LEZIONE N12 19 11 2021

LEMMA 3 → IL GRAFO $G=\langle V,E\rangle$ É CONNESSO SE E SOLO SE ESISTE ALMENO UN ALBERO RICOPRENTE I NODI DI G

DIM → SE G É UN GRAFO CONNESSO, É SEMPRE POSSIBILE ELIMINARE CONSECUTIVAMENTE ARCHI DA E MANTENENDO LA CONNESSIONE, FINO A QUANDO LA RIMOZIONE DI QUALUNQUE ALTRO ARCO SCONNETTEREBBE IL GRAFO: A QUESTO PUNTO SARÁ STATO INDIVIDUATO UN ALBERO RICOPRENTE G.

VICEVERSA, SE ESISTE IN G UN ALBERO RICOPRENTE, $H=\langle V,T\rangle$, ALLORA G É OVVIAMENTE CONNESSO PERCHÉ L'ALBERO É CONNESSO ED É UN SOTTOGRAFO DI G (IN PARTICOLARE PER OGNI COPPIA DI NODI IN UN ALBERO ESISTE UNA E UNA SOLA CATENA CHE LI CONGIUNGE).

TEOREMA

SIA $G=\langle V,E\rangle$ UN GRAFO ORIENTATO, $|V|=m$, $|E|=n$; SIA A LA SUA MATRICE DI INCIDENZA. ALLORA $\text{RANGO}(A) = m-1$ SE E SOLO SE G É CONNESO.

Osserviamo che rango(A)=m-1 se e solo se esiste una sottomatrice quadrata B di $\tilde{A}$ di ordine m-1 che è una base. Per il **Teorema sulla caratterizzazione delle basi** ciò avviene se e solo se esiste un albero ricoprente di G, e quindi, per il Lemma 3, se e solo se G è connesso.

Algoritmo del Simplesso su Rete : Seconda Fase

BASE AMMISSIBILE PER (MCFP)

UN ALBERO $H=\langle V,T\rangle$ RICOPRENTE IL GRAFO G TALE CHE, POSTO

$$f_{ij}=0 \quad \forall (i,j)\in E/T$$

IL VETTORE DELLE VARIABILI DI BASE f_B OTTENUTO RISOLVENDO IL SISTEMA $B\cdot f_B=\tilde{b}$ SODDISFA $f_B\geq 0$

CONDIZIONE DI OTTIMALITÁ PER PROBLEMI DI PL

INDICANDO CON N LA SOTTOMATRICE DI A FORMATA DALLE COLONNE NON IN BASE, SI HA:

$$\hat{c}_N^T = c_N^T - c_B^T B^{-1} N \geq 0 \qquad [\text{ CRITERIO DI ARRESTO }]$$

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE DI OTTIMO É DATA DALLA NON NEGATIVITÀ DEI COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO.

MA COME CALCOLIAMO $\hat{c}_N^T$ SE NON ABBIAMO AVUTO BISOGNO DI B^{-1} PER OTTENERE f_B.

COPPIA PRIMALE DUALE DI (MCFP)

$$(P)\begin{cases}\min & c^T f\\ & Af=b\\ & f\geq 0\end{cases} \qquad (D)\begin{cases}\max & b^T\lambda\\ & A^T\lambda\leq c\end{cases} \xrightarrow{\text{FORMA ESPLICITA}} (D)\begin{cases}\max & \sum_{i\in V} b_i\lambda_i\\ & \lambda_i-\lambda_j\leq c_{ij} \quad \forall (i,j)\in E\end{cases}$$

FORMA COMPATTA   FORMA COMPATTA

VAR. DECISIONALI

ARCO GRAFO

DALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI DUALITÁ FORTE È NOTO CHE:

DATA UNA SOLUZIONE DI BASE AMMISSIBILE PER IL PROBLEMA PRIMALE

$$\bar{f}_B = B^{-1}\tilde{b} \qquad \bar{f}_N=0 \qquad [\text{ COROLLARIO DEBOLE }]$$

