Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

par

Jean-Pierre JOUANOLOU

N° d'enregistrement

au C.N.R.S

A.0.3374

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

ès SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL Président

GROTHENDIECK

VERDIER Examinateurs

DIXMIER

PREFACE

Description

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

1. Généralités.

Définition **1.1**. — *On appelle* idéotope *un triple* (X,A,J) *formé d'un topos* X*, d'un anneau commutatif unifière* A *et d'un idéal propre* J *de* A.

On suppose donné dans la suite du paragraphe un idéotope (X,A,J). On note $A-\mathrm{Mod}_X$ la catégorie des faisceaux de A_X-Modules et

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^{\circ},A-\mathrm{Mod}_X)$$

la catégorie abélienne des systèmes projectifs indexés par $\mathbf{N}$ de A_X-Modules.

Définition **1.2**. — *On appelle* (A,J)-faisceau *sur* X*, ou s'il n'y a pas de confusion possible* A-faisceau *sur* X*, un système projectif*

$$F=(\mathbf{F}_n,u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N},m\geq n}$$

de A_X*-Modules, vérifiant*

$$J^{n+1}F_n=0$$

pour tout entier $n\geq 0$*. On note* $\mathscr{E}(X,J)$ *la sous-catégorie, abélienne, pleine de* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^{\circ},A-\mathrm{Mod}_X)$ *engendrée par les* A*-faisceaux.*

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, la catégorie $\mathscr{E}(X,J)$ ne mérite pas le nom de catégorie des A-faisceaux sur X; c'est seulement une catégorie quotient de la précédente que nous baptiserons ainsi. Aussi, pour éviter le risque de confusion, nous arrivera-t-il, étant donnés deux A-faisceaux E et F, de noter

$$\mathrm{Hom}_a(E,F)$$

(a pour anodin) l'ensemble des $\mathscr{E}(X,J)$-morphismes de E dans F.

Notons pour tout objet T de X par $\mathbf{T}$, ou même T s'il n'y a pas de confusion possible, le topos X/T. Le foncteur restriction pour les faisceaux de A-Modules induit de façon évidente un foncteur restriction

$$\mathscr{E}(X,J) \longrightarrow \mathscr{E}(T,J)$$

$$E \mapsto E|T.$$

Proposition-définition **1.4.** — *Soit $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X:*

1) *On dit que E est* essentiellement nul *s'il est nul en tant que pro-objet, ce qui revient à dire que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que le morphisme de transition*

$$E_{n+p} \longrightarrow E_n$$

soit nul.

2) *On dit que E est* négligeable *s'il vérifie l'une des reltions équivalentes suivantes:*

   (i) *Il existe un recouvrement $(T_i \longrightarrow e_X)_{i\in I}$ de l'objet final e_X de X tel que les A-faisceaux $E|T_i$ soient essentiellement nuls.*

   (ii) *Idem, mais en supposant de plus que les T_i sont des ouverts de X.*

Preuve: Pour voir l'équivalence de (i) et (ii), il suffit d'observer que pour tout $i \in I$, le faisceau image U_i de T_i par le morphisme canonique $T_i \longrightarrow e_X$ est tel que le morphisme restriction

$$\mathbf{U}_i \longrightarrow \mathbf{T}_i$$

soit fidèle.

Il est clair que lorsque l'objet final de X est quasicompact (SGA4 VI 1.1), il revient au même pour un A-faisceau de dire qu'il est essentiellement nul ou qu'il est négligeable. Il est par ailleurs immédiat que la sous-catégorie pleine

(1.4.1) $$N(X,J) \quad \text{ou plus simplement } N_X)$$

de $\mathscr{E}(X,J)$ engendré par les A-faisceaux négligeables est *épaisse* dans $\mathbf{E}(X,J)$.

Définition **1.5**. — *Soit* (X,A,J) *un idéotope. On appelle* catégorie *des* (A,J)-faisceaux *(ou A-faisceaux s'il n'y a pas de confusion possible) sur* X *et on note*

$$(A,J)-\mathrm{fsc}(X) \quad \textit{(ou plus simplement } A-\mathrm{fsc}(X))$$

la catégorie abélienne quotient (thèse Gabriel III.1)

$$\mathscr{E}(X,J)/N_X.$$

1.6. Soit T un objet de X. Il est clair que le foncteur restriction (1.3) est exact et envoie N_X dans N_T, d'où par passage au quotient un foncteur exact, appelé encore *restriction*,

$$r_{T,X} : A-\mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(T). \tag{1.6.1}$$

Soient maintenant T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme. Se plaçant dans le topos $\mathbf{T}'$, on déduit de (1.6.1) un foncteur exact

$$f^* : A-\mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(T), \tag{1.6.2}$$

vérifiant les propriétés de transitivité habituelles.

Ces remarques étant faites, nous utiliserons dans la suite sans plus d'explications le langage local pour les A-faisceaux.

Proposition **1.7**. — *Les propriétés suivantes sont de nature locale pour la topologie de* X.

(i) La propriété pour un A-faisceau d'être nul, i.e. isomorphe au système projectif nul.

(ii) La propriété pour une suite

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

de Afaisceaux d'être exacte.

(iii) La propriété pour un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de A-faisceaux d'être un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).

(iv) La propriété pour deux morphismes $u, v : E \rightrightarrows F$ d'être égaux.

Preuve : L'assertion (i) est immédiate. On en déduit (ii) en l'appliquant successivement à $\mathrm{Im}(v \circ u)$ et à $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$. L'assertion (iii) est un cas particulier de (ii). Enfin (iv) s'obtient en appliquant (i) à $\mathrm{Im}(v - u)$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un épimorphisme. Le foncteur*

$$f^* : A - \mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(T)$$

est fidèle.

Preuve: Appliquer 1.7 (i) au topos $\mathbf{T}'$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient E et F deux A-faisceaux sur X. Lorsque T parcourt les objets de X, le préfaisceau*

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(E|T, F|T)$$

est séparé.

Preuve: Simple traduction de 1.7 (iv).

Remarque 1.7.3. En général, le préfaisceau précédent n'est pas un faisceau. Nous verrons toutefois qu'il en est ainsi lorsque le topos X est noethérien (SGA4 VI 2.11), ou lorsque E est de type J-adique.

2. Cas où l'objet final de X est quasicompact.

On se propose maintenant de donner un certain nombre de catégories équivalentes à $A - \mathrm{fsc}(X)$, lorsque l'objet final de X est quasicompact. Nous aurons besoin cela d'un certain nombre de lemmes techniques, dont la plupart n'utilisent pas cette hypothèse.

2.1.

3. A-faisceaux de type constant, strict ou J-adique.

4. Opérations externes.

5. Produit tensoriel.

6. Foncteurs associés aux homomorphismes.

6.1. Soient $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux A-faisceaux sur un topos X. Pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$, on définit comme suit un nouveau A-faisceau, noté

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(E, F),$$

la mention de l'anneau A pouvant être éventuellement supprimée s'il n'y a pas de confusion possible. Soient $m' \geq m \geq n$ trois entiers ≥ 0.

7. Catégories dérivées.

8. Changement d'anneau.

§ II. — CONDITIONS DE FINITUDE

Dans tout ce chapitre, on fixe un anneau commutatif unifère *noethérien* A et un idéal J de A. Sauf mention expresse du contraire, tous les topos considérés seront supposés *localement noethériens* (SGA 4 VI 2.11.).

1. Catégorie des A-faisceaux constructibles.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **1.1**. — *On dit qu'un A-faisceau $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est* J-adique constructible *s'il est J-adique (I 3.8.) et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, le A_n–Module F_n est constructible. On dit que F est un* A-faisceau constructible *s'il est isomorphe dans* $A-\mathrm{fsc}(X)$ *à un A-faisceau J-adique constructible. On appelle catégorie des A-faisceaux constructibles et on note*

$$A-\mathrm{fscn}(X) \quad \textit{(“n” pour “noethérien”)}$$

la sous-catégorie pleine de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *engendrée par les A-faisceaux constructibles.*

Proposition **1.2**. — *Soit $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constructible.

(ii) F est de type strict (I 3.2.) et, notant F' le A-faisceau strict associé à F (I 3.3.), il existe localement une application croissante $\gamma \geq$ id *telle que $\chi_\gamma(F')$ (I 2.2) soit J-adique constructible.*

(iii) *Pour tout entier $r \geq 0$, le A-faisceau $F \otimes_A A_r$ est de type constant (I 3.6.) associé à un A_r–Module constructible.*

Preuve : Si F vérifie (i), il résulte de (I 3.9.3. (i) $\Rightarrow$ (ii)) qu'il existe localement une telle application γ, avec $\chi_\gamma(F')$ J-adique. Mais $\chi_\gamma(F') \simeq F$, donc $\chi_\gamma(F')$ est isomorphe à un A-faisceau J-adique constructible, d'où (ii) grâce à (I 3.9.1). L'assertion (ii) $\Rightarrow$ (iii) résulte aussitôt de ce que $F \otimes_A A_r \simeq \chi_\gamma(F') \otimes_A A_r$. Pour voir que (iii) $\Rightarrow$ (i), on peut supposer que l'objet final de X est quasicompact, et alors cela se voit comme l'assertion analogue de (I 3.9.3.).

Corollaire **1.3**. — *Si $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un A-faisceau strict et constructible, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, le A_n–Module F_n est constructible.*

Preuve : D'après (1.2.(i)), il existe localement une application croissante $\gamma \geq$ id telle que $\chi_\gamma(F)$ soit J-adique constructible, donc à composants constructibles. L'assertion résulte alors de ce que le morphisme canonique de $\mathscr{E}(X, J) : \chi_\gamma(F) \longrightarrow F$ est un épimorphisme.

Corollaire **1.4**. — *Pour qu'un A-faisceau annulé par une puissance de l'idéal J soit constructible, il faut et il suffit qu'il soit de type constant associé à un A–Module constructible.*

Proposition **1.5**. —

(i) *La propriété pour un A-faisceau d'être constructible est stable par restriction à un objet du topos, de nature locale, et la catégorie fibrée*

$$T \mapsto A - \mathrm{fscn}(T)$$

où T parcourt les objets de X, est un champ.

(ii) *Notant $J - \mathrm{adn}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{E}(X, J)$ engendrée par les A-faisceaux J-adiques constructibles, le foncteur canonique*

$$J - \mathrm{adn}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fscn}(X)$$

induit par (I 3.8.2) est une équivalence de catégories.

(iii) La catégorie $A - \mathrm{fscn}(X)$ est une sous-catégorie exacte *(i.e. stable par noyaux, conoyaux et extensions) de $A - \mathrm{fsc}(X)$. De plus, lorsque X est noethérien, les objets de $A - \mathrm{fscn}(X)$* noethériens *(dans $A - \mathrm{fscn}(X)$).*

Preuve : L'assertion (ii) est conséquence immédiate de (I 3.9.1.). Montrons (i). Le caractère local résulte par exemple de (1.2. (i) $\Leftrightarrow$ (ii)) et du caractère local de la propriété pour un A-faisceau d'être de type strict. Quant à la propriété de champ, elle provient de (ii) et de la propriété analogue, évidente, pour la catégorie fibrée $T \mapsto J - \mathrm{adn}(T)$. Montrons (iii). Pour voir la stabilité par noyaux et conoyaux, on se ramène grâce à (ii) au cas d'un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de $\mathscr{E}(X, J)$, avec E et F des A-faisceaux J-adiques constructibles, et alors l'assertion résulte, en se ramenant localement au cas où X est noethérien, de (SGA5 V 5.2.1.). Pour montrer la stabilité par extensions, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme **1.6.** — *Pour tout A-faisceau constructible E et tout entier $n \geq 0$, le A-faisceau $\mathscr{T}\mathrm{or}_1^A(A_n, E)$ est de type constant, associé a un A_n–Module constructible.*

Il suffit de voir (1.4) qu'il est constructible. Or, notant $u : J^{n+1} \longrightarrow A$ le morphisme de A-faisceaux canonique, on a un isomorphisme

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_\ell^A (A_n, E) \simeq \mathrm{Ker}(u \otimes_A \mathrm{id}_E),$$

d'où le lemme, car $J^{n+1} \otimes_A E$ est constructible, comme on voit aisément en se ramenant au cas où E est J-adique constructible.

