UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DIPARTIMENTO DI
INGEGNERIA INFORMATICA,
MODELLISTICA, ELETTRONICA
E SISTEMISTICA
DIMES

Corso di Laurea in
Ingegneria Informatica
A.A. 2021-2022
I semestre

Ricerca Operativa

Giovanni Giallombardo

DIMES, Università della Calabria

Sommario

Riepilogo

Problema del Massimo Flusso

Consideriamo un grafo orientato e connesso $G = \langle V, E \rangle$

Dati

- $V = \{1, \ldots, m\}$ è l'insieme dei nodi, $|V| = m$
- $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi, $|E| = n$
- $b \in \mathbb{R}^m$ è il vettore delle divergenze nei nodi
- u_{ij} è la capacità (finita) su ogni arco $(i, j) \in E$ ← VINCOLANTE RISPETTO AI CASI PRECEDENTI

Ipotesi

Sulla rete esistono due nodi speciali:

- Il nodo s è l'unico nodo sorgente e ha solo archi uscenti
- Il nodo t è l'unico nodo terminale e ha solo archi entranti
- Tutti gli altri nodi sono di transito, $b_i = 0$, per ogni $i \in V \setminus \{s, t\}$

Variabili decisionali

$f_{ij} \geq 0$ rappresenta la quantità di flusso che transita lungo l'arco (i, j) per ogni $(i, j) \in E$.

Problema del Massimo Flusso

Max flow problem (MFP)

$$
(MFP) \begin{cases} \max \quad v = \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} & \\ \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 & \forall i \in V \setminus \{s,t\} \\ 0 \leq f_{ij} \leq u_{ij} & \forall (i,j) \in E \end{cases}
$$

MFP come problema di circolazione

Indichiamo con $h = (-1, 0_{m-2}^\top, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$

$$
\begin{cases} \max & & & v & & \\ & Af & + & hv & = & 0 \\ & f & & & \leq & u \\ & f & & & \geq & 0 \end{cases}
$$

MASSIMIZZARE
IL FLUSSO

Cammini aumentanti

STRUMENTO

Idea

Se una distribuzione ammissibile di flusso f non è ottima, è possibile inviare altro flusso da s a t. In particolare, è possibile determinare una nuova soluzione ammissibile con miglior valore della funzione obiettivo modificando il flusso solo sugli archi di un opportuno cammino da s a t.

SUCCESSIONE SEMPLICE

Definizione

Dato il grafo $G = \langle V, E \rangle$ ed una distribuzione di flusso ammissibile f di valore v su G, si definisce *cammino aumentante per f su G* una catena $\mathcal{P}$ da s a t tale che, posto

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^+ \cup \mathcal{P}^-$$

dove $\mathcal{P}^+$ e $\mathcal{P}^-$ sono, rispettivamente, i sottoinsiemi degli archi di $\mathcal{P}$ concordi e discordi rispetto all'orientamento $s \to t$, si abbia:

$$\begin{cases} f_{ij} < u_{ij} & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} > 0 & \forall (i,j) \in \mathcal{P}^- \end{cases}$$

NON SCARICHI

Cammini aumentanti

Proposizione

Sia $G = \langle V, E \rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità u_{ij} sugli archi; sia f una distribuzione ammissibile di flusso su G di valore v.
Se esiste $\mathcal{P}$ cammino aumentante per f, allora la seguente distribuzione di flusso:

$$f'_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^+ \\ f_{ij} - \hat{\delta} & (i,j) \in \mathcal{P}^- \\ f_{ij} & (i,j) \notin \mathcal{P} \end{cases}$$

è ammissibile, con valore di flusso $v' = v + \hat{\delta} > v$.

Corollario (condizione necessaria di ottimalità)

Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora f non è soluzione ottima per il problema del massimo flusso su G.

Algoritmo di Ford-Fulkersson

FINCHÉ ESISTE UN CAMMINO AUMENTANDO

LA SOLUZIONE

CORRENTE NON É OTTIMO

Algoritmo di Ford-Fulkerson

Schema

1. Calcola una distribuzione di flusso ammissibile iniziale f e sia v il valore di flusso corrispondente (per esempio: $f = 0$, $v = 0$).
2. Cerca un cammino aumentante per f su G.
3. Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora calcola $\hat{\delta}$, f', $v' = v + \hat{\delta}$ e itera (vai a 2).
4. Altrimenti STOP: $f^* := f$, $v^* := v$.

CONDIZIONE DI USCITA

Osservazioni

1. La definizione di cammino aumentante ha senso solo se riferita ad un dato grafo G e ad una assegnata distribuzione ammissibile di flusso f su G.
2. Come conseguenza della definizione di $\hat{\delta}$, dopo l'aggiornamento di flusso sugli archi di un cammino aumentante $\mathcal{P}$, almeno uno degli archi di $\mathcal{P}^+$ risulterà saturo o uno degli archi di $\mathcal{P}^-$ risulterà scarico: perciò $\mathcal{P}$ non potrà essere un cammino aumentante per f'.

Ricerca del cammino aumentante

Visita del grafo in due fasi

- Fase in avanti: Tecnica di propagazione di etichette
- Fase all'indietro: Ricostruzione del cammino mediante lettura delle etichette

Etichette

L'etichetta del nodo i ha due campi: $[pred(i), incr(i)]$

ARCO IN AVANTI
O ARCO IN INDIETRO

- $pred(i) = \pm k$, con $k \in V$, indica il nodo che precede i nel cammino parziale da s ad i, con segno $+$ o $-$ a seconda che l'arco tra k ed i sia concorde o discorde rispetto all'orientamento del cammino
- $incr(i)$ contiene il massimo incremento ammissibile di flusso sugli archi del cammino parziale da s ad i.

Propagazione delle etichette

Alla generica iterazione indichiamo con $W \subset V$ l'insieme dei nodi già etichettati.

