UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DIMES

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica
A.A. 2021-2022
I semestre

Ricerca Operativa

Giovanni Giallombardo

DIMES, Università della Calabria

Sommario

1. Il Problema del Massimo Flusso MOLTO LUNGO PROBLEMA STRATEGICO
2. Cammini aumentanti

Il Problema del Massimo Flusso

Premessa

CONSIDERIAMO UNA SLIDE GIÁ VISTA PRECEDENTEMENTE

Problemi di flusso di costo minimo senza vincoli di capacità

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

- $V = \{1, \dots, m\}$ è l'insieme dei nodi, $|V| = m$
- $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi, $|E| = n$
- $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle divergenze nei nodi
- $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei costi unitari di flusso sugli archi
- u_{ij} è la capacità su ogni arco $(i, j) \in E$, sufficientemente ampia da non costituire una limitazione sul flusso che può transitare lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$
- $f_{ij} \geq 0$ rappresenta la quantità di flusso che transita lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$

Premessa

Problemi di flusso di costo minimo con vincoli di capacità

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

- $V = \{1, \ldots, m\}$ è l'insieme dei nodi, $|V| = m$
- $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi, $|E| = n$
- $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle divergenze nei nodi — DATO OPERATIVO
- $c \in \mathbb{R}^n$ è il vettore dei costi unitari di flusso sugli archi — DATO STRATEGICO
- u_{ij} è la capacità su ogni arco $(i, j) \in E$ — SENZA L'IPOTESI SULLA CAPACITÀ, MOLTO PROBABILMENTE MOLTO VINCOLANTE
- $f_{ij} \geq 0$ rappresenta la quantità di flusso che transita lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$

Motivazioni

Vincoli di capacità

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

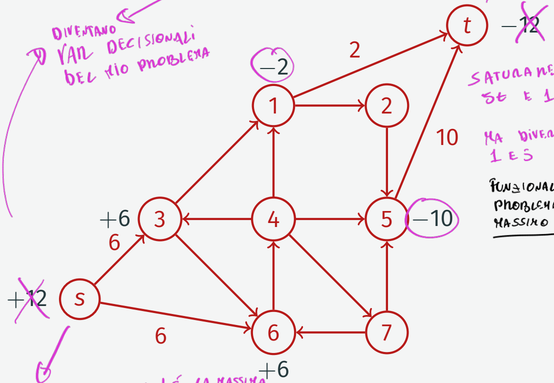
- La definizione della capacità sugli archi è associata alla progettazione della rete (network design)
- Network design è un problema strategico (TOPOLOGIA DELLA RETE) PROBLEMA STRATEGICO CHE HA COME OBIETTIVO LIVELLI DI SERVIZIO SPECIFICI SULLA BASE DELL'AMBIENTE UTILIZZATO
- MCFP è un problema operativo
  DATO NODI E GRAFO
- Nella fase di progettazione, un aspetto del problema consiste nel fornire risposta alla seguente domanda: qual è la massima quantità di flusso che riusciremo a far circolare sulla rete, data la topologia selezionata, con le relative capacità sugli archi?

PICCOLA PARTE DEL PROBLEMA DI NETWORK DESIGN

MCFP $\longrightarrow$ Max Flow

NODO DI DOMANDA

DIVENTANO VAR DECISIONALI DEL MIO PROBLEMA



SATURARE ARCO st E 1t

MA DIVERGENZA NULLA IN 1 E 5

FUNZIONALE AL PROBLEMA DEL MASSIMO FLUSSO

NODO DI OFFERTA

QUAL'È LA MASSIMA QUANTITÀ CHE POSSO INVIARE DA S A t (FLUSSO MAX CHE PUÒ ATTRAVERSARE LA RETE

Osservazione

Qualunque rete di flusso può essere trasformata in un'altra equivalente con un'unica sorgente ed un unico terminale (in senso forte).