Montrons comment le lemme entraîne la stabilité par extensions. Soit donc

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

une suite exacte de $A - \mathrm{fsc}(X)$, avec E et G constructibles, et montrons que F l'est également. Pour cela, il suffit (1.2) de voir que pour tout entier $r \geq 0$, le A-faisceau $F \otimes_A A_r$ est de type constant associé à un A_r–Module constructible. Or on a une suite exacte

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_\ell^A (A_r, G) \longrightarrow A_r \otimes_A E \longrightarrow A_r \otimes_A F \longrightarrow A_r \otimes_A G \longrightarrow 0,$$

dan laquelle tous les termes, excepté éventuellement $A_r \otimes_A F$, sont de type constant et constructibles. Compte tenu du fait qu'un A_r–Module qui est extension de A_r–Modules constructibles est lui-même constructible, l'assertion résulte alors de (I

3.6). Il nous reste enfin à voir que la catégorie $A-\mathrm{fscn}(X)$ est noethérien lorsque X est noethérien. Il suffit de le voir pour la catégorie équivalente $J-\mathrm{adn}(X)$, ce qui n'est autre que (SGA V 5.2.3.).

Corollaire **1.6**. — *Notant* $J-\mathrm{Modn}(X)$ *la sous-catégorie abélienne épaisse de* $A-\mathrm{Mod}_X$ *engendrée par les A-Modules constructibles et localement annulés par une puissance de* J*, le foncteur*

$$J-\mathrm{Modn}(X) \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(X)$$

induit par (I 3.5.1.) définit une équivalence avec la sous-catégorie abélienne épaisse de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *engendrée par les A-faisceaux de type constant et constructibles.*

On aura remarqué que dans l'énoncé (1.5), on a pris soin de préciser que les A-faisceaux constructibles sont noethériens *dans* $A-\mathrm{fscn}(X)$. On pourrait croire qu'ils le sont aussi dans $A-\mathrm{fsc}(X)$.

Nous allons voir plus loin qu'il n'en est rien, mais donnons tout d'abord un cas où cette assertion est vraie.

Proposition **1.7**. — *On suppose que l'idéal* J *est maximal. Alors les assertions suivantes sont équivalentes pour un objet* F *de* $A-\mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$*.*

(i) F *est constructible.*

(ii) F *est noethérien.*

Preuve : Montrons d'abord que (ii) $\Rightarrow$ (i). Comme la catégorie $A-\mathrm{fscn}(\mathrm{pt})$ est noethérienne (1.5.(iii)), il suffit de montrer que tout sous-A-faisceau E de F est constructible. On se ramène immédiatement pour le voir au cas où F est J-adique constructible et E est un sous-système projectif de E. Mais alors les composants de F, donc aussi ceux de E, sont des A-modules artiniens, de sorte que E vérifie la condition de Mittag-Leffler. Dans ces conditions, l'assertion résulte du lemme suivant, valable sans hypothèses spéciale sur le topos X et le couple (A,J), autre que celles de l'introduction.

Lemme **1.8**. — *Soit* $u : E \longrightarrow F$ *un monomorphisme de A-faisceaux. On suppose que* F *est constructible et que* E *est de type strict. Alors* E *est constructible.*

On se ramène pour le voir au cas où u est un monomorphisme de $\mathscr{E}(X,J)$ et F est J-adique constructible, puis, quitte à remplacer E par le A-faisceau strict associé, [?] strict. Alors le A-faisceau $G = \mathrm{Coker}(u)$ est J-adique (cf. le preuve de SGA5 V 3.2.4. (i)), et constructible, car ses composants sont des quotients des composants de F. Mais alors E, noyau du morphisme canonique $F \longrightarrow G$, est constructible par (1.5.(iii)).

Montrons maintenant l'assertion (i) $\Rightarrow$ (ii) de la proposition.

Lemme **1.9**. — *Un objet noethérien F de $A-\mathrm{fsc}(X)$ est de type strict (i.e. vérifie la condition de Mittag-Leffler).*

Il est clair qu'il suffit de montrer la même assertion pour les A-faisceaux $F \otimes_A A_r$, qui sont également noethériens, de sorte que l'on est ramené au cas où F est annulé par une puissance de J. Puis, utilisant la filtration (finie) de F définie par les puissances de l'idéal J, on se ramène au cas où F est annulé par J, et enfin au cas où F est un système projectif de (A/J)-espaces vectoriels. Soit $n_\circ \geq 0$ un entier, et montrons que la suite décroissante

$$\mathrm{Im}(F_n \longrightarrow F_{n_\circ})_{n \geq n_\circ}$$

de (A/J)-espaces vectoriels est stationnaire. Posant

$$K_n = \begin{cases} 0 & (n < n_\circ) \\ \mathrm{Im}(F_n \longrightarrow F_{n_\circ}) & (n \geq n_\circ), \end{cases}$$

on définit, avec les morphismes de transition évidents, un A-faisceau quotient de F, donc noethérien. On est finalement ramené à voir qu'un A-faisceau noethérien $(V_p)_{p \in \mathbf{N}}$, dont les composants sont des (A/J)-espaces vectoriels et les morphismes de transition sont des monomorphismes, est essentiellement constant. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe une infinité (dénombrable) de V_p distincts. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $V_i \neq V_j$ si $i \neq j$. Désignons alors, pour tout $i \geq 0$, par X_i un supplémentaire de V_{i+1} dans V_i, et choisissons un élément non nul e_i de x_i. On définit un sous-A-faisceau W de $V = (V_p)_{p \in \mathbf{N}}$ en posant

$$W_p = \bigoplus_{i=p}^{\infty} k e_i \quad (k = A/J),$$

avec les morphismes de transitions évidents. Nous allons voir que le A-faisceau ainsi défini n'est pas noethérien, ce qui donnera la contradiction annoncée. Pour tout entier $p \geq 0$, notons M_p le sous-espace vectoriel de W_0 ayant pour base les éléments

$$e_{2^n - r} \quad (n, r \geq 0, 0 \leq r \leq p).$$

Il est immédiat que pour tout couple (p, q) d'entiers positifs distincts, on a $M_p \cap W_i \neq M_q \cap W_i$ pour tout entier $i \geq 0$. Considérant alors pour tout entier $p \geq 0$ le système projectif, noté $(M_p \cap W)$ défini par

$$(M_p \cap W)_n = M_p \cap W_n \quad (n \geq 0)$$

avec les morphismes de transition évidents, on aune suite croissante

$$(M_\circ \cap W) \subset (M_1 \cap W) \subset \cdots \subset (M_p \cap W) \subset \ldots$$

de sous-A-faisceaux de W. Le lemme suivant entraîne qu'elle n'est pas stationnaire.

Lemme 1.10. — *Soit $V = (V_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un système projectif d'objets d'une catégorie abélienne C, dont les morphismes de transition sont des monomorphismes. Pour tout sous-objet X de V_0, on pose*

$$(X \cap V) = (X \cap V_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Si L et M sont deux sous-objets de $V_{0'}$ avec $L \subset M$, les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $(M \cap W)/(L \cap W)$ *est essentiellement nul.*

(ii) Il existe un entier $p \geq 0$ tel que $M \cap V_p = L \cap V_p$.

Lorsque (i) et (ii) sont satisfaites, on a $M \cap V_p = L \cap V_p$ pour q assez grand.

Il est clair que (ii) $\Rightarrow$ (i). Inversement, si (i) est vérifiée, il existe un entier $p \geq 0$ tel que le morphisme canonique

$$(M \cap V_p)/(L \cap V_p) \longrightarrow M/L$$

soit nul. Autrement dit , $M \cap V_p \subset L$, d'où $M \cap_p \subset L \cap V_p$. L'inclusion en sens opposée étant évidente, l'assertion en résulte.

Achevons la preuve de l'assertion (ii) $\Rightarrow$ (i) de (1.7). Il s'agit de voir (1.2) que pour tout entier $r \geq 0$, le A-faisceau $F \otimes_A A_r$ est de type constant associé à un A_r–Module constructible, ce qui permet de se ramener au cas où F est annulé par une puissance de J. Utilisant la filtration de F définie par les puissances de J, on peut même supposer que F est annulé par J. Finalement, utilisant (1.9), on a à montrer que si un système projectif strict de (A/J)-espaces vectoriels est noethérien en tant que A-faisceau, alors il est essentiellement constant et sa limite projective est un (A/J)-espace vectoriel de dimension finie. Cela se voit immédiatement par l'absurde, et est laissé en exercice au lecteur.

J'ignore s'il est toujours vrai qu'un A-faisceau noethérien est constructible. Par contre, la proposition suivante, intéressante en soi, montre qu'en général un A-faisceau constructible n'est pas noethérien.

Proposition **1.11.** — *On suppose que X soit le topos étale d'un schéma de Jacobson noté de même. Soit F un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) F est noethérien et constructible.

(ii) Il existe un nombre fin de points fermés $(x_i, \ldots, x_d)$ de X et pour tout $i \in [1, d]$ un A-faisceau F_i noethérien et constructible sur le topos ponctuel tels que, notant $j_{x_i} : x_i \longrightarrow x$ les immersions canoniques, on ait

$$F \simeq \bigoplus_{1 \leq i \leq d} (j_{x_i})_*(F_i).$$

Preuve : Pour voir que (ii) $\Rightarrow$ (i), il suffit de voir que les A-faisceaux $(j_{x_i})_*(F_i)$ sont constructibles et noethériens. Le caractère constructible se voit en se ramenant au cas où F_i est J-adique constructible, en utilisant l'exactitude du foncteur $(j_{x_i})_*$.

Le caractère noethérien résulte immédiatement de l'adjonction naturelle entre les foncteurs $(j_{x_i})^*$ et $(j_{x_i})_*$. Montrons que (i) $\Rightarrow$ (ii). On peut supposer que $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est J-adique constructible, et nous allons alors voir qu'il n'existe qu'un nombre fini $(x_1, \ldots, x_d)$ de points fermés de X tels que $(F_0)_{x_i} \neq 0$. Notons pour tout point fermé x de X par $j_x : X \longrightarrow X$ l'immersion fermée canonique. Pour tout famille finie $Y=(x_1, \dot{,} x_m)$ de points fermés de X, l'inclusion $Y \longrightarrow X$ définit un épimorphisme canonique

$$f_0 \longrightarrow \bigoplus_{1\leq i\leq m} (j_{x_i})_*(j_{x_i})^*(F_0).$$

Supposons alors qu'il existe une infinité dénombrable $(x_i)_{i\in \mathbf{N}}$ de points fermés de X, avec $F_{x_i}\neq 0$. Définissant un A-faisceau G par

$$G_n=\bigoplus_{0\leq p\leq n} (j_{x_p})_*(j_{x_p})^*(F_0),$$

avec les morphismes de transition évidents (identité sur les termes communs et 0 ailleurs), on a un épimorphisme

$$\overline{F_0}\longrightarrow G\longrightarrow 0$$

du A-faisceau constant $\overline{F}_0$ défini par F_0 sur G. Il s'ensuit que G est un quotient de F, donc est noethérien. On obtient une contradiction en définissant une suite croissante non stationnaire $(F^q G)_{q\in\mathbf{N}}$ de sous-A-faisceaux de G. Pour cela, on pose

$$(F^q G)_n=\begin{cases} G_n \quad (n\leq p) \\ \bigoplus_{0\leq i\leq q}(j_{x_i})_*(j_{x_i})^*(F_0) \quad (n>q),\end{cases}$$

avec les morphismes de transition évidents. Ceci dit, soient donc $(x_1,\ldots,x_d)$ les seuls points fermés du support de F_0, et U l'ouvert complémentaire de leur réunion. Nous allons voir que $F|U=0$. Il en résultera, d'après la suite exacte (I 4.6.4.(i)), que

$$F\simeq \bigoplus_{1\leq i\leq d}(j_{x_i})_*(j_{x_i})^*(F),$$

de sorte qu'il suffira de prouver que pour tout $i\in(1,d)$ le A-faisceau $(j_{x_i})^*(F)$ est constructible et noethérien. Qu'il soit constructible est évident; comme F est noethérien, son facteur direct $(j_{x_i})_*(j_{x_i})^*(F)$ l'est également, de sorte que le caractère noethérien de $(j_{x_i})^*(F)$ se voit en utilisant l'adjonction naturelle entre $(j_{x_i})_*$ et $(j_{x_i})^*$. Montrons donc que $F|U=0$. Comme $F/JF\simeq\overline{F}_0$, il suffit, d'après le lemme de Nakayama (I 5.12.) de voir que $F_0|U=0$.

En effet, comme X est un schéma de Jacobson, il existerait sinon (SGA4 VIII 3.13.) un point fermé x de X contenu dans U tel que $(j_x)^*(F_0) \neq 0$.

