

# Catégories Dérivées en Cohomologie $\ell$ -adique

par

Jean-Pierre JOUANLOU

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT  
ès SCIENCES MATHÉMATIQUES  
présentée  
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : **Catégories Dérivées en Cohomologie  $\ell$ -adique**

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL    Président

GROTHENDIECK

VERDIER                    Examineurs

DIXMIER



## PREFACE

### Description

Special thanks to Fan Xuanrui to provide us with a copy of the thesis.

## TABLE DE MATIÈRES

I. Catégorie des faisceaux sur un idéotope . . . . .	6
1. Généralités . . . . .	6
2. Cas où l'objet final de $X$ est quasicompact . . . . .	9
3. $A$ -faisceaux de type constant, strict ou $J$ -adique . . . . .	10
4. Opérations externes . . . . .	10
5. Produit tensoriel . . . . .	10
6. Foncteurs associés aux homomorphismes . . . . .	10
7. Catégories dérivées . . . . .	10
8. Changement d'anneau . . . . .	10
II. Conditions de finitude . . . . .	11
1. Catégorie des $A$ -faisceaux constructibles . . . . .	11
2. Conditions de finitude dans les catégories dérivées . . . . .	14
III. Applications aux schémas . . . . .	18
1. Opérations externes . . . . .	18
2. Dualité . . . . .	22
3. Formalisme des fonctions $L$ . . . . .	22

## § I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

---

### 1. Généralités.

Définition 1.1. — On appelle idéotope *untriple*  $(x, a, j)$  formé d'un topos  $X$ , d'un anneau commutatif unifié  $A$  et d'un idéal propre  $J$  de  $A$ .

On suppose donné dans la suite du paragraphe un idéotope  $(X, A, J)$ . On note  $A - \text{Mod}_X$  la catégorie des faisceaux de  $A_X$ -Modules et

$$\underline{\text{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A - \text{Mod}_X)$$

la catégorie abélienne des systèmes projectifs indexés par  $\mathbf{N}$  de  $A_X$ -Modules.

Définition 1.2. — On appelle  $(A, J)$ -faisceau sur  $X$ , ou s'il n'y a pas de confusion possible  $A$ -faisceau sur  $X$ , un système projectif

$$F = (\mathbf{F}_n, u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}, m \geq n}$$

de  $A_X$ -Modules, vérifiant

$$J^{n+1} F_n = 0$$

pour tout entier  $n \geq 0$ . On note  $\mathbf{E}(X, J)$  la sous-catégorie, abélienne, pleine de  $\underline{\text{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A - \text{Mod}_X)$  engendrée par les  $A$ -faisceaux.

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, la catégorie  $\mathbf{E}(X, J)$  ne mérite pas le nom de catégorie des  $A$ -faisceaux sur  $X$ ; c'est seulement une catégorie quotient de la précédente que nous baptiserons ainsi. Aussi, pour éviter le risque de

confusion, nous arrivera-t-il, étant donnés deux  $A$ -faisceaux  $E$  et  $F$ , de noter

$$\mathrm{Hom}_a(E, F)$$

( $a$  pour anodin) l'ensemble des  $\mathbf{E}(X, J)$ -morphisms de  $E$  dans  $F$ .

Notons pour tout objet  $T$  de  $X$  par  $\mathbf{T}$ , ou même  $T$  s'il n'y a pas de confusion possible, le topos  $X/T$ . Le foncteur restriction pour les faisceaux de  $A$ -Modules induit de façon évidente un foncteur restriction

$$\mathbf{E}(X, J) \longrightarrow \mathbf{E}(T, J)$$

$$E \mapsto E|_T.$$

**Proposition-définition 1.4.** — Soit  $E = (E_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un  $A$ -faisceau sur  $X$ :

- 1) On dit que  $E$  est essentiellement nul s'il est nul en tant que pro-objet, ce qui revient à dire que pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un entier  $p \geq 0$  tel que le morphisme de transition

$$E_{n+p} \longrightarrow E_n$$

soit nul.

- 2) On dit que  $E$  est négligeable s'il vérifie l'une des relations équivalentes suivantes:

- (i) Il existe un recouvrement  $(T_i \longrightarrow e_X)_{i \in I}$  de l'objet final  $e_X$  de  $X$  tel que les  $A$ -faisceaux  $E|_{T_i}$  soient essentiellement nuls.
- (ii) Idem, mais en supposant de plus que les  $T_i$  sont des ouverts de  $X$ .