Indichiamo con s_l, $l \in S$ i nodi sorgente (in senso debole) del grafo dato, con divergenze $b_{s_l} > 0$, e t_k, $k \in T$ i nodi terminale con $b_{t_k} < 0$.

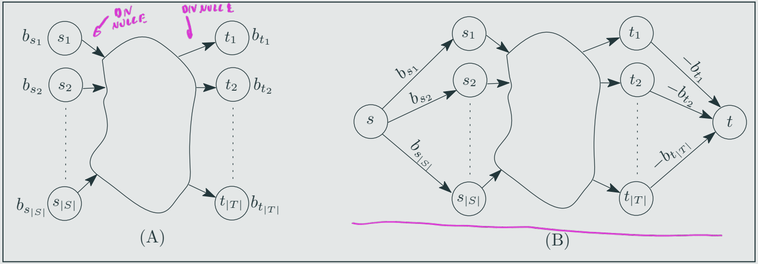
Introduciamo una mega-sorgente s e la colleghiamo a ciascun nodo s_l, $l \in S$, mediante un arco (s, s_l) di capacità $u_{s,s_l} = b_{s_l}$.

Introduciamo un mega-terminale t e lo colleghiamo o a ciascun nodo t_k, $k \in T$, mediante un arco (t_k, t) di capacità $u_{t_k,t} = -b_{t_k}$.

I nodi s_l e t_k diventano nodi di transito: $b_{s_l} = 0 \ \forall l \in S$, $b_{t_k} = 0 \ \forall k \in T$

Problema del Massimo Flusso

Trasformazione della rete (A) nella rete (B) con unica s ed unico t.



Notazione e ipotesi

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

Dati

- $V = \{1, \ldots, m\}$ è l'insieme dei nodi, $|V| = m$
- $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi, $|E| = n$
- $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle divergenze nei nodi
- u_{ij} è la capacità (finita) su ogni arco $(i, j) \in E$

Ipotesi

Sulla rete esistono due nodi speciali:

- Il nodo s è l'unico nodo sorgente e ha solo archi uscenti
- Il nodo t è l'unico nodo terminale e ha solo archi entranti
- Tutti gli altri nodi sono di transito, $b_i = 0$, per ogni $i \in V \setminus \{s, t\}$

Notazione e ipotesi

Variabili decisionali

$f_{ij} \geq 0$ rappresenta la quantità di flusso che transita lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$.

Obiettivo

Si vuole determinare la massima quantità di flusso che può essere trasferita dal nodo sorgente al nodo terminale:

UN NODO SORGENTE

$$v = \sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} \longrightarrow \text{FLUSSI USCENTI DA 'S'}$$

Ciò equivale a massimizzare la divergenza del nodo sorgente.

Non essendoci limitazioni sulle divergenze dei nodi s e t, il valore massimo del flusso dipenderà esclusivamente dalla topologia del grafo e dalle capacità degli archi.

Max flow problem (MFP) RAGIONANDO SULLA SORGENTE

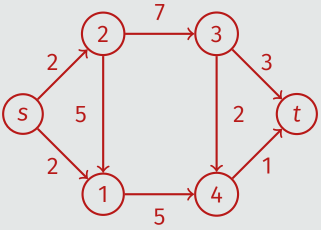
$$
(MFP) \begin{cases} \max \quad v = \sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} \\ \sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} \\ 0 \le f_{ij} \le u_{ij} \quad \text{VINCOLI DI CAPACITÀ} & \forall (i,j) \in E \end{cases}
$$

Max flow problem (MFP) RAGIONANDO SUL NODO TERMINALE

$$
(MFP) \begin{cases} \max \quad v = \sum_{j:(j,t)\in E} f_{jt} \\ \sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} \\ 0 \le f_{ij} \le u_{ij} \quad \text{VINCOLI DI CAPACITÀ} & \forall (i,j) \in E \end{cases}
$$

Problema del Massimo Flusso

Esempio



NODO SORGENTE

NODO TERMINALE

LA QUANTITÀ DI MASSIMO FLUSSO DA s a t ?