Estraiamo $i \in W$, ponendo $W := W \setminus \{i\}$, e propaghiamo l'etichetta ai nodi adiacenti e non ancora etichettati: MI PONGO QUINDI TALE DOMANDA: ESISTONO NODI DIRETTAMENTE RAGGIUNGIBILI DA i ANCORA NON ETICHETTATI ?

$$(i,j) \in E : \; j \notin W, \; \underbrace{f_{ij} < u_{ij}}_{\text{NO SATURAZIONE OK}} \implies pred(j) := +i, \;\; incr(j) := \min\{incr(i), \underbrace{u_{ij} - f_{ij}}_{\text{SE È RIMASTO POCO DA SATURARE MI DEVO ACCONTENTARE}}\}$$

J TALE CHE ESISTE i,J

$+i$: MI RICORDA CHE SONO ARRIVATO A SU J A PARTIRE DA i ATTRAVERSO UN ARCO PERCORSO IN SENSO COERENTE (AVANTI)

$$(j,i) \in E : \; j \notin W, \; f_{ji} > 0 \implies pred(j) := -i, \;\; incr(j) := \min\{incr(i), f_{ji}\}$$

ANCORA NON ETICHETTATO

$-i$: SENSO NON COERENTE ALL'INDIETRO

$incr(i)$: QUELLO CHE SONO RIUSCITO A PORTARMI AD i

Se (i,j) è saturo o se (j,i) è scarico, j non può essere etichettato da i.

La propagazione delle etichette continua fino a che $t \in W$ oppure $W = \emptyset$.

Ricostruzione del cammino

SE TRAMITE TALE MECCANISMO

- Se t viene raggiunto, allora si è individuato un cammino aumentante da s a t e $\hat{\delta} = incr(t)$. E MA COME CI SONO ARRIVATO FINO A t ??
- Procedendo a ritroso, è possibile ricostruire il cammino $\mathcal{P}$ ed aggiornare la distribuzione di flusso sui suoi archi.
- L'ultimo arco è certamente $(pred(t), t) \in \mathcal{P}^+$, su cui il flusso subirà un incremento pari a $\boxed{\hat{\delta}.}$
- Se $pred(pred(t)) = +k$, il penultimo arco è $(k, pred(t)) \in \mathcal{P}^+$; altrimenti è $(pred(t), k) \in \mathcal{P}^-$, ed il flusso sarà aggiornato di conseguenza ($+\hat{\delta}$ oppure $-\hat{\delta}$).

IL FLUSSO VIENE INCREMENTATO SEMPRE DELLA STESSA QUANTITÀ PRESTABILITA

Ricostruzione del cammino

- Completata la fase a ritroso col raggiungimento della sorgente s, si azzerano le etichette ponendo $W := \emptyset$ e si itera.
- Se, invece, la propagazione delle etichette si conclude senza aver etichettato t ($W = \emptyset$), allora non esiste alcun cammino aumentante per il flusso corrente f su G, e l'algoritmo si arresta restituendo in output $f^* := f$, $v^* := v$.

Condizione necessaria di ottimalità (già dimostrata)

Se esiste un cammino aumentante per f su G, allora f non è soluzione ottima per il problema del massimo flusso su G.

Condizione sufficiente di ottimalità (da dimostrare)

Se non esiste un cammino aumentante per f su G, allora f è soluzione ottima per il problema del massimo flusso su G.

VAR DI FLUSSO = INCREMENTO DI FLUSSO

$\Delta v = 0$, $W^* = \emptyset$, *esisteCamminoAumentante* = False, $\hat{\delta} := 0$
repeat
  for all $j \in V$ **do** (CIASCUN NODO DEL GRAFO EFFETTUIAMO UN ETICHETTATURA BANALE)
    $\underline{pred(j)} := \underline{0}$, $\underline{incr(j)} := \underline{+\infty}$
  end for
  $W := \{s\}$ NODO S DENTRO W
  while $W \neq \emptyset$ **and** $t \notin W$ **do**
    estrai il nodo i da W, $\underline{W := W \setminus \{i\}}$ ELIMINIAMO i DALL'INSIEME DEI NODI
    for all $j \notin W$ **do**
      if $(i, j) \in E$ **and** $f_{ij} < u_{ij}$ **then**
        $pred(j) := +i$, $incr(j) := \min\{incr(i), u_{ij} - f_{ij}\}$
        $W := W \cup \{j\}$
        if $j = t$ **then**
          $\underline{esisteCamminoAumentante := \text{True}}$ (ABBIAMO TROVATO IL CAMMINO AUMENTANTE
        end if
      end if
      if $(j, i) \in E$ **and** $f_{ji} > 0$ **then**
        $pred(j) := -i$, $incr(j) := \min\{incr(i), f_{ji}\}$
        $W := W \cup \{j\}$
      end if METTO J IN W
    end for
  end while

Algoritmo di Ford e Fulkerson con flusso iniziale f di valore v

if *esisteCamminoAumentante* **then**
  $\hat{\delta} := incr(t)$, $\Delta v := \Delta v + \hat{\delta}$, $j := pred(t)$, $f_{jt} := f_{jt} + \hat{\delta}$
  while $j \neq s$ **do** NODO CHE CI CONSENTE RAGGIUNGERE t
    if $pred(j) > 0$ **then** ARCO PERCORSO IN AVANTI
      $f_{pred(j),j} := f_{pred(j),j} + \hat{\delta}$
    else ARCO PERCORSO ALL'INDIETRO
      $f_{j,pred(j)} := f_{j,pred(j)} - \hat{\delta}$
    end if
    $j := pred(j)$ NODI DEL GRAFO CHE SICURAMENTE CONTIENE S MA NON CONTIENE T
  end while J == S
else TUTTI I NODI: È UN SOTTOINSIEME DI NODI DEL GRAFO CHE SICURAMENTE CONTIENE S MA NON CONTIENE T
  INIZIALE VARIAZIONE
  $W^* := \{s\}$, $v_{max} := v + \Delta v$, $f^* := f$
  for all $j \in V$ **do**
    if $j \neq s$ **and** $pred(j) \neq 0$ **then**
      $W^* := W^* \cup \{j\}$
    end if
  end for
end if
until esisteCamminoAumentante
return f^*, $v_{\max}$, W^*

Flussi e Sezioni $s - t$

Flussi e Sezioni s − t

Sezione s − t

Consideriamo una rete di flusso $G = \langle V, E \rangle$ con sorgente s e terminale t.

