LEZIONE N7 27/10/2021

TEORIA DUALITÁ

SI CONSIDERI UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE LINEARE IN FORMA STANDARD, DETTO PROBLEMA PRIMALE

$$\begin{cases} \min & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad c \in \mathbb{R}^n ;\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} ;\ b \in \mathbb{R}^m$$

SI SCELGA ORA UNA SOLUZIONE $\bar{x} \in \Omega(P)$, E QUINDI APPARTENENDO ALLA REGIONE AMMISSIBILE DEL P. SOPRA RIPORTATO, SI PUÓ AFFERMARE $A\bar{x} = b$ E $\bar{x} \geq 0$. DIAMO ORA UNA RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO DEL PROBLEMA $c^T\bar{x}$.

IDENTIFICANDO UN VETTORE $y \in \mathbb{R}^m$ POSSO DIRE CHE:

$$c^T\bar{x} = c^T\bar{x} + \underline{(b - A\bar{x})}^T y$$

QUESTA EGUAGLIANZA VALE PERCHE $(b - A\bar{x})$ É UN VETTORE NULLO

$$= c^T\bar{x} + b^T y - \bar{x}^T A^T y$$

SI NOTI CHE $\bar{x}^T A^T y = (A^T y)^T \bar{x}$

$$= c^T\bar{x} + b^T y - (A^T y)^T \bar{x}$$

RACCOGLIAMO A FATTOR COMUNE E OTTENIAMO

$$= b^T y + (c - A^T y)^T \bar{x}$$

ORA TALI PASSAGGI SONO VALIDI PER UN QUALSIASI VETTORE $y \in \mathbb{R}^m$ E QUINDI POSSO VINCOLARE ULTERIORMENTE TALE VARIABILE (DAL GENERALE AL PARTICOLARE) IN MODO TALE DA OTTENERE $A^T y \leq c$.
SE TALE PROPRIETÁ VIENE SODDISFATTA ALLORA $c - A^T y \geq 0$ E QUINDI IL PRODOTTO $(c - A^T y)^T \bar{x} \geq 0$.
MA ALLORA

$$c^T\bar{x} = b^T y + \underbrace{(c - A^T y)^T \bar{x}}_{\geq 0}$$

STO ~~ABD~~ SOTTRAENDO UNA QUANTITÁ MAGGIORE O UGUALE A 0

$$c^T\bar{x} \geq b^T y \qquad \forall y \in \mathbb{R}^m : c - A^T y \geq 0$$

QUINDI RICERCANDO IL MASSIMO DI $b^T y$ TRA TUTTI I VETTORI IN $\mathbb{R}^m$ CHE SODDISFANO $c - A^T y \geq 0$ OTTENIAMO UN LOWER BOUND PER L'OTTIMO DI (P). LA RICERCA VIENE EFFETTUATA DA UN PROBLEMA DI PROGRAMMAZIONE CHE PRENDE IL NOME DI PROBLEMA DI DUALITÁ (D)

$$(D) \begin{cases} \max & b y^T \\ & A^T y \leq c \end{cases}$$

CHE PRESENTA m VARIABILI (UNA PER OGNI VINCOLO IN (P))
I COEFF. DELLA F.O. DI (D) SONO I TERMINI NOTI DI (P)
(D) HA n VINCOLI, UNO PER OGNI VARIABILE IN (P)
IL GENERICO J-ESIMO VINCOLO É DELLA FORMA $A_J^T y \leq c_J$

DUALE DI UN PROBLEMA NON IN FORMA STANDARD. [VINCOLO ≥]

SUPPONIAMO CHE (P) SODDISFI TUTTE LE CONDIZIONI DELLA FORMA STANDARD TRANNE UNA, IL VINCOLO i-ESIMO É DI DISEGUAGLIANZA:

$$a_i^T x \geq b_i$$

INTRODUCIAMO QUINDI UNA VARIABILE DI SURPLUS s_i PER PASSARE ALLA FORMA STANDARD.