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{array}$$

Scriviamo le equazioni di continuità per tutti i nodi della rete:

ENTRANTI NEL NODO TERMINALE

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j:(s,j)\in E} f_{sj} & & & = & v \\
\sum\limits_{j:(i,j)\in E} f_{ij} & - & \sum\limits_{j:(j,i)\in E} f_{ji} & = & 0 \quad \forall i \in V, i \neq s,t \\
 & - & \sum\limits_{j:(j,t)\in E} f_{jt} & = & -v
\end{cases}
$$

USCENTI DAL NODO SORGENTE

cioè

MATRICE DI INCIDENZA

COLONNA IN PIÚ

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j:(s,j)\in E} f_{sj} & & & - v & = & 0 \\
\sum\limits_{j:(i,j)\in E} f_{ij} & - & \sum\limits_{j:(j,i)\in E} f_{ji} & & = & 0 \quad \forall i \in V, i \neq s,t \\
 & - & \sum\limits_{j:(j,t)\in E} f_{jt} & + v & = & 0
\end{cases}
$$

COEFF -1 IN s

COEFF -1 IN t

Problema del Massimo Flusso

PRODUCO UN VETTORE COLONNA h POS s m-2 ZERI POS T

Indichiamo con $h = (-1, 0_{m-2}^{\top}, 1)^{\top} \in \mathbb{R}^m$ e otteniamo

Forma compatta (Problema di circolazione) TENENDO IN CONSIDERAZIONE s e t

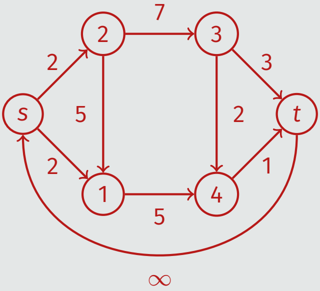
$$\begin{cases} \max & & & v & & \\ & Af & + & hv & = & 0 \\ & f & & & \leq & u \\ & f & & & \geq & 0 \end{cases}$$

Il vettore h ha la medesima struttura delle colonne di una matrice di incidenza, infatti rappresenta un arco uscente da t ed entrante in s, cui è associata la variabile flusso v.

Con l'aggiunta dell'arco fittizio (t, s) si ottiene il grafo esteso $G' = \langle V, E \cup (t, s) \rangle$, in cui i nodi sorgente e terminale si trasformano in nodi di transito (problema di circolazione).

L'obiettivo è la massimizzazione del flusso sull'arco (fittizio) (t, s).

Esempio



$$A' = (A \mid h) = \begin{array}{cc} \begin{matrix} & & & & & & & h \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ t \end{matrix} \end{array}$$

Cammini aumentanti

Cammini aumentanti

FLUSSO INVIATO SUI NODI CHE RISPETTA TUTTE LE EQ. DI CONTINUITÁ DEI NODI, E $0<f_{ij}<u_{ij}$
ED É COMPRESO TRA 0 E LA CAPACITÁ DELL'ARCO PERCORSO

Idea

Se una distribuzione ammissibile di flusso f non è ottima, è possibile inviare altro flusso da s a t.

In particolare, è possibile determinare una nuova soluzione ammissibile con miglior valore della funzione obiettivo modificando il flusso solo sugli archi di un opportuno cammino da s a t.

Notazione

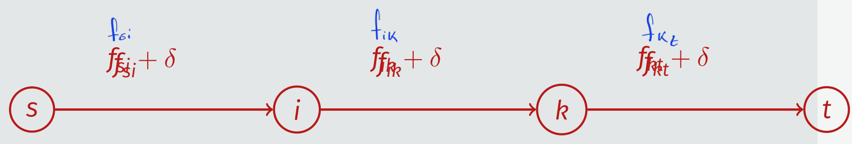
$$i \xrightarrow{f_{ij},\, u_{ij}} j$$

A ogni arco viene associata una coppia di valori rappresentanti il flusso che attraversa l'arco e la capacità dell'arco.