Si definisce sezione s-t (oppure taglio che separa s da t) una partizione $(W, \overline{W})$ dell'insieme V in due insiemi W e $\overline{W}$ tali che:

$$W \cup \overline{W} = V, \quad W \cap \overline{W} = \emptyset, \quad s \in W, \quad t \in \overline{W}$$

Gli archi del grafo che hanno un estremo in W e l'altro in $\overline{W}$:

$$(i, j) \in E \text{ tali che } \; i \in W, j \in \overline{W} \; \text{ oppure } \; i \in \overline{W}, j \in W$$

sono detti archi del taglio (se tali archi venissero rimossi il grafo risulterebbe sconnesso).

Si definisce capacità della sezione s-t $(W, \overline{W})$ la capacità complessiva degli *archi in avanti del taglio*:

$$C(W, \overline{W}) = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} u_{ij}$$

Flussi e Sezioni $s - t$

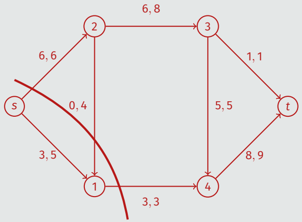
Proposizione

Sia data una rete di flusso $G = \langle V, E \rangle$ con sorgente s e terminale t. Per ogni flusso ammissibile f di valore v, per ogni $(W, \overline{W})$ sezione $s - t$, si ha:

$$v = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ji}$$

cioè il valore del flusso presente sul grafo può essere misurato come flusso netto che attraversa il taglio.

Esempio: $W = \{s, 1\}$ $\overline{W} = \{2, 3, 4, t\}$



Flussi e Sezioni s − t

Dimostrazione

Una distribuzione di flusso ammissibile f su G soddisfa

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} = v \\ \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in V, i \neq s, t \end{cases}$$

Indichiamo con $(W, \overline{W})$ una sezione $s - t$ e riscriviamo le equazioni nel modo seguente:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j:(s,j)\in E} f_{sj} = v \\ \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in W \setminus \{s\} \\ \displaystyle\sum_{j:(i,j)\in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in E} f_{ji} = 0 \quad \forall i \in \overline{W} \setminus \{t\} \end{cases}$$

Flussi e Sezioni s − t

Dimostrazione

Sommando le equazioni relative ai nodi $i \in W$ e al nodo s si ottiene:

$$\sum_{j \in V} f_{sj} + \sum_{i \in W \setminus \{s\}} \sum_{j \in V} f_{ij} - \sum_{i \in W \setminus \{s\}} \sum_{j \in V} f_{ji} = v$$

Decomponendo le somme su $j \in V$ in somme su $j \in W$ e $j \in \overline{W}$ otteniamo:

$$\sum_{j \in W} f_{sj} + \sum_{j \in \overline{W}} f_{sj} + \sum_{i \in W \setminus \{s\}} \sum_{j \in W} f_{ij} + \sum_{i \in W \setminus \{s\}} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} f_{ji} - \sum_{i \in W} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ji} = v$$

Flussi e Sezioni $s - t$

Dimostrazione

Accorpando il primo e terzo termine, così come pure secondo e quarto, l'equazione si può scrivere:

$$\sum_{i \in W} \sum_{j \in W} f_{ij} + \sum_{i \in W} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W} \sum_{j \in W} f_{ji} - \sum_{i \in W} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ji} = v$$

da cui si ottiene la tesi:

$$\sum_{i \in W} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W} \sum_{j \in \overline{W}} f_{ji} = v$$

Flussi e Sezioni $s - t$

Teorema di Ford e Fulkerson (max flow - min cut)

Sia $G = \langle V, E \rangle$ una rete di flusso con sorgente s, terminale t e capacità $u_{ij} > 0$ sugli archi $(i, j) \in E$.

1. Per ogni flusso ammissibile f di valore v e per ogni sezione $s - t$ $(W, \overline{W})$ si ha:
$$v \leq C(W, \overline{W})$$
2. Esiste una sezione $s - t$, $(W^*, \overline{W}^*)$, tale che:
$$v^* = C(W^*, \overline{W}^*)$$
3. Un flusso ammissibile f ed una sezione $s - t$ $(W, \overline{W})$ sono il flusso di valore massimo e la sezione di capacità minima se e solo se
$$\begin{cases} f_{ij} = u_{ij} & \forall (i, j) \in E : i \in W, j \in \overline{W} \\ f_{ij} = 0 & \forall (i, j) \in E : i \in \overline{W}, j \in W \end{cases}$$

Flussi e Sezioni $s - t$

Dimostrazione

1. Per la proposizione precedente e l'ammissibilità di f si ha

$$v = \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ij} - \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} f_{ji} \leq \sum_{i \in W, j \in \overline{W}} u_{ij} - 0 = C(W, \overline{W})$$

2. Sia W^* l'insieme dei nodi etichettati all'ultima iterazione dell'Algoritmo di Ford-Fulkerson, e sia $\overline{W}^* = V \setminus W^*$.

   Allora $s \in W^*$, $t \in \overline{W}^*$, e $(W^*, \overline{W}^*)$ è una sezione $s - t$. Inoltre, è facile verificare che:

$$\begin{array}{lcl} (i,j) \in E : i \in W^*, j \in \overline{W}^* & \Rightarrow & f^*_{ij} = u_{ij} \\ (j,i) \in E : i \in W^*, j \in \overline{W}^* & \Rightarrow & f^*_{ji} = 0 \end{array}$$

   altrimenti si avrebbe $j \in W^*$, contro l'ipotesi (procedura di etichettatura).