1.12. Notant $\hat{A}$ le complété de A pour la topologie J-adique, on définit un foncteur exact et pleinement fidèle (EGA 0_I 7.8.2)

$$\hat{A} - \mathrm{modn} \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(\mathrm{pt}) \tag{1.12.1}$$

en associant à tout $\hat{A}$-module de type fini M le système projectif

$$(M/J^{n+1}M)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Ce foncteur se factorise de manière évidente en un foncteur

$$\hat{A} - \mathrm{modn} \longrightarrow A - \mathrm{fscn}(\mathrm{pt}). \tag{1.12.2}$$

Il résulte aisément de (EGA 0_I 7.2.9. et 7.8.2.) que ce fncteur est une *équivalence de catégories*, un foncteur quasi-inverse étant d'ailleurs fourni par la limite projective.

Si maintenant $a :\longrightarrow\longrightarrow X$ est un point du topos X, il est clair que le foncteur fibre défini par a

$$A - \mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$$

envoie A—fscn(X) dans A—fscn(pt), d'où grâce à l'équivalence (1.12.2) un foncteur exact, appelé encore foncteur fibre associé à a,

$$\varepsilon_a : A - \mathrm{fscn}(X) \longrightarrow \hat{A} - \mathrm{modn}, \tag{1.12.3}$$

qui est obtenu de façon précise en composant le foncteur fibre ordinaire et le foncteur limite projective $A - \mathrm{fscn}(\mathrm{pt}) \longrightarrow \hat{A} - \mathrm{modn}$.

Rappelons enfin (SGA4 VI) qu'un topos localement noethérien à suffisament de points.

Proposition **1.12.4**. — *La collection des foncteurs fibres*

$$\varepsilon_a ; A - \mathrm{fscn}(X) \longrightarrow \hat{A} - \mathrm{modn},$$

où a parcourt les points du topos X, est conservative. *En particulier, pour qu'une suite de A-faisceaux constructiles*

$$F' \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} F'' \tag{S}$$

soit exacte, il faut et il suffit que les suites correspondantes

$$(S_a) \qquad \varepsilon_a(F') \xrightarrow{\varepsilon_a(u)} \varepsilon_a(F) \xrightarrow{\varepsilon_a(v)} \varepsilon_a(F'')$$

soient exactes.

Preuve : On est ramené à voir l'assertion analogue pour les foncteurs fibres évidents $J-\mathrm{adn}(X) \longrightarrow J-\mathrm{adn}(\mathrm{pt})$, qui se voit composant par composant à partir de la conservativité des foncteurs fibres pour les A–Modules.

1.13. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de topos localement noethériens. Comme l'image réciproque d'un A–Module constructible est un A–Module constructible, le foncteur image réciproque

$$f^* : \mathscr{E}(Y,J) \longrightarrow \mathscr{E}(X,J)$$

envoie évidemment $J-\mathrm{adn}(Y)$ dans $J-\mathrm{adn}(X)$. On en déduit aussitôt que le foncteur image réciproque (I 4.1.1.) envoie $A-\mathrm{fscn}(Y)$ dans $A-\mathrm{fscn}(X)$. D'où un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} J-\mathrm{adn}(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & A-\mathrm{fscn}(Y) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ J-\mathrm{adn}(X) & \xrightarrow[\varphi_X]{} & A-\mathrm{fscn}(X) \end{array}$$

dans lequel φ_X et φ_Y désignent les équivalences canoniques.

Si $i : T \longrightarrow T'$ est un morphisme quasi-compact entre objets d'un topos localement noethérien X, on voit de même que le foncteur $i_!$ induit un foncteur exact

$$(1.13.1) \qquad i_! : A-\mathrm{fscn}(T) \longrightarrow A-\mathrm{fscn}(T').$$

Enfin, étant donné un ouvert U d'un topos localement noethérien et Y le topos (également localement noethérien)fermé complémentaire de U, si on note $j : Y \longrightarrow X$ le morphisme de topos canonique, le foncteur exact j_* induit un foncteur exact

$$(1.13.2) \qquad j_* : A-\mathrm{fscn}(Y) \longrightarrow A-\mathrm{fscn}(X).$$

Définition **1.14**. — *On dit qu'un A-faisceau J-adique constructible (1.1) sur X. $F=(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est* constant tordu *(resp. par abus de langage,* localement libre*), si pour tout entier $n\geq 0$, le A_n–Module F_n est localement constant (resp. localement libre). On dit qu'un A-faisceau sur X est* constant tordu constructible *(resp.* localement libre constructible*) s'il est isomorphe dans $A-\mathrm{fsc}(X)$ à un A-faisceau J-adique constructible constant tordu (resp. localement libre). On note*

$$A-\mathrm{fsct}(X)$$

la sous-catégorie pleine de $A-\mathrm{fscn}(X)$, donc aussi de $A-\mathrm{fsc}(X)$, engendrée par les A-faisceaux constant tordus constructibles.

Nous allons maintenant énoncer pour les A-faisceaux constants tordus constructibles (resp. localement libres constructibles) un certain nombre de résultats analogues à des assertions déjà données pour les A-faisceaux constructibles. Nous ne donnerons pratiquement pas de démonstrations, et signalerons surtout les points possibles de divergence.

Proposition **1.15**. — *Soit F un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constant tordu constructible (resp. localement libre constructible).

(ii) F est de type strict et, notant F' le A-faisceau strict associé à F, il existe localement une application croissante $\gamma\geq \mathrm{id}:\mathbf{N}\longrightarrow\mathbf{N}$ telle que $\chi_\gamma(F')$ soit F-adique constructible constant tordu (resp. localement libre).

(iii) Pour tout entier $r\geq 0$, le A-faisceau $F\otimes_A A_r$ est de type fini constant associé à un A_r–Module localement constant constructible (resp. localement libre constructible).

Corollaire **1.16**. — *Soit $F=(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau de type J-adique (par exemple, constructible). On suppose que pour tout $n\in\mathbf{N}$, le A_n–Module F_n est localement constant constructible. Alors, F est constant tordu constructible.*

Preuve : Comme la catégorie des A–Modules localement constants constructibles est stable par images dans $A-\mathrm{Mod}_X$, on peut, quitte à remplacer F par le système projectif strict associé, supposer que F est strict. Par hypothèse, il existe alors (I 3.11) localement une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que $\chi_\gamma(F)$ soit J-adique. Mais l'hypothèse sur F entraîne que les composants de $\chi_\gamma(F)$ sont localement constants constructibles, d'où l'assertion.

Proposition **1.17.** —

(i) La propriété pour un A-faisceau d'être constant tordu constructible (resp. localement libre constructible) est stable par restriction à un objet du topos et de nature locale. La catégorie fibrée

$$T \mapsto A-\mathrm{fsct}(T),$$

où T parcourt les objets de X, est un champ.

(ii) Notant $J-\mathrm{adt}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{E}(X,J)$ engendrée par les A-faisceaux J-adiques constants tordus constructibles, le foncteur canonique

$$J-\mathrm{adt}(X) \longrightarrow A-\mathrm{fsct}(X)$$

induit par (I 3.8.2) est une équivalence de catégories.

(iii) La catégories $A-\mathrm{fsct}(X)$ est une sous-catégories exacte *de $A-\mathrm{fsc}(X)$. De plus, lorsque X n'a qu'un nombre fini de composantes connexes (par exemple, est noethérien), les objets de $A-\mathrm{fsc}(X)$ sont noethériens (dans $A-\mathrm{fsct}(X)$).*

Preuve : Seule l'assertion (iii) mérite quelque attention. Pour la stabilité par noyaux et conoyaux, on se ramène au cas d'un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de $\mathscr{E}(X,J)$. Les systèmes projectifs $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Coker}(u)$ ont des composants localement constants constructibles, et sont constructibles (1.5.(iii)), de sorte que l'assertion résulte de (1.16). La stabilité se voit comme l'assertion analogue de (1.5), en utilisant le fait (cf.1.6.) que pour tout A-faisceau constant tordu constructible E et tout entier $n \geq 0$, le A-faisceau $\mathscr{T}\mathrm{or}_1^A(A_n, E)$ est de type constant, associé à un A_n–Module localement constant constructible. D'après (1.6), il suffit pour cela de voir qu'il est constant tordu, ce qui, vu que ses composants sont localement constants, résulte une nouvelle fois de (1.16). Pour la dernière assertion, rappelons (SGA4 VI) que les composantes connexes d'un topos localement noethérien sont, par définition, les ouverts connexes maximaux du topos. On peut supposer que X est connexe. Soit donc $(E^n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de sous-A-faisceaux constants tordus constructibles d'un A-faisceau constant tordu constructible E, et montrons qu'elle est stationnaire. Supposons X non vide, et choisissons un ouvert noethérien non vide U de X. Par (1.5.(iii)), la suite des $E^n|U$ est stationnaire; il existe donc un entier q tel que $E^p|U = E^q|U$ pour $p \geq q$, ou encore $(E^p/E^q)|U = 0$. On est donc ramené à voir que si un A-faisceau J-adique constant tordu constructible est nul au-dessus d'un ouvert non vide d'un topos localement noethérien connexe, il est nul. Cela résulte immédiatement de l'assertion analogue pour les A–Modules, appliqués à ses composants.

Corollaire **1.18**. — *Notant* $J-\mathrm{Modt}(X)$ *la sous-catégorie abélienne épaisse de* $A-\mathrm{Mod}_X$ *engendrée par les A–Modules localement constants constructibles et annulés par une puissance de J, le foncteur*

$$J-\mathrm{Modt}(X) \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(X)$$

induit par (I 3.5.1.) définit une équivalence avec la sous-catégorie abélienne épaisse de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *engendrée par les A-faisceaux de type constant et constants tordus constructibles.*

Proposition **1.19**. —

(i) Soit $0 \longrightarrow L' \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} L'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\mathcal{E}(X,J)$*. Si L et L'' (resp. L' et L'') sont J-adiques localement constructibles, il en est de même de L' (resp. L).*

(ii) Soit $0 \longrightarrow L' \xrightarrow{u} L \xrightarrow{v} L'' \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $A-\mathrm{fsc}(X)$*. Si L et L'' (resp. L' et L'') sont des A-faisceaux localement libres constructibles, il en est de même de L' (resp. L).*

Preuve : Montrons (i). Comme il est clair que les composants de L' (resp. L) sont localement libres constructibles, on a seulement à voir que L' (resp. L) est

J-adique. Dans le cas respé, cela résulte de (SGA5 V 3.1.3.(iii)). Dans le cas non respé, on a pour tout entier $n \geq 0$ un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd} & L'_{n+1}/J^{n+1}L'_{n+1} \arrow[r, "\overline{u}_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda"] & L_{n+1}/J^{n+1}L_{n+1} \arrow[r, "\overline{v}_{n+1}"] \arrow[d, "\lambda\mu"] & L''_{n+1}/J^{n+1}L''_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L'_n \arrow[r, "u_n"'] & L_n \arrow[r, "v_n"] & L''_n \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont déduites de façon évidente des morphismes de transition. Comme L''_{n+1} est un A_{n+1}–Module localement libre, $\overline{u}_{n+1}$ est un monomorphisme, donc λ est un isomorphismes d'où l'assertion. Montrons maintenant (ii), et tout d'abord l'assertion non respés. On peut supposer (1.17.(ii)) que L et L'' sont J-adiques localement libres constructibles et que v est l'image d'un morphisme de $\mathscr{E}(X,J)$; alors l'assertion résulte de (i) non respée. Prouvons maintenant l'assertion respée. Comme elle est de nature locale (1.17.(i)), on peut supposer X noethérien, et bien sûr L'' J-adique localement libre constructible. Alors il existe une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que v e¿soit l'image d'un morphisme

$$\chi_\gamma(L) \longrightarrow L''$$

de $\mathscr{E}(X,J)$, qui, comme v est un épimorphisme et L'' est strict, est un épimorphisme. On est ainsi ramené au cas où X est noethérien, la suite exacte en question est l'image d'une suite exacte de $\mathscr{E}(X,J)$, et L'' est J-adique localement libre constructible. Comme L' et L'' vérifient la condition de Mittag-Leffler, il en est de même de L (EGA $0_I II$ 13.2.1.); quitte à remplacer L par le système projectif strict associé, on peut donc supposer L strict. Alors (SGA5 V 3.1.3.) L' est strict. Par suite, il existe une application croissante $\gamma \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que $\chi_\gamma(L')$ soit J-adique localement libre constructible. Comme les composants de L'' sont localement libres, la suite

$$0 \longrightarrow \chi_\gamma(L') \xrightarrow{\chi_\gamma(u)} \chi_\gamma(L) \xrightarrow{\chi_\gamma(v)} \chi_\gamma(L'') \longrightarrow 0$$

est exacte. On peut donc supposer que L' et L'' sont tous les deux J-adiques localement libres constructibles, et alors l'assertion résulte de (i) respé.