É SEMPRE POSSIBILE DEFINIRE IL VETTORE COMPLEMENTARE:

$$\bar{\lambda} = (B^T)^{-1} c_B$$

CHE PER COSTRUZIONE, GODE DELLA PROPRIETÀ:

$$c^T \bar{f} = c_B^T \bar{f}_B = \bar{\lambda}^T \tilde{b}$$

I VETTORE DI VARIABILI DUALI

$$\bar{\lambda} = (B^T)^{-1} c_B$$

PER COSTRUZIONE SOLUZIONE DEL SISTEMA

SODDISFA PER UGUAGLIANZA IL PRIMO GRUPPO DI VINCOLI DUALI:

$$B^T \bar{\lambda} = c_B$$

INOLTRE $\bar{\lambda}$ È AMMISSIBILE (NON SAPPIAMO SE OTTIMA) PER IL PROBLEMA DUALE (D) SE E SOLO SE SODDISFA ANCHE I RIMANENTI VINCOLI

$$N^T \bar{\lambda} \le c_N$$

TRASPONENDO AMBO I MEMBRI DEL SISTEMA DI DISEGUAGLIANZE, E SOSTITUENDO $\bar{\lambda}$ SI OTTIENE:

$$\lambda^T N = \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\bar{\lambda}^T} N \le c_N^T \iff c_N^T - \underbrace{c_B^T B^{-1}}_{\bar{\lambda}^T} N = \hat{c}_N^T \ge 0$$

CIOÈ $\bar{\lambda}$ È AMMISSIBILE PER (D) SE E SOLO SE $\bar{f}$ È OTTIMALE PER (P), RISULTATO GIÀ NOTO DALLO STUDIO DELLA DUALITÀ.
SI NOTI CHE NON SI HA LA NECESSITÀ DI CALCOLARE $B^{-1}N$, MA È NECESSARIO $c_B^T B^{-1}$ CHE ABBIAMO INDICATO CON $\bar{\lambda}^T$. IL SODDISFACIMENTO DEL SECONDO GRUPPO DI VINCOLI $N^T\bar{\lambda}$ (AMMISSIBILITÀ) SI OTTIENE IN CORRISPONDENZA DI OTTIMO (NON NEGATIVITÀ ⇒ AMMISSIBILITÀ)

CALCOLO DEI COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO:
QUINDI CALCOLO $\bar{\lambda}$ RISOLVENDO IL SISTEMA

$$\boxed{\text{MATRICE DI RANGO } m-1} \leftarrow B^T \lambda = c_B$$

SOSTITUISCI $\bar{\lambda}$ NEI RIMANENTI VINCOLI DUALI ($N^T\lambda \le c_N$) E CALCOLA IL VETTORE DELLE SLACK CORRISPONDENTI.

DETERMINAZIONE DELLA SOLUZIONE DUALE PER (MCFP)
RISOLVERE IL SISTEMA

$$\lambda_i - \lambda_j = c_{ij} \quad \forall (i,j) \in T$$

DOVE T È L'INSIEME DEGLI ARCHI DELL'ALBERO RICOPRENTE ASSOCIATO ALLA BASE B.
IL SISTEMA HA $m-1$ EQUAZIONI IN m INCOGNITE, OVVERO UN GRADO DI LIBERTÀ: ASSEGNANDO VALORE ARBITRARIO AD UNA VARIABILE A SCELTA, SI RICAVANO DI CONSEGUENZA LE ALTRE.

SI PUÒ SCEGLIERE DI ASSEGNARE VALORE NULLO ALLA VARIABILE DUALE ASSOCIATA AL NODO RADICE DELL'ALBERO CUI CORRISPONDE, PER LA COSTRUZIONE ILLUSTRATA NEL LEMMA 1 LA RIGA RIMOSSA DA A.

IN TAL MODO IL SISTEMA (CON UNA VARIABILE IN MENO) SI RIDUCE AL SISTEMA QUADRATO

$$B^T \lambda = c_B$$

LA CUI MATRICE PER IL LEMMA 1 È TRIANGOLARE INFERIORE. LA SOLUZIONE POTRÀ ESSERE OTTENUTA PER SOSTITUZIONI SUCCESSIVE A PARTIRE DALLA PRIMA EQUAZIONE, CIOÈ ESPLORANDO L'ALBERO DALLA RADICE VERSO LE FOGLIE.