Flussi e Sezioni s − t

Dimostrazione

Quindi, sostituendo si ottiene:

$$v^* = \sum_{i \in W^*, j \in \overline{W}^*} f^*_{ij} - \sum_{i \in W^*, j \in \overline{W}^*} f^*_{ji} = \sum_{i \in W^*, j \in \overline{W}^*} u_{ij} = C(W^*, \overline{W}^*)$$

Ne discende che v^* è il massimo valore di flusso sulla rete, che $C(W^*, \overline{W}^*)$ è la minima capacità delle sezioni $s - t$ e che il criterio di arresto dell'Algoritmo è corretto.

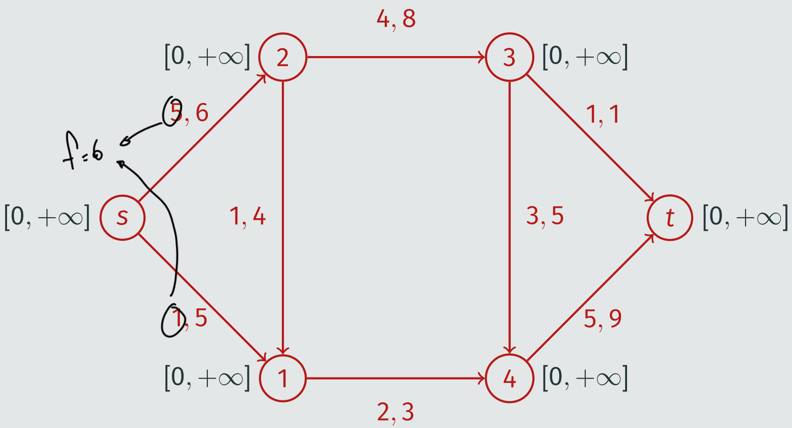
3. La condizione sufficiente di ottimalità è già stata dimostrata nella prova dell'enunciato 2.

   Per provare la condizione necessaria, procedendo per assurdo, basta osservare che, se in corrispondenza di un flusso e di una sezione ottimali esistessero archi in avanti della sezione non saturi e/o archi indietro non scarichi, il flusso netto attraverso la sezione sarebbe strettamente inferiore alla sua capacità, contraddicendo $v^* = C(W^*, \overline{W}^*)$.

Esempi lezione

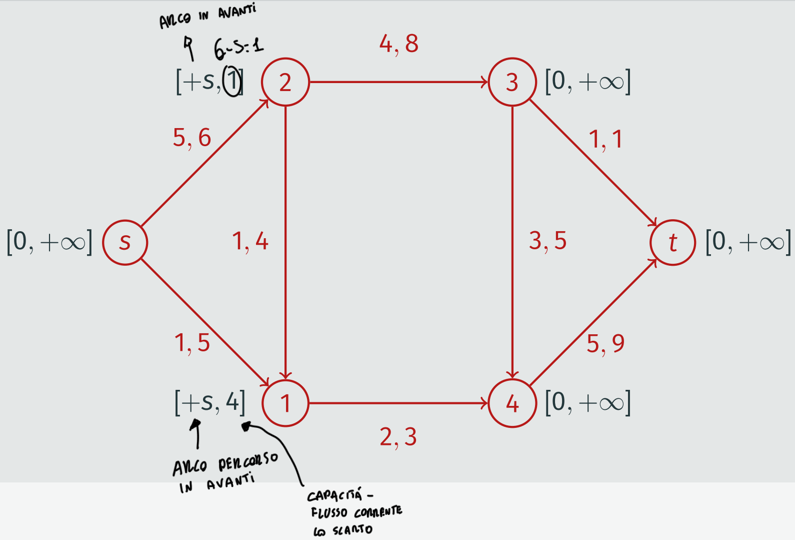
Esempio

Ricerca del cammino aumentante: $v = 6$



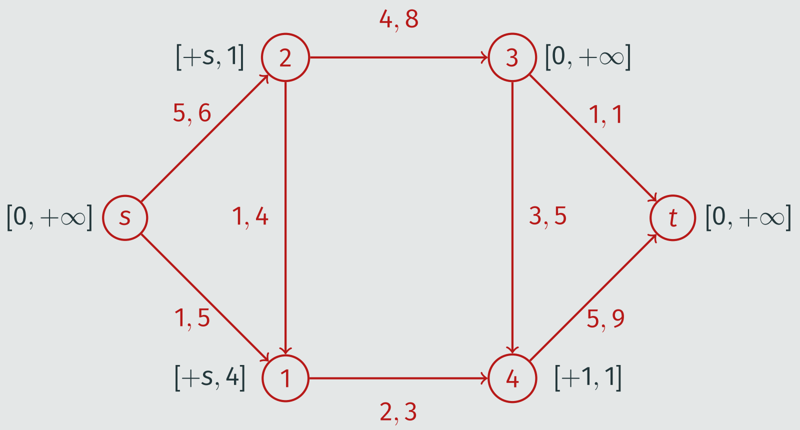
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{s}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{s} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \rangle$



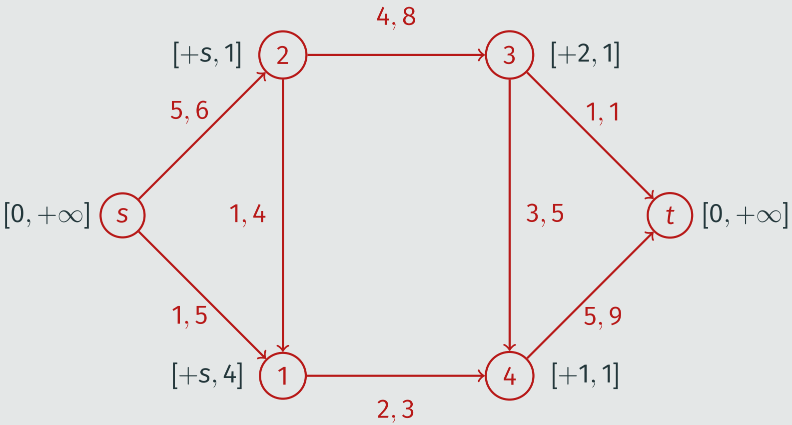
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1},\mathbf{2}\}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{1}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}\}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2},\mathbf{4}\}\rangle$



