Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

par

Jean-Pierre JOUANOLOU

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

ès SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL Président

GROTHENDIECK

VERDIER Examinateurs

DIXMIER

PREFACE

Description

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

1. Généralités.

Définition **1.1**. — *On appelle* idéotope *un triple* (X,A,J) *formé d'un topos* X, *d'un anneau commutatif unifière* A *et d'un idéal propre* J *de* A.

On suppose donné dans la suite du paragraphe un idéotope (X,A,J). On note $A-\mathrm{Mod}_X$ la catégorie des faisceaux de A_X-Modules et

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^{\circ},A-\mathrm{Mod}_X)$$

la catégorie abélienne des systèmes projectifs indexés par $\mathbf{N}$ de A_X-Modules.

Définition **1.2**. — *On appelle* (A,J)-faisceau *sur* X, *ou s'il n'y a pas de confusion possible* A-faisceau *sur* X, *un système projectif*

$$F=(\mathbf{F}_n,u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N},m\geq n}$$

de A_X*-Modules, vérifiant*

$$J^{n+1}F_n=0$$

pour tout entier $n\geq 0$. *On note* $\mathbf{E}(X,J)$ *la sous-catégorie, abélienne, pleine de* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^{\circ},A-\mathrm{Mod}_X)$ *engendrée par les* A*-faisceaux.*

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, la catégorie $\mathbf{E}(X,J)$ ne mérite pas le nom de catégorie des A-faisceaux sur X; c'est seulement une catégorie quotient de la précédente que nous baptiserons ainsi. Aussi, pour éviter le risque de confusion, nous arrivera-t-il, étant donnés deux A-faisceaux E et F, de noter

$$\mathrm{Hom}_a(E,F)$$

(a pour anodin) l'ensemble des $\mathbf{E}(X,J)$-morphismes de E dans F.

Notons pour tout objet T de X par $\mathbf{T}$, ou même T s'il n'y a pas de confusion possible, le topos X/T. Le foncteur restriction pour les faisceaux de A-Modules induit de façon évidente un foncteur restriction

$$\mathbf{E}(X,J) \longrightarrow \mathbf{E}(T,J)$$

$$E \mapsto E|T.$$

Proposition-définition **1.4.** — *Soit $E=(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X:*

1) *On dit que E est* essentiellement nul *s'il est nul en tant que pro-objet, ce qui revient à dire que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que le morphisme de transition*

$$E_{n+p} \longrightarrow E_n$$

soit nul.

2) *On dit que E est* négligeable *s'il vérifie l'une des reltions équivalentes suivantes:*

   (i) *Il existe un recouvrement $(T_i \longrightarrow e_X)_{i\in I}$ de l'objet final e_X de X tel que les A-faisceaux $E|T_i$ soient essentiellement nuls.*

   (ii) *Idem, mais en supposant de plus que les T_i sont des ouverts de X.*

Preuve: Pour voir l'équivalence de (i) et (ii), il suffit d'observer que pour tout $i \in I$, le faisceau image U_i de T_i par le morphisme canonique $T_i \longrightarrow e_X$ est tel que le morphisme restriction

$$\mathbf{U}_i \longrightarrow \mathbf{T}_i$$

soit fidèle.

Il est clair que lorsque l'objet final de X est quasicompact (SGA4 VI 1.1), il revient au même pour un A-faisceau de dire qu'il est essentiellement nul ou qu'il est négligeable. Il est par ailleurs immédiat que la sous-catégorie pleine

(1.4.1) $\qquad N(X,J) \quad$ ou plus simplement N_X)

de $\mathbf{E}(X, J)$ engendré par les A-faisceaux négligeables est *épaisse* dans $\mathbf{E}(X, J)$.

Définition **1.5**. — *Soit* (X, A, J) *un idéotope. On appelle* catégorie *des* (A, J)-faisceaux *(ou A-faisceaux s'il n'y a pas de confusion possible) sur X et on note*

$$(A, J) - \mathrm{fsc}(X) \quad \textit{(ou plus simplement } A - \mathrm{fsc}(X))$$

la catégorie abélienne quotient (thèse Gabriel III.1)

$$\mathbf{E}(X, J)/N_X.$$

1.6. Soit T un objet de X. Il est clair que le foncteur restriction (1.3) est exact et envoie N_X dans N_T, d'où par passage au quotient un foncteur exact, appelé encore *restriction*,

$$r_{T,X} : A - \mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(T). \tag{1.6.1}$$

Soient maintenant T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme. Se plaçant dans le topos $\mathbf{T}'$, on déduit de (1.6.1) un foncteur exact

$$f^* : A - \mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(T), \tag{1.6.2}$$

vérifiant les propriétés de transitivité habituelles.

Ces remarques étant faites, nous utiliserons dans la suite sans plus d'explications le langage local pour les A-faisceaux.

Proposition **1.7**. — *Les propriétés suivantes sont de nature locale pour la topologie de X.*

(i) La propriété pour un A-faisceau d'être nul, i.e. isomorphe au système projectif nul.

(ii) La propriété pour une suite

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

de Afaisceaux d'être exacte.

(iii) *La propriété pour un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de A-faisceaux d'être un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).*

(iv) *La propriété pour deux morphismes $u, v : E \rightrightarrows F$ d'être égaux.*

Preuve : L'assertion (i) est immédiate. On en déduit (ii) en l'appliquant successivement à $\mathrm{Im}(v \circ u)$ et à $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$. L'assertion (iii) est un cas particulier de (ii). Enfin (iv) s'obtient en appliquant (i) à $\mathrm{Im}(v - u)$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un épimorphisme. Le foncteur*

$$f^* : A - \mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(T)$$

est fidèle.

Preuve: Appliquer 1.7 (i) au topos $\mathbf{T}'$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient E et F deux A-faisceaux sur X. Lorsque T parcourt les objets de X, le préfaisceau*

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(E|T, F|T)$$

est séparé.

Preuve: Simple traduction de 1.7 (iv).

Remarque 1.7.3. En général, le préfaisceau précédent n'est pas un faisceau. Nous verrons toutefois qu'il en est ainsi lorsque le topos X est noethérien (SGA4 VI 2.11), ou lorsque E est de type J-adique.

2. Cas où l'objet final de X est quasicompact.

On se propose maintenant de donner un certain nombre de catégories équivalentes à $A - \mathrm{fsc}(X)$, lorsque l'objet final de X est quasicompact. Nous aurons besoin cela d'un certain nombre de lemmes techniques, dont la plupart n'utilisent pas cette hypothèse.

2.1.

3. A-faisceaux de type constant, strict ou J-adique.

4. Opérations externes.

5. Produit tensoriel.

6. Foncteurs associés aux homomorphismes.

6.1. Soient $E=(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $F=(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux A-faisceaux sur un topos X. Pour tout entier $i\in\mathbf{Z}$, on définit comme suit un nouveau A-faisceau, noté

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(E,F),$$

la mention de l'anneau A pouvant être éventuellement supprimée s'il n'y a pas de confusion possible. Soient $m'\geq m\geq n$ trois entiers ≥ 0.

7. Catégories dérivées.

8. Changement d'anneau.

§ II. — CONDITIONS DE FINITUDE

Dans tout ce chapitre, on fixe un anneau commutatif unifère *noethérien* A et un idéal J de A. Sauf mention expresse du contraire, tous les topos considérés seront supposés *localement noethériens* (SGA 4 VI 2.11.).

1. Catégorie des A-faisceaux constructibles.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **1.1**. — *On dit qu'un A-faisceau $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est* J-adique constructible *s'il est J-adique (I 3.8.) et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, le A_n-Module F_n est constructible. On dit que F est un* A-faisceau constructible *s'il est isomorphe dans* $A-\mathrm{fsc}(X)$ *à un A-faisceau J-adique constructible. On appelle catégorie des A-faisceaux constructibles et on note*

$$A-\mathrm{fscn}(X) \quad \textit{(“n” pour “noethérien”)}$$

la sous-catégorie pleine de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *engendrée par les A-faisceaux constructibles.*

Proposition **1.2**. — *Soit $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constructible.

(ii) F est de type strict (I 3.2.) et, notant F' le A-faisceau strict associé à F (I 3.3.), il existe localement une application croissante $\gamma \geq$ id *telle que $\chi_\gamma(F')$ (I 2.2) soit J-adique constructible.*

(iii) *Pour tout entier $r \geq 0$, le A-faisceau $F \otimes_A A_r$ est de type constant (I 3.6.) associé à un A_r-Module constructible.*

Preuve : Si F vérifie (i), il résulte de (I 3.9.3. (i) $\Rightarrow$ (ii)) qu'il existe localement une telle application γ, avec $\chi_\gamma(F')$ J-adique. Mais $\chi_\gamma(F') \simeq F$, donc $\chi_\gamma(F')$ est isomorphe à un A-faisceau J-adique constructible, d'où (ii) grâce à (I 3.9.1). L'assertion (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte aussitôt de ce que $F \otimes_A A_r \simeq \chi_\gamma(F') \otimes_A A_r$. Pour voir que (iii) $\Rightarrow$ (i), on peut supposer que l'objet final de X est quasicompact, et alors cela se voit comme l'assertion analogue de (I 3.9.3.).

Corollaire **1.3**. — *Si $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un A-faisceau strict et constructible, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, le A_n-Module F_n est constructible.*

Preuve : D'après (1.2.(i)), il existe localement une application croissante $\gamma \geq$ id telle que $\chi_\gamma(F)$ soit J-adique constructible, donc à composants constructibles. L'assertion résulte alors de ce que le morphisme canonique de $\mathbf{E}(X, J) : \chi_\gamma(F) \longrightarrow F$ est un épimorphisme.

Corollaire **1.4**. — *Pour qu'un A-faisceau annulé par une puissance de l'idéal J soit constructible, il faut et il suffit qu'il soit de type constant associé à un A-Module constructible.*

Proposition **1.5**. —

(i) *La propriété pour un A-faisceau d'être constructible est stable par restriction à un objet du topos, de nature locale, et la catégorie fibrée*

$$T \mapsto A - \mathrm{fscn}(T)$$

où T parcourt les objets de X, est un champ.