**Preuve:** Pour voir l'équivalence de (i) et (ii), il suffit d'observer que pour tout  $i \in I$ , le faisceau image  $U_i$  de  $T_i$  par le morphisme canonique  $T_i \longrightarrow e_X$  est tel que le morphisme restriction

$$U_i \longrightarrow \mathbf{T}_i$$

soit fidèle.

Il est clair que lorsque l'objet final de  $X$  est quasicompact (SGA4 VI 1.1), il revient au même pour un  $A$ -faisceau de dire qu'il est essentiellement nul ou qu'il est négligeable. Il est par ailleurs immédiat que la sous-catégorie pleine

$$(1.4.1) \quad N(X, J) \quad \text{ou plus simplement } N_X$$

de  $\mathbf{E}(X, J)$  engendré par les  $A$ -faisceaux négligeables est *épaisse* dans  $\mathbf{E}(X, J)$ .

**Définition 1.5.** — Soit  $(X, A, J)$  un idéotope. On appelle catégorie des  $(A, J)$ -faisceaux (ou  $A$ -faisceaux s'il n'y a pas de confusion possible) sur  $X$  et on note

$$(A, J) - \text{fsc}(X) \quad (\text{ou plus simplement } A - \text{fsc}(X))$$

la catégorie abélienne quotient (thèse Gabriel III.1)

$$\mathbf{E}(X, J)/N_X.$$

**1.6.** Soit  $T$  un objet de  $X$ . Il est clair que le foncteur restriction (1.3) est exact et envoie  $N_X$  dans  $N_T$ , d'où par passage au quotient un foncteur exact, appelé encore *restriction*,

$$(1.6.1) \quad r_{T, X} : A - \text{fsc}(X) \longrightarrow A - \text{fsc}(T).$$

Soient maintenant  $T$  et  $T'$  deux objets de  $X$  et  $f : T \longrightarrow T'$  un morphisme. Se plaçant dans le topos  $\mathbf{T}'$ , on déduit de (1.6.1) un foncteur exact

$$(1.6.2) \quad f^* : A - \text{fsc}(T') \longrightarrow A - \text{fsc}(T),$$

vérifiant les propriétés de transitivité habituelles.

Ces remarques étant faites, nous utiliserons dans la suite sans plus d'explications le langage local pour les  $A$ -faisceaux.

**Proposition 1.7.** — *Les propriétés suivantes sont de nature locale pour la topologie de  $X$ .*

(i) *La propriété pour un  $A$ -faisceau d'être nul, i.e. isomorphe au système projectif nul.*

(ii) *La propriété pour une suite*

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

*de  $A$ -faisceaux d'être exacte.*



(iii) La propriété pour un morphisme  $u : E \longrightarrow F$  de  $A$ -faisceaux d'être un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).

(iv) La propriété pour deux morphismes  $u, v : E \rightrightarrows F$  d'être égaux.

**Preuve :** L'assertion (i) est immédiate. On en déduit (ii) en l'appliquant successivement à  $\text{Im}(v \circ u)$  et à  $\text{Ker}(v)/\text{Im}(u)$ . L'assertion (iii) est un cas particulier de (ii). Enfin (iv) s'obtient en appliquant (i) à  $\text{Im}(v - u)$ .

**Corollaire 1.7.1.** — Soient  $T$  et  $T'$  deux objets de  $X$  et  $f : T \longrightarrow T'$  un épimorphisme. Le foncteur

$$f^* : A - \text{fsc}(T') \longrightarrow A - \text{fsc}(T)$$

est fidèle.

**Preuve:** Appliquer 1.7 (i) au topos  $\mathbf{T}'$ .

**Corollaire 1.7.1.** — Soient  $E$  et  $F$  deux  $A$ -faisceaux sur  $X$ . Lorsque  $T$  parcourt les objets de  $X$ , le préfaisceau

$$T \mapsto \text{Hom}(E|T, F|T)$$

est séparé.

**Preuve:** Simple traduction de 1.7 (iv).

**Remarque 1.7.3.** En général, le préfaisceau précédent n'est pas un faisceau. Nous verrons toutefois qu'il en est ainsi lorsque le topos  $X$  est noethérien (SGA4 VI 2.11), ou lorsque  $E$  est de type  $J$ -adique.