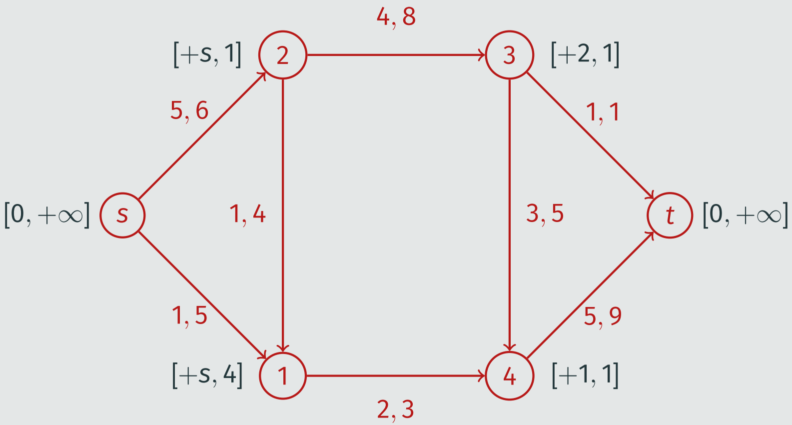
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}, \mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{2} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\} \rangle$



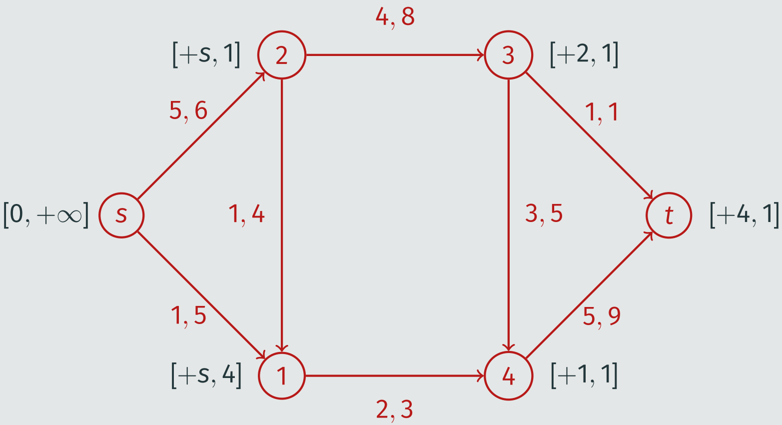
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}, \mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{3} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle$



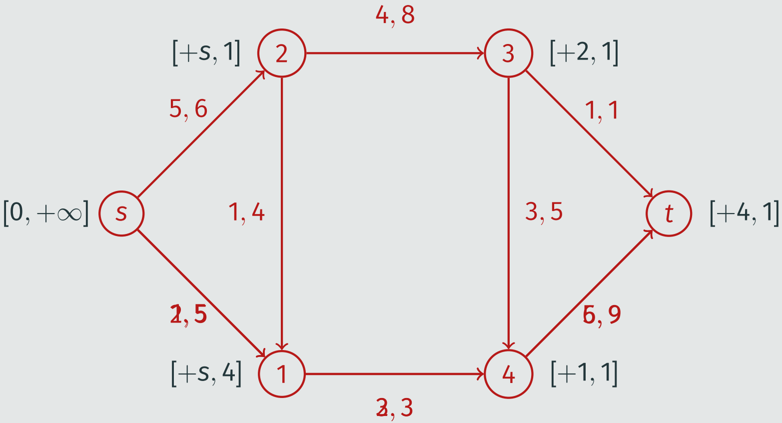
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{4} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{t}\} \rangle$