(ii) *Notant $J - \mathrm{adn}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{E}(X, J)$ engendrée par les A-faisceaux J-adiques constructibles, le foncteur canonique*

$$J - \mathrm{adn}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fscn}(X)$$

induit par (I 3.8.2) est une équivalence de catégories.

(iii) La catégorie $A-\mathrm{fscn}(X)$ *est une sous-catégorie* exacte *(i.e. stable par noyaux, conoyaux et extensions) de* $A-\mathrm{fsc}(X)$. *De plus, lorsque X est noethérien, les objets de* $A-\mathrm{fscn}(X)$ noethériens *(dans* $A-\mathrm{fscn}(X)$*).*

Preuve : L'assertion (ii) est conséquence immédiate de (I 3.9.1.). Montrons (i). Le caractère local résulte par exemple de (1.2. (i) $\Leftrightarrow$ (ii)) et du caractère local de la propriété pour un A-faisceau d'être de type strict. Quant à la propriété de champ, elle provient de (ii) et de la propriété analogue, évidente, pour la catégorie fibrée $T \mapsto J-\mathrm{adn}(T)$. Montrons (iii). Pour voir la stabilité par noyaux et conoyaux, on se ramène grâce à (ii) au cas d'un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de $\mathbf{E}(X,J)$, avec E et F des A-faisceaux J-adiques constructibles, et alors l'assertion résulte, en se ramenant localement au cas où X est noethérien, de (SGA5 V 5.2.1.). Pour montrer la stabilité par extensions, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme **1.6.** — *Pour tout A-faisceau constructible E et tout entier* $n \geq 0$, *le A-faisceau* $\underline{\mathrm{Tor}}_1^A(A_n,E)$ *est de type constant, associé a un* A_n*-Module constructible.*

Corollaire **1.6.** —

Proposition **1.7.** —

Preuve :

Lemme **1.8.** —

Lemme **1.9.** —

Lemme **1.10.** —

Proposition **1.11.** —

Preuve :

1.12.

Proposition **1.12.4.** —

Preuve :

1.13.

Définition **1.14.** —

Proposition **1.15.** —

Preuve :

Proposition **1.17.** —

Preuve :

Corollaire **1.18.** —

Proposition **1.19.** —

Preuve :

1.20. Nous allons maintenant expliciter la structure de la catégorie A—fsc(X), lorsque le topos X est connexe. Rappelons tout d'abord quelques faits concernant le pro-groupe fondamental d'un topos. Étant donné un pro-groupe strict

$$G = (G_i)_{i \in I},$$

on définit comme suit un topos, noté

$$\mathrm{B}_G$$

et appelé *topos classifiant* de G. Un objet de B_G, appelé encore G-*ensemble*, est un ensemble M muni d'une application

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M)$$

$$m \mapsto (g_i \mapsto g_i m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”})$$

telle que l'on ait

$$g_i(g_i' m) = (g_i g_i') m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”}.$$

Autrement dit, M admet une filtration par des G_i-ensembles ($i \in I$), avec compatibilité des diverses opérations. Un morphisme de G-ensembles $M \longrightarrow N$ est une application $u : M \longrightarrow N$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M) \arrow[d, "\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, u)"] \\ N \arrow[r, "p"] & \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, N) \end{tikzcd}$$

commutatif.

De la même manière, étant donné un anneau B, on définit la notion de (B, G)-*module*, en exigeant que l'application structurale

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M)$$

soit B-linéaire, lorsque l'on munit le second membre de la structure de B-module déduite de façon évidente de celle de M. Autrement dit, un (B, G)-module n'est autre qu'un B-Module sur le topos B_G.

Le topos B_G est localement noethérien (cf SGA4 VI 1.33.) et n'admet (à isomorphisme près) qu'un seul point, à savoir le foncteur qui associe à tout G-ensemble M l'ensemble sous-jacent.

Étant données maintenant un topos connexe X (non nécessairement localement noethérien) et un point

$$a : \mathrm{pt} \longrightarrow X,$$

on définit, à isomorphisme près dans la catégorie des pro-groupes, un pro-groupe strict

$$\pi_1(X, a),$$

appelé pro-groupe fondamental de X en a, et une équivalence de catégories

$$\mathrm{Elc}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{B}_{\pi_1(X,a)} \tag{1.20.1}$$

de la catégorie des faisceaux d'ensembles localement constants sur X, avec le topos classifiant de $\pi_1(X, a)$. De plus, notant c le point canonique du topos classifiant du pro-groupe fondamental, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Elc}(X) \arrow[rr, "(1.20.1)"] \arrow[dr, "a^*"'] & & \mathrm{B}_{\pi_1(X,a)} \arrow[dl, "c^*"] \\ & \mathrm{Ens} & \end{tikzcd}$$

est commutatif (à isomorphisme près).

Étant donné un anneau commutatif unifère B, le foncteur (1.20.1) définit une équivalence

$$B-\mathrm{Modlc}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{B}-\mathrm{Mod}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}), \tag{1.20.2}$$

où $B-\mathrm{Modlc}(X)$ désigne la catégorie des B-Modules localement constants sur X.

i $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, le morphisme composé $b = f \circ a$ est un point de Y, et on définit fonctoriellement en les données, un morphisme de pro-groupes

$$\pi_1(f) : \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y,b)$$

tel que le foncteur image réciproque

$$f^* : \mathrm{Elc}(Y) \longrightarrow \mathrm{Elc}(X)$$

corresponde dans les équivalences (1.20.1) à la restriction du pro-groupe structural.

Soit X un topos localement noethérien connexe, et choisissons un point a : $\mathrm{pt} \longrightarrow X$ de X. Par simple extension aux systèmes projectifs, le foncteur (1.20.2) définit une équivalence

$$J-\mathrm{adt}(X) \xrightarrow{\approx} J-\mathrm{adt}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) = J-\mathrm{adn}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}). \tag{1.20.3}$$

Proposition **1.20.4**. —

(i) soient X un topos localement noethérien connexe et a un point de X. On a une équivalence *canonique, définie à isomorphisme près,*

$$A-\mathrm{fsct}(X) \xrightarrow{\omega_X} A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) = A-\mathrm{fscn}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}).$$

Le foncteur fibre défini par a (1.12.3)

$$E_a : A-\mathrm{fsct}(X) \longrightarrow \hat{A}-\mathrm{modn}$$

est conservatif.

(ii) Soient X et Y eux topos localement noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Pour tout A-faisceau constant tordu constructible F sur Y, le A-faisceau $f^*(F)$ est constant tordu constructible. Supposons maintenant que X et Y soient connexes, choisissons un point a de X et posons $b = f \circ a$. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A-\mathrm{fsct}(Y) & \xrightarrow{\omega_Y} & A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(Y,b)}) \\ {\scriptstyle f^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ A-\mathrm{fsct}(X) & \xrightarrow[\omega_X]{} & A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) \end{array} \quad ,$$

dans lequel le foncteur Res *désigne la restriction du pro-groupe structural, est commutatif à isomorphisme près.*

Preuve : L'équivalence ω_X se déduit de façon évidente de (1.20.3), en utilisant l'équivalence (1.17.(ii)). Comme l'"unique" foncteur fibre du topos $\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}$ est conservatif (1.12.4), la conservativité annoncée en résulte aussitôt. L'assertion (ii) est conséquence immédiate de l'assertion analogue pour les Modules localement constants, rappelée plus haut.

Corollaire **1.20.5**. — *Soient X un schéma localement noethérien connexe et a un point géométrique de X. Notant encore $\pi_1(X,a)$ le groupe fondamental de X en a, muni de sa topologie canonique, on a une équivalence canonique (à isomorphisme près)*

$$A-\mathrm{fsct}(X) \xrightarrow{\approx} \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(X,a)),$$

où la deuxième membre désigne la catégorie des $\hat{A}$-modules de type fini munis d'une opération continue de $\pi_1(X,a)$ pour la topologie J-adique. De plus, si

$$f : X \longrightarrow Y$$

est un morphisme de schémas localement noethériens connexes, alors, munissant Y du point géométrique $b = f \circ a$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A-\mathrm{fsct}(Y) & \xrightarrow{\approx} & \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(Y,b)) \\ {\scriptstyle f^*}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ A-\mathrm{fsct}(X) & \xrightarrow[\approx]{} & \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(X,a)) \end{array} \quad ,$$

dans lequel les flèches horizontales désignent les équivalences canoniques et Res *est le foncteur restriction des scalaires déduit de* $\pi_1(f) : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b)$*, est commutatif (à isomorphisme près).*

Preuve : Seule la première assertion demande une démonstration. Pour cela, il n'y a qu'à transcrire la preuve de (SGA5 VI 1.2.5).

Dans l'énoncé suivant, nous appellerons sous-topos localement fermé d'un topos X un couple (U, Y) formé d'un ouvert U de X et du topos fermé complémentaire (relativement à U) d'un ouvert V de U. Il est clair qu'il revient au même de se donner deux ouverts emboîtés U et V de X. On définit les opérations de restriction à un sous-topos localement fermé (U, Y) comme composées des restrictions à U puis à Y. Étant donné un autre ouvert U' de X, on note

$$U' \cap (U, Y)$$

et on appelle intersection de U' avec (U, Y) le sous-topos localement fermé $(U \times U', Y')$ de U', où Y' désigne le topos fermé de $U \times U'$ complémentaire de $V \times U'$.

Étant donnés un topos X et une famille finie $(U_i, Y_i)_{1 \le i \le p}$ de sous-topos localement fermés de X, on dira que X est *réunion* des (U_i, Y_i) si, notant pour tout i par V_i l'ouvert de U_i dont Y_i est le complémentaire, on a les relations

$$X = \bigcup_i U_i$$

$$\bigcap_i (V_i) = \varnothing$$

et si pour toute partition $[1, q] = S \cup T$ de $[1, q]$ la relation

$$\bigcap_S (V_S) \cap \bigcup_T (U_t) = \varnothing$$

implique soit que T est vide, soit que $U_t = \varnothing$ pou tout $t \in T$.