CALCOLATO IL VALORE $\bar{\lambda}$, IL COEFFICIENTE DI COSTO RIDOTTO ASSOCIATO ALLA GENERICA VARIABILE NON IN BASE f_{ij} SI OTTIENE SEMPLICEMENTE COME SLACK DEL VINCOLO DUALE CORRISPONDENTE

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij} - (\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_j)$$

SE

$$\hat{c}_{ij} > 0 \quad \forall (i,j) \in N = E \setminus T$$

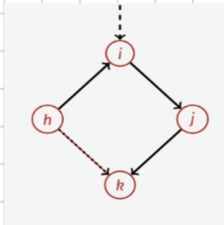
ALLORA LA SOLUZIONE DI BASE CORRENTE È OTTIMA E L'ALGORITMO SI ARRESTA.
ALTRIMENTI, UNA VARIABILE CON COSTO RIDOTTO NEGATIVO DOVRÀ ENTRARE IN BASE.

L'EVENTUALE INDETERMINAZIONE PUÒ ESSERE SCIOLTA ADOTTANDO LA REGOLA DI BLAND LA CUI APPLICAZIONE CONSENTE DI INTERROMPERE IL CALCOLO ITERATIVO (PER SOSTITUZIONE) DEI COEFFICIENTI DI COSTO RIDOTTO NON APPENA SI INDIVIDUA IL PRIMO DI ESSI CON VALORE NEGATIVO: LA VARIABILE CORRISPONDENTE f_{hk} ENTRERÀ IN BASE.

CAMBIO BASE

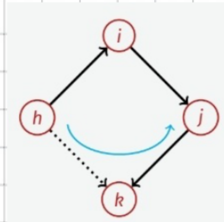
LA VARIABILE ENTRANTE IN BASE ASSUMERÀ UN VALORE $f_{hk} = \bar{\delta} \geq 0$. LA DETERMINAZIONE DI $\hat{\delta}$ CONSENTE DI IDENTIFICARE LA VARIABILE CHE ESCE DI BASE.
L'INGRESSO IN BASE DI f_{hk} EQUIVALE A DIRE CHE L'ARCO CORRISPONDENTE (h,k) DOVRÀ FAR PARTE DELL'ALBERO RICOPRENTE; AGGIUNGENDO TALE ARCO ALL'ALBERO DI BASE CORRENTE SI FORMERÀ UN (UNICO) CICLO C.
(QUINDI DEVO ESCLUDERE QUALCOSA PER TOGLIERE IL CICLO)

UNO DEGLI ARCHI DI C DOVRÀ ESSERE RIMOSSO PER OTTENERE UN NUOVO ALBERO RICOPRENTE CHE COMPRENDA L'ARCO (h,k). PER IL LEMMA 2 LE COLONNE DELLA MATRICE A CORRISPONDENTI AGLI ARCHI DI C SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, ED UNA DI ESSE DOVRÀ USCIRE DI BASE PER FAR POSTO ALLA COLONNA $A(h,k)$



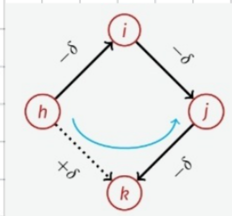
SCEGLIAMO PER C L'ORIENTAMENTO CONCORDE A QUELLO DELL'ARCO ENTRANTE (h,k)
PARTIZIONIAMO C IN ARCHI CONCORDI E ARCHI DISCORDI RISPETTO AL VERSO DI PERCORRENZA SCELTO:

$$C = C^+ \cup C^-$$



SE IL FLUSSO SULL'ARCO (h,k) SUBISCE UN INCREMENTO PARI A $\delta \geq 0$, PER MANTENERE RISPETTATE LE EQUAZIONI DI CONTINUITÀ SUI NODI DEL CICLO, IL FLUSSO SUGLI ARCHI CONCORDI DOVRÀ CRESCERE DI $\bar{\delta}$, MENTRE QUELLO SUGLI ARCHI DISCORDI DOVRÀ DECRESCERE DI δ.

