORRISPONDONO AI TERMINI NOTI
- $\bar{x} = 0$ LE VARIABILI ORIGINARIE, FUORI DALLA BASE, POSTE A 0.
- $\bar{\rho} = \sum_{i=1}^{m} b_i$ IL VALORE DI $\bar{\rho}$ É DATO DALLA SOMMA DEI TERMINI NOTI.

LA SOLUZIONE $\left(\frac{\bar{x}}{\bar{x}^{(a)}}\right)$ É DI BASE E AMMISSIBILE PER $(P^{(a)})$, CIÓ CONSENTE DI APPLICARE LA SECONDA FASE AL PROBLEMA $(P^{(a)})$.

OSSERVAZIONI

- IL PROBLEMA ARTIFICIALE, COSÍ COSTRUITO, É SEMPRE AMMISSIBILE $\Omega(P^{(a)}) \neq \emptyset$;
- LA FUNZIONE OBIETTIVO É INFERIORMENTE LIMITATA SU $\Omega(P^{(a)})$, POICHÈ $\rho \geq 0$;
- $(P^{(a)})$ AMMETTE SEMPRE OTTIMO FINITO E $\rho^* \geq 0$

E PER COSTRUZIONE SI HA

$$x \in \Omega(P) \iff x' = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \in \Omega(P^{(a)}) \iff \rho(x') = 0$$

PROBLEMA ORIGINARIO

EQUIVALE A DIRE CHE

UN VETTORE COSÍ FORMATO

EQUIVALE A DIRE CHE QUESTO ACCADE ESCLUSIVAMENTE PER PUNTI DEL PROBLEMA ARTIFICIALE, LA QUALE FUNZIONE OBIETTIVO ASSOCIATA VALE 0

COSA ACCADE ALL'OTTIMO ???

INDICHIAMO CON $\acute{x}^*$ LA SOLUZIONE OTTIMA DEL PROBLEMA ARTIFICIALE, OTTENUTA TRAMITE L'ALGORITMO DEL SIMPLESSO.

$$\acute{x}^* = \begin{pmatrix} x^* \\ x^{(a)*} \end{pmatrix}$$

VARIABILE ARTIFICIALE.

CON ρ^* IL VALORE OTTIMO DELLA FUNZIONE OBIETTIVO.

SONO POSSIBILI 2 CASISTICHE

1 CASO

$\rho^* > 0$, ALLORA $\Omega(P^*) = \emptyset$

E L'ALGORITMO SI ARRESTA DICHIARANDO P INAMMISSIBILE.

2 CASO

$\rho^* = 0$, ALLORA CERTAMENTE SI AVRÁ:

$x_i^{(a)*} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, m$ E SI HANNO DUE CASISTICHE

- $\mapsto$ LE VARIABILI ARTIFICIALI SONO TUTTE FUORI BASE.
- $\mapsto$ ESISTONO ALMENO UN INDICE $\hat{\imath} \in \{1, \dots, m\}$ TALE CHE $x_{\hat{\imath}}^{(a)*} = 0$ MA IN BASE. SE CIÓ ACCADE LA SOLUZIONE OTTIMA É DEGENERE E L'UNICA OPERAZIONE DA EFFETTUARE IL CAMBIO DI BASE DEGENERE (SI EFFETTUA IL CAMBIO DI RAPPRESENTAZIONE DI UN PUNTO, MODIFICANDO LE COLONNE IN BASE E FUORI DALLA BASE).

Cambio di base degenere

Supponiamo che la variabile artificiale in base a valore nullo sia solo una, la variabile artificiale $x_{\hat{\imath}}^{(a)*} = 0$.

- Lo scambio degenere è possibile se e solo se per almeno una colonna A_k che non è in base l'elemento in riga $\hat{\imath}$ è non nullo. Non importa che sia $d_{\hat{\imath}} > 0$, perché le coordinate del punto non cambieranno, né importa se qualcuno dei nuovi coefficienti di costo ridotto dovesse risultare negativo. NON É UN PROBLEMA DI AMMISSIBILITÁ (SUL VINCOLO DEL SEGNO)
- Se la componente $\hat{\imath}$-esima del vettore $B^{-1}A_k$ è nulla per ogni k, la riga $a_{\hat{\imath}}^\top$ di A dipende linearmente dalle altre, cioè $rango(A) = m - 1$. Perciò si può rimuovere l'equazione $\hat{\imath}$-esima e la variabile $x_{\hat{\imath}}^{(a)}$ dall'insieme delle variabili di base.

SI TRATTA DI SCEGLIERE SOLO UNA BASE DIVERSA