Proposition **1.21**. — *Soient X un topos localement noethérien et F un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constructible.

(ii) Tout ouvert noethérien de X est réunion d'un nombre fini de sous-topos localement fermés $Z_i = (U_i, Y_i)$ au-dessus desquels l'image réciproque de F est un A-faisceau constant tordu constructible.

(iii) X admet un recouvrement par des ouverts, qui sont réunions finies des sous-topos localement fermés, au-dessus desquels l'image réciproque de F est un A-faisceau constant tordu constructible.

Preuve : Il est évident que (ii) ⇒ (iii). Pour voir que (i) ⇒ (ii), on peut supposer X noethérien et F J-adique constructible, et alors (SGA5 V 5.1.6) le gradué strict grs(F) est un $\mathrm{gr}_J(A)$-Module constructible. D'après la structure des Modules constructibles sur un topos noethérien (SGA4 VI), le topos X admet un recouvrement fini par des sous-topos localement fermés au-dessus desquels l'image réciproque de grs(F) est un $\mathrm{gr}_J(A)$-Module localement constant constructible. Au dessus de ces sous-topos localement fermés, les composants de grs(F) sont localement constants constructibles, et par suite F est J-adique constant tordu constructible. Montrons que (iii) ⇒ (i). Comme l'assertion est locale, on peut supposer que X est est noethérien et réunion finie de sous-topos localement fermés $Z_i = (U_i, Y_i)$ $(1 \leq i \leq q)$ au-dessus desquels F est constant tordu constructible. En particulier, les $F|Z_i$ vérifiant la condition de Mittag-Leffler, et il résulte sas peine du lemme suivant que F la vérifie également.

Proposition **1.22**. — *Si un topos X est réunion d'un nombre fini de sous-topos localement fermés $Z_m = (U_m, Y_m)$ $(1 \leq m \leq q)$, alors, notant $j_m : Y_m \longrightarrow X$ les morphismes de topos canoniques, les foncteurs*

$$(j_m)^* : A-\mathrm{Mod}_X \longrightarrow A-\mathrm{Mod}_{Y_m}$$

forment une famille conservative.

Comme ces foncteurs sont exacts, il s'agit de voir que si un A-Module M vérifie $(j_m)^*(M) = 0$ pour tout m, alors $M = 0$. Nous allons voir cette assertion par récurrence sur q, le cas où $q = 1$ étant évident. Nous allons pour cela noter V_m l'ouvert de U_m dont Y_m est le complémentaire, et $i_m : V_m \longrightarrow U_m$, $k_m : V_m \longrightarrow X$ et $l_m : U_m \longrightarrow X$ les morphismes canoniques. L'hypothèse de récurrence appliquée au topos fermé K_m complémentaire de U_m dans X montre que pour tout m le morphisme canonique

$$(1_m)_!(M|U_m) \longrightarrow M$$

est un isomorphisme. Par ailleurs le fait que $(j_m)^*(M) = 0$ implique que le morphisme canonique

$$(i_m)_!(M|V_m) \longrightarrow M|U_m$$

est également un isomorphisme. Il est donc de même du morphisme canonique $(k_m)_!(M|V_m) \longrightarrow M$, et par suite (SGA4 IV 2.6)

$$M \simeq M \otimes_A (K_m)_!(A).$$

Par récurrence, on en déduit que

$$M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A \bigotimes_m (k_m)_!(A).$$

Mais, notant $k : \prod_m (V_m) \longrightarrow e_X$ le morphisme canonique, on a (SGA4 IV 2.13.b) de 1))

$$\bigotimes_m (k_m)_!(A) \xrightarrow{\sim} k_!(A),$$

d'où l'assertion, puisque par hypothèse le produit des V_m est vide.

Proposition **1.23.** —

Preuve :

Proposition **1.24.** —

Preuve :

Proposition **1.25.** —

Preuve :

Proposition **1.26.** —

Preuve :

Exemple 1.27.

Proposition **1.28**. —

Preuve :

Proposition **1.29**. —

Preuve :

2. Conditions de finitude dans les catégories dérivées.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **2.1**. — *On dit qu'un complexe E de A-faisceaux sur X est* à cohomologie constructible *(resp.* constante tordue constructible*) si tous ses objets de cohomologie sont des A-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles).*

La sous-catégorie $A - \mathrm{fscn}(X)$ étant exacte dans $A - \mathrm{fsc}(X)$ (1.5.(iii)), les sous-catégories plaines

$$K_c^*(X,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_c^*(X,A) \quad (* = \varnothing, + - \text{ ou } b)$$

de $K^*(X,A)$ et $\mathrm{D}^*(X,A)$ respectivement engendrées par les complexes à cohomologie constructible sont des sus-catégories triangulées; de plus, $\mathrm{D}_c^*(X,A)$ s'obtient par inversion des quasi-isomorphismes à partir de $K_c^*(X,A)$. De même, on définit des catégories triangulées

Définition **2.2**. —

Proposition **2.3**. — *Les foncteurs*

(2.3.1) $$\mathrm{D}^b(\hat{A} - \mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}_c^b(\mathrm{pt},A)$$

(2.3.1) $$\mathrm{D}_{parf}(\hat{A} - \mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}_{parf}(\mathrm{pt},A)$$

ci-dessus sont des équivalences de catégories.

Preuve :

Proposition **2.4.** —

Preuve :

Proposition **2.5.** —

Preuve :

Proposition **2.6.** —

Preuve :

Proposition **2.7.** —

Preuve :

Corollaire **2.8.** —

2.9.

Proposition **2.9.2.** —

Preuve :

2.10.

Proposition **2.10.2.** —

Preuve :

Proposition **2.10.3.** —

Preuve :

Proposition **2.10.5.** —

Preuve :

2.11. Trace et cup-produit.

Proposition **2.11.3.** —

Preuve :

2.12.

Proposition **2.12.1.** —

Preuve :

Proposition **2.12.2.** —

Preuve :

Proposition **2.12.3.** —

Preuve :

2.13. Changement d'anneau. Soient X un topos localement noethérien, A et B deux anneaux commutatifs unifères noethériens, J et K deux idéaux de A et B respectivement et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux unifères, tel que $u(J) \subset K$. On utilise par ailleurs libreent les notations de (I 8.1).

Proposition **2.13.1.** —

Preuve :

Théorème **2.13.2.** —

Preuve :

Lemme **2.13.3.** —

Lemme **2.13.4.** —

Lemme **2.13.5.** —

Lemme **2.13.6.** —

Remarques 2.13.7.

Proposition **2.13.9.** —

Preuve :

Remarques 2.13.10.

Proposition **2.14**. —

Preuve :

Remarques 2.15. Comme pour (2.13.2), l'hypothèse (i) a servi uniquement pour assurer que le complexe $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, F)$ est à cohomologie constructible. Elle est donc inutile en particulier dans la cas où $E \in \mathrm{D}_t^-(X, A)$.

§ III. — APPLICATIONS AUX SCHÉMAS

Le texte qui suit ayant un caractère essentiellement provisoire (cf. l'appendice basé sur une construction de *Deligne*), nous ferons toutes les hypothèses simplificatrices qui nous paraîtront nécessaires pour la clarté de l'exposé.

Soit ℓ un nombre premier. On fixe comme précédemment un anneau noethérien A et un idéal propre J de A. On suppose de plus que A est une $\mathbf{Z}_\ell$-algèbre et que J contient ℓA. Pour simplifier (cf. supra), tous les schémas considérés sont *noethériens*.

1. Opérations externes.

1.1. Soient X et Y deux schémas noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. On définit comme suit un foncteur exact

(1.1.1) $$\mathbf{R} f_! : \mathrm{D}(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}(Y,A),$$

appelé *image directe à supports propres*. D'après Nagata et Mumford il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd} ,$$

où i est une immersion ouverte et q un morphisme propre. On pose alors

$$\mathbf{R} f_! = \mathbf{R} q_* \circ \mathbf{R} i_!.$$

on vérifie, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum* (SGA4 XVIII), que le résultat ne dépend pas, à isomorphisme près, de la factorisation choisie.

La même technique de factorisation montre que si $g : Y \longrightarrow Z$ est un autre morphisme séparé de type fini, on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}(g\circ f)_! \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\, g_! \circ \mathbf{R} f_!, \tag{1.1.2}$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de morphismes.

Définition **1.1.3**. — *Si E est un A-faisceau sur X (resp. un objet de $\mathrm{D}(X,A)$), on pose pour tout $p \in \mathbf{Z}$*

$$\mathrm{R}^p f_!(E) = \mathrm{H}^p(\mathbf{R} f_!(E)).$$

On obtient ainsi un foncteur cohomologique qui n'est pas en général (sauf bien sûr si le morphisme f est propre) le foncteur cohomologique dérivé de $\mathrm{R}^\circ f_!$.

1.1.4. Il est clair que si $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un A-faisceau, on a pour tout $p \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{R}^p f_!(F) = (\mathrm{R}^p f_!(F_n))_{n\in\mathbf{N}}.$$

Proposition **1.1.5**. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de schéma noethériens.