$$\begin{cases} f'_{ij} = f_{ij} + \delta & \forall (i,j) \in C^+ \\ f'_{ij} = f_{ij} - \delta & \forall (i,j) \in C^- \end{cases}$$



IL MASSIMO VALORE CONSENTITO PER δ SI OTTIENE IMPONENDO CHE I NUOVI VALORI DI FLUSSO CONTINUINO A RISPETTARE I VINCOLI DI NON NEGATIVITÀ

$$\hat{\delta} := \{ f_{ij} : (i,j) \in C^- \}$$

USCIRÀ DI BASE LA VARIABILE (OVVERO USCIRÀ DALL'ALBERO L'ARCO) CUI CORRISPONDE IL VALORE δ

$$(i^*, j^*) = \arg\min \{ f_{ij} : (i,j) \in C^- \}$$

DETERMINATO IL NUOVO ALBERO RICOPRENTE G, OVVERO LA NUOVA BASE, L'ITERAZIONE SI CONCLUDE AGGIORNANDO I VALORI DI FLUSSO SOLO SUGLI ARCHI DEL CICLO; IL NUOVO VALORE DELLA FUNZIONE OBIETTIVO SARÀ:

$$c^T f' = c^T f + \hat{c}_{hk} \cdot \hat{\delta}$$

COME NEL METODO DEL SIMPLESSO CLASSICO, POTREBBERO VERIFICARSI I SEGUENTI DUE CASI:

1 CASO $\hat{\delta} = 0$

Ciò accade se e solo se la soluzione ammissibile di base corrente è degenere e $f_{ij} = 0$ per almeno un arco $(i, j) \in C^-$. L'iterazione provocherà solo un cambio di base (un arco entra ed uno esce dall'albero ricoprente), mentre le coordinate della soluzione resteranno invariate, come pure il valore della funzione obiettivo.

2 CASO $\hat{\delta} = +\infty$

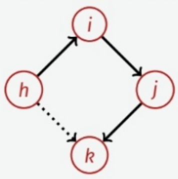
Essendo $\hat{c}_{hk} < 0$, da $c^T f' = c^T f + \hat{c}_{hk} \cdot \hat{\delta}$ discende che il problema è inferiormente illimitato e l'algoritmo si arresta. Ciò accade se e solo se $C^- = \emptyset$, ovvero se e solo se C è un circuito i cui archi sono tutti concordi ed il flusso può crescere indefinitamente su di essi senza violare alcun vincolo.

OSSERVIAMO CHE NEL GRAFO ASSEGNATO I COSTI SUI RAMI SONO TUTTI NON NEGATIVI, (MCFP) NON PUÓ ESSERE INFERIORMENTE ILLIMITATO. RICORDIAMO CHE PER TUTTI GLI ALTRI ARCHI DI C, ESSENDO APPARTENENTI A T VALE:

$$c_{ij} - \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_j = 0 \quad \forall (i,j) \in T$$

D'ALTRA PARTE

$$0 > \hat{c}_{hk} = c_{hk} - \bar{\lambda}_h + \bar{\lambda}_k$$



Sommando e sottraendo le variabili duali del ciclo otteniamo

SEMPLIFICO

$$\hat{c}_{hk} = c_{hk} - \bar{\lambda}_h + \cancel{\bar{\lambda}_k} + \bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i + \bar{\lambda}_j - \bar{\lambda}_j + \bar{\lambda}_k - \cancel{\bar{\lambda}_k}$$

SONO ARCHI DELLA BASE QUINDI POSSO SOSTITUIRE

$$\hat{c}_{hk} = c_{hk} - c_{hi} - c_{ij} - c_{jk}$$

AGGIUNGO E SOTTRAGGO LE VARIABILI DUALI DEI NODI COINVOLTI

In generale

$$\hat{c}_{hk} = \sum_{(i,j)\in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j)\in C^-} c_{ij}$$

COEFFICIENTI SU C^+ CONCORDE

COEFFICIENTI SU C^- NON CONCORDE

Se $C^- = \emptyset$ si ha

$$\boxed{\sum_{(i,j)\in C} c_{ij} = \hat{c}_{hk} < 0}$$

Quindi, se nel grafo assegnato i costi sui rami sono tutti non negativi, (*MCFP*) non può essere inferiormente illimitato.