## 2. Cas où l'objet final de $X$ est quasicompact.

On se propose maintenant de donner un certain nombre de catégories équivalentes à  $A - \text{fsc}(X)$ , lorsque l'objet final de  $X$  est quasicompact. Nous aurons besoin cela d'un certain nombre de lemmes techniques, dont la plupart n'utilisent pas cette hypothèse.

### 2.1.

3.  $A$ -faisceaux de type constant, strict ou  $J$ -adique.
4. Opérations externes.
5. Produit tensoriel.
6. Foncteurs associés aux homomorphismes.
7. Catégories dérivées.
8. Changement d'anneau.

## § II. — CONDITIONS DE FINITUDE

---

Dans tout ce chapitre, on fixe un anneau commutatif unifère *noethérien*  $A$  et un idéal  $J$  de  $A$ . Sauf mention expresse du contraire, tous les topos considérés seront supposés *localement noethériens* (SGA 4 VI 2.11.).

### 1. Catégorie des $A$ -faisceaux constructibles.

Soit  $X$  un topos localement noethérien.

Définition 1.1. —

Proposition 1.2. —

**Preuve :**

Corollaire 1.3. —

**Preuve :**

Corollaire 1.4. —

Proposition 1.5. —

**Preuve :**

Lemme 1.6. —

Corollaire 1.6. —

Proposition 1.7. —

**Preuve :**

Lemme 1.8. —

Lemme 1.9. —

Lemme 1.10. —

Proposition 1.11. —

**Preuve :**

1.12.

Proposition 1.12.4. —

**Preuve :**

1.13.

Définition 1.14. —

Proposition 1.15. —

**Preuve :**

Proposition 1.17. —

**Preuve :**

Corollaire 1.18. —

Proposition 1.19. —

**Preuve :**

1.20. Nous allons maintenant expliciter la structure de la catégorie  $A\text{-fsc}(X)$ , lorsque le topos  $X$  est connexe. Rappelons tout d’abord quelques faits concernant le pro-groupe fondamental d’un topos. Étant donné un pro-groupe strict

$$G = (G_i)_{i \in I},$$

on définit comme suit un topos, noté

$$B_G$$

et appelé *topos classifiant* de  $G$ . Un objet de  $B_G$ , appelé encore *G-ensemble*, est un ensemble  $M$  muni d’une application

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \text{Hom}(G_i, M)$$

$$m \mapsto (g_i \mapsto g_i m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”})$$

telle que l’on ait

$$g_i(g'_i m) = (g_i g'_i) m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”}.$$

Autrement dit,  $M$  admet une filtration par des  $G_i$ -ensembles ( $i \in I$ ), avec compatibilité des diverses opérations. Un morphisme de  $G$ -ensembles  $M \longrightarrow N$  est une application  $u : M \longrightarrow N$  qui rend le diagramme

Proposition 1.20.4. —

**Preuve :**

Corollaire 1.20.5. —

**Preuve :**

Proposition 1.21. —

**Preuve :**

Proposition 1.22. —

Proposition 1.23. —

**Preuve :**

Proposition 1.24. —

**Preuve :**

Proposition 1.25. —

**Preuve :**

Proposition 1.26. —

**Preuve :**

**Exemple 1.27.**

Proposition 1.28. —

**Preuve :**

Proposition 1.29. —

**Preuve :**

## 2. Conditions de finitude dans les catégories dérivées.

Soit  $X$  un topos localement noethérien.

**Définition 2.1.** — *On dit qu'un complexe  $E$  de  $A$ -faisceaux sur  $X$  est à cohomologie constructible (resp. constante tordue constructible) si tous ses objets de cohomologie sont des  $A$ -faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles).*