*(i) (***Théorème de changement de base propre***) Si f (donc f') est séparé de type fini, on a pour tout $E \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^* \mathbf{R} f_!(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f'_!(g')^*(E).$$

*(ii) (***Théorème de changement de base lisse***) Si ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y et g est lisse, on a pour tout $E \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^* \mathbf{R} f_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}(f')_*(g')^*(E).$$

Preuve : Montrons (ii). Utilisant l'adjonction entre image directe et image réciproque (I 7.7.6), on construit comme dans (SGA4 XVII) (voir aussi SGA4 XII 4), un morphisme fonctoriel

$$g^* \mathbf{R} f_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}(f')_*(g')^*(E).$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, on se ramène par "way-out functor lemma" au cas où E est de degré 0, et il suffit alors de montrer que les morphismes

$$g^* \mathrm{R}^i f_*(E) \longrightarrow \mathrm{R}^i(f')_*(g')^*(E) \quad (i \in \mathbf{N})$$

correspondants de $\mathbf{E}(X,J)$ sont des isomorphismes. Cela se voit sur les composants, grâce au théorème de changement de base lisse sur les A_n-Modules (SGA4 XII 1.1). Montrons (i). On construit tout d'abord un morphisme fonctoriel

$$g^* \mathbf{R} f_!(E) \longrightarrow \mathbf{R}(f')_!(g')^*(E),$$

en paraphrasant la construction faite pour les A_n-Modules (SGA4 XVII). Pour cela, choisissant une factorisation $f = q \circ i$, avec i une immersion ouverte et q un morphisme propre, on se ramène à faire la construction lorsque f est propre, ou bien est une immersion ouverte; on vérifie ensuite de açon standard que le résultat ne dépend pas de la factorisation choisie. Lorsque f est une immersion ouverte, les morphismes analogues pour les A_n-Modules ($n \in \mathbf{N}$) définissent de façon évidente un isomorphisme $g^* f_! \xrightarrow{\sim} (f')_!(g')^*$ de foncteurs exacts

$$\mathbf{E}(X,J) \longrightarrow \mathbf{E}(Y',J),$$

d'où par passage au quotient, un isomorphisme de foncteurs exacts

$$A - \mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(Y'),$$

qui fournit à son tour un isomorphisme de foncteurs exacts

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}(X,A) \arrow[r, bend left, "g^* f_!"] \arrow[r, bend right, "(f')_!(g')^*"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\sim"] & \mathrm{D}(Y',A). \end{tikzcd}$$

Lorsque f est un morphisme propre, on utilise la même construction que pour (ii). Pour montrer enfin que le morphisme (1.1.6) ainsi construit est un isomorphisme, on se ramène au cas où E est de degré 0, et alors l'assertion résulte, comme pour (ii), de l'assertion analogue pour les A_n-Modules (SGA4 XVII).

Proposition **1.1.7** (Formule de projection). — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens, $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$ et $F \in \mathrm{D}^-(X,A)$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\mathbf{R}f_!(E \underline{\otimes} f^*(F)) \xleftarrow{\sim} \mathbf{R}f_!(E \underline{\otimes}(F))$$

Preuve : Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme **1.1.8**. — *Si d est un entier majorant la dimension des fibres de f, on a pour tout A-faisceau M sur X*

$$\mathrm{R}^i f_!(M) = 0 \quad (i > 2d).$$

(Résulte immédiatement de l'assertion analogue pour les composants de M).

Choisissant une campactification de f, on se ramène à montrer (1.1.7) successivement lorsque f est une immersion ouverte, ou un morphisme propre. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 7.7.10.(iv)). Dans le second cas, on définit un morphisme

$$\mathbf{R}f_*(E) \underline{\otimes} F \longrightarrow \mathbf{R}f_*(E \underline{\otimes} f^* F)$$

sur le modèle de (J.L. Verdier: The Lefschetz fixed point formula in étale cohmology, in "Conference on local fiels held at Drieberger" preuve de 3.2), en se ramenant à F plat et E f_*-acyclique (ce qui est possible grâce à 1.1.8). Enfin, pour voir que (1.1.9) est un isomorphisme, on se ramène par les dévissages habituels au cas où E et F sont réduits au degré 0 et F plat, et alors l'assertion résulte de la formule de projection pour les A_n-Modules ($n \in \mathbf{N}$), appliquée aux composants de E et F.

Proposition **1.1.10** (Formule de Künneth). — *Considérons un diagramme* *cartésien de schémas noethériens*

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Z Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd},$$

et posons $h = f \circ p = g \circ q$. Si $E \in \mathrm{D}^-(X, A)$ et $F \in D^-(Y, A)$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} h_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F).$$

Preuve : Formellement la même que celle de l'assertion correspondante pour les faisceaux de A_n-Modules ($n \in \mathbf{N}$) (SGA4 XVII). De (1.1.7) appliqué à f, on déduit un isomorphisme

(1.1.10.1) $$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} f^* \mathbf{R} g_!(F)).$$

Le théorème de changement de base propre pour f (1.1.5.(i)) montre que

(1.1.10.2) $$f^* \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} p_! q^*(F).$$

Comparant avec (1.1.10.1), on a donc

$$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F)).$$

La formule de projection (1.1.7) pour le morphism p montre que

$$E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} p_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F),$$

d'où

$$\mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_! \mathbf{R} p_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F),$$

et le résultat annoncé puisque $f \circ p = h$.

Proposition **1.1.11**. — *Soient X et Y deux schémas noethériens, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini, et $E \in \mathrm{D}(X, A)$.*

(i) *Si* $E \in \mathrm{D}_c(X,A)$, *alors* $\mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_c(Y,A)$.

(ii) *Si* $E \in \mathrm{D}^-(X,A)_{torf}$, *alors* $\mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}^-(Y,A)_{torf}$.

(iii) *Supposons que* f *soit propre et lisse, et que* ℓ *soit premier aux caractéristiques résiduelles de* Y. *Alors:*

$$E \in \mathrm{D}_t(X,A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_t(Y,A).$$

$$E \in \mathrm{D}_{parf}(X,A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_{parf}(Y,A).$$

Preuve : Montrons (i). Grâce à (1.1.8), on peut supposer E de degré 0 associé à un A-faisceau J-adique constructible. Alors, l'assertion est essentiellement (SGA5 VI 2.2.2). Pour la première partie de (iii), on est ramène de même à voir que si E est un A-faisceau J-adique constant tordu constructible, les A-faisceaux $\mathrm{R}^p f_*(E)$ ($p \in \mathbf{N}$) sont constants tordus constructibles. Cela se voit comme (SGA5 V 2.2.2), en utilisant le lemme de SHIH (SGA5 V A 3.2) et la stabilité des catégories des faisceaux abéliens localement constants constructibles par images directes supérieures (SGA4 XVI 2.2). L'assertion (ii) résulte sans peine de (1.1.7), et on en déduit aussitôt la deuxième partie de (iii) (compte tenu de la première).

1.2. Soient X et Y deux schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que γ admet un Module inversible ample. On définit alors comme suit un foncteur exact

(1.2.1) $$\mathbf{R}f^! : \mathrm{D}^+(Y,A) \longrightarrow \mathrm{D}^+(X,A).$$

D'après (EGA II 5.3.3), il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & P^r_Y \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

avec j une immersion. On en déduit aussitôt une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & U \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

où i est une immersion fermée et p un morphisme lisse équidimensionel de dimension r. Avec les notations de (SGA5 VI 1.3.4), on pose alors pour tout $F \in \mathrm{D}^+(X,A)$

$$\mathbf{R} f^!(F) = \mathbf{R} i^!(p^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r))[2r],$$

où le foncteur $\mathbf{R} i^!$ a été défini en (I 7.7.11). Pour avoir que cette définition ne dépend pas, à isomorphisme près, des choix faits, on est ramené, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum*, à prouver le théorème de *pureté cohomologique* suivant.

Proposition **1.2.3**. — *Soient S, X, Y trois schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un S-couple lisse (SGA4 XVI 3.1) purement de codimension d. Pour tout $F \in$ $\mathrm{D}^+(S,A)$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel (classe fondamentale locale)

$$\mathbf{R} j^!(f^* F) \xleftarrow{\ \sim\ } g^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d]. \tag{1.2.3.1}$$

Preuve : Par (I 7.7.12), il s'agit de définir un morphisme

$$\mathbf{R} j_*(g^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d]) \longrightarrow f^* F,$$

soit, d'après la formule de projection (I 7.7.12 (iv)),

$$f^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{R} j_*(\mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d]) \longrightarrow f^* F.$$

On est ainsi ramené à définir (1.2.3.1) dans le cas où $A = \mathbf{Z}_\ell = F$. Il s'agit alors d'exhiber un morphisme

$$\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \mathbf{R} j^!(\mathbf{Z}_\ell(d))[2d].$$

Mais on sait, d'après l'assertion analogue (SGA4 VI 3) pour les composantes, que

$$\mathrm{R}^S j^!(\mathbf{Z}_\ell(d)) = 0 \quad \text{pour } s < 2d,$$

de sorte qu'il suffit d'exhiber un morphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{R}^{2d} j^!(\mathbf{Z}_\ell(d)).$$

On prend le système projectif des morphismes classes fondamentales correspondants

$$\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{R}^{2d} j^!(\mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes d}).$$

Enfin, pour voir que (1.2.3.1) est un isomorphisme, on peut supposer que F est réduit au degré 0, associé à un A-faisceau noté de même. Alors, l'assertion résulte du théorème de pureté cohomologique pour les A_n-Modules ($n \in \mathbf{N}$), appliqué aux composants de F.

Notation 1.2.4. Si F est un A-faisceau sur Y (resp. un objet de $\mathrm{D}^+(Y,A)$), on pose pour tout $p \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{R}^p f^!(F) = \mathrm{H}^p(\mathbf{R} f^! F).$$

1.2.5. Si X, Y, Z sont trois schémas noethériens admettant des Modules inversibles amples, et $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes quasiprojectifs, on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}(g \circ f)^! \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} g^! \circ \mathbf{R} f^!,$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de tels morphismes.

Cela se voit, comme dans le cas usuel des faisceaux abéliens de torsion, par la méthode de factorisation de Lichtenbaum.

