LEZIONE N10 17/11/2021

DEFINIZIONI GRAFI

GRAFI, NODI E ARCHI

UN GRAFO $G = \langle V, E \rangle$ É UNA STRUTTURA MATEMATICA DEFINITA DA UNA COPPIA DI INSIEMI

- V É L'INSIEME DEI NODI (VERTICI)
- $E \subseteq \{V \times V\}$ É L'INSIEME DEGLI ARCHI

> STRUTTURA FONDAMENTALE PER LO SVILUPPO DI RETI OVE I NODI DETTI PUNTI DI SMISTAMENTO E GLI ARCHI LE CONNESSIONI: UNA BASE É ASSOCIABILE A UNA STRUTTURA PARTICOLARE DEL GRAFO

ASSUMIAMO CHE LA CARDINALITÁ DI ENTRAMBI GLI INSIEMI SIA FINITA:

- $|V| = m \Rightarrow V = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$
- $|E| = n \Rightarrow E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$

I GRAFI POSSONO ESSERE RAPPRESENTATI GRAFICAMENTE ASSOCIANDO A CIASCUN NODO UN PUNTO IN $\mathbb{R}^2$ E OGNI ARCO $e = (V_i, V_j)$ UN SEGMENTO (O UNA CURVA) CHE COLLEGA V_i A V_j.

INOLTRE:

- DATO UN ARCO $e = (V_i, V_j) \in E$, V_i, V_j SI DICONO ESTREMI DI e, E L'ARCO e SI DICE INCIDENTE SUI NODI V_i E V_j.
- DUE NODI V_i $V_j \in V$ SI DICONO ADIACENTI SE ESISTE $(V_i, V_j) \in E$.
- DUE ARCHI SI DICONO ADIACENTI SE HANNO UN ESTREMO IN COMUNE
- SI DICE LOOP UN ARCO CHE HA I DUE ESTREMI COINCIDENTI.
- UN GRAFO SI DICE SEMPLICE SE NON CONTIENE LOOP E SE PER OGNI COPPIA DI NODI ESISTE AL PIÚ UN ARCO CHE LI CONGIUNGE.
- DATO UN GRAFO $G = \langle V, E \rangle$ SE E É COSTITUITO DA COPPIE NON ORDINATE, CIOÈ SE $(i, j) = (j, i)$ ALLORA IL GRAFO SI DICE NON ORIENTATO O SIMMETRICO. SE TUTTI GLI ARCHI DI E SONO COPPIE ORDINATE IL GRAFO SI DICE ORIENTATO.
- IN UN GRAFO ORIENTATO TUTTI GLI ARCHI SONO ORIENTATI. PER UN ARCO ORIENTATO (i, j) SI DICE CHE i É LA CODA E j É LA TESTA; L'ARCO É USCENTE DA i ED ENTRANTE IN j.

PROPRIETÁ GRAFO NON ORIENTATO E ORIENTATO:

CONSIDERATO UN GRAFO $G = \langle V, E \rangle$ NON ORIENTATO:

- SI DEFINISCE INTORNO DI UN NODO $v \in V$ L'INSIEME $N(v)$ COSTITUITO DA TUTTI I NODI ADIACENTI DI v
- UN NODO v SI DICE ISOLATO SE $N(v) = \emptyset$
- SI DEFINISCE STELLA $\delta(v)$ DI v IN G L'INSIEME DEGLI ARCHI INCIDENTI SU v
- SI DEFINISCE GRADO $d(v)$ DI UN NODO v LA CARDINALITÁ DELL'INSIEME $\delta(v)$

Consideriamo un grafo orientato $G = \langle V, E \rangle$

- Si definisce stella entrante di v in G l'insieme degli archi entranti in v
- Si definisce stella uscente di v in G l'insieme degli archi uscenti da v
- Si definisce sorgente un nodo con soli archi uscenti
- Si definisce pozzo un nodo con soli archi entranti