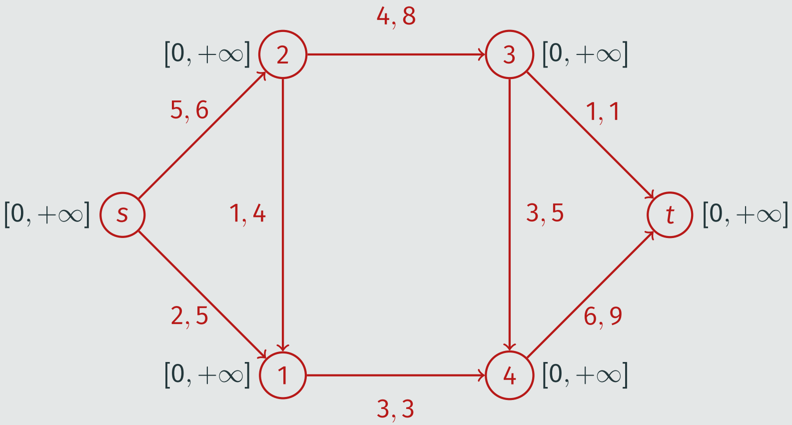
Esempio

Esiste un cammino aumentante, $\hat{\delta} = 1$, $v := v + 1 = 7$



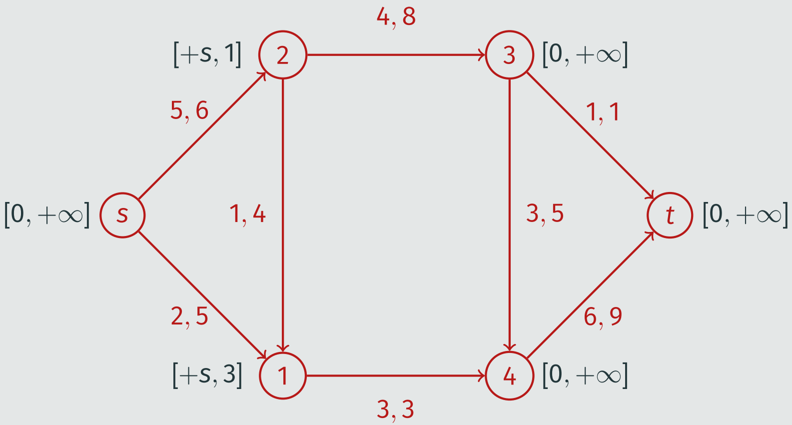
Esempio

Ricerca del cammino aumentante: $v = 7$



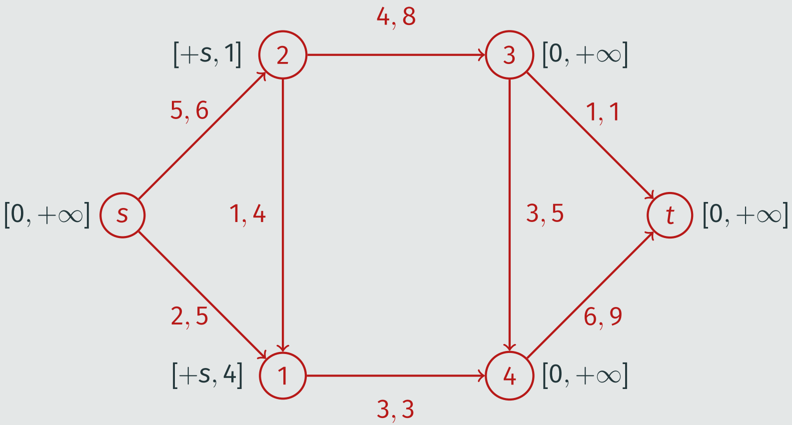
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{s}\}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{s}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}\rangle$



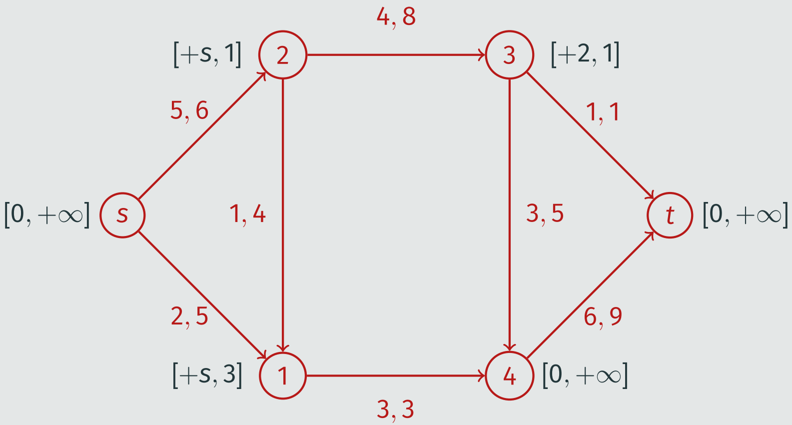
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{1} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}\} \rangle$



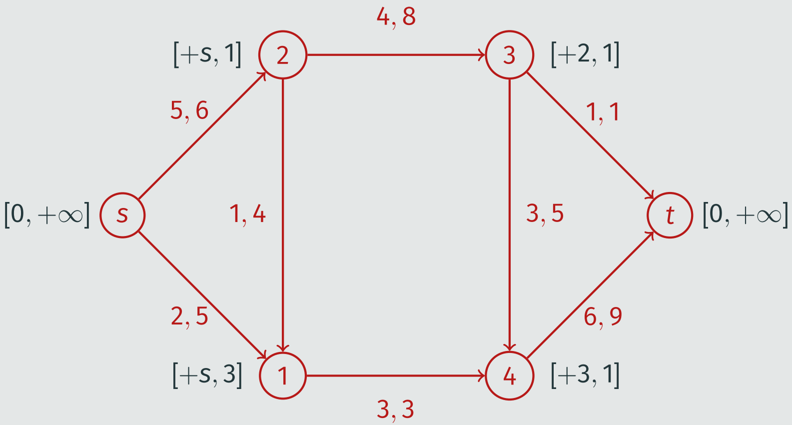
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{2} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}\} \rangle$



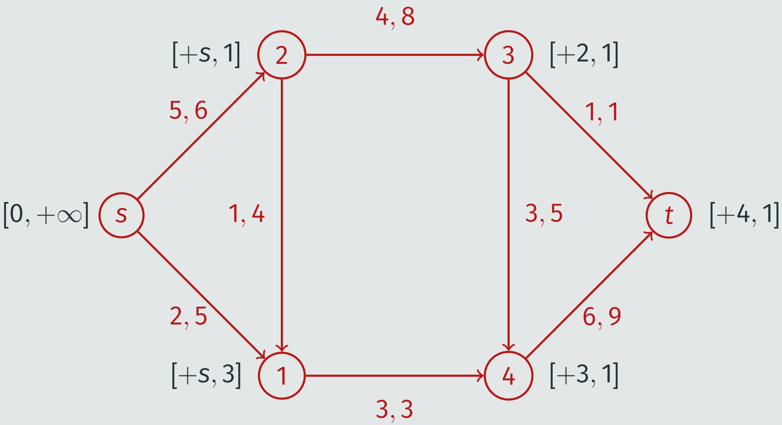
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{3} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle$



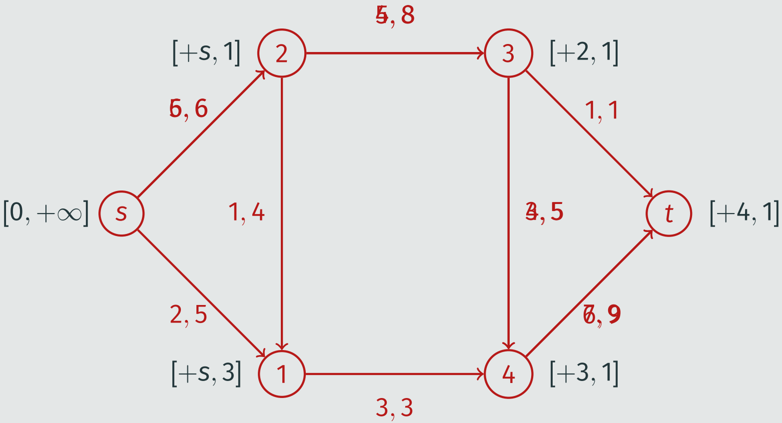
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{4} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{t}\} \rangle$