1.20. Nous allons maintenant expliciter la structure de la catégorie A—fsc(X), lorsque le topos X est connexe. Rappelons tout d'abord quelques faits concernant le pro-groupe fondamental d'un topos. Étant donné un pro-groupe strict

$$G = (G_i)_{i \in I},$$

on définit comme suit un topos, noté

$$\mathrm{B}_G$$

et appelé *topos classifiant* de G. Un objet de B_G, appelé encore *G-ensemble*, est un ensemble M muni d'une application

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M)$$

$$m \mapsto (g_i \mapsto g_i m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”})$$

telle que l'on ait

$$g_i(g_i' m) = (g_i g_i')m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”}.$$

Autrement dit, M admet une filtration par des G_i-ensembles ($i \in I$), avec compatibilité des diverses opérations. Un morphisme de G-ensembles $M \longrightarrow N$ est une application $u : M \longrightarrow N$ qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "u"'] & \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M) \arrow[d, "\varinjlim_i \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, u)"] \\ N \arrow[r, "p"] & \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, N) \end{tikzcd}$$

commutatif.

De la même manière, étant donné un anneau B, on définit la notion de (B, G)-*module*, en exigeant que l'application structurale

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M)$$

soit B-linéaire, lorsque l'on munit le second membre de la structure de B–Module déduite de façon évidente de celle de M. Autrement dit, un (B, G)–Module n'est autre qu'un B–Module sur le topos B_G.

Le topos B_G est localement noethérien (cf SGA4 VI 1.33.) et n'admet (à isomorphisme près) qu'un seul point, à savoir le foncteur qui associe à tout G-ensemble M l'ensemble sous-jacent.

Étant données maintenant un topos connexe X (non nécessairement localement noethérien) et un point

$$a : \mathrm{pt} \longrightarrow X,$$

on définit, à isomorphisme près dans la catégorie des pro-groupes, un pro-groupe strict

$$\pi_1(X, a),$$

appelé pro-groupe fondamental de X en a, et une équivalence de catégories

$$\mathrm{Elc}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{B}_{\pi_1(X,a)} \tag{1.20.1}$$

de la catégorie des faisceaux d'ensembles localement constants sur X, avec le topos classifiant de $\pi_1(X, a)$. De plus, notant c le point canonique du topos classifiant du pro-groupe fondamental, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Elc}(X) \arrow[rr, "(1.20.1)"] \arrow[dr, "a^*"'] & & \mathrm{B}_{\pi_1(X,a)} \arrow[dl, "c^*"] \\ & \mathrm{Ens} & \end{tikzcd}$$

est commutatif (à isomorphisme près).

Étant donné un anneau commutatif unifère B, le foncteur (1.20.1) définit une équivalence

$$B-\mathrm{Modlc}(X) \xrightarrow{\approx} \mathrm{B}-\mathrm{Mod}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}), \tag{1.20.2}$$

où B—Modlc(X) désigne la catégorie des B-Modules localement constants sur X.

i $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de topos, le morphisme composé $b = f \circ a$ est un point de Y, et on définit fonctoriellement en les données, un morphisme de pro-groupes

$$\pi_1(f) : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(Y, b)$$

tel que le foncteur image réciproque

$$f^* : \mathrm{Elc}(Y) \longrightarrow \mathrm{Elc}(X)$$

corresponde dans les équivalences (1.20.1) à la restriction du pro-groupe structural.

Soit X un topos localement noethérien connexe, et choisissons un point a : $\mathrm{pt} \longrightarrow X$ de X. Par simple extension aux systèmes projectifs, le foncteur (1.20.2) définit une équivalence

$$J-\mathrm{adt}(X) \xrightarrow{\approx} J-\mathrm{adt}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) = J-\mathrm{adn}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}). \tag{1.20.3}$$

Proposition **1.20.4**. —

(i) soient X un topos localement noethérien connexe et a un point de X. On a une équivalence *canonique, définie à isomorphisme près,*

$$A-\mathrm{fsct}(X) \xrightarrow{\omega_X} A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) = A-\mathrm{fscn}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}).$$

Le foncteur fibre défini par a (1.12.3)

$$E_a : A-\mathrm{fsct}(X) \longrightarrow \hat{A}-\mathrm{modn}$$

est conservatif.

(ii) Soient X et Y eux topos localement noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme. Pour tout A-faisceau constant tordu constructible F sur Y, le A-faisceau $f^*(F)$ est constant tordu constructible. Supposons maintenant que X et Y soient connexes, choisissons un point a de X et posons $b = f \circ a$. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} A-\mathrm{fsct}(Y) \arrow[r, "\omega_Y"] \arrow[d, "f^*"'] & A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(Y,b)}) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ A-\mathrm{fsct}(X) \arrow[r, "\omega_X"'] & A-\mathrm{fsct}(\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}) \end{tikzcd} \quad ,$$

dans lequel le foncteur Res *désigne la restriction du pro-groupe structural, est commutatif à isomorphisme près.*

Preuve : L'équivalence ω_X se déduit de façon évidente de (1.20.3), en utilisant l'équivalence (1.17.(ii)). Comme l'"unique" foncteur fibre du topos $\mathrm{B}_{\pi_1(X,a)}$ est conservatif (1.12.4), la conservativité annoncée en résulte aussitôt. L'assertion (ii) est conséquence immédiate de l'assertion analogue pour les Modules localement constants, rappelée plus haut.

Corollaire **1.20.5**. — *Soient X un schéma localement noethérien connexe et a un point géométrique de X. Notant encore $\pi_1(X,a)$ le groupe fondamental de X en a, muni de sa topologie canonique, on a une équivalence canonique (à isomorphisme près)*

$$A-\mathrm{fsct}(X) \xrightarrow{\approx} \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(X,a)),$$

où la deuxième membre désigne la catégorie des $\hat{A}$–Modules de type fini munis d'une opération continue de $\pi_1(X,a)$ pour la topologie J-adique. De plus, si

$$f : X \longrightarrow Y$$

est un morphisme de schémas localement noethériens connexes, alors, munissant Y du point géométrique $b = f \circ a$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} A-\mathrm{fsct}(Y) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "f^*"'] & \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(Y,b)) \arrow[d, "\mathrm{Res}"] \\ A-\mathrm{fsct}(X) \arrow[r, "\approx"'] & \hat{A}-\mathrm{modn}(\pi_1(X,a)) \end{tikzcd} ,$$

dans lequel les flèches horizontales désignent les équivalences canoniques et Res *est le foncteur restriction des scalaires déduit de $\pi_1(f) : \pi_1(X,a) \longrightarrow \pi_1(Y,b)$, est commutatif (à isomorphisme près).*

Preuve : Seule la première assertion demande une démonstration. Pour cela, il n'y a qu'à transcrire la preuve de (SGA5 VI 1.2.5).

Dans l'énoncé suivant, nous appellerons sous-topos localement fermé d'un topos X un couple (U,Y) formé d'un ouvert U de X et du topos fermé complémentaire (relativement à U) d'un ouvert V de U. Il est clair qu'il revient au même de se donner deux ouverts emboîtés U et V de X. On définit les opérations de restriction à un sous-topos localement fermé (U,Y) comme composées des restrictions à U puis à Y. Étant donné un autre ouvert U' de X, on note

$$U' \cap (U,Y)$$

et on appelle intersection de U' avec (U,Y) le sous-topos localement fermé $(U \times U', Y')$ de U', où Y' désigne le topos fermé de $U \times U'$ complémentaire de $V \times U'$.

Étant donnés un topos X et une famille finie $(U_i, Y_i)_{1 \leq i \leq p}$ de sous-topos localement fermés de X, on dira que X est *réunion* des (U_i, Y_i) si, notant pour tout i par V_i l'ouvert de U_i dont Y_i est le complémentaire, on a les relations

$$X = \bigcup_i U_i$$

$$\bigcap_i (V_i) = \varnothing$$

et si pour toute partition $[1,q] = S \cup T$ de $[1,q]$ la relation

$$\bigcap_S (V_S) \cap \bigcup_T (U_t) = \varnothing$$

implique soit que T est vide, soit que $U_t = \varnothing$ pou tout $t \in T$.

Proposition **1.21**. — *Soient X un topos localement noethérien et F un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constructible.

(ii) Tout ouvert noethérien de X est réunion d'un nombre fini de sous-topos localement fermés $Z_i = (U_i, Y_i)$ au-dessus desquels l'image réciproque de F est un A-faisceau constant tordu constructible.

(iii) X admet un recouvrement par des ouverts, qui sont réunions finies des sous-topos localement fermés, au-dessus desquels l'image réciproque de F est un A-faisceau constant tordu constructible.

Preuve : Il est évident que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Pour voir que (i) $\Rightarrow$ (ii), on peut supposer X noethérien et F J-adique constructible, et alors (SGA5 V 5.1.6) le gradué strict grs(F) est un $\mathrm{gr}_J(A)$–Module constructible. D'après la structure des Modules constructibles sur un topos noethérien (SGA4 VI), le topos X admet un recouvrement fini par des sous-topos localement fermés au-dessus desquels l'image réciproque de grs(F) est un $\mathrm{gr}_J(A)$–Module localement constant constructible. Au dessus de ces sous-topos localement fermés, les composants de grs(F) sont localement constants constructibles, et par suite F est J-adique constant tordu constructible. Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). Comme l'assertion est locale, on peut supposer que X est est noethérien et réunion finie de sous-topos localement fermés $Z_i = (U_i, Y_i)$ $(1 \leq i \leq q)$ au-dessus desquels F est constant tordu constructible. En particulier, les $F|Z_i$ vérifiant la condition de Mittag-Leffler, et il résulte sas peine du lemme suivant que F la vérifie également.

Proposition **1.22**. — *Si un topos X est réunion d'un nombre fini de sous-topos localement fermés $Z_m = (U_m, Y_m)$ $(1 \leq m \leq q)$, alors, notant $j_m : Y_m \longrightarrow X$ les morphismes de topos canoniques, les foncteurs*

$$(j_m)^* : A-\mathrm{Mod}_X \longrightarrow A-\mathrm{Mod}_{Y_m}$$

forment une famille conservative.

Comme ces foncteurs sont exacts, il s'agit de voir que si un A–Module M vérifie $(j_m)^*(M) = 0$ pour tout m, alors $M = 0$. Nous allons voir cette assertion par récurrence sur q, le cas où $q = 1$ étant évident. Nous allons pour cela noter V_m l'ouvert de U_m dont Y_m est le complémentaire, et $i_m : V_m \longrightarrow U_m$, $k_m : V_m \longrightarrow X$ et $l_m : U_m \longrightarrow X$ les morphismes canoniques. L'hypothèse de récurrence appliquée au topos fermé K_m complémentaire de U_m dans X montre que pour tout m le morphisme canonique

$$(1_m)_!(M|U_m) \longrightarrow M$$

est un isomorphisme. Par ailleurs le fait que $(j_m)^*(M) = 0$ implique que le morphisme canonique

$$(i_m)_!(M|V_m) \longrightarrow M|U_m$$

est également un isomorphisme. Il est donc de même du morphisme canonique $(k_m)_!(M|V_m) \longrightarrow M$, et par suite (SGA4 IV 2.6)

$$M \simeq M \otimes_A (K_m)_!(A).$$

Par récurrence, on en déduit que

$$M \xrightarrow{\sim} M \otimes_A \bigotimes_m (k_m)_!(A).$$

Mais, notant $k : \prod_m (V_m) \longrightarrow e_X$ le morphisme canonique, on a (SGA4 IV 2.13.b) de 1))

$$\bigotimes_m (k_m)_!(A) \xrightarrow{\sim} k_!(A),$$

d'où l'assertion, puisque par hypothèse le produit des V_m est vide.

Sachant que F vérifie la condition de Mittag-Leffler, on peut, quitte à le remplacer par le système projectif strict associé, supposer qu'il est strict. Alors (1.15.(ii)), il existe pour tout i une application croissante $\gamma_i \geq \mathrm{id} : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ telle que $\chi_\gamma(F|Z_i)$ soit J-adique constructible. Posant $\gamma = \sup(\gamma)$, on voit que $\chi_\gamma(F)$ est J-adique, en utilisant (1.22), et constructible, d'où l'assertion.

Dans l'énoncé suivant, étant donné un sous-topos localement fermé (U, Y) d'un topos localement noethérien X, et $i : Y \longrightarrow X$, $j : Y \longrightarrow U$, $k : U \longrightarrow X$ les morphismes de topos canoniques, nous noterons $i_!$ le foncteur

$$i_! : A - \mathrm{fsc}(Y) \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(X)$$

le morphisme composé de $k_!$ et j_*. On s'assure aisément qu'il ne dépend pas (à isomorphisme près) de U, ce qui permet d'ôter ce dernier des notations. Le foncteur $i_!$ ainsi défini est exact et transforme A-faisceau constructible en A-faisceau constructible.