$$a_i^T x - s_i = b_i \qquad s_i \geq 0$$

QUINDI SI AVRANNO UNA SERIE DI VINCOLI DEL TIPO

$$\begin{aligned} a_1^T x &= b_1 \\ &\vdots \\ a_i^T x - s_i &= b_i \\ &\vdots \\ a_m^T x &= b_m \end{aligned}$$

QUINDI LA MATRICE ASSOCIATA ALLA FORMA STANDARD SARÁ DATA DALLA MATRICE A PIÚ IL VETTORE $-\hat{e}_i$ (s_i) CHE É UN VETTORE DI SOLI ZERI E UN -1 IN POSIZIONE i-ESIMA

$$(A \,\vdots\, -\hat{e}_i) \quad \text{OVE} \quad -\hat{e}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(P_{FS}) \begin{cases} \min \ c^T x + 0\, s_i \\ (A \,\vdots\, -\hat{e}_i) \begin{pmatrix} x \\ s_i \end{pmatrix} = b \\ x \geq 0 \quad s_i \geq 0 \end{cases}$$

$$(D) \begin{cases} \max \ b^T y \\ \begin{bmatrix} A^T \\ -\hat{e}_i^T \end{bmatrix} y \leq \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \max \ b^T y \\ A^T y \leq c \\ -\hat{e}_i^T y \leq 0 \end{cases}$$

IDENTIFICA LA i-ESIMA RIGA $[-y_i]$

SVILUPPANDO SI OTTIENE ↓

NOTA: $[A_i - \hat{e}_i]^T = \begin{bmatrix} A^T \\ -\hat{e}_i \end{bmatrix}$

$$(D) \begin{cases} \max \ b^T y \\ A^T y \leq c \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

TALE RISULTATO CI DICE CHE DA UN PROBLEMA DI PARTENZA IN CUI COMPARIVA UN VINCOLO DI MAGGIORE UGUALE, TALE VINCOLO GENERA ATTRAVERSO LE RELAZIONI DI DUALITÁ UN VINCOLO SUL SEGNO DELL' i-ESIMA VARIABILE DUALE.

[VINCOLO ≤] SI EFFETTUANO PASSAGGI SIMMETRICI AL CASO PRECEDENTE E SI OTTIENE

$$\begin{cases} \max \ b^T y \\ A^T y \leq c \\ y_i \leq 0 \end{cases}$$

[VARIABILE NON VINCOLATA IN SEGNO]

NEL CASO IN CUI SI ABBIA UNA VARIABILE NON VINCOLATA IN SEGNO x_J, QUEST'ULTIMA VIENE SOSTITUITA CON LA DIFFERENZA DI DUE VARIABILI POSITIVE $x_J = x_J^+ - x_J^-$ $(x_J^+ \geq 0; x_J^- \geq 0;)$

LE NUOVE VARIABILI COMPARIRANNO NELLA FUNZIONE OBIETTIVO CON COSTI c_J E $-c_J$ AL POSTO DI c_J E NEI VINCOLI CON COLONNE DI COEFFICIENTI A_J E $-A_J$ AL POSTO DI A_J.

PER OTTENERE IL PROBLEMA DUALE LA MATRICE A VA TRASPOSTA:

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & A_J & -A_J & \vdots & \vdots \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ A_J \\ -A_J \\ --- \\ --- \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{MOLTIPLICHIAMO PER } y \text{ E TALE QUANTITÀ DEVE ESSERE MINORE UGUALE DEL VETTORE DEI COSTI DEL PRIMALE}} \begin{pmatrix} --- \\ --- \\ A_J \\ -A_J \\ --- \\ --- \end{pmatrix} y \leq \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_J \\ -c_J \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

LE COMPONENTI SDOPPIATE IN MANIERA ESPLICITA SONO RISPETTIVAMENTE $A_J^T y \leq c_J$ $\;-A_J^T y \leq -c_J$

QUINDI CORRISPONDE IL SEGUENTE VINCOLO DI EGUAGLIANZA $A_J^T y = c_J$

IN GENERALE

(P)		(D)
VINCOLO DI DISEGUAGLIANZA	$\longrightarrow$	VARIABILE VINCOLATA IN SEGNO
VARIABILE LIBERA IN SEGNO	$\longrightarrow$	VINCOLO DI UGUAGLIANZA