**Définition 2.2.** —

Proposition 2.3. —

**Preuve :**

Proposition 2.4. —

**Preuve :**

Proposition 2.5. —

**Preuve :**

Proposition 2.6. —

**Preuve :**

Proposition 2.7. —

**Preuve :**

Corollaire 2.8. —

**2.9.**

Proposition 2.9.2. —

**Preuve :**

**2.10.**

Proposition 2.10.2. —

**Preuve :**

Proposition 2.10.3. —

**Preuve :**

Proposition 2.10.5. —

**Preuve :**

**2.11. Trace et cup-produit.**

Proposition 2.11.3. —

**Preuve :**

**2.12.**

Proposition 2.12.1. —

**Preuve :**

Proposition 2.12.2. —

**Preuve :**

Proposition 2.12.3. —

**Preuve :**

### **2.13. Changement d'anneau.**

Proposition 2.13.1. —

**Preuve :**

Théorème 2.13.2. —

**Preuve :**

Lemme 2.13.3. —

Lemme 2.13.4. —

Lemme 2.13.5. —

Lemme 2.13.6. —

**Remarques 2.13.7.**

Proposition 2.13.9. —

**Preuve :**

**Remarques 2.13.10.**

Proposition 2.14. —

**Preuve :**



**Remarques 2.15.** Comme pour (2.13.2), l'hypothèse (i) a servi uniquement pour assurer que le complexe  $\underline{\mathrm{RHom}}_A(E, F)$  est à cohomologie constructible. Elle est donc inutile en particulier dans la cas où  $E \in D_t^-(X, A)$ .

### § III. — APPLICATIONS AUX SCHÉMAS

---

Le texte qui suit ayant un caractère essentiellement provisoire (cf. l'appendice basé sur une construction de *Deligne*), nous ferons toutes les hypothèses simplificatrices qui nous paraîtront nécessaires pour la clarté de l'exposé.

Soit  $\ell$  un nombre premier. On fixe comme précédemment un anneau noethérien  $A$  et un idéal propre  $J$  de  $A$ . On suppose de plus que  $A$  est une  $\mathbf{Z}_\ell$ -algèbre et que  $J$  contient  $\ell A$ . Pour simplifier (cf. *supra*), tous les schémas considérés sont *noethériens*.

#### 1. Opérations externes.

1.1. Soient  $X$  et  $Y$  deux schémas noethériens, et  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme séparé de type fini. On définit comme suit un foncteur exact

$$(1.1.1) \quad Rf_! : D(X, A) \longrightarrow D(Y, A),$$

appelé *image directe à supports propres*. D'après Nagata et Mumford il existe une factorisation

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & Z \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & Y & \end{array},$$

où  $i$  est une immersion ouverte et  $q$  un morphisme propre. On pose alors

$$Rf_! = Rq_* \circ Ri_!.$$

on vérifie, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum* (SGA4 XVIII), que le résultat ne dépend pas, à isomorphisme près, de la factorisation choisie.

La même technique de factorisation montre que si  $g : Y \longrightarrow Z$  est un autre morphisme séparé de type fini, on a un isomorphisme

$$(1.1.2) \quad R(g \circ f)_! \xrightarrow{\sim} Rg_! \circ Rf_!,$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de morphismes.

**Définition 1.1.3.** — Si  $E$  est un  $A$ -faisceau sur  $X$  (resp. un objet de  $D(X, A)$ ), on pose pour tout  $p \in \mathbf{Z}$

$$R^p f_!(E) = H^p(Rf_!(E)).$$

On obtient ainsi un foncteur cohomologique qui n'est pas en général (sauf bien sûr si le morphisme  $f$  est propre) le foncteur cohomologique dérivé de  $R^\circ f_!$ .

**1.1.4.** Il est clair que si  $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est un  $A$ -faisceau, on a pour tout  $p \in \mathbf{Z}$

$$R^p f_!(F) = (R^p f_!(F_n))_{n \in \mathbf{N}}.$$

**Proposition 1.1.5.** — Soit

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

un carré cartésien de schéma noethériens.

(i) **(Théorème de changement de base propre)** Si  $f$  (donc  $f'$ ) est séparé de type fini, on a pour tout  $E \in D^+(X, A)$  un isomorphisme canonique fonctoriel

$$g^* Rf_!(E) \xrightarrow{\sim} Rf'_!(g')^*(E).$$

(ii) **(Théorème de changement de base lisse)** Si  $\ell$  est premier aux caractéristiques résiduelles de  $Y$  et  $g$  est lisse, on a pour tout  $E \in D^+(X, A)$  un isomorphisme canonique fonctoriel

$$g^* Rf_*(E) \xrightarrow{\sim} R(f')_*(g')^*(E).$$

**Preuve :**

Proposition 1.1.7. —

**Preuve :**

Lemme 1.1.8. —

Proposition 1.1.10. —

**Preuve :**

Proposition 1.1.11. —

**Preuve :**

1.2.

Proposition 1.2.3. —

**Preuve :**

Proposition 1.2.5. —

**Preuve :**

1.3. Soient  $u : A \longrightarrow B$  une  $A$ -algèbre et  $K$  un idéal de  $B$  tel que  $u(J) \subset K$ . On utilise dans l'énoncé suivant les notations de (I 8).