PROPRIETÁ DELLE RETI CON COSTI NON NEGATIVI

PROBLEMA ARTIFICIALE PER UN PROBLEMA DI PL

Forma compatta

$$\begin{cases} \min \rho = & & e^\top x^{(a)} & & \\ & Ax \; + & Ix^{(a)} & = & b \\ & x \geq 0 \quad , & x^{(a)} \geq 0 & & \end{cases} \qquad (P^{(a)})$$

con $e \in \mathbb{R}^m$, $e = (1, 1, \ldots, 1)^\top$.

Nel caso generale si assume che il vettore b sia a componenti non negative, in modo che la soluzione di base $x = 0$, $x^{(a)} = b$ sia ammissibile.

Nel caso di (MCFP) gli elementi del vettore b sono le divergenze dei nodi, quindi possono avere valore positivo, negativo o nullo.

Invece di trasformare i vincoli in modo che i termini noti siano non negativi, per (MCFP) si procede introducendo variabili artificiali con coefficienti pari a ± 1 a seconda del segno dei termini noti.

PROBLEMA ARTIFICIALE PER (MCFP)

$$\begin{cases} \min \rho = & & e^\top f^{(a)} & & \\ & Af \; + & Df^{(a)} & = & b \\ & f \geq 0 \quad , & f^{(a)} \geq 0 & & \end{cases} \qquad (MCFP^{(a)})$$

↳ MATRICE DIAGONALE CHE TIENE CONTO DEI SEGNI DELLE DIVERGENZE.

dove $e \in \mathbb{R}^m$, $e = (1, 1, \ldots, 1)^\top$, e $D = diag(d_{11}, \ldots d_{ii}, \ldots, d_{mm})$ è una matrice diagonale con elementi

$$d_{ii} = \left\langle \begin{array}{ll} +1 & \text{se } b_i > 0 \\ -1 & \text{se } b_i \leq 0 \end{array} \right.$$

Le variabili artificiali possono essere opportunamente associate ad archi.

Dalla definizione della matrice D discende che tali *archi artificiali* sono uscenti dai nodi sorgente, mentre sono archi entranti per tutti gli altri nodi di G.

L'altro estremo degli archi artificiali sarà un unico *nodo artificiale* o fittizio, indicato come nodo 0, che sarà un nodo di transito, cioè $b_0 = 0$; i costi degli archi artificiali sono tutti pari ad 1, mentre quelli degli archi reali sono tutti nulli, per definizione di ρ.

Il problema $MCFP^{(a)}$ può essere interpretato come un problema di flusso di costo minimo sul *grafo artificiale*:

$$G^{(a)} = \langle V^{(a)}, E \cup E^{(a)} \rangle$$

dove $V^{(a)} = V \cup \{0\}$, in cui l'equazione di continuità relativa al nodo 0 sia stata omessa (perché linearmente dipendente dalle altre).

Il problema $MCFP^{(a)}$ è sempre ammissibile ed inferiormente limitato, pertanto ammette soluzione ottima $\rho^* \geq 0$.

Inoltre è immediatamente disponibile una soluzione ammissibile di base associata all'albero ricoprente $H^{(a)} = \langle V^{(a)}, E^a \rangle$, che si ottiene considerando in base le sole variabili artificiali

$$f_{0i} = -b_i \quad \forall i : b_i \leq 0 \qquad f_{i0} = b_i \quad \forall i : b_i > 0$$

e ponendo a zero, perché fuori base, tutte le variabili originali f_{ij}, $(i, j) \in E$.

Osserviamo che se vale la condizione necessaria di ammissibilità, tale soluzione soddisfa l'equazione di continuità associata al nodo fittizio 0

$$\sum_{i \in V: b_i \leq 0} f_{0i} - \sum_{i \in V: b_i > 0} f_{i0} = \sum_{i \in V: b_i \leq 0} (-b_i) - \sum_{i \in V: b_i > 0} b_i = -\left(\sum_{i \in V} b_i\right) = 0$$