Proposition **1.23**. — *Soient X un topos noethérien et F un A-faisceau constructible sur X. Il existe dans $\mathbf{E}(X, J)$, donc aussi dans $A - \mathrm{fsc}(X)$, une filtration finie de F dont les quotients consécutifs sont de la forme $i_!(G)$, où $i : Y \longrightarrow X$ est le morphisme structural d'un sous-topos localement fermé (U, Y) de X, et G un A-faisceau constant tordu constructible sur Y. Lorsque X est le topos étale d'un schéma noethérien, noté de même, on peut prendre pour sous-topos localement fermés de X les topos étales de schémas réduits associés à des parties localement fermées irréductibles de X.*

Preuve : Par récurrence noethérienne, on est ramené à prouver l'assertion en la supposant vraie pour out sous-topos fermé de X, différent de X. L'argument de la preuve de (SGA4 IX 2.5.), de nature formelle, s'applique aux topos généraux et montre, compte tenu de (1.21), qu'il existe un ouvert non vide U de X tel que $F U$ soit constant tordu constructible. Notons alors Y le topos fermé complémentaire de U, et $i : U \longrightarrow X$ et $j : Y \longrightarrow X$ les morphismes de topos canoniques. On a alors (I 4.6.4.(i)) une suite exacte de $\mathbf{E}(X,J)$

$$0 \longrightarrow i_!(F|U) \longrightarrow F \longrightarrow j_*(F|Y) \longrightarrow 0.$$

L'assertion étant vraie sur Y pour $F|Y$, par hypothèse de récurrence, on en déduit aussitôt qu'elle est vraie pour F. Dans le cas où X est le topos étale d'un schéma, les sous-topos localement fermés de X correspondent aux schémas réduits associés à des parties localement fermées de X, et on peut dans la preuve prendre pour U un ouvert irréductible de X.

Proposition **1.24**. — *Soient X un topos localement noethérien, et E et F deux A-faisceaux sur X.*

(i) Si E et T sont constructibles (resp. constants tordus constructibles), les A-faisceaux

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F) \quad (p \in \mathbf{Z})$$

sont constructibles (resp. constants tordus constructibles). Si de plus l'anneau A est régulier de dimension r, on

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F) = 0 \quad \textit{pour } p \geq r+1.$$

(ii) Supposons maintenant que X soit connexe, et soit a un point de X. Lorsque E et F sont constants tordus constructibles, on a, avec les notations de (1.20.4), des isomorphismes de bifoncteurs cohomologiques

$$\omega_X(\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)) \xrightarrow{\sim} \mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(\omega_X(E), \omega_X(F)) \tag{1.24.1}$$

et

$$\varepsilon_a(\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_p^{\hat{A}}(\varepsilon_a(E), \varepsilon_a(F)). \tag{1.24.2}$$

De plus, lorsque X est le topos étale d'un schéma localement noethérien, notant M et N les $\hat{A}$–Modules de type fini munis d'une opération continue de $\pi_1(X,a)$ correspondant à E et F (1.20.5), les A-faisceaux

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F) \quad (p \in \mathbf{Z})$$

correspondant aux $\hat{A}$–Modules de type fini

$$\mathrm{Tor}_p^{\hat{A}}(M,N),$$

munis de l'opération "diagonale" de $\pi_1(X,a)$.

Preuve : Supposons tout d'abord que E et F sont constants tordus constructibles, et montrons que les A-faisceaux $\mathcal{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)$ le sont également. On peut pour cela supposer E et F J-adiques constants tordus constructibles. Pour tout entier p, la définition de $\mathcal{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)$ (I 5.1) montre que ce A-faisceau a des composants localement constants constructibles, de sorte qu'il suffit (1.16) de voir qu'il est de type J-adique. On peut supposer X connexe; soit alors a un point de X. Posant alors $M=\varepsilon_a(E)$ et $N=\varepsilon_a(F)$, foncteur fibre

$$\mathscr{E}(X,J)\longrightarrow\mathscr{E}(\mathrm{pt},J)$$

défini par a associe au A-faisceau $\mathcal{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)$ le système projectif

$$(\mathrm{Tor}_p^{A_n}(M/J^{n+1}M,N/J^{n+1}N))_{n\in\mathbf{N}},$$

et il suffit, vu la conservativité du foncteur libre (habituel) défini par a sur les A–Modules localement constants, de vérifier que ce dernier est de type J-adique. Choisissons pour cela une résolution libre de type fini

$$p\longrightarrow M$$

du $\hat{A}$–Module M. Convenant de poser pour tout $\hat{A}$–Module de type fini L

$$\mathbf{L}=(L/J^{n+1}L)_{n\in\mathbf{N}},$$

il résulte de (4.1.4) que $\mathbf{P}\longrightarrow\mathbf{M}$ est une résolution quasilibre de $\mathbf{M}$. Par suite (I 5.11.(i)), on a dans $A-\mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$ un isomorphisme canonique

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_p^A(\mathbf{M},\mathbf{N})\simeq\mathrm{H}^p(\mathbf{P}\otimes_A\mathbf{N}). \tag{1.24.3}$$

Mais les composants du complexe $\mathbf{P}\otimes_A N$ sont des A-faisceaux J-adiques constructibles, donc ses objets de cohomologie sont des A-faisceaux constructibles (1.5.(iii)), d'où l'assertion. Par ailleurs, le foncteur limite projective

$$A-\mathrm{fscn}(\mathrm{pt})\longrightarrow\hat{A}-\mathrm{modn}$$

est exact (1.12.2) et commute au produit tensoriel (EGA 0_{III} 7.3.4), de sorte que (1.24.2) s'obtient par passage à la limite projective à partir de (1.24.3). Lorsque X est un schéma connexe et a un point géométrique de X, ce qui précède montre en tout cas que l'application canonique

$$\mathrm{Tor}_p^A(M,N) \longrightarrow \varprojlim_n \mathrm{Tor}_p^{A_n}(M/J^{n+1}M, N/J^{n+1}N)$$

est un isomorphisme topologique. Par ailleurs, il est immédiat que, munissant le premier membre de l'opération diagonale de $\pi_1(X,a)$ et le second membre de la limite projective des opérations diagonales, c'est un morphisme de $\pi_1(X,a)$–modules. Terminons la preuve de (ii), en exhibant l'isomorphisme (1.24.1). Il suffit pour cela de remarquer que le foncteur (1.20.2) "commute aux $\mathscr{T}\mathrm{or}_i$" (SGA4 IV) ce qui permet, vu la définition (I 5.1.) de définir (1.24.1) sur les composants. Montrons maintenant (i). Si E et F sont constructibles, on sait (1.21) que X admet un recouvrement par des ouverts, qui sont réunions finies de sous-topos localement fermés $(\mathrm{Z}_i)_{i\in I}$ au-dessus desquels E et F sont constants tordus constructibles. Mais

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)|\mathrm{Z}_i \simeq \mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E|\mathrm{Z}_i, F|\mathrm{Z}_i) \quad (i \in I, p \in \mathbf{Z}),$$

et par suite, d'après (ii), les restrictions aux Z_i des A-faisceaux $\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)$ sont des A-faisceaux constants tordus constructibles, ce qui entraîne qu'ils sont constructibles (1.21). Montrons enfin que si A est régulier de dimension r, on a

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F) \quad (p \geq r+1) \text{ dans } A-\mathrm{fsc}(X).$$

On peut supposer X noethérien, et il s'agit alors de voir que les systèmes projectifs $\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)\,(p \geq r+1)$ sont essentiellement nuls. Grâce à (1.22), il suffit de vérifier cette assertion au-dessus des sous-topos localement fermés de X sur lesquels E et F sont constants tordus constructibles. On est ainsi ramené au cas où E et Fsont constants tordus constructibles. Supposant de plus X connexe et choisissant un point a de X, l'assertion résulte alors de (1.24.2) et du fait que $\hat{A}$ est régulier de dimension r (EGA 0_{IV} 17.3.8.1).

Proposition **1.25**. — *Soient X un topos localement noethérien et E un A-faisceau constructible (resp. constant tordu constructible) sur X.*

(i) Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) E est plat.

b) E est fortement plat (resp. localement libre constructible).

Si de plus J est un idéal maximal de A, elles équivalent à :

c) E est presque plat (I 5.14).

(ii) Si E est J-adique, les assertions suivantes sont équivalentes :

a) E est plat.

b) Pour tout entier $n \geq 0$, le $n^{\text{ème}}$ composant E_n de E est un A_n–Module plat (resp. localement libre constructible).

(iii) Si A est un anneau local régulier de dimension r et J est son idéal maximal, alors

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)=0 \quad (p \geq r+1)$$

pour tout A-faisceau F. Si de plus F est presque plat,

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)=0 \quad (p \geq 1).$$

Preuve : Montrons (ii). L'assertion b) $\Rightarrow$ a) a déjà été vue (I 5.6.); l'assertion a) $\Rightarrow$ b) s'obtient en écrivant que pour toute suite exacte $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ de A_n–Modules, la suite correspondante

$$0 \longrightarrow M' \otimes_A E \longrightarrow M \otimes_A E \longrightarrow M'' \otimes_A E \longrightarrow 0$$

est exacte. On déduit aussitôt de (ii) l'équivalence des assertions a) et b) de (i), de sorte qu'il suffit de voir que c) $\Rightarrow$ a). Autrement dit, nous avons à montrer que pour tout A-faisceau F, les systèmes projectifs $\mathscr{T}\mathrm{or}_p^A(E,F)$ $(p \geq 1)$ sont essentiellement nuls, lorsqu'on se restreint à des ouverts noethériens. Grâce à (1.22) et (1.21), on peut supposer X noethérien connexe et E constant tordu constructible. Par ailleurs, la catégorie $A-\mathrm{fsc}(X)$ ne changeant pas lorsque A est remplacé par

A_J, on peut supposer que A est local noethérien. Choisissant alors un point a de X, le $\hat{A}$–module M correspondant à E dans l'équivalence ε_a (1.20.4) vérifie (1.24.2)

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_1^{\hat{A}}(A/J, M) = 0,$$

donc est libre (Bourbaki.Alg.Comm. II 3 Cor.2), et par suite E est localement libre constructible, d'où l'assertion. Montrons (iii). Comme tout A-faisceau admet (I 5.16) une résolution de longueur r par des A-faisceaux presque plats, on peut supposer que F est presque plat. Comme précédemment, on se ramène au cas où A est local noethérien, X noethérien connexe et E constant tordu constructible. Ayant choisi un point a de X, soit M le $\hat{A}$–module de type fini correspondant à E. Nous allons voir que

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_p^A(E, F) = 0 \quad (p \geq 1)$$

par récurrence croissante sur la dimension de M. Lorsque $\dim(M) = 0$, M est annulé par une puissance de J, et l'assertion résulte de (I 5.13). Supposons maintenant l'assertion vraie pour $\dim(M) = d \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie pour $\dim(M) = d + 1$. Le sous-$\hat{A}$–module M' de M formé des éléments annulés par une puissance de l'idéal J correspond au plus grand sous-A-faisceau constant tordu constructible E' de E annulé par une puissance de J. Posons $E'' = E/E'$ et $M'' = M/M'$. Le $\hat{A}$–module M'' correspond à E'', et on a une suite exacte

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E', F) \longrightarrow \mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E, F) \longrightarrow \mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E'', F) \quad (i \geq 1),$$

qui montre , compte tenu de ce que E' est annulé par une puissance de J, qu'il suffit de prouver l'assertion pour E''. Mais $\mathrm{prof}(M'') > 0$ et par suite il existe un élément u de J tel que la multiplication par u soit un monomorphisme de E''. On en déduit pour tout $i \geq 1$ une suite exacte

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E'', F) \xrightarrow{u} \mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E'', F) \longrightarrow \mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E''/uE'', F).$$

Mais le $\hat{A}$–module correspondant à E''/uE'', à savoir M''/uM'', est de dimension d (EGA 0_{IV} 16.3.4), donc

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(E''/uE'', F) = 0 \quad (i \geq 1)$$

par hypothèse de récurrence, et par suite

$$\mathscr{T}\mathrm{or}_i^A(E'',F) = u\,\mathscr{T}\mathrm{or}_i^A(E'',F),$$

ce qui permet de conclure par le lemme de Nakayama (I 5.12).