Proposition 1.3.1. — *Soit  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens.*

1) *Soit  $E \in D(X, A)$ . On a un isomorphisme canonique*

$$Lu^*Rf_!(E) \xrightarrow{\sim} Rf_!Lu^*(E),$$

*lorsque  $E \in D^-(X, A)$ , ou lorsque  $A$  est local régulier et  $J$  est son idéal maximal.*

2) *Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $Y$  admet un Module inversible ample. On suppose de plus que  $\ell$  est premier aux caractéristiques résiduelles de  $Y$ , que l'anneau  $A$  est local régulier et que  $J$  est son idéal maximal. Alors pour tout*

$F \in D^+(Y, A)$ , on a un morphisme canonique fonctoriel

$$Lu^*Rf^!(F) \xrightarrow{\sim} Rf^!Lu^*(F),$$

qui est un isomorphisme lorsque  $B$  est une  $A$ -algèbre finie et  $K = JB$ .

**Preuve :** Montrons 1), et définissons d'abord un morphisme

$$(1.3.1.1) \quad Lu^*Rf_!(E) \longrightarrow Rf_!Ru^*(E).$$

D'après (I. 8.1.6), il suffit dans chacun des cas considérés de définir un morphisme

$$(1.3.1.2) \quad Rf_!(E) \longrightarrow u_*Rf_!Lu^*(E).$$

Mais il est immédiat que  $u_*Rf_! \simeq Rf_!u_*$ , de sorte que l'on définit (1.3.1.2) en appliquant le foncteur  $Rf_!$  au morphisme d'adjonction (I 8.1.7)

$$E \longrightarrow u_*Lu^*(E).$$

Pour voir que (1.3.1.1) est un isomorphisme, on se ramène, par le way-out functor lemma, au cas où  $E \in D^-(X, A)$ . Alors, grâce à la conservativité du foncteur  $u_*$ , il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$B \otimes_A Rf_!(E) \longrightarrow Rf_!(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (1.1.7). Montrons 2). Pour définir un morphisme

$$(1.3.1.3) \quad Lu^*Rf^!(F) \longrightarrow Rf^!Lu^*(F),$$

on se ramène encore, grâce à (I 8.1.6), à définir un morphisme

$$(1.3.1.4) \quad Rf^!(F) \longrightarrow u_*Rf^!Lu^*(F).$$

On a évidemment  $u_*Rf^! \simeq Rf^!u_*$ ; on prend pour (1.3.1.4) l'image par  $Rf^!$  du morphisme d'adjonction (I 8.1.7). Pour voir que (1.3.1.3) est un isomorphisme, on se ramène, après avoir choisi une "lissification" (1.2.2), à le faire successivement pour une immersion fermée et un morphisme lisse équidimensionnel. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 8.1.16 (iii)). Dans le second, on se ramène aussitôt à (I 8.1.16 (i)).

## 2. Dualité.

Dans tout ce paragraphe, tous les schémas considérés sont de caractéristique résiduelle première à  $\ell$ .

**2.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux schémas noethériens et  $f : X \longrightarrow Y$  un morphisme quasiprojectif. On suppose que  $Y$  admet un Module inversible ample et on se propose de définir un morphisme “trace”

$$(2.1.1) \quad \mathrm{Tr}_f : Rf_! Rf^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

## 3. Formalisme des fonctions $L$ .

Soit  $p$  un nombre premier  $\neq \ell$ . On note  $f$  l'élément de Frobenius  $u \mapsto u^p$  ( $u \in \overline{\mathbf{F}}_p$ ), qui est un générateur topologique du groupe de Galois  $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$ .

Étant donné un schéma  $X$  de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ , on note  $X^\circ$  l'ensemble des points fermés de  $X$ , et, pour tout  $x \in X^\circ$ , on désigne par  $d(x)$  le degré résiduel de  $x$ . Choissant pour tout  $x \in X^\circ$  un point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ , on rappelle (SGA 5 XV 3) que la fonction  $L$  d'un  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceau constructible  $F$  sur  $X$  est définie par la formule

$$(3.0) \quad L_F(f) = \prod_{x \in X^\circ} (1 / \det(1 - f_{\bar{x}}^{-d(x)} t^{d(x)})).$$