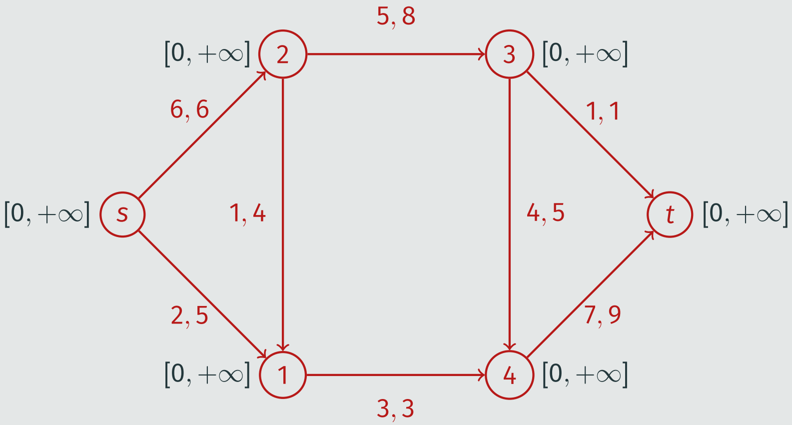
Esempio

Esiste un cammino aumentante, $\hat{\delta} = 1$, $v := v + 1 = 8$



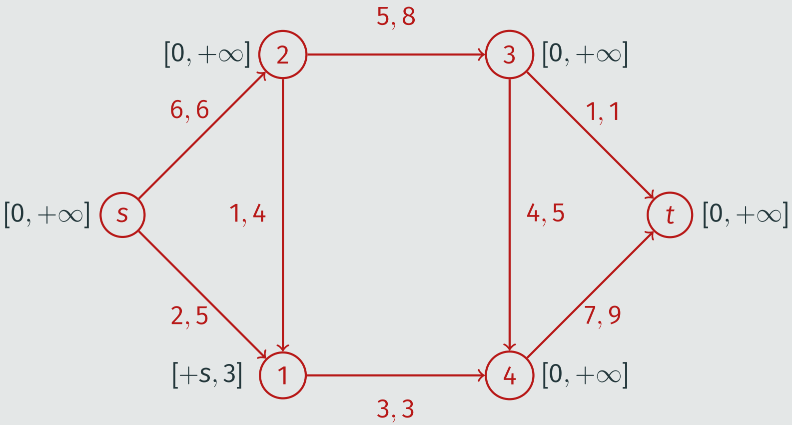
Esempio

Ricerca del cammino aumentante: $v = 8$



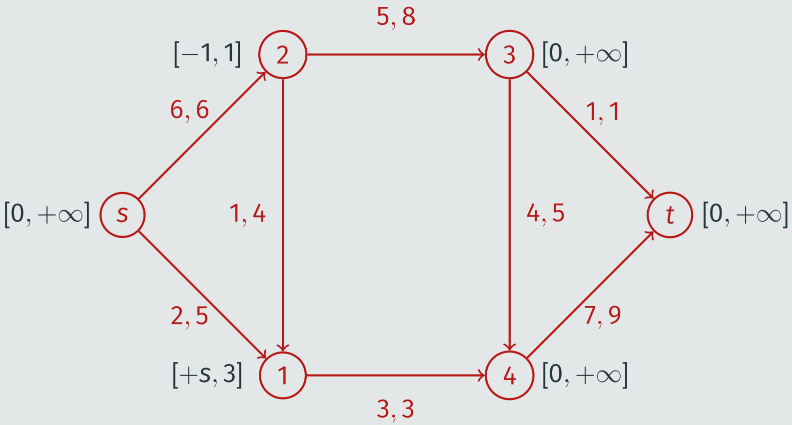
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{s}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{s} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}\} \rangle$



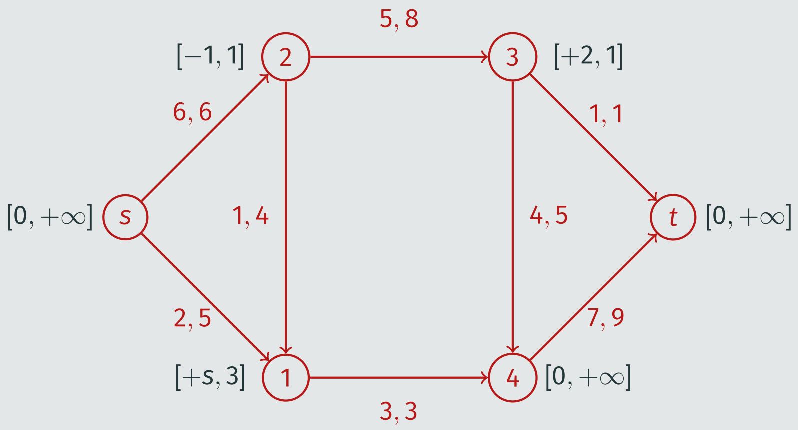
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{1} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}\} \rangle$