Proposition **1.26**. — *Soient X un topos localement noethérien, et E et F deux A-faisceaux sur X.*

(i) Si E et F sont constant tordus constructibles, les A-faisceaux

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) \quad (p \in \mathbf{Z})$$

sont constant tordus constructibles. Lorsque X est connexe, le choix d'un point a de X définit, avec les notations de (1.20.4), des isomorphismes de bifoncteurs cohomologiques

$$\omega_X\,\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(\omega_X E, \omega_X F). \tag{1.26.1}$$

$$\varepsilon_a\,\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(\varepsilon_a E, \varepsilon_a F). \tag{1.26.2}$$

De plus, lorsque X est le topos étale d'un schéma localement noethérien, notant M et N les $\hat{A}$–modules de type fini munis d'une opération continue de $\pi_1(X,a)$ correspondant à E et F (1.20.5), les A-faisceaux

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) \quad (p \in \mathbf{Z})$$

correspondent aux $\hat{A}$–modules de type fini

$$\mathrm{Ext}_{\hat{A}}^p(M,N),$$

munis de l'opération "diagonale" de $\pi_1(X,a)$.

(ii) Si E est constant tordu constructible et F constructible, les A-faisceaux $\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F)$ sont constructibles.

(iii) On suppose que l'anneau A est local régulier de dimension r et que J est son idéal maximal. Alors, si E est constant tordu constructible, on a

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) = 0 \quad (p \geq r+1).$$

(iv) Supposons que pour toute A-algèbre de type fini B annulée par une puissance de J, et toute couple (M,N) de B–Modules constructibles, les B–Modules

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_B(M,N) \quad (p\in\mathbf{Z})$$

soient constructibles. Alors, lorsque E et F sont constructibles, les A-faisceaux $\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F)$ *sont constructibles.*

Preuve : Montrons (i). Comme le A-faisceau $\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F)$ a des composants localement constants constructibles, il suffit pour voir qu'il est constant tordu constructible, de montrer qu'il est de type J-adique (1.16). On peut supposer X connexe; soit alors a un point de X. Posant $M=\varepsilon_a(E)$ et $N=\varepsilon_a(F)$, le foncteur fibre

$$\mathscr{E}(X,J)\longrightarrow \mathrm{pt},\mathscr{J}$$

défini par a associe au A-faisceau $\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F)$ le système projectif

$$(\varprojlim_{m\geq n}\mathrm{Ext}^p_{A_m}(M/J^{m+1}M,N/J^{n+1}N))_{n\in\mathbf{N}},$$

et il suffit, vu la conservativité du foncteur fibre (habituel) défini par a sur les A–Modules localement constants, de vérifier que ce dernier est de type J-adique. Avec les notations de l preuve de (1.24.(i)), on a dans A—fsc(pt) un isomorphisme canonique

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(\mathbf{M},\mathbf{N})\simeq \mathrm{H}^p\,\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(\mathbf{P},\mathbf{N}), \tag{1.26.3}$$

défini grâce à (I 7.3.11). Mais (SGA5 VI 1.3.3) les composants de $\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(\mathbf{P},\mathbf{N})$ sont J-adiques constructibles, d'où aussitôt l'assertion.

Les assertions restantes de la partie (i) se montrent à partir de là en calquant la preuve des assertions analogues de (1.24). Montrons (ii). D'après (1.21), on peut supposer que F est également constant tordu constructible, et alors (ii) résulte de (i). Pour voir (iii), on peut supposer que X est connexe. Choisissant alors un point a de X, nous allons raisonner par récurrence croissante sur la dimension du $\hat{A}$–module de type fini M associé à E. Si $\dim(M)=0$, le A-faisceau E est défini par un A-Module localement constant constructible annulé par une puissance de

J, que, quitte à localiser, on peut même supposer constant. Alors, toute résolution de longueur r du A-faisceau E. On conclut dans ce cas grâce à (I 7.3.11). Supposons maintenant l'assertion vraie lorsque $\dim(M) = d \geq 0$ et montrons qu'elle est vraie pour $\dim(M) = d+1$. Le sous-$\hat{A}$–module M' de M formé des éléments annulés par une puissance de l'idéal J correspond au plus grand sous-A-faisceau constant tordu constructible E' de E annulé par une puissance de J. Posons $E' = E/E'$ et $M'' = M/M'$. Le $\hat{A}$–module M'' correspond à E'' et on a une suite exacte

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E'',F) \longrightarrow \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E,F) \longrightarrow \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E',F) \quad (p \in \mathbf{Z}),$$

qui montre, compte tenu de ce que E' est annulé par une puissance de J, qu'il suffit de prouver l'assertion pour E''. Mais $\mathrm{prof}(M'') > 0$, de sorte qu'il existe un élément u de J tel que la multiplication par u définisse un monomorphisme de E''. On en déduit pour tout $p \in \mathbf{Z}$ une suite exacte

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E'',F) \xrightarrow{xu} \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E'',F) \xrightarrow{\gamma} \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^{p+1}(E''/uE'',F).$$

L'hypothèse de récurrence implique alors que

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E'',F) = u\ \mathscr{E}\mathrm{xt}_A^p(E'',F) \quad (p \geq r+1),$$

et on conclut par le lemme de Nakayama (I 5.12). Pour prouver (iv), nous allons tout d'abord supposer que E est plat et J-adique, donc que pour tout entier $n \geq 0$, le $n^{\text{ème}}$ composant E_n de E est un A_n–Module constructible et plat (1.25). Dans ce cas, nous allons utiliser la notation suivante. Soit M un A_p–Module. Il résulte de (I 6.5.2) que pour tout entier $q \geq p$, le morphisme canonique

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}_{A_q}^i(E_q,M) \longleftarrow \mathscr{E}\mathrm{xt}_{A_p}^i(E_p,M) \qquad (i \geq 0)$$

est un isomorphisme. Posant pour tout entier $i \geq 0$

$$T^i(M) = \varprojlim_{q \geq p} \mathscr{E}\mathrm{xt}_{A_q}^i(E_q,M),$$

il est clair qu'on obtient un foncteur cohomologique de la catégorie des A–Modules annulés par une puissance de J dans elle-même. De plus, les hypothèses faites assurent que lorsque M est constructible, les A–Modules $T^i(M)$ sont constructibles.

Rappelons enfin qu'avec ces notations, le A-faisceau $\mathscr{E}\mathrm{xt}^i_A\,(E,F)$ est identique au système projectif

$$(T^i(F_n))_{n\in\mathbf{N}}.$$

Pour voir [?] F est J-adique. Alors, compte tenu de lemme d'Artin-Rees (SGA5 V 4.2.6) et du lemme de Shih (SGA5 V A3.2), il suffit de montrer que pour tout entier $m\geq 0$, le $\mathrm{gr}_J(A)$–Module

$$T^m(\mathrm{grs}(F))\simeq\mathscr{E}\mathrm{xt}^m_{A_0}\,(E_0,\mathrm{grs}(F)),$$

dans lequel $\mathrm{gr}_J(A)$ opère par l'intermédiaire du deuxième argument, est noethérien. Mais il résulte de (I 6.5.2) que

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^m_{A_0}\,(E_0,\mathrm{grs}(F))\simeq\mathscr{E}\mathrm{xt}^m_{\mathrm{gr}_J(A)}\,(E_0\otimes_{A_0}\mathrm{gr}_J A,\mathrm{grs}(F)),$$

ce qui permet de conclure grâce à l'hypothèse de l'énoncé et au théorème de Hilbert (SGA5 V 5.1.4). Montrons maintenant comment on peut se ramener en général au cas où E est plat. On se ramène facilement au cas où X est noethérien, de sorte que (1.23) E admet une filtration finie dont les quotients consécutifs sont de la forme $i_!(G)$, où $i:Y\longrightarrow X$ est le morphisme structural d'un sous-topos localement fermé de X et G est un A-faisceau constant tordu constructible sur Y, de sorte qu'on peut supposer E de la forme $i_!(G)$. Lorsque i est une immersion fermée, on a (I 7.7.12)

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(i_!(G),F)\xrightarrow{\sim} i_*\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(G,\mathbf{R}\,i^!(F)),$$

de sorte que d'après (ii), on est ramené à voir que $\mathrm{R}\,i^!(F)$ est à cohomologie formée de A-faisceaux constructibles. Mais (I 7.7.13)

$$\mathbf{R}\,i^!(F)\xrightarrow{\sim} i^*\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(i_*(A),F),$$

d'où l'assertion dans ce cas, car $i_*(A)$ est un A-faisceau plat et constructible. Dans le cas où i n'est pas une immersion fermée, on l'écrit sous la forme

$$i=k\circ j,$$

où j est une immersion fermée et k une immersion ouverte. On a alors

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(i_!G,F)\simeq\mathbf{R}\,k_*\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(j_*(G),k^*(F)),$$

de sorte que, d'après ce qui a été vu dans le cas d'une immersion fermée, il suffit de montrer que si k est définie par l'ouvert U de X et P est un complexe borné inférieurement de A-faisceaux sur U dont les objets de cohomologie sont des A-faisceaux constructibles, les objets de la cohomologie de $\mathbf{R}k_*(P)$ sont également des A-faisceaux constructibles. Or, notant $t : Z \longrightarrow X$ l'immersion fermée complémentaire de k, on a un tringle exact (I 7.7.14)

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}k_*(P) \arrow[dl, dashed] & \\ \mathbf{R}t_*\mathbf{R}t^!k_!(P) \arrow[rr] & & k_!(P) \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

qui montre qu'il suffit de voir que

$$\mathbf{R}t^!k_!(P) \simeq t^*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(t_*(A), k_!(P))$$

est à cohomologie constructible, ce qui nous ramène à nouveau au cas d'une immersion fermée.

Exemple 1.27. Les hypothèses de (iv) sont notamment réalisées (SGA5 I Appendice 6) lorsque X est le topos étale d'un schéma localement noethérien, lorsqu'on dispose de la résolution des singularités et de la pureté au sens fort (SGA5 I Appendice 4.4). C'est le cas notamment lorsque X est de dimension ≤ 1, ou lorsque X est excellent de caractéristique nulle, ou localement de type fini sur un corps et de dimension ≤ 2.

Nous allons maintenant nous intéresser à quelques propriétés particulières aux anneaux de valuation discrète.

Proposition **1.28**. — *On suppose que A est un anneau de valuation discrète et que J est son idéal maximal. Étant donné un A-faisceau constructible F sur X, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) F est plat.

(ii) F est sas torsion, i.e. pour tout élément a de A, l'homothétie

$$a_F : F \longrightarrow F$$

est un monomorphisme.

(iii) Étant donnée une uniformisante locale u de A, l'endomorphisme u_F est un monomorphisme.

Preuve : L'équivalence de (ii) et (iii) est évidente, et il est immédiat que (i) $\Rightarrow$ (iii). Montrons que (iii) $\Rightarrow$ (i). D'après (1.25.(i)), il suffit de voir que

$$\mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(A/uA, E) = 0,$$

ce qui se voit sans peine sur la suite exacte des $\mathcal{T}\mathrm{or}_i^A(.,E)$ associée à la suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{u} A \longrightarrow A/uA \longrightarrow 0$.

Proposition **1.29**. — *On suppose que A est de valuation discrète, que J est son idéal maximal, et que X est le topos étale d'un schéma noethérien (resp. localement noethérien). Alors, pour tout A-faisceau constructible (resp. constant tordu constructible) F sur X, il existe une suite exacte*

$$0 \longrightarrow L' \longrightarrow L \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

de A—fscn(X), *avec L et L' deux A-faisceaux* constructibles et plats *(resp.* localement libres constructibles*).*

Preuve : Il résulte de (1.28) que tout sous-A-faisceau constructible d'un A-faisceau constructible et plat est plat. Utilisant (1.5.(iii)), (resp. 1.17.(iii)), on voit donc qu'il nous suffit de prouver l'existence d'un épimorphisme $L \longrightarrow F \longrightarrow 0$, avec L constructible et plat (resp. localement libre constructible).

a) Supposons tout d'abord que F soit associé à un A_d–Module localement constant constructible (d entier ≥ 0) et montrons l'assertion respée dans ce cas. Quitte à décomposer X en ses composantes connexes (ouvertes), on peut le supposer connexe. Alors, choisissant un point a de X, le A-faisceau F correspond à une représentation continue de $\pi_1(X,a)$ dans un A_d–module de type fini S. Le groupe $\pi_1(X,a)$ opérant par un quotient fini G sur S, il existe un épimorphisme de (G, A_d)–modules

$$T \longrightarrow S \longrightarrow 0,$$

avec T un $\hat{A}(G)$–module libre de type fini, qui peut être aussi considéré comme un $(\pi_1(X,a), \hat{A})$–module continu. L'assertion en résulte grâce à

(1.20.5), puisque le A-faisceau constant tordu correspondant à T est localement libre. On remarquera que dans cette partie on n'a pas utilisé que A est de valuation discrète.