Proposition **1.2.5** (Formule d'induction). — *Sous les hypothèses préliminaires de (1.2), soient $E \in \mathrm{D}_c^-(Y,A)$ et $F \in \mathrm{D}^+(X,A)$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f^*E, \mathbf{R} f^! F).$$

Preuve : Si f est une immersion fermée, on a (I 7.7.13) un isomorphisme

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} f^* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f_*A, \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)),$$

soit, d'après l'isomorphisme de Cartan (E et f_*A sont à cohomologie constructible)

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} f^* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f_*A, F)).$$

Utilisant à nouveau (I 7.7.3), on a

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\xrightarrow{\sim} f^*\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,f^*\mathbf{R}f^!F),$$

d'où, d'après l'adjonction entre f^* et f_* (I 7.7.6)

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \xrightarrow{\quad\sim\quad} f^*f_*\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F)$$

$$\xrightarrow{\quad\sim\quad} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

Lorsque f est lisse et équidimensionnel de dimension r, on a

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\xrightarrow{\sim} f^*\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Z}_\ell(r)[2r];$$

de (I 7.7.2 (ii)), on déduit alors aussitôt un morphisme "canonique"

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, on peut supposer que E et F sont réduits au degré 0 et que $\mathrm{H}^0(E)$ est un A-faisceau constructible. Il s'agit alors de voir que les morphismes canoniques

$$(I6.4.1.1) \qquad f^*\underline{\mathrm{Ext}}^p_A(E,F)\longrightarrow \underline{\mathrm{Ext}}^p_A(f^*E,f^*F)$$

sont des isomorphismes; vu leur définition, cela est conséquence immédiate de l'assertion analogue pour les A_n-Modules (SGA4 XVIII). Enfin, dans le cas général, on choisit une factorisation $f=p\circ i$ du type (1.2.2). Des deux cas précédents, on déduit des isomorphismes

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}p^i\,\mathbf{R}i^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}p^!\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(i^*E,\mathbf{R}i^!F)$$
$$\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(p^*i^*E,\mathbf{R}p^!\mathbf{R}i^!F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

On assure ensuite, comme d'habitude, que l'isomorphisme composé ne dépend pas de la factorisation choisie.

1.3. Soient $u:A\longrightarrow B$ une A-algèbre et K un idéal de B tel que $u(J)\subset K$. On utilise dans l'énoncé suivant les notations de (I 8).

Proposition **1.3.1.** — *Soit $f:X\longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens.*

1) Soit $E \in \mathrm{D}(X,A)$. On a un isomorphisme canonique

$$\boldsymbol{L}\, u^* \mathbf{R} f_!(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_! \boldsymbol{L}\, u^*(E),$$

lorsque $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$, ou lorsque A est local régulier et J est son idéal maximal.

2) Plaçons-nous maintenant dans le cas où Y admet un Module inversible ample. On suppose de plus que ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y, que l'anneau A est local régulier et que J est son idéal maximal. Alors pour tout $F \in \mathrm{D}^+(Y,A)$, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\boldsymbol{L}\, u^* \mathbf{R} f^!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f^! \boldsymbol{L}\, u^*(F),$$

qui est un isomorphisme *lorsque B est une A-algèbre finie et $K = JB$.*

Preuve : Montrons 1), et définissons d'abord un morphisme

$$\mathbf{L}\, u^* \mathbf{R} f_!(E) \longrightarrow \mathbf{R} f_! \mathbf{R}\, u^*(E). \tag{1.3.1.1}$$

D'après (I. 8.1.6), il suffit dans chacun des cas considérés de définir un morphisme

$$\mathbf{R} f_!(E) \longrightarrow u_* \mathbf{R} f_! \mathbf{L}\, u^*(E). \tag{1.3.1.2}$$

Mais il est immédiat que $u_* \mathbf{R} f_! \simeq \mathbf{R} f_! u_*$, de sorte que l'on définit (1.3.1.2) en appliquant le foncteur $\mathbf{R} f_!$ au morphisme d'adjonction (I 8.1.7)

$$E \longrightarrow u_* \mathbf{L}\, u^*(E).$$

Pour voir que (1.3.1.1) est un isomorphisme, on se ramène, par le way-out functor lemme, au cas où $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$. Alors, grâce à la conservativité du foncteur u_*, il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$B \otimes_A \mathbf{R} f_!(E) \longrightarrow \mathbf{R} f_!(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (1.1.7). Montrons 2). Pour définir un morphisme

$$\mathbf{L}\, u^* \mathbf{R} f^!(F) \longrightarrow \mathbf{R} f^! \mathbf{L}\, u^*(F), \tag{1.3.1.3}$$

on se ramène encore, grâce à (I 8.1.6), à définir un morphisme

$$\mathbf{R}f^!(F) \longrightarrow u_*\mathbf{R}f^!\mathbf{L}u^*(F). \tag{1.3.1.4}$$

On a évidemment $u_*\mathbf{R}f^! \simeq \mathbf{R}f^!u_*$; on prend pour (1.3.1.4) l'image par $\mathbf{R}f^!$ du morphisme d'adjonction (I 8.1.7). Pour voir que (1.3.1.3) est un isomorphisme, on se ramène, après avoir choisi une "lissification" (1.2.2), à le faire successivement pour une immersion fermée et un morphisme lisse équidimensionnel. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 8.1.16 (iii)). Dans le second, on se ramène aussitôt à (I 8.1.16 (i)).

2. Dualité.

Dans tout ce paragraphe, tous les schémas considérés sont de caractéristique résiduelles premières à ℓ.

2.1. Soient X et Y deux schémas noethériens et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample et on se propose de définir un morphisme "trace"

$$\mathrm{Tr}_f : \mathbf{R}f_!\mathbf{R}f^! \longrightarrow \mathrm{id} \tag{2.1.1}$$

entre foncteurs de $\mathrm{D}(Y,A)$ dans $\mathrm{D}(Y,A)$.

Lorsque f est une immersion fermée, on dispose d'un tel morphisme, à savoir le morphisme d'adjonction déduit de (I 7.7.12 (i)).

Lorsque f est un morphisme lisse équidimensionnel de dimension r, il s'agit de définir pour tout $F \in \mathrm{D}(Y,A)$ un morphisme fonctoriel

$$\mathbf{R}f_!(f^*F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r)[2r]) \longrightarrow F. \tag{2.1.2}$$

Comme $A\underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Z}_\ell(r)$ est localement libre constructible, on définit sur le modèle de (1.1.7), mais sans hypothèse de degré sur F, un isomorphisme de "projection"

$$\mathbf{R}f_!(\mathbf{Z}_\ell(r))[2r]\underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell}F \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_!(f^*F\underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Z}_\ell(r))[2r],$$

ce qui ramène à faire la construction de (2.1.2) dans le cas où $A = \mathbf{Z}_\ell = F$. Dans ce cas, comme $\mathrm{R}^i f_! = 0$ pour $i > 2d$ (1.1.8), il s'agit d'exhiber un morphisme "trace"

$$\mathrm{R}^{2r} f_!(\mathbf{Z}_\ell(r)) \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell.$$

On prend le système projectif des morphismes traces "habituels"

$$\mathrm{R}^{2r} f_!(\mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes r}) \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z}.$$

Dans le cas général, on choisit pour définir (2.1.1) une factorisation $f = p \circ i$ du type (1.2.2). Désignant par

$$u : \mathbf{R}\, i_! \mathbf{R}\, i^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

$$v : \mathbf{R}\, p_! \mathbf{R}\, p^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

les morphismes traces définis par les méthodes précédentes pour i et p respectivement, on définit Tr_f par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} f_! \mathrm{R} f^! \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"'] & & \mathrm{R}\, p_! \mathrm{R}\, i_! \mathrm{R}\, i^! \mathrm{R}\, p^! \arrow[d, "\mathrm{R}\, p_!(u\, \mathrm{R}\, p^!)"] \\ \mathrm{id} & & \mathrm{R}\, p_! \mathrm{R}\, p^! \arrow[ll, "v"] \end{tikzcd} \quad .$$

On s'assure ensuite, de a façon habituelle, que le résultat ne dépend pas de la factorisation choisie.

2.2. Sous les hypothèses précédentes, on se propose maintenant de définir, pour $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$ et $F \in \mathrm{D}^+(Y,A)$ un morphisme "canonique" fonctoriel

$$\mathbf{R} f_* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R} f_! E, F). \tag{2.2.1}$$

Pour cela, nous allons d'abord définir, pour $L \in \mathrm{D}^-(X,A)$ et $M \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un morphisme fonctoriel

$$\mathbf{R} f_* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(L, M) \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R} f_! L, \mathbf{R} f_! M). \tag{2.2.2}$$

On prendra alors pour (2.2.1) le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R} f_! E, \mathbf{R} f_! \mathbf{R} f^! F) \arrow[dr, "\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathrm{id}, \mathrm{Tr}_f)"] & \\ \mathbf{R} f_* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \arrow[ur, "(2.2.2)"] & & \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R} f_! E, F) \end{tikzcd}$$

Il reste à définir (2.2.2). Lorsqu f est une immersion ouverte, le foncteur $f_!$ commute aux limites inductives filtrantes, et permet donc de définir pour tout couple (E,F) de A-faisceaux sur X un morphisme fonctoriel

$$f_! \underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(f_!E, f_!F), \tag{2.2.3}$$

à partir des morphismes analogues dans la catégorie des A-Modules. Pour définir (2.2.2) dans ce cas, on peut supposer L quasilibre et M flasque, de sorte que $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(L,M)$ est flasque. Le morphisme (2.2.3) fournit par fonctorialité un morphisme de complexes

$$f_! \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(L,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(f_!L, f_!M). \tag{2.2.4}$$

Choisissant une résolution quasilibre $P \longrightarrow f_!L$ et une résolution flasque $f_!M \longrightarrow Q$, on prend pour (2.2.2) le composé de (2.2.4) et du morphisme canonique

$$\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(f_!L, f_!M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(P,Q).$$

Lorsque f est propre, il s'agit de définir un morphisme

$$\mathbf{R}f_* \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(L,M) \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R}f_*L, \mathbf{R}f_*M).$$

La construction que nous allons faire de (2.2.5) vaut plus généralement pour un morphisme quasicompact et quasiséparé. Cette dernière hypothèse implique que le foncteur f_* commute aux limites inductives filtrantes, et permet donc comme précédemment de définir pour tout couple (E,F) de A-faisceaux sur X un morphisme fonctoriel

$$f_* \underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_A(f_*E, f_*F), \tag{2.2.6}$$

à partir des morphismes analogues dans la catégorie des A-Modules. Pour définir (2.2.5), on peut supposer L quasilibre et M flasque, de sorte que $\underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(L,M)$ est flasque. Le morphisme (2.2.6) fournit par fonctorialité un morphisme de complexes

$$f_* \underline{\mathrm{Hom}}_A(L,M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^\bullet_A(f_*L, f_*M). \tag{2.2.7}$$

On prend pour (2.2.5) le composé de (2.2.7) et du morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_A(f_*L, f_*M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_A(P, f_*M)$$

déduit d'une résolution quasilibre $P \longrightarrow f_*L$ de f^*L.