RAPPRESENTAZIONI MATRICIALI

MATRICE DI INCIDENZA

GRAFO NON ORIENTATO $A \in \{0,1\}^{m \times n}$

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ARCO } e_k \text{ INCIDE SUL NODO } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

GRAFO ORIENTATO $A \in \{0,1,-1\}^{m \times n}$

$$a_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ARCO } e_k \text{ È USCENTE DAL NODO } i \\ -1 & \text{SE L'ARCO } e_k \text{ È ENTRANTE NEL NODO } i \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

MATRICE DI ADIACENZA

GRAFO NON ORIENTATO $A \in \{0,1\}^{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ARCO } (i,j) \in E \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

GRAFO ORIENTATO $A \in \{0,1\}^{m \times m}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{SE L'ARCO } (i,j) \in E \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

SOTTOGRAFI

CONSIDERIAMO UN GRAFO $G = \langle V, E \rangle$

SI DEFINISCE SOTTOGRAFO DI G UN GRAFO $G' = \langle V', E' \rangle$ TALE CHE

$$V' \subseteq V, \quad E' \subseteq E, \quad E' \subseteq V' \times V'$$

SI DEFINISCE SOTTOGRAFO RICOPRENTE DI G UN GRAFO $G' = \langle V', E' \rangle$ TALE CHE

$$V' = V, \quad E' \subseteq E$$

SI DEFINISCE SOTTOGRAFO INDOTTO DI G UN GRAFO $G' = \langle V', E' \rangle$ TALE CHE

$$(i,j) \in E' \iff i,j \in V', \ (i,j) \in E$$

CAMMINI, CAMMINI ORIENTATI, CICLI

CONSIDERIAMO UN GRAFO ORIENTATO O NON ORIENTATO $G = \langle V, E \rangle$

- UN CAMMINO IN G È UNA SEQUENZA FINITA E NON NULLA DI NODI ALTERNATI AD ARCHI, CHE INIZIA E TERMINA CON UN NODO

$$w = \{ v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{k-1}}, e_{h_k}, v_{j_k} \}$$

- CON $k \geq 0$, TALE CHE e_{h_i} È INCIDENTE SUI NODI $v_{j_{i-1}}$ E v_{j_i}. I NODI v_{j_0} E v_{j_k} SI DICONO ESTREMI DEL CAMMINO.
- UN CAMMINO SEMPLICE HA TUTTI I NODI CHE GLI ARCHI DISTINTI, LA SUA LUNGHEZZA È DATA DAL NUMERO DI ARCHI CHE LO COMPONGONO.
- DATI DUE NODI $u, v \in V$ LA DISTANZA TRA u E v È DATA DALLA LUNGHEZZA MINIMA DI UN CAMMINO SEMPLICE TRA u E v.

IN UN GRAFO ORIENTATO UN CAMMINO SI DICE ORIENTATO SE $(v_{j_{i-1}}, v_{j_i}) \in E$ PER OGNI $i = 1, \dots, k$

UN CAMMINO SI DICE CHIUSO SE I SUOI ESTREMI COINCIDONO

UN CAMMINO CHIUSO

$$C = \{ v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_0} \}$$

SI DICE CICLO SE (ELIMINATA LA REPLICA FINALE E L'ULTIMO ARCO)

$$W = \{ v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{p-1}} \}$$

È UN CAMMINO SEMPLICE

IN UN GRAFO ORIENTATO UN CAMMINO ORIENTATO CHIUSO

$$C = \{ v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{p-1}}, e_{h_p}, v_{j_0} \}$$

SI DICE CICLO ORIENTATO SE

$$W = \{ v_{j_0}, e_{h_1}, v_{j_1}, e_{h_2}, v_{j_2}, \dots, v_{j_{p-1}} \}$$

È UN CAMMINO ORIENTATO SEMPLICE.