b) Montrons maintenant l'assertion dans le cas où F est associé à un A_d–Module constructible. D'après (SGA4 IX 2.14.(ii)), il existe une famille finie

$$(p_i : X_i \longrightarrow X)_{i\in I}$$

de morphismes finis, pou tout i un A_d–Module constant C_i sur X_i, et un monomorphisme

$$F \xrightarrow{\lambda} \prod_i (p_i)_*(C_i).$$

Or, d'après a), il existe des épimorphismes de A-faisceaux $P_i \longrightarrow C_i \longrightarrow 0$, avec P_i constructible et plat, d'où un épimorphisme

$$\prod_i (p_i)_*(P_i) \xrightarrow{\mu} \prod_i (p_i)_*(C_i) \longrightarrow 0,$$

dont la source est un A-faisceau constructible et sans torsion, donc plat. Considérons alors un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \prod_i (p_i)_*(P_i) \arrow[d, "\mu"] \\ F \arrow[r, "\lambda"] & \prod_i (p_i)_*(C_i). \end{tikzcd}$$

Des arguments catégoriques généraux montrent que α est un monomorphisme et β un épimorphisme; de plus, P est constructible, et plat puisque α est un monomorphisme. On remarquera qu'on a seulement utilisé que X est localement noethérien, et que l'argument montre plus généralement que, sans hypothèse sur A, F est quotient d'un A-faisceau constructible et sans torsion.

c) Passons au cas général. La catégorie $A-\mathrm{fscn}(X)$ (resp. $-\mathrm{fsct}(X)$) est noethérien (1.5.(iii) resp. 1.17.(iii)); par suite, u désignant une uniformisante locale de A, la famille de sous-A-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles)

$$u^{n^{F=\mathrm{Ker}(F\xrightarrow{u^n}F)}}$$

admet un plus grand élément, soit u^{d^F}, dans $A - \mathrm{fsc}(X)$. Le A-faisceau $M = u^d F$ est sans torsion et $F/u^d F$ est isomorphe au A-faisceau associé à un $(A/u^d A)$–Module constructible (resp. localement constant constructible). D'après b) (resp a)), il existe un épimorphisme

$$\gamma : P \longrightarrow F/u^d F,$$

avec F un A-faisceau constructible et plat (resp. localement libre constructible). Désignant par L le produit fibré de P et F au-dessus de $F/u^d F$, le diagramme commutatif exact évident

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\ & & {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & {\scriptstyle \delta}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & F & \longrightarrow & F/u^d F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que δ est un épimorphisme et que L, extension de deux A-faisceaux constructibles et plats (resp. localement libres constructibles) est lui-même plat (resp. localement libre constructible).

2. Conditions de finitude dans les catégories dérivées.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **2.1**. — *On dit qu'un complexe E de A-faisceaux sur X est* à cohomologie constructible *(resp.* constante tordue constructible*) si tous ses objets de cohomologie sont des A-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles).*

La sous-catégorie $A - \mathrm{fscn}(X)$ étant exacte dans $A - \mathrm{fsc}(X)$ (1.5.(iii)), les sous-catégories plaines

$$\mathrm{K}^*_c(X,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}^*_c(X,A) \quad (* = \varnothing, +- \text{ ou } b)$$

de $\mathrm{K}^*(X,A)$ et $\mathrm{D}^*(X,A)$ respectivement engendrées par les complexes à cohomologie constructible sont des sus-catégories triangulées; de plus, $\mathrm{D}^*_c(X,A)$ s'obtient par inversion des quasi-isomorphismes à partir de $\mathrm{K}^*_c(X,A)$. De même, on définit des catégories triangulées

$$\mathrm{K}^*_t(X,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}^*_t(X,A) \quad (* = \varnothing, +- \text{ ou } b)$$

à partir des complexes à cohomologie constants tordue constructible et $\mathrm{D}_t^*(X,A)$ s'obtient à partir de $\mathrm{K}_t^*(X,A)$ en inversant les quasi-isomorphismes.

Définition **2.2**. — *On dit qu'un complexe E de A-faisceaux sur X est* pseudo-cohérent *s'il est à cohomologie localement bornée supérieurement et constante tordu constructible. On dit qu'il est* parfait *si de plus il est localement de tor-dimension finie.*

Comme $A-\mathrm{fsct}(X)$ est une sous-catégorie exacte de $A-\mathrm{fsc}(X)$, il est clair que les sous-catégories pleines

$$\mathrm{K}_{\mathrm{coh}}(X,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{K}_{\mathrm{parf}}(X,A)$$

de $\mathrm{K}(X,A)$ engendrées respectivement par les complexes pseudocohérents et parfaits sont des sous-catégories triangulées vérifiant les inclusions

$$\mathrm{K}_{\mathrm{parf}}(X,A) \subset \mathrm{K}_{\mathrm{coh}}(X,A) \subset \mathrm{K}_t(X,A).$$

On définit de même des catégories triangulées

$$\mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A)$$

vérifiant les inclusions

$$\mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A) \subset \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A) \subset \mathrm{D}_t(X,A).$$

De plus la catégorie $\mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A)$) est obtenue à partir de $\mathrm{K}_{\mathrm{parf}}(X,A)$ (resp. $\mathrm{K}_{\mathrm{coh}}(X,A)$) par inversion des quasi-isomorphismes. Enfin, on utilisera également les notations

$$\mathrm{D}^b_{\mathrm{parf}}(X,A) = (\mathrm{D}^b_t(X,A))_{\mathrm{torf}}$$
$$\mathrm{D}^b_{\mathrm{coh}}(X,A) = (\mathrm{D}^b_t(X,A)).$$

Avant de poursuivre, nous allons expliciter certaines de ces notions dan le cas où X est le topos ponctuel. Dans ce cas, le foncteur additif

$$M \mapsto (M/J^{n+1}M)_{n\in\mathbf{N}}$$

de la catégorie des $\hat{A}$–modules de type fini dans $A-\mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$ est exact et permet donc de définir par prolongement aux complexes un foncteur exact

$$\mathrm{D}^b(\hat{A}-\mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathrm{pt},A). \tag{2.3.1}$$

De plus, comme tout complexe parfait de $\hat{A}$–modules est équivalent à un complexe borné de $\hat{A}$–modules projectifs de type fini, le foncteur (2.3.1) induit un foncteur exact

$$\mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(\hat{A} - \mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(\mathrm{pt}, A). \tag{2.3.2}$$

Proposition **2.3**. — *Les foncteurs*

$$\mathrm{D}^b(\hat{A} - \mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}^b_c(\mathrm{pt}, A) \tag{2.3.1}$$

$$\mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(\hat{A} - \mathrm{modn}) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(\mathrm{pt}, A) \tag{2.3.1}$$

ci-dessus sont des équivalences de catégories.

Preuve : Comme le foncteur (2.3.1) commute évidemment au produit tensoriel et est conservatif, il est clair qu'un complexe dont l'image par (2.3.1) est de tor-dimension finie est lui-même de tor-dimension finie. Il nous suffit donc de montrer que (2.3.1) est une équivalence. Notons pour cela U la sous-catégorie pleine de $\mathrm{K}^b_c(\mathrm{pt}, A)$ engendrée par les complexes bornés à cohomologie constructible et dont les composants sont essentiellement stricts, i.e. vérifiant la condition de Mittag-Leffler. Comme la catégorie $\hat{A} - \mathrm{modn}$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de $A - \mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$, il est clair qu'on a une suite de foncteurs d'"inclusion"

$$\mathrm{K}^b(\hat{A} - \mathrm{modn}) \xrightarrow{p} U \xrightarrow{q} \mathrm{K}^b_c(\mathrm{pt}, A).$$

Nous allons voir successivement que lorsqu'on inverse les quasi-isomorphismes, les foncteurs p et q deviennent des équivalences. Pour le voir pour p, il suffit (CD I 4.2.(b)) de montrer qu'étant donné un objet E de U, il existe un quasi-isomorphisme

$$M \longrightarrow E,$$

avec M un objet de $\mathrm{K}^b(\hat{A} - \mathrm{modn})$. Appliquant (EGA 0_{III} 11.9.1), on est ramené à montrer qu'étant donnés un objet F de $A - \mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$ vérifiant la condition de Mittag-Leffler et un épimorphisme de A-faisceaux

$$F \xrightarrow{u} P \longrightarrow 0,$$

avec P un $\hat{A}$–module de type fini, il existe un $\hat{A}$–module de type fini Q et un morphisme $v : Q \longrightarrow F$ tels que le composé uv soit un épimorphisme. Quitte à remplacer $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par le système projectif strict associé, on peut supposer qu'il est strict. Alors, les morphismes de $\hat{A}$–modules canoniques

$$\varprojlim(F) \longrightarrow F_n \quad (n \in \mathbf{N})$$

sont des épimorphismes. Choisissons alors un sous-$\hat{A}$–module de type fini Q de $\varprojlim(F)$ tel que la projection $Q \longrightarrow F_0$ soit un épimorphisme. Alors le morphisme composé $Q \longrightarrow P$ induit un épimorphisme $Q/JQ \longrightarrow P/JP$, donc est un épimorphisme d'après le lemme de Nakayama. Montrons maintenant que le foncteur q induit une équivalence après inversion des quasi-isomorphismes. Étant donné un objet K de $\mathrm{K}_c^b(\mathrm{pt},A)$, on sait (I 6.6.3) qu'il existe un quasi-isomorphisme

$$[?]L$$

où L est un complexe borné inférieurement et dont les composants sont directement stricts, donc vérifient la condition de Mittag-Leffler. Nous allons voir que, quitte à tronquer L, on peut le remplacer par un complexe borné et dont les composants vérifient la condition de Mittag-Leffler, ce qui achèvera la démonstration d'après (CD I 4.2. (c) et (d)). Si p est un entier tel que $K^q = 0$ $(q \geq p)$, le morphisme w_p se factorise $\mathrm{Ker}(d_L^p)$, et, quitte à tronquer L au degré p, il nous suffit de voir que $\mathrm{Ker}(d_L^p)$ vérifie la condition de Mittag-Leffler, ce qui est immédiat puisqu'il est isomorphe dans $A-\mathrm{fsc}(\mathrm{pt})$ au système projectif $\mathrm{Im}(L^{p-1})$, lui-même quotient du système projectif strict L^{p-1}.

Proposition **2.4**. — *Le bifoncteur dérivé du produit tensoriel induit des bifoncteurs*

(i) $\mathrm{D}_\lambda^-(X,A) \times \mathrm{D}_\lambda^-(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}_\lambda^-(X,A) \quad (\lambda = c, \infty, t)$.

(ii) $\mathrm{D}_\lambda^b(X,A)_{\mathrm{torf}} \times \mathrm{D}_\lambda^+(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}_\lambda^+(X,A) \quad (\lambda = c, \infty, t)$.

(iii) $\mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A) \times \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{coh}}(X,A)$.

(iv) $\mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A) \times \mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}_{\mathrm{parf}}(X,A)$.

Si de plus l'anneau A est local régulier d'idéal maximal J, le bifoncteur (I 7.2.4) induit des bifoncteurs

(v) $\mathrm{D}^*_\lambda(X,A)\times\mathrm{D}^*_\lambda(X,A)\longrightarrow\mathrm{D}^*_\lambda(X,A)$, *avec* $*=b$ *ou* $+$, *et* $\lambda=c$ *ou* t.

Preuve : Notons respectivement E et F les complexes à droite et à gauche dans le premier membre. Pour (i), (iii) et (v), on se ramène au moyen du "way-out functor lemma" (H I 7.1) au cas où E et sont réduits au degré 0, et alors on conclut par (1.24.(i)). Pour (ii), on se ramène par qay-out functor lemma au cas où F est borné et alors, compte tenu de ce que E est detor-dimension finie, l'assertion est conséquence de (i). Enfin, la partie (iv) résulte de (iii) et du fait que le produit tensoriel dérivé de deux complexes de tor-dimension finie est lui-même de tor-dimension finie.

Proposition **2.5**. — *Le bifoncteur* $\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A$ *induit des bifoncteurs*

(i) $(\mathrm{D}^-_t(X,A))^\bullet\times\mathrm{D}^+_\lambda(X,A)\longrightarrow\mathrm{D}^+_\lambda(X,A)\quad(\lambda=c$ *ou* $t)$.

Lorsque A est local régulier d'idéal maximal J, il induit des bifoncteurs exacts

(ii) $(\mathrm{D}^b_t(X,A))^\bullet\times\mathrm{D}^b_\lambda(X,A)\longrightarrow\mathrm{D}^b_\lambda(X,A)\quad(\lambda=\varnothing,c$ *ou* $t)$.

Enfin, supposons que pour toute A-algèbre de type fini B annulée par une puissance de J, et tout couple (M,N) *de B–Modules constructibles, les B–Modules* $\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_B\,(M,N)$ $(p\in\mathbf{N})$ *soient constructibles. Alors, le bifoncteur* $\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A$ *induit un bifoncteur*

(iii) $(\mathrm{D}^-_c(X,A))^\bullet\times\mathrm{D}^+_c(X,A)\longrightarrow\mathrm{D}^+_c(X,A)$.