Cammini aumentanti

Consideriamo il cammino semplice $\mathcal{P} = [s, i, k, t]$ ed il flusso ammissibile f

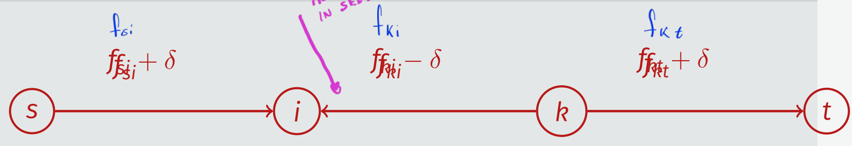
Cammino orientato da s a t



ALMENO UN ARCO IN SENSO CONCORDE ALLORA CATENA SEMPLICE

Catena semplice da s a t

δ



Cammini aumentanti

CAMMINO

Se si incrementa il flusso sull'arco (s, i) ponendo $f'_{si} = f_{si} + \delta$, $\delta > 0$, anche il flusso sull'arco (i, k) deve crescere della stessa quantità:

$$\sum_{j:(i,j)\in E} f'_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f'_{ji} = \sum_{j:(i,j)\in E} (f_{ij} + \delta) - \sum_{j:(j,i)\in E} (f_{ji} + \delta) = 0$$

Lo stesso vale sul nodo k, e di conseguenza il valore di flusso che entra in t aumenterà di δ:

$$v' = v + \delta$$

MA DEVO STARE ATTENTO ALLA CAPACITÀ

Il massimo valore dell'incremento δ può essere facilmente determinato considerando i vincoli di capacità sugli archi del cammino:

POSSO DETERMINARE IL MASSIMO INCREMENTO

$$\begin{cases} f_{si} + \delta \leq u_{si} \\ f_{ik} + \delta \leq u_{ik} \\ f_{kt} + \delta \leq u_{kt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta \leq u_{si} - f_{si} \\ \delta \leq u_{ik} - f_{ik} \\ \delta \leq u_{kt} - f_{kt} \end{cases} \Rightarrow \delta \leq \hat{\delta} = \min \{u_{ij} - f_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{P}\}$$

Se $\hat{\delta} = 0$ c'è almeno un arco *saturo*, quindi il cammino non è utile per incrementare il flusso presente sulla rete.

 CATENA

Consideriamo la catena $\mathcal{P} = [s, i, k, t]$, il cui orientamento è sempre da s a t ma alcuni archi possono essere discordi rispetto a tale orientamento.

Partizioniamo gli archi in due insiemi $\mathcal{P}^+$ (archi concordi con l'orientamento $s \to t$), e $\mathcal{P}^-$ (archi discordi):

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^- \qquad (s, i), (k, t) \in \mathcal{P}^+.$$

Se $f'_{si} = f_{si} + \delta$, essendo (s, i) e (k, i) archi entranti in i (nessun arco uscente subisce variazioni), dovrà essere $f'_{ki} = f_{ki} - \delta$:

EQUAZIONE DI CONTINUITÁ

$$\sum_{j:(i,j)\in E} f'_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f'_{ji} = \sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - (\sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} + \delta - \delta) = 0$$

Analogamente per il nodo k, per il quale gli archi di interesse: (k, i) e (k, t) sono entrambi uscenti:

$$f'_{ki} = f_{ki} - \delta \;\Rightarrow\; f'_{kt} = f_{kt} + \delta$$

e quindi $v' = v + \delta$.