Grâce à la propriété de multiplicativité de (SGA 5 XV 3.1 a)), on peut prolonger cette définition à  $D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , en posant pour tout  $E \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$

$$(3.1) \quad L_E(f) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (L_{H^i(E)}(t))^{(-1)^i}.$$

**Proposition 3.2.** — *Soit  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ .*

*a) Pour tout triangle exact*

$$\begin{array}{ccc} & E'' & \\ \swarrow \text{---} & & \nwarrow \\ E' & \xrightarrow{\quad} & E \end{array}$$

de  $D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , on a

$$L_E(t) = L_{E'}(t) L_{E''}(t).$$

En particulier, pour tout  $m \in \mathbf{Z}$ , on a

$$L_{E[m]}(t) = (L_E(t))^{(-1)^m}.$$

b) Soient  $Y$  un sous-schéma fermé de  $X$ , et  $U = X - Y$  l'ouvert complémentaire.

On a

$$L_E = L_{E|U} L_{E|Y},$$

pour tout  $E \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ .

c) Soit  $h : X \longrightarrow S$  un morphisme de schémas de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ . Pour tout

$E \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , on a

$$L_E = \prod_{s \in S^\circ} L_{E|X_s}.$$

**Preuve :** Immédiat à partir des assertions analogues pour les objets de cohomologie (SGA5 XV 3.1).

**Proposition 3.3.** — Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ ,  $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$  le morphisme structural et  $E \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ . Alors

$$L_E = L_{\mathbf{R}g_!(E)}.$$

En particulier,  $L_E$  est une fraction rationnelle.

**Preuve :** On peut supposer que  $E$  est un  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceau constructible, et alors l'assertion n'est autre que (SGA5 XV 3.2).

**Corollaire 3.4.** — Soit  $h : X \longrightarrow S$  un morphisme de schémas de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ . Pour tout  $E \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , on a

$$L_E = L_{\mathbf{R}h_!(E)}.$$

Nous allons maintenant déduire de (3.3) une *équation fonctionnelle* pour les fonctions  $L$ , du moins si  $X$  est projectif sur  $\mathbf{F}_p$ .

**Définition 3.5.** — Soient  $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$  un schéma de type fini sur  $\mathbf{F}_p$ , et  $\overline{X} = X \times_{\mathbf{F}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$ . Pour tout  $E \in \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , on pose

$$\chi(E) = \text{rang}(\mathbf{R} g_! E) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i [\mathbf{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E}) : \mathbf{Q}_\ell],$$

$$\delta(E) = \det(\mathbf{R} g_!(E)) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (\det f_{\mathbf{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E})})^{(-1)^i},$$

où  $\overline{E}$  désigne l'image inverse de  $E$  au-dessus de  $\overline{X}$ .

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité respectives de la trace et du déterminant dans la catégorie des  $\mathbf{Q}_\ell$ -espaces vectoriels de dimension finie, il es clair que pour tout triangle exact

$$\begin{array}{ccc} & E'' & \\ \swarrow \text{---} & & \nwarrow \\ E' & \xrightarrow{\quad} & E, \end{array}$$

on a

$$(3.5.1) \quad \chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

$$(3.5.2) \quad \delta(E) = \delta(E')\delta(E'').$$

En particulier, pour tout  $m \in \mathbf{Z}$  et tout  $E \in \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ ,

$$\chi(E[m]) = (-1)^m \chi(E) \quad \text{et} \quad \delta(E[m]) = (\delta(E))^{(-1)^m}.$$

**Proposition 3.6.** — Soit  $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$  un schéma projectif sur  $\mathbf{F}_p$ . On pose  $K_X = \mathbf{R} g^!(\mathbf{Q}_\ell)$ , et  $\mathcal{D}_X = \mathbf{R} \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(\cdot, K_X)$ . Alors, pour tout  $E \in \mathcal{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ , on a l'identité

$$L_{\mathcal{D}_X(E)}(t) = (-t)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}).$$