COPPIA PRIMALE - DUALE

DEFINIAMO LA COPPIA DI PROBLEMI PRIMALE DUALE SIMMETRICA:

$$(P) \begin{cases} \min & c^T x \\ & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{cases} \qquad (D) \begin{cases} \max & b^T y \\ & A^T y \leq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

PERÓ É NOTO CHE IN UN PROBLEMA IN FORMA STANDARD ABBIAMO DEI VINCOLI DEL TIPO DI UGUAGLIANZA, MA QUESTO NON É UN PROBLEMA, UN'UGUAGLIANZA PUÒ ESSERE DESCRITTA INFATTI, TRAMITE UNA COPPIA DI DISUGUAGLIANZE:

$$\overset{(u)}{Ax \geq b} \; ; \; \overset{(v)}{-Ax \geq -b}$$

INDICHIAMO CON $u \in \mathbb{R}^m$ E $v \in \mathbb{R}^m$, I VETTORI DI VARIABILI DUALI CORRISPONDENTI AI DUE GRUPPI DI DISEGUAGLIANZA E IL PROBLEMA DUALE DIVENTA

$$(D) \begin{cases} \max & b^T u - b^T v \\ & A^T u - A^T v \leq c \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \max & b^T (u - v) \\ & A^T (u - v) \leq c \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{cases}$$

POSTO $y = u - v$, IL VETTORE y É LIBERO IN SEGNO, E IL PROBLEMA DUALE OTTENUTO COINCIDE CON IL DUALE DELLA FORMA STANDARD, QUINDI AD OGNI VINCOLO DI UGUAGLIANZA IN (P) CORRISPONDE UNA VARIABILE NON VINCOLATA IN SEGNO IN (D)

PROPOSIZIONE

PER OGNI COPPIA DI PROBLEMI PRIMALE-DUALE, IL DUALE DEL PROBLEMA DUALE É IL PROBLEMA PRIMALE

DIMOSTRAZIONE

Dimostrazione

Consideriamo la coppia primale-duale simmetrica, e costruiamo il duale di (D). Portiamo (D) nella forma di problema di minimo con vincoli di $\geq$.

$$(D)\left\{\begin{array}{lrcl} \max & b^\top y & & \\ & A^\top y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right. \iff -\left\{\begin{array}{lrcl} \min & -b^\top y & & \\ & -A^\top y & \geq & -c \\ & y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Indichiamo con x il vettore delle variabili duali ed applicando la definizione di duale simmetrico, otteniamo:

$$(D(D)) \quad -\left\{\begin{array}{lrcl} \max & -c^\top x & & \\ & -Ax & \leq & -b \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lrcl} \min & c^\top x & & \\ & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}\right. \iff (P)$$

Quindi ogni coppia di problemi di PL di cui l'uno sia il duale dell'altro, è possibile parlare di coppia di problemi duali.

RECAP RELAZIONE PRIMALE - DUALE

Indichiamo con

- I l'insieme degli indici dei vincoli di eguaglianza
- J l'insieme degli indici dei vincoli di diseguaglianza ($\geq$)
- M l'insieme degli indici delle variabili libere
- N l'insieme degli indici delle variabili vincolate (≥ 0)

	Primale $\longrightarrow$ Duale $\longleftarrow$	Duale Primale	
Obiettivo	min	max	Obiettivo
Vincoli	$= b_i, i \in I$	$y_i, i \in I$, libere	Variabili
	$\geq b_i, i \in J$	$y_i, i \in J, y_i \geq 0$	
Variabili	$x_j \geq 0, j \in N$	$\leq c_j, j \in N$	Vincoli
	$x_j, j \in M$, libere	$= c_j, j \in M$	

ESEMPI...