Enfin, dans le cas général, on choisit une compactification $f = q \circ i$ de f, et on définit (2.2.2) de façon évidente à partir des morphismes déjà définis pour i et q respectivement. Bien, entendu, on s'assure que le résultat ne dépend pas des choix faits, et notamment de la compactification choisie.

Proposition **2.2.8**. — *Sous les hypothèses préliminaires de (2.1), soient* $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$ *et* $F \in \mathrm{D}^+(Y,A)$. *On a des isomorphismes canoniques fonctoriels :*

(i) $\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R}f^!F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R}f_!E, F)$.

(ii) $\mathbf{R}\overline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R}f^!F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\overline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R}f_!E, F)$.

(iii) $\mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(E, \mathbf{R}f^!F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}f_!E, F)$.

(iv) $\mathrm{Hom}_A(E, \mathbf{R}f^!F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathbf{R}f_!E, F)$.

Preuve : Nous allons voir que (2.2.1) est un isomorphisme. Les autres assertions en résulteront en appliquant aux deux membres les foncteurs respectifs $\mathbf{R}\overline{\Gamma}(Y,.)$, $\mathbf{R}\Gamma(Y,.)$ (I 7.4.10) et $\mathrm{Hom}_A(A,.)$ d'après (I 7.4.18). Pour voir que (2.2.1) est un isomorphisme, on se ramène par le way-out functor lemma au cas où E et F sont les complexes de degré 0 associés à des A-faisceaux notés de même. Les constructions aboutissant à la définition de (2.2.1) peuvent alors être faites au moyen de résolutions flasques ou quasilibres dans $\mathbf{E}(X,J)$ et $\mathbf{E}(Y,J)$. Si $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$, l'assertion résulte alors aussitôt du fait que les morphismes de dualité

$$\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A_m}(E_m, \mathbf{R}f^!F_n) \longrightarrow \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A_m}(\mathbf{R}f_!E_m, F_n) \quad (m, n \in \mathbf{N}; m \geq n)$$

sont des isomorphismes, et de ce que les foncteurs $\mathrm{R}^i f_*$ ($i \in \mathbf{Z}$) commutent aux limites inductives filtrantes.

2.3. A partir de maintenant, on suppose, pour simplifier, que $A = \mathbf{Z}_\ell$ et $J = \ell\mathbf{Z}_\ell$. Étant donné un complexe $K \in \mathrm{D}^+(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on pose pour tout $F \in \mathrm{D}^-(X, \mathbf{Z}_\ell)$

$$\mathrm{D}_K(F) = \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(F, K).$$

Définition **2.3.1**. — *Soit X un schéma noethérien. On dit qu'un complexe K de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux sur X est* dualisant *si pour tout $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on a $\mathrm{D}_K(F) \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, et si le morphisme "de Cartan"*

$$F \longrightarrow \mathrm{D}_{K^\circ}\mathrm{D}_K(F) \tag{2.3.2}$$

que l'en en déduit est un isomorphisme.

Explicitons (2.3.2). Comme $D_K(F) \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, le morphisme (I 7.6.5)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathrm{D}_K(F) \underline{\otimes} F, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathrm{D}_K(F), \mathrm{D}_K(F))$$

est un isomorphisme (II 2.6). L'image inverse de l'identité de $\mathrm{D}_K(F)$ définit un morphisme

$$F \underline{\otimes} \mathrm{D}_K(F) \longrightarrow K.$$

Comme $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, une nouvelle application de l'isomorphisme de Cartan permet d'en déduire le morphisme (2.3.2) annoncé.

Proposition **2.3.2** (Formules d'échange). — *Soient X et Y deux schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample. Étant donné $K_Y \in \mathrm{D}^+(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, on pose*

$$K_X = \mathbf{R} f^!(K_Y), \quad \mathrm{D}_X = \mathrm{D}_{K_X}, \quad \mathrm{D}_Y = \mathrm{D}_{K_Y}.$$

a) Il existe, pour $F \in \mathrm{D}^-(X, \mathbf{Z}_\ell)$, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbf{R} f_* \mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_Y \mathrm{R} f_!(F). \tag{i}$$

Si K_X et K_Y sont dualisants et $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbf{R} f_! \mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_Y \mathbf{R} f_*(F). \tag{ii}$$

b) Il existe, pour $\mathrm{D}^-(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, *un isomorphisme fonctoriel*

$$(i) \qquad \mathbf{R} f^! \mathrm{D}_Y(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X(f^* F).$$

Si K_X *et* K_Y *sont dualisants et* $F \in \mathrm{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, *on a un isomorphisme fonctoriel*

$$(ii) \qquad f^* \mathrm{D}_Y(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X \mathbf{R} f^!(F).$$

Preuve : Formellement identique à celle de (SGA5 I 1.12), dont d'ailleurs (2.3.2) n'est qu'une paraphrase.

Proposition **2.3.3**. — *Soient* X *un schéma noethérien de caractéristiques résiduelles premières à* ℓ.

(i) Si X *est régulier, de dimension finie, et satisfait aux conditions de (SGA5 I 3.4.1), le complexe* $\mathbf{Z}_\ell$ *est dualisant sur* X.

(ii) Si X *est régulier excellent de caractéristique 0, et admet un Module inversible ample, alors pour tout morphisme quasiprojectif* $f : T \longrightarrow Y$, *le complexe* $\mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)$ *est dualisant sur* T.

(iii) Soient k *un corps et* $f : X \longrightarrow S = \mathrm{Spec}(k)$ *un morphisme quasiprojectif, avec dim*$(X) \leq 2$. *Alors* $\mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)$ *est dualisant sur* X.

Preuve : Montrons par exemple (ii), les autres assertions se prouvant de façon essentiellement identique, à partir des énoncés correspondants de (SGA5 I). Montrons tout d'abord que si $E \in \mathrm{D}_c^b(T, \mathbf{Z}_\ell)$, alors $\mathbf{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(E, \mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)) \in \mathrm{D}_c^b(T, \mathbf{Z}_\ell)$.

Lemme **2.3.4**. — *Si* $F \in \mathrm{D}_c^+(X, \mathbf{Z}_\ell)$, *alors* $\mathbf{R} f^!(F) \in \mathrm{D}_c^+(T, \mathbf{Z}_\ell)$.

On se ramène à le voir lorsque F est un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau constructible. Alors cela résulte de la façon habituelle (SGA5 VI) du lemme de Shih, et de l'énoncé analogue pour les $\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z}$-Modules constructibles ($n \in \mathbf{N}$) et pour les $\mathbf{Z}_\ell[T]$-Modules constructibles. Comme les hypothèses de (II 2.5 (iii)) sont réalisées (SGA5 I 3.3.1) il résulte du lemme que

$$\mathbf{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(E, \mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)) \in \mathrm{D}_c^+(T, \mathbf{Z}_\ell).$$

Pour voir qu'il est borné, on peut supposer que E est un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau constructible. Alors, on peut prendre une résolution quasilibre (resp. flasque) de E (resp. $\mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)$) "canonique" dans $\mathbf{E}(T, \ell\mathbf{Z}_\ell)$, en ce sens que c'est un système projectif de résolutions quasilibres (resp. flasques) des composants. Comme la dimension quasi-injective des $\mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$ est indépendante de n (preuve de SGA5 I 3.4.3), l'assertion en résulte aussitôt. Il reste à voir que, posant

$$K = \mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell)$$

le morphisme canonique $E \longrightarrow \mathrm{D}_K \circ \mathrm{D}_K(E)$ est un isomorphisme. Pour cela, désignant par $u_\circ : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ le morphisme d'anneaux canonique, il suffit (II 8.2.2) de voir que le morphisme correspondant

$$\mathbf{L} u_\circ^*(E) \longrightarrow \mathbf{L} u_\circ^* \mathrm{D}_K \circ \mathrm{D}_K(E) \tag{2.3.5}$$

est un isomorphisme. Posant $L = \mathbf{R} u_\circ^*(K)$, les différentes compatibilités exposées en (I 8) montrent que (2.3.5) s'identifie au morphisme canonique

$$\mathbf{L} u_\circ^*(E) \longrightarrow \mathrm{D}_L \circ \mathrm{D}_L(\mathbf{L} u_\circ^*(E)).$$

Comme $L = \mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (1.3.1;2), et $\mathbf{L} u_\circ^*(E) \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (II 2.13.1), l'assertion résulte alors de (SGA5 I 3.4.3). On aurait pu également utiliser (II 2.13.9), qui éclaire bien la situation.