Cammini aumentanti

Il massimo valore consentito per δ si ottiene imponendo il rispetto delle limitazioni inferiori e superiori sul flusso degli archi di $\mathcal{P}$:

$$\hat{\delta} = \min\left\{\delta^+, \delta^-\right\}$$

dove

MINIMO CAPACITÁ
CAPACITÁ - FLUSSO

MINIMO
FLUSSO

$$\delta^+ = \min\left\{u_{ij} - f_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{P}^+\right\} \qquad \delta^- = \min\left\{f_{ij} \mid (i,j) \in \mathcal{P}^-\right\}$$

Se $\hat{\delta} = 0$ la catena non è utile per incrementare il flusso: ciò si verifica se almeno un arco di $\mathcal{P}^+$ è saturo o almeno un arco di $\mathcal{P}^-$ ha flusso nullo, ovvero è *scarico*.

Cammini aumentanti

Definizione

Dato il grafo $G = \langle V, E \rangle$ ed una distribuzione di flusso ammissibile f di valore v su G, si definisce *cammino aumentante per f su G* una catena $\mathcal{P}$ da s a t tale che, posto

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$$

dove $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$ sono, rispettivamente, i sottoinsiemi degli archi di $\mathcal{P}$ concordi e discordi rispetto all'orientamento $s \rightarrow t$, si abbia:

$$\begin{cases} f_{ij} < u_{ij} & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} > 0 & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^- \end{cases}$$

Cammini aumentanti

Abbiamo dimostrato la seguente

Proposizione

Sia $G = \langle V, E \rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità u_{ij} sugli archi; sia f una distribuzione ammissibile di flusso su G di valore v. Se esiste $\mathcal{P}$ cammino aumentante per f, allora la seguente distribuzione di flusso:

$$\boxed{f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} - \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^- \\ f_{ij} & (i,j) \notin \mathcal{P} \end{cases}}$$

è ammissibile, con valore di flusso $v' = v + \hat{\delta} > v$.

Da cui segue

Corollario (condizione necessaria di ottimalità) CUORE DELL'ALGORITMO PER I PROBLEMI DEL MAX FLUSSO

Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora f non è soluzione ottima per il problema del massimo flusso su G.

Algoritmo di Ford-Fulkerson

SCHEMA ALGORITMO

Schema

1. Calcola una distribuzione di flusso ammissibile iniziale f e sia v il valore di flusso corrispondente (per esempio: $f = 0$, $v = 0$).
2. Cerca un cammino aumentante per f su G.
3. Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora calcola $\hat{\delta}$, f', $v' = v + \hat{\delta}$ e itera (vai a 2).
4. Altrimenti STOP: $f^* := f$, $v^* := v$.

Algoritmo di Ford-Fulkerson

Osservazioni

1. La definizione di cammino aumentante ha senso solo se riferita ad un dato grafo G e ad una assegnata distribuzione ammissibile di flusso f su G.
2. Come conseguenza della definizione di $\hat{\delta}$, dopo l'aggiornamento di flusso sugli archi di un cammino aumentante $\mathcal{P}$, almeno uno degli archi di $\mathcal{P}^+$ risulterà saturo o uno degli archi di $\mathcal{P}^-$ risulterà scarico: perciò $\mathcal{P}$ non potrà essere un cammino aumentante per f'.

Ricerca del cammino aumentante

Visita del grafo in due fasi

- Fase in avanti: Tecnica di propagazione di etichette IN CHE MODO RAGGIUNGIAMO I NODI DA S A T
- Fase all'indietro: Ricostruzione del cammino mediante lettura delle etichette