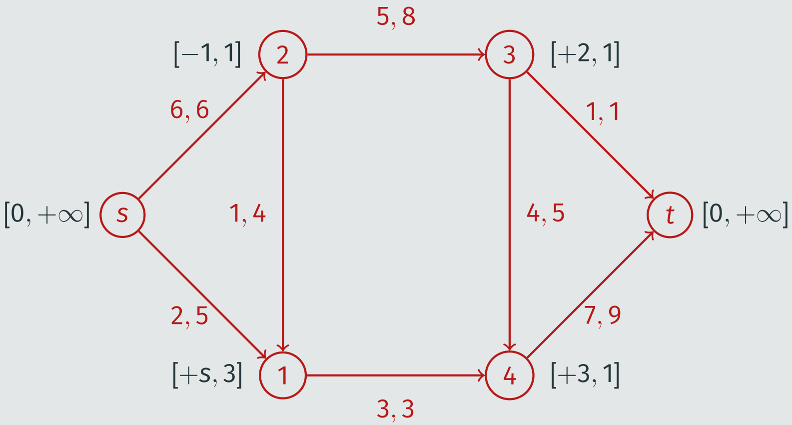
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{2}\}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{2}\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset\rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}\}\rangle$



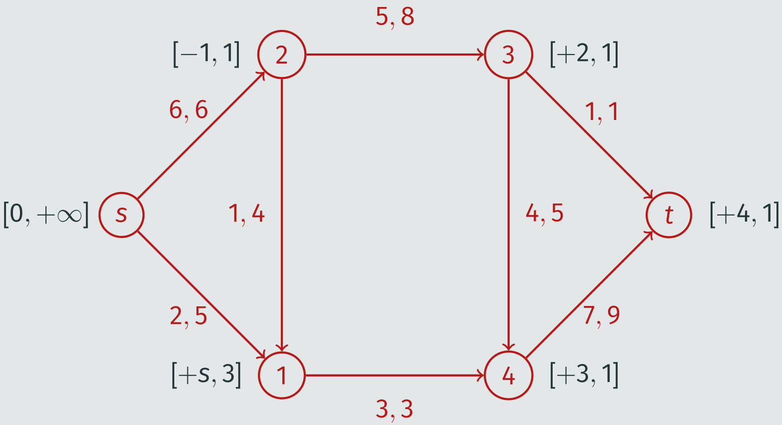
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{3}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{3} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle$



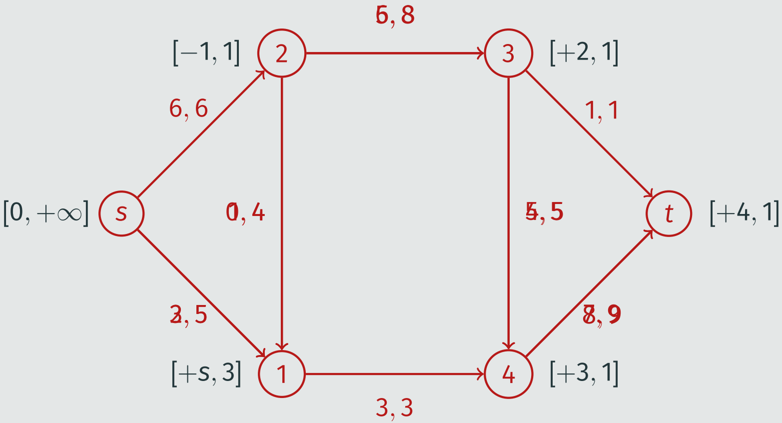
Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{4}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{4} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{t}\} \rangle$



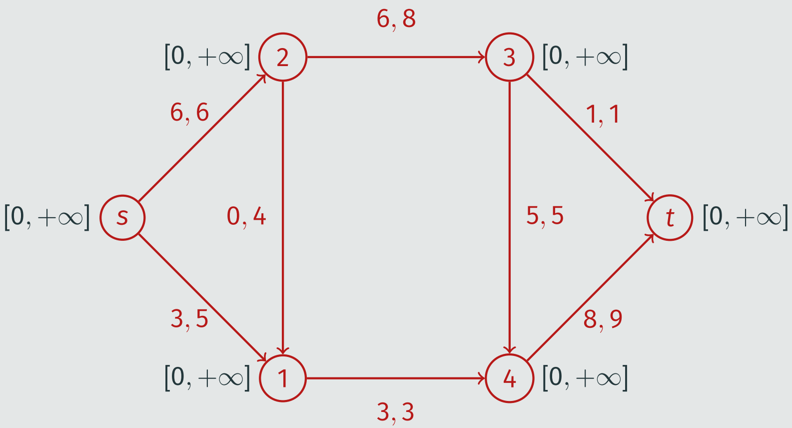
Esempio

Esiste un cammino aumentante, $\hat{\delta} = 1$, $v := v + 1 = 9$



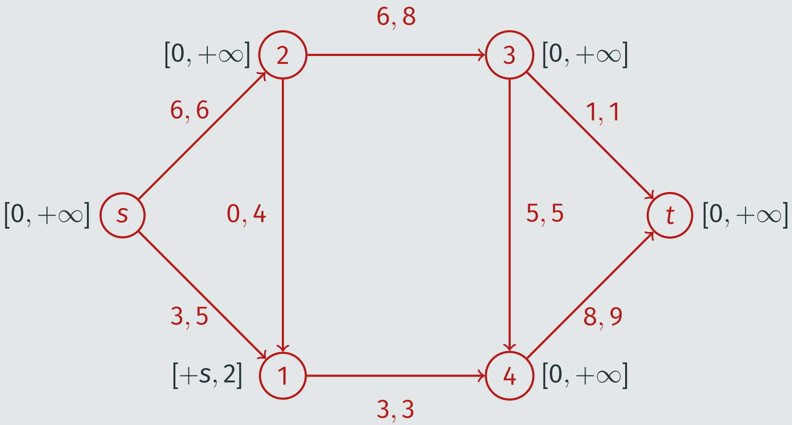
Esempio

Ricerca del cammino aumentante: $v = 9$



Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{s}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{s} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}\} \rangle$



Esempio

$\langle \mathbf{W} = \{\mathbf{1}\} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{i} = \mathbf{1} \rangle \longrightarrow \langle \mathbf{W} = \emptyset \rangle \longrightarrow$ **STOP** $\longrightarrow \mathbf{v}^* = 9$