**Preuve :** Le second membre a un sens d'après (3.3). Posons  $S = \text{Spec}$  et  $\mathcal{D}_S = \mathbf{R} \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(\cdot, \mathbf{Q}_\ell)$ . D'après (2.3.2 a)), on a

$$\mathbf{R} g_*(\mathcal{D}_X E) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_S \mathbf{R} g_*(E),$$



donc (3.3)

$$L_{D_X}(E) = L_{D_S(R_{g_*}(E))}.$$

Comme  $L_E = L_{R_{g_*}(E)}$  (3.3), l'assertion résultera du lemme suivant

**Lemme 3.7.** — *Si  $F \in D_c^b(S, \mathbf{Q}_\ell)$ , on a :*

$$L_{D_S(F)}(t) = (-t)^{\chi(F)} \delta(F) L_F(t^{-1}).$$

D'après les propriétés d'additivité et demultiplicativité (3.5.1) et (3.5.2), on peut supposer que  $F \in \mathbf{Q}_\ell - \text{fscn}(S)$ . Alors  $F$  correspond (SGA5 VII 1.4.2) à un  $\mathbf{Q}_\ell$ -espace vectoriel de dimension fini  $V$  muni d'une opération continue  $f_V$  du Frobenius, et le  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceau  $D_S(F) = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(F, \mathbf{Q}_\ell)$  correspond (II 1.26) au  $\mathbf{Q}_\ell$ -espace vectoriel  $V^\vee$  muni de l'opération continue  $(f_V^\vee)^{-1}$  du Frobenius. Il suffit alors de montrer que, étant donné un corps  $K$ , un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie  $V$  et un automorphisme  $u$  de  $V$ , on a l'identité

$$(3.8) \quad 1/\det(1 - u^{-1}t) = (-t)^{-\dim(V)} \det(u)/\det(1 - ut^{-1})$$

dans  $K(t)$ . On peut pour cela supposer  $K$  algébriquement clos, donc  $u$  triangulable, puis, grâce aux propriétés de multiplicativité du déterminant, que  $\dim(V) = 1$ . Alors  $u$  est l'homothétie définie par un scalaire non nul  $\lambda$ , et (3.8) est l'identité évidente

$$1/(1 - (t/\lambda)) = (-\lambda/t)/(1 - (\lambda/t)).$$

Bien entendu, la formule (3.6) ne présente d'intérêt en pratique que si l'on dispose d'une expression simple pour  $D_X(E)$ . Nous allons maintenant donner des cas où il en est ainsi.

**Proposition 3.9.** — *On suppose  $X$  quasiprojectif, lisse et purement de dimension  $n$  sur  $\mathbf{F}_p$ . Posant pour tout  $E \in D_c^b(S, \mathbf{Q}_\ell)$*

$$E^\vee = \underline{\text{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell),$$

*on a un isomorphisme*

$$D_X(E) \simeq E^\vee(n)[2n]$$

*dans chacun des cas suivants*

$$(i) E \in D_t^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$$

(ii)  $X$  est une courbe, et  $E$  est un  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceau constructible de la forme  $i_*(M)$ , où  $i : U \hookrightarrow X$  est l'inclusion d'un ouvert dense de  $X$  et  $M \in \mathbf{Q}_\ell - \text{fsc}(U)$ .

**Preuve :** Comme  $D_X(E) = R\text{Hom}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(n))[2n]$ , le cas (i) résulte du lemme suivant.

**Lemme 3.9.1.** — *Étant donné un schéma noethérien  $X$ ,  $F \in \mathbf{Q}_\ell - \text{fsc}(X)$  et  $G \in \mathbf{Q}_\ell - \text{fscn}(U)$ , on a :*

$$\underline{\text{Ext}}_{\mathbf{Q}_\ell}^j(F, G) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Il s'agit de voir que si  $F \in \mathbf{Z}_\ell - \text{fsc}(X)$  et  $G \in \mathbf{Z}_\ell - \text{fscn}(X)$ , les  $\mathbf{Z}_\ell$ -faisceaux  $\text{Ext}_{\mathbf{Z}_\ell}^j(F, G)$  ( $j \geq 1$ ) sont annulés par une puissance de  $\ell$ . D'après (I 6.4.2) et (II 1.2.1), on peut, quitte à se restreindre à des parties localement fermées convenables de  $X$ , supposer que  $G \in \mathbf{Z}_\ell - \text{fsc}(X)$ . Alors, compte tenu de (II 1.26), l'assertion résulte de l'assertion analogue, bien connue, pour les  $\mathbf{Z}_\ell$ -modules de type fini. Montrons (ii).