Etichette

PREDECESSORE DEL NODO CORRENTE

INCREMENTO DEL NODO CORRENTE

L'etichetta del nodo i ha due campi: $[pred(i), incr(i)]$

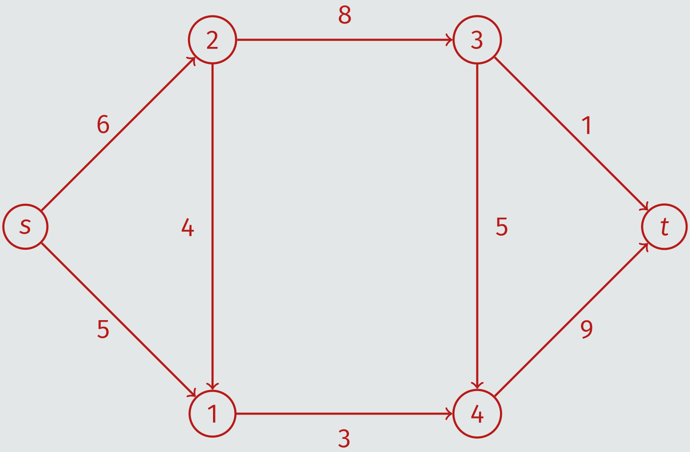
- $pred(i) = \pm k$, con $k \in V$, indica il nodo che precede i nel cammino parziale da s ad i, con segno $+$ o $-$ a seconda che l'arco tra k ed i sia concorde o discorde rispetto all'orientamento del cammino
- $incr(i)$ contiene il massimo incremento ammissibile di flusso sugli archi del cammino parziale da s ad i.

ESEMPI LEZIONE

Cammini aumentanti

Esempio

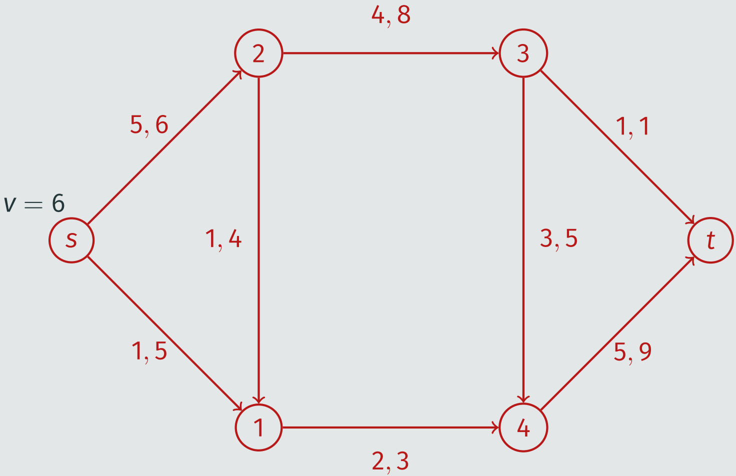
RETE MASSIMO FLUSSO



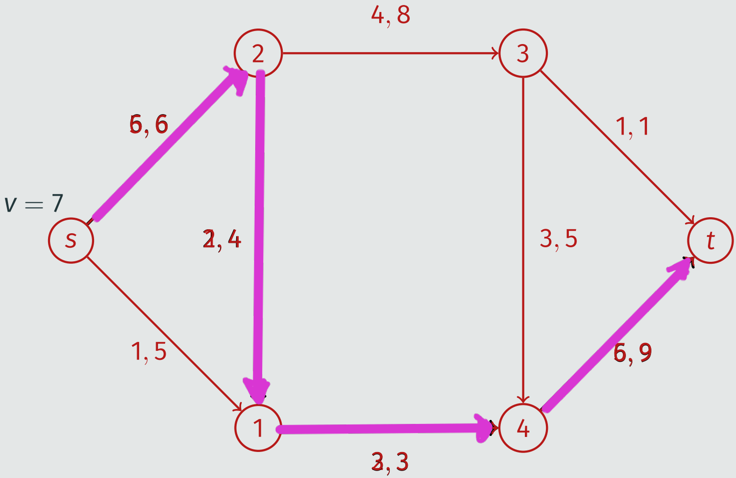
Cammini aumentanti

Esempio: flusso ammissibile

INTRODOTTI I FLUSSI



Esempio: incremento del flusso $v = 6$ uscente da s



Cammini aumentanti

Esempio: incremento del flusso v = 7 uscente da s