Proposition **2.3.6**. — *Soient k un corps séparablement clos de caractéristique différente de ℓ, $S = \mathrm{Spec}(k)$ et $f : X \longrightarrow S$ et $g : Y \longrightarrow S$ deux S-schémas quasiprojectifs, d'où un diagramme commutatif évident*

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] \arrow[dd, "h"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}.$$

On suppose que les schémas de type fini sur S et de dimension $\leq dim(X) + dim(Y)$ sont fortement désingularisables (SGA5 3.1.5) ce qui a lieu notamment su $car(k) = 0$, ou si k est parfait et $dim(X \times_S Y) \leq 2$. On pose

$$K_X = \mathbf{R} f^!(\mathbf{Z}_\ell), \quad K_Y = \mathbf{R} g^!(\mathbf{Z}_\ell), \quad K_{X \times_S Y} = \mathbf{R} h^!(\mathbf{Z}_\ell).$$

Ces complexes sont dualisants pour X, Y et $X \times_S Y$ respectivement, et on note D_X, D_Y, $\mathrm{D}_{X\times_S Y}$ *les foncteurs dualisants correspondants.*

Alors

a) Il existe un isomorphisme canonique

$$p^* K_X \underline{\otimes} q^* K_Y \xrightarrow{\sim} K_{X\times_S Y}.$$

b) Pour $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$ *et* $G \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, *il existe un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$p^* \mathrm{D}_X(F) \underline{\otimes} q^* \mathrm{D}_Y(G) \xrightarrow{\sim} D_{X\times_S Y}(p^* F \underline{\otimes} q^* G).$$

Preuve : L'énoncé est une paraphrase de (SGA5 III 3.1). Le fait que K_X, K_Y et $K_{X\times_S Y}$ soient dualisants résulte, sur le modèle de la preuve de (2.3.3), de (SGA5 I App.7.5). Utilisant (II 2.13.9), et diverses compatibilités évidentes, les assertions a) et b) résultent par simple passage à la limite des assertions correspondantes (SGA5 III 3.1) pour les $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$-Modules ($n \in \mathbf{N}$).

Avant d'énoncer la proposition suivante, précisons quelques définitions et notations de (I 8.3). Soit X un schéma noethérien. On définit la catégorie, notée

$$\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsc}(X)$$

des $\mathbf{Q}_\ell$*-faisceaux* sur X, au moyen de la partie multiplicative $\mathbf{Z}_\ell - 0$ de $\mathbf{Z}_\ell$ (I 8.3). Étant donné $d \in \mathbf{Z}$ le $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau $\mathbf{Z}_\ell(d)$ définit un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau, noté de préférence

$$\mathbf{Q}_\ell(d).$$

Comme on l'a indiqué dans (I 8.3), on étend sans peine aux $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux le formalisme développé pour les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux. Ainsi, on dit qu'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau F est *constructible* (resp. *constant tordu constructible*) s'il est isomorphe à l'image d'un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau du même type. La sous-catégorie pleine, notée $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(X)$ (reps. $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$), de $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsc}(X)$ engendrée par les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles) est *exacte*. De même, si K est un objet de $\mathrm{D}(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on dit que K est à cohomologie constructible (resp. constante tordu constructible) s'il est isomorphe dans $\mathrm{D}(X,\mathbf{Q}_\ell)$ à un complexe de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux constructible (resp. constant constructible). On note

$$\mathrm{D}_c(X,\mathbf{Q}_\ell) \quad (\text{resp.}\, \mathrm{D}_t(X,\mathbf{Q}_\ell))$$

la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathrm{D}(X,\mathbf{Q}_\ell)$ définie par les complexes à cohomologie constructible (resp. constante tordue constructible).

Proposition **2.3.7** (Dualité locale). — *Soient X un schéma quasiprojectif et lisse de dimension d sur un corps séparablement clos, et x un point fermé de X. Pour tout $F \in \mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$, on a une dualité parfaite entre espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{Q}_\ell$*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^{2d-i}_{\mathbf{Q}_\ell}(F,\mathbf{Q}_\ell(d))_x \times \mathrm{H}^i_x(F) \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell.$$

Preuve : On convient d'identifier, comme on l'a fait dans l'énoncé, un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible ponctuel et le $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie correspondant (SGA5 VI 1.4.3). Soit

$$i : x \hookrightarrow X$$

l'immersion fermée canonique. Posons $K_X = \mathbf{Z}_\ell(d)[2d]$ et $K_x = \mathbf{Z}_\ell$; ce sont des complexes dualisants pour X et x respectivement (2.3.3) et l'on a (1.2.3)

$$\mathbf{R}\, i^!(K_X) \xrightarrow{\sim} K_x \quad (\text{canoniquement}).$$

Notant $\mathrm{D}_X = \mathrm{D}_{K_X}$, $\mathrm{D}_x = \mathrm{D}_{K_x}$, la formule d'induction complémentaire fournit un isomorphisme (2.3.2 b) (ii))

$$i^*\,\mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X\,\mathbf{R}\, i^!(F).$$

Avec des notations évidentes, on a donc

$$\mathrm{D}_X(F)_x \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}_\ell}(\mathbf{R}\Gamma_x(F),\mathbf{Q}_\ell).$$

L'assertion en résulte aussitôt, grâce au fait que $\mathbf{Q}_\ell$ est un injectif dans la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels.

Remarque 2.3.8. Nous avons seulement donné ici la variante la moins technique du théorème de dualité locale, et renvoyons le lecteur à (SGA5 I 4) pour des énoncés plus généraux.

2.4. Replaçons-nous sous les hypothèses préliminaires de (2.3.6). Nous allons indiquer brièvement comment les constructions de (SGA5 III 3) se transposent dans notre cadre et permettent de démontrer un théorème de *Lefschetz-Verdier*.

Proposition **2.4.1**. — *Soient* $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$, $G \in \mathrm{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell)$.

a) Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, q^*G) \xrightarrow{\sim} p^*\mathrm{D}_X(F)\underline{\otimes}q^*G.$$

b) Il existe un accouplement parfait canonique

$$\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}\,q^!G) \times \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(q^*G, \mathbf{R}\,p^!F) \longrightarrow K_{X\times_S Y}.$$

Preuve : Formellement identique à celle de (SGA5 III 3.2), à partir de (2.3.2) et (2.3.6). On notera que, comme tous les complexes entrant en jeu sont à cohomologie constructible, on dispose sans restriction de l'isomorphisme de Cartan (II 2.6).

Proposition **2.4.2**. — *Si* $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$, $G \in \mathrm{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, *on a des isomorphismes canoniques*

(i) $\mathbf{R}\,h_*\mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}\,q^!G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{R}\,p_!(F), \mathbf{R}\,q_*(G))$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}\,q^!G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{R}\,p_!(F), \mathbf{R}\,q_*(G))$.

Preuve : La preuve de l'assertion (i) est formellement identique à celle de (SGA5 III 2.2.1). On en déduit (ii) en appliquant aux deux membres le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{Z}_\ell, .)$ (I 7.4.6).

Supposons maintenant que X et Y soient *propres* sur S, et soient $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$, $G \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$. Les complexes $\mathbf{R}\,f_*(F)$ et $\mathbf{R}\,g_*(G)$ sont *parfaits* : en effet, (1.1.11 (i) et (ii)), ils appartiennent à $\mathrm{D}_c^b(S, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$ et, comme le corps k est séparablement clos, $\mathrm{D}_c(S, \mathbf{Z}_\ell) = \mathrm{D}_t(S, \mathbf{Z}_\ell)$.

Donnons-nous de plus deux familles φ et ψ de supports sur $X \times_S Y$. On construit alors comme suit un diagramme

(2.4.3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{H}^0_{\varphi}(X \times_S Y, \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(p^*F, \mathbf{R}\,q^*G)) \times \mathrm{H}^0_{\psi}(X \times_S Y, \mathbf{R} \arrow[dll, "(a)"'] \\
\mathrm{Hom}(\mathbf{R}\,f_*F, \mathbf{R}\,g_*G) \times \mathrm{Hom}(\mathbf{R}\,g_*G, \mathbf{R}\,f_*F) \arrow[drr, "(c)"'] & & \\
 & & \mathrm{H}^0(S, \mathbf{Z}_\ell)
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de l'isomorphisme (2.4.2 (ii)), la flèche (a) n'est autre que la restriction du support. La flèche (b) résulte sans peine de l'accouplement (2.4.1 b)). La flèche (c) est le cup-produit défini en (II 2.11). Enfin, la flèche s'obtient immédiatement à partir du morphisme trace

$$\mathbf{R}\,h_*(K_{X \times_S Y}) \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell.$$

Théorème **2.4.4** (Lefschetz-Verdier). — *Le diagramme (2.4.3) ci-dessus est commutatif.*

Preuve : Utilisant les notations de (II 2.13.9), il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le diagramme déduit de (2.4.3) après application du foncteur $\mathbf{L}(\alpha_n)^*$ est commutatif. Comme le foncteur $\mathbf{L}(\alpha_n)^*$ commute à toutes les opérations usuelles, l'assertion résulte donc de (SGA 5 III 3.3) pour les $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$-Modules ($n \in \mathbf{N}$).

3. Formalisme des fonctions L.

Soit p un nombre premier $\neq \ell$. On note f l'élément de Frobenius $u \mapsto u^p$ ($u \in \overline{\mathbf{F}}_p$), qui est un générateur topologique du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$.

Étant donné un schéma X de type fini sur $\mathbf{F}_p$, on note X° l'ensemble des points fermés de X, et, pour tout $x \in X^\circ$, on désigne par $d(x)$ le degré résiduel de x. Choisissant pour tout $x \in X^\circ$ un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on rappelle (SGA 5 XV 3) que la fonction L d'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible F sur X est définie par la formule

$$(3.0) \qquad L_F(f) = \prod_{x \in X^\circ} (1/\det(1 - f_{F_{\overline{x}}}^{-d(x)} t^{d(x)})).$$

Grâce à la propriété de multiplicativité de (SGA 5 XV 3.1 a)), on peut prolonger cette définition à $\mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, en posant pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$

$$(3.1) \qquad L_E(f) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (L_{\mathrm{H}^i(E)}(t))^{(-1)^i}.$$

Proposition **3.2**. — *Soit X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$.*

a) Pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a

$$L_E(t) = L_{E'}(t) L_{E''}(t).$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a

$$L_{E[m]}(t) = (L_E(t))^{(-1)^m}.$$

b) Soient Y un sous-schéma fermé de X, et $U = X - Y$ l'ouvert complémentaire. On a

$$L_E = L_{E|U} L_{E|Y},$$

pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$.

c) Soit $h : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbf{F}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a

$$L_E = \prod_{s \in S^\circ} L_{E|X_s}.$$

Preuve : Immédiat à partir des assertions analogues pour les objets de cohomologie (SGA5 XV 3.1).