Il s'agit de voir que

$$P^j = \underline{\text{Ext}}_{\mathbf{Q}_\ell}^j(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Comme  $M$  est constante tordu constructible, il résulte du cas (i) que  $P^j|_U = 0$ . Il nous suffit donc de voir que pour tout point fermé  $x$  de  $Y = X - U$  et tout point géométrique  $\bar{x}$  au-dessus de  $x$ , on a  $P_x^j = 0$ . Le pendant pour les  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceaux de la variante (SGA5 I 4.6.2) du théorème de dualité locale fournit un accouplement parfait

$$(3.9.2) \quad \underline{\text{Ext}}_{\mathbf{Q}_\ell}^j(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) \times \underline{H}_{\bar{x}}^{2-j}(E) \longrightarrow \mathbf{Q}_{\ell'}$$

avec (SGA5 I 4.5.1)

$$\underline{H}_{\bar{x}}^{2-j} = (\underline{H}_x^{2-j}(E))_{\bar{x}}.$$

Comme le morphisme d'adjonction canonique

$$E \longrightarrow i_* i^*(E)$$

est un isomorphisme, il résulte de la première suite exacte de (SGA4 V 4.5) que

$$\underline{H}_x^0(E) = \underline{H}_x^1(E) = 0,$$

d'où aussitôt le résultat annoncé.

Ceci dit, lorsque  $X$  est projectif sur  $\mathbf{F}_\ell$ , la formule (3.6) prend la forme

$$(3.10) \quad L_{E^\vee}(p^{-n}t) = (-1)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}),$$

dans chacun des cas de (3.9). Compte tenu de (3.2 a)), cela résulte du lemme suivant.

**Lemme 3.11.** — *Soient  $X$  un schéma de type fini sur  $\mathbf{F}_\ell$ , et  $F \in D_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ . Posant  $F(j) = F \otimes \mathbf{Q}_\ell(j)$  ( $j \in \mathbf{Z}$ ), on a la relation*

$$L_{F(j)}(t) = L_F(p^{-j}t).$$

D'après les propriétés de multiplicativité (3.2 a)), on peut pour le voir supposer que  $F$  est un  $\mathbf{Q}_\ell$ -faisceau constructible; alors, comme le Frobenius opère sur  $\mathbf{Q}_\ell(j) \simeq \mathbf{Q}_\ell$  (non canoniquement) par l'homothétie de rapport  $p^{-j}$ , l'assertion est immédiate sur la définition (3.0).

Supposons maintenant qu'on ait de plus un isomorphisme

$$E^\vee \xrightarrow{\sim} E(\rho) \quad \text{pour un } \rho \in \mathbf{Z}.$$

Alors la formule (3.10) prend la forme

$$L_E(p^{-n-\rho}t) = (-t)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}),$$

ou encore, après avoir posé  $q = n + \rho$  et fait le changement de variable  $t \mapsto t^{-1}$ ,

$$(3.12) \quad L_E(1/qt) = (-t)^{\chi(E)} \delta(E) L_E(t).$$

**Remarque 3.13.** Sous les hypothèses de (3.9), l'existence d'un tel entier  $p$  est assurée dans les cas suivants

cas (i)  $E \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$  pour un  $m \in \mathbf{Z}$ , et alors  $p = -2m$ .

cas (ii)  $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$  pour un  $m \in \mathbf{Z}$ , et alors  $p = -2m$ .

(Pour ce dernier cas, il est immédiat que

$$i_*(M^\vee) \simeq (i_*(M))^\vee. \quad )$$

Explicitons enfin une relation importante entre les entiers  $\chi(E)$  et  $\delta(E)$ .

**Proposition 3.14.** — *Soient  $X$  un schéma projectif et lisse purement de dimension  $n$  sur  $\mathbf{Z}_p$  et  $E \in \mathbf{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$ . On suppose qu'il existe un entier  $m$  tel que*

$$\mathbf{D}_X(E) \xrightarrow{\sim} E(m),$$

*et on pose  $q = p^m$ . Alors, on a, l'égalité*

$$\delta(E)^2 = q^{\chi(E)}.$$

**Preuve :** La substitution  $t \mapsto 1/qt$  dans (3.12) fournit l'équation fonctionnelle

$$(3.12 \text{ bis}) \quad L_E(t) = (-1/qt)^{\chi(E)} \delta(E) L_E(1/qt).$$

Multipliant (3.12) et (3.12 bis) membre à membre, on obtient l'identité

$$L_E(t) L_E(1/qt) = q^{-\chi(E)} (\delta(E))^2 L_E(t) L_E(1/qt),$$

d'où aussitôt la relation désirée, compte tenu du fait que  $L_E$  n'est pas identiquement nulle, comme il est clair sur sa définition (3.0).