GRAFI CONNESSI ALBERI

Consideriamo un grafo orientato o non orientato $G = \langle V, E \rangle$

- Il grafo G si dice connesso se esiste un cammino tra ogni coppia di suoi nodi.
- Il grafo G si dice aciclico se non contiene cicli.
- Il grafo orientato G si dice fortemente connesso se esiste un cammino orientato tra ogni coppia di suoi nodi.
- Il grafo G si dice albero se è connesso e aciclico.
- Si chiama foglia un nodo di un albero con grado pari a 1.
- Un sottografo ricoprente di G che sia connesso e aciclico si dice albero ricoprente di G.

Caratterizzazione degli alberi

Sia $G = \langle V, E \rangle$ un grafo con $|V| = m$ e $|E| = n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. G è un albero;
2. G è connesso e contiene $n = m - 1$ archi;
3. G è aciclico contiene $n = m - 1$ archi;
4. esiste uno ed un solo cammino che connette ciascuna coppia di nodi in G;
5. l'eliminazione di un qualsiasi arco di G rende il grafo risultante sconnesso;
6. l'aggiunta di un qualunque arco crea uno ed un solo ciclo.

PROBLEMI DI FLUSSO RETI

1

Molti problemi di ottimizzazione sono caratterizzati da una struttura di grafo: in alcuni casi la struttura è naturale,

- Reti di trasporto
- Reti idrauliche
- Reti elettriche
- Reti di telecomunicazioni
- ...

in altri casi emerge per effetto di tecniche di modellazione.

Con il termine rete si fa riferimento a un grafo orientato $G = \langle N, E \rangle$ che sia pesato, cioè ai cui nodi ed archi siano associati valori numerici.

In generale, in una rete gli archi sono interpretabili come canali attraverso cui fluiscono dei beni.

2

I pesi degli archi rappresentano usualmente delle capacità e dei costi, mentre i pesi dei nodi rappresentano la quantità dei beni che entrano nella rete in quei nodi, o che ne escono.

Ad ogni nodo $i \in V$ è associato un valore reale (divergenza) b_i, che può essere:

- negativo, in tal caso rappresenta la quantità del bene che esce dalla rete al nodo i; b_i è allora detto domanda del nodo, ed il nodo viene detto destinazione, pozzo o nodo di output
- positivo, in tal caso rappresenta la quantità di bene che entra nella rete al nodo i; b_i è allora detto offerta del nodo, ed il nodo viene detto origine, sorgente o nodo di input;
- nullo, ed in questo caso i viene detto nodo di trasferimento (o di transito);

3

IPOTESI FONDAMENTALE → CIÒ CHE ENTRA EGUAGLIA CIÒ CHE ESCE.

Ad ogni arco (i, j) sono associati un costo c_{ij}, che indica il costo che viene pagato per ogni unità del bene che attraversi l'arco, ed una capacità inferiore l_{ij} e superiore u_{ij}, che indicano, rispettivamente, il minimo ed il massimo numero di unità di bene che possono attraversare l'arco.

Nei problemi di flusso l'offerta globale, cioè la somma di tutte le offerte, è uguale alla domanda globale, cioè alla somma, cambiata di segno, di tutte le domande

$$\sum_{i \in V : b_i > 0} b_i = - \sum_{i \in V : b_i < 0} b_i$$

4

Variabili decisionali

Ad ogni arco (i, j) è associato un flusso f_{ij} che soddisfa i vincoli di conservazione del flusso

$$\sum_{j:(i,j) \in E} f_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in E} f_{ji} = b_i \quad \forall i \in V$$

cioè la differenza tra la somma dei flussi uscenti dal nodo i e la somma dei flussi entranti nel nodo i deve eguagliare la divergenza del nodo i.

DATO UN NODO LA QUANTITÀ DI FLUSSO CHE ESCE DA UN NODO EGUAGLIA LA QUANTITÀ DI FLUSSO CHE ENTRA NEL NODO