Proposition **3.3**. — *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$, $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ le morphisme structural et $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Alors*

$$L_E = L_{\mathbf{R}\, g_!(E)}.$$

En particulier, L_E est une fraction rationnelle.

Preuve : On peut supposer que E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible, et alors l'assertion n'est autre que (SGA5 XV 3.2).

Corollaire **3.4**. — *Soit $h : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbf{F}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a*

$$L_E = L_{\mathbf{R}\, h_!(E)}.$$

Nous allons maintenant déduire de (3.3) une *équation fonctionnelle* pou les fonctions L, du moins si X est projectif sur $\mathbf{F}_p$.

Définition **3.5**. — *Soient $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$, et $\overline{X} = X \times_{\mathbf{F}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on pose*

$$\chi(E) = \mathrm{rang}(\mathbf{R}\, g_! E) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i [\mathrm{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E}) : \mathbf{Q}_\ell],$$

$$\delta(E) = \det(\mathbf{R}\, g_!(E)) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (\det f_{\mathrm{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E})})^{(-1)^i},$$

où $\overline{E}$ désigne l'image inverse de E au-dessus de $\overline{X}$.

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité respectives de la trace et du déterminant dans la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, il es clair que pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E, \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

on a

$$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E''). \tag{3.5.1}$$

$$(3.5.2) \qquad \delta(E) = \delta(E')\delta(E'').$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$,

$$\chi(E[m]) = (-1)^m \chi(E) \quad \text{et} \quad \delta(E[m]) = (\delta(E))^{(-1)^m}.$$

Proposition **3.6**. — *Soit $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ un schéma projectif sur $\mathbf{F}_p$. On pose $K_X = \mathbf{R}\, g^!(\mathbf{Q}_\ell)$, et $\mathrm{D}_X = \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(.,K_X)$. Alors, pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a l'identité*

$$L_{\mathrm{D}_X(E)}(t) = (-t)^{-\chi(E)}\delta(E) L_E(t^{-1}).$$

Preuve : Le second membre a un sens d'après (3.3). Posons $S = \mathrm{Spec}$ et $\mathrm{D}_S = \mathbf{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(.,\mathbf{Q}_\ell)$. D'après (2.3.2 a)), on a

$$\mathbf{R}\, g_*(D_X E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_S\, \mathbf{R}\, g_*(E),$$

donc (3.3)

$$L_{\mathrm{D}_X}(E) = L_{\mathrm{D}_S(\mathbf{R}\, g_*(E))}.$$

Comme $L_E = L_{\mathbf{R}\, g_*(E)}$ (3.3), l'assertion résultera du lemme suivant

Lemme **3.7**. — *Si $F \in \mathrm{D}_c^b(S, \mathbf{Q}_\ell)$, on a :*

$$L_{\mathrm{D}_S(F)}(t) = (-t)^{\chi(F)}\delta(F) L_F(t^{-1}).$$

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité (3.5.1) et (3.5.2), on peut supposer que $F \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(S)$. Alors F correspond (SGA5 VII 1.4.2) à un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension fini V muni d'une opération continue f_V du Frobenius, et le $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{D}_S(F) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(F, \mathbf{Q}_\ell)$ correspond (II 1.26) au $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel $V^\vee$ muni de l'opération continue $(f_V^\vee)^{-1}$ du Frobenius. Il suffit alors de montrer que, étant donnés un corps K, un K-espace vectoriel de dimension finie V et un automorphisme u de V, on a l'identité

$$(3.8) \qquad 1/\det(1 - u^{-1}t) = (-t)^{-\dim(V)} \det(u)/\det(1 - u t^{-1})$$

dans $K(t)$. On peut pour cela supposer K algébriquement clos, donc u triangulable, puis, grâce aux propriétés de multiplicativité du déterminant, que $\dim(V)=1$. Alors u est l'homothétie définie par un scalaire non nul λ, et (3.8) est l'identité évidente

$$1/(1-(t/\lambda)) = (-\lambda/t)/(1-(\lambda/t)).$$

Bien entendu, la formule (3.6) ne présente d'intérêt en pratique que si l'on dispose d'une expression simple pour $\mathrm{D}_X(E)$. Nous allons maintenant donner des cas où il en est ainsi.

Proposition **3.9**. — *On suppose X quasiprojectif, lisse et purement de dimension n sur $\mathbf{F}_p$. Posant pour tout $E \in \mathrm{D}^b_c(S, \mathbf{Q}_\ell)$*

$$E^V = \underline{\mathrm{Hom}}^{\bullet}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell),$$

on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}_X(E) \simeq E^V(n)[2n]$$

dans chacun des cas suivants

(i) $E \in \mathrm{D}^b_t(X, \mathbf{Q}_\ell)$

(ii) X est une courbe, et E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible de la forme $i_*(M)$, où $i : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert dense de X et $M \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(U)$.

Preuve : Comme $\mathrm{D}_X(E) = \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(n))[2n]$, le cas (i) résulte du lemme suivant.

Lemme **3.9.1**. — *Étant donnés un schéma noethérien X, $F \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$ et $G \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(U)$, on a:*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(F, G) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Il s'agit de voir que si $F \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$ et $G \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fscn}(X)$, les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux $\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{Z}_\ell}(F, G)$ $(j \geq 1)$ sont annulés par une puissance de ℓ. D'après (I 6.4.2) et (II 1.2.1), on peut, quitte à se restreindre à des parties localement fermées convenables de X, supposer que $G \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$. Alors, compte tenu de (II 1.26), l'assertion résulte de l'assertion analogue, bien connue, pour les $\mathbf{Z}_\ell$-modules de type fini. Montrons (ii).

Il s'agit de voir que

$$P^j = \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Comme M est constante tordu constructible, il résulte du cas (i) que $P^j | U = 0$. Il nous suffit donc de voir que pour tout point fermé x de $Y = X - U$ et tout point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on a $P^j_{\overline{x}} = 0$. Le pendant pour les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux de la variante (SGA5 I 4.6.2) du théorème de dualité locale fournit un accouplement parfait

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) \times \mathbf{H}^{2-j}_{\overline{x}}(E) \longrightarrow \mathbf{Q}_{\ell'} \tag{3.9.2}$$

avec (SGA5 I 4.5.1)

$$\mathbf{H}^{2-j}_{\overline{x}} = (\mathbf{H}^{2-j}_x(E))_{\overline{x}}.$$

Comme le morphisme d'adjonction canonique

$$E \longrightarrow i_* i^*(E)$$

est un isomorphisme, il résulte de la première suite exacte de (SGA4 V 4.5) que

$$\mathbf{H}^0_x(E) = \mathbf{H}^1_x(E) = 0,$$

d'où aussitôt le résultat annoncé.

Ceci dit, lorsque X est projectif sur $\mathbf{F}_\ell$, la formule (3.6) prend la forme

$$L_{E^\vee}(p^{-n} t) = (-1)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}), \tag{3.10}$$

dans chacun des cas de (3.9). Compte tenu de (3.2 a)), cela résulte du lemme suivant.

Lemme **3.11**. — *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_\ell$, et $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Posant $F(j) = F \otimes \mathbf{Q}_\ell(j)$ ($j \in \mathbf{Z}$), on a la relation*

$$L_{F(j)}(t) = L_F(p^{-j} t).$$

D'après les propriétés de multiplicativité (3.2 a)), on peut pour le voir supposer que F est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible; alors, comme le Frobenius opère sur $\mathbf{Q}_\ell(j) \simeq \mathbf{Q}_\ell$ (non canoniquement) par l'homothétie de rapport p^{-j}, l'assertion est immédiate sur la définition (3.0).

Supposons maintenant qu'on ait de plus un isomorphisme

$$E^\vee \xrightarrow{\sim} E(\rho) \quad \text{pour un } \rho \in \mathbf{Z}.$$

Alors la formule (3.10) prend la forme

$$L_E(p^{-n-\rho}t) = (-t)^{-\chi(E)}\delta(E)L_E(t^{-1}),$$

ou encore, après avoir posé $q = n + \rho$ et fait le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$,

$$L_E(1/qt) = (-t)^{\chi E}\delta(E)L_E(t). \tag{3.12}$$

Remarque 3.13. Sous les hypothèses de (3.9), l'existence d'un tel entier p est assurée dans les cas suivants

cas (i) $E \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

cas (ii) $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

(Pour ce dernier cas, il est immédiat que

$$i_*(M^\vee) \simeq (i_*(M))^\vee. \quad)$$

Explicitons enfin une relation importante entre les entiers $\chi(E)$ et $\delta(E)$.

Proposition **3.14**. — *Soient X un schéma projectif et lisse purement de dimension n sur $\mathbf{Z}_p$ et $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$. On suppose qu'il existe un entier m tel que*

$$\mathrm{D}_X(E) \xrightarrow{\sim} E(m),$$

et on pose $q = p^m$. Alors, on a, l'égalité

$$\delta(E)^2 = q^{\chi(E)}.$$

Preuve : La substitution $t \mapsto 1/qt$ dans (3.12) fournit l'équation fonctionnelle

$$L_E(t) = (-1/qt)^{\chi(E)} \delta(E) L_E(1/qt). \tag{3.12 bis}$$

Multipliant (3.12) et (3.12 bis) membre à membre, on obtient l'identité

$$L_E(t)L_E(1/qt) = q^{-\chi(E)}(\delta(E))^2 L_E(t)L_E(1/qt),$$

d'où aussitôt la relation désirée, compte tenu du fait que L_E n'est pas identiquement nulle, comme il est clair sur sa définition (3.0).