Preuve : Soient $E\in\mathrm{D}^-(X,A)$ et $F\in D^+(X,A)$. Pour voir (i), on se ramène par le way-out functor lemma au cas où E et F sont réduits au degré 0, et alors l'assertion résulte de (1.26. (i) et (ii)). L'assertion (ii) se déduit sans peine de (i) et (1.26.(iii)). Enfin, l'assertion (iii) se voit de même que (i), en utilisant cette fois (1.26.(iv)).

Proposition **2.6**. — *Soient* $K\in\mathrm{D}^-_c(X,A)$, $L\in\mathrm{D}^-(X,A)$ *et* $M\in\mathrm{D}^+(X,A)$. *Alors, le morphisme de Cartan*

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K\underline{\otimes}_A L,M)\longrightarrow\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K,\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(L,M))\tag{I7.6.2}$$

est un isomorphisme. *Si de plus X est noethérien, les morphismes*

$$(I7.6.3) \qquad \mathbf{R}\overline{\mathrm{Hom}}_A(K\underline{\otimes}_A L, M) \longrightarrow \mathbf{R}\overline{\mathrm{Hom}}_A(K, \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(L,M))$$

$$(I7.6.4) \qquad \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(K\underline{\otimes}_A L, M) \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathrm{Hom}_A(K, \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(L,M))$$

$$(I7.6.5) \qquad \mathrm{Hom}_A(K\underline{\otimes}_A L, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(K, \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(L,M))$$

sont aussi des isomorphismes.

Preuve : La définition des trois derniers morphismes à partir du premier au moyen de (I 7.4.18) montre qu'il suffit de voir que (I 7.6.2) est un isomorphisme. On peut pour cela supposer L quasilibre et M flasque. Ceci dit, les foncteurs exacts

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K\underline{\otimes}_A L, .) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K, \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(L, .))$$

de $\mathrm{D}^+(X,A)$ dans $\mathrm{D}^+(X,A)$ possèdent la propriété de "décalage à droite" ([H] I 7), ce qui permet de se ramener au cas où M est de plus réduit au degré 0. Dans ce cas, fixant K et M, les foncteurs exacts

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K\underline{\otimes}_A ., M) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(K, \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,().,M)$$

possèdent également la propriété de dácalage à droite, ce qui permet de se ramener au cas où de plus L est réduit au degré 0. Enfin, un dernier argument de décalage permet de supposer que K est réduit au degré 0 et que K^0 est un A-faisceau constructible. Pour montrer l'assertion dans ce dernier cas, on peut, quitte à localiser, supposer X noethérien. Alors, il est immédiat que K est quasi-isomorphe à un complexe quasilibre borné supérieurement, tel que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, le A-faisceau K^n ait ses composants constructibles. Finalement, on peut supposer K et L réduits au degré 0, quasilibres, que K^0 a des composants constructibles et que L est flasque. Alors, il résulte de (I 6.3.8) que le morphisme de complexes (I 7.6.1) est un isomorphisme, d'où l'assertion.

Proposition **2.7**. — *Soient* $E \in \mathrm{D}^{-}_{\mathrm{parf}}(X,A)$, $F \in \mathrm{D}^{+}(X,A)$ *et* $G \in \mathrm{D}(X,A)$. *Le morphisme*

$$(I7.6.9.2) \qquad m : \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(E,F)\underline{\otimes}_A G \longrightarrow \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(E,F\underline{\otimes}_A G)$$

est un isomorphisme *dans chacun des cas suivants:*

(i) L'anneau A *est local régulier d'idéal maximal* J, *et* $G \in \mathrm{D}^{+}(X,A)$.

(ii) $F \in \mathrm{D}^{b}_{c}(X,A)$ *et* $G \in \mathrm{D}^{-}_{c}(X,A)_{\mathrm{torf}}$.

Preuve : Plaçons-nous d'abord dans le cas (i). Par dévissage, on se ramène au cas où F et G sont bornés. Alors les deux membres sont à cohomologie bornée supérieurement (2.5.(ii)). Notant alors $u : A \longrightarrow A/J$ le morphisme d'anneaux canonique, il nous suffit (I 8.2.2) de montrer que $\mathbf{L}\,u^{*}(m)$ est un isomorphisme. Utilisant (I 8.1.11.(ii) et (iv)), on voit qu'on peut remplacer A par A/J. En effet, le complexe $\mathbf{L}\,u^{*}(E)$ est de tor-dimension finie (I 8.1.11.(i)) et il est immédiat que sa cohomologie est constante tordue constructible (nous reviendrons d'ailleurs plus loin sur ce point). Ceci dit, on peut supposer X quasicompact; alors, l'équivalence (I 8.2.6) permet de se ramener à l'assertion analogue dans la catégorie des (A/J)–Modules (SGA6 I 7.6). Dans l'hypothèse (ii), la cohomologie des deux membres est constructible, ce qui (1.12.4) de vérifier l'assertion sur les fibres. Utilisant (I 6.4.2), on est ainsi ramené au cas où X est le topos ponctuel. Mais alors, grâce à (2.3), c'est une conséquence immédiate de l'assertion analogue pour les $\hat{A}$–modules de type fini.

Pour énoncer le corollaire suivant, on posera pour tout E appartenant à $D^{-}_{\mathrm{parf}}(X,A)$

$$E^{v} = \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A\,(E,A).$$

Il est clair que lorsque A est local régulier d'idéal maximal J, on a

$$E \in \mathrm{D}^{+}_{\mathrm{parf}}(X,A),$$

mais j'ignore si c'est vrai sans hypothèse sur l'anneau A.

Corollaire **2.8**. — *Soient* $E \in \mathrm{D}^{-}_{\mathrm{parf}}(X,A)$ *et* $F \in \mathrm{D}^{+}(X,A)$. *Le morphisme canonique*

$$m : [?]$$

est un isomorphisme lorsque A est local régulier d'idéal maximal J, ou lorsque $F \in \mathrm{D}^b_c(X,A)_{\mathrm{torf}}$. C'est le cas en particulier lorsque $E \in \mathrm{D}^-_{\mathrm{parf}}(X,A)$ et $F \in \mathrm{D}^b_{\mathrm{parf}}(X,A)$, de sorte que le complexe

$$\mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)$$

est parfait *lorsque de plus A est local régulier d'idéal maximal J.*

2.9.

Proposition **2.9.2.** —

Preuve :

2.10.

Proposition **2.10.2.** —

Preuve :

Proposition **2.10.3.** —

Preuve :

Proposition **2.10.5.** —

Preuve :

2.11. Trace et cup-produit.

Proposition **2.11.3.** —

Preuve :

2.12.

Proposition **2.12.1.** —

Preuve :

Proposition **2.12.2.** —

Preuve :

Proposition **2.12.3.** —

Preuve :

2.13. Changement d'anneau. Soient X un topos localement noethérien, A et B deux anneaux commutatifs unifères noethériens, J et K deux idéaux de A et B respectivement et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux unifères, tel que $u(J) \subset K$. On utilise par ailleurs librement les notations de (I 8.1).

Proposition **2.13.1.** —

Preuve :

Théorème **2.13.2.** —

Preuve :

Lemme **2.13.3.** —

Lemme **2.13.4.** —

Lemme **2.13.5.** —

Lemme **2.13.6.** —

Remarques 2.13.7.

Proposition **2.13.9.** —

Preuve :

Remarques 2.13.10.

Proposition **2.14.** —

Preuve :

Remarques 2.15. Comme pour (2.13.2), l'hypothèse (i) a servi uniquement pour assurer que le complexe $\mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)$ est à cohomologie constructible. Elle est donc inutile en particulier dans la cas où $E \in \mathrm{D}_t^-(X,A)$.

§ III. — APPLICATIONS AUX SCHÉMAS

Le texte qui suit ayant un caractère essentiellement provisoire (cf. l'appendice basé sur une construction de *Deligne*), nous ferons toutes les hypothèses simplificatrices qui nous paraîtront nécessaires pour la clarté de l'exposé.

Soit ℓ un nombre premier. On fixe comme précédemment un anneau noethérien A et un idéal propre J de A. On suppose de plus que A est une $\mathbf{Z}_\ell$-algèbre et que J contient ℓA. Pour simplifier (cf. supra), tous les schémas considérés sont *noethériens*.

1. Opérations externes.

1.1. Soient X et Y deux schémas noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. On définit comme suit un foncteur exact

$$\mathbf{R} f_! : \mathrm{D}(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}(Y,A), \tag{1.1.1}$$

appelé *image directe à supports propres*. D'après Nagata et Mumford il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

où i est une immersion ouverte et q un morphisme propre. On pose alors

$$\mathbf{R} f_! = \mathbf{R} q_* \circ \mathbf{R} i_!.$$

On vérifie, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum* (SGA4 XVIII), que le résultat ne dépend pas, à isomorphisme près, de la factorisation choisie.

La même technique de factorisation montre que si $g : Y \longrightarrow Z$ est un autre morphisme séparé de type fini, on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}(g\circ f)_! \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\, g_! \circ \mathbf{R} f_!, \tag{1.1.2}$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de morphismes.

Définition **1.1.3**. — *Si E est un A-faisceau sur X (resp. un objet de* $\mathrm{D}(X,A)$*), on pose pour tout $p\in\mathbf{Z}$*

$$\mathrm{R}^p f_!(E) = \mathrm{H}^p(\mathbf{R} f_!(E)).$$

On obtient ainsi un foncteur cohomologique qui n'est pas en général (sauf bien sûr si le morphisme f est propre) le foncteur cohomologique dérivé de $\mathrm{R}^\circ f_!$.

1.1.4. Il est clair que si $F=(F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un A-faisceau, on a pour tout $p\in\mathbf{Z}$

$$\mathrm{R}^p f_!(F) = (\mathrm{R}^p f_!(F_n))_{n\in\mathbf{N}}.$$

Proposition **1.1.5**. — *Soit*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

un carré cartésien de schéma noethériens.

*(i) (***Théorème de changement de base propre***) Si f (donc f') est séparé de type fini, on a pour tout $E\in$* $\mathrm{D}^+(X,A)$ *un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^*\mathbf{R} f_!(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f'_!(g')^*(E).$$

*(ii) (***Théorème de changement de base lisse***) Si ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y et g est lisse, on a pour tout $E\in$* $\mathrm{D}^+(X,A)$ *un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^*\mathbf{R} f_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}(f')_*(g')^*(E).$$

Preuve : Montrons (ii). Utilisant l'adjonction entre image directe et image réciproque (I 7.7.6), on construit comme dans (SGA4 XVII) (voir aussi SGA4 XII 4), un morphisme fonctoriel

$$g^* \mathbf{R} f_*(E) \longrightarrow \mathbf{R}(f')_*(g')^*(E).$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, on se ramène par "way-out functor lemma" au cas où E est de degré 0, et il suffit alors de montrer que les morphismes

$$g^* \mathrm{R}^i f_*(E) \longrightarrow \mathrm{R}^i(f')_*(g')^*(E) \quad (i \in \mathbf{N})$$

correspondants de $\mathscr{E}(X,J)$ sont des isomorphismes. Cela se voit sur les composants, grâce au théorème de changement de base lisse sur les A_n–Modules (SGA4 XII 1.1). Montrons (i). On construit tout d'abord un morphisme fonctoriel

$$g^* \mathbf{R} f_!(E) \longrightarrow \mathbf{R}(f')_!(g')^*(E),$$

en paraphrasant la construction faite pour les A_n–Modules (SGA4 XVII). Pour cela, choisissant une factorisation $f = q \circ i$, avec i une immersion ouverte et q un morphisme propre, on se ramène à faire la construction lorsque f est propre, ou bien est une immersion ouverte; on vérifie ensuite de açon standard que le résultat ne dépend pas de la factorisation choisie. Lorsque f est une immersion ouverte, les morphismes analogues pour les A_n–Modules ($n \in \mathbf{N}$) définissent de façon évidente un isomorphisme $g^* f_! \xrightarrow{\sim} (f')_!(g')^*$ de foncteurs exacts

$$\mathscr{E}(X,J) \longrightarrow \mathscr{E}(Y',J),$$

d'où par passage au quotient, un isomorphisme de foncteurs exacts

$$A - \mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(Y'),$$

qui fournit à son tour un isomorphisme de foncteurs exacts

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D}(X,A) \arrow[r, bend left, "g^* \circ f_!"{name=U}] \arrow[r, bend right, "(f')_! \circ (g')^*"'{name=D}] & \mathrm{D}(Y',A). \arrow[from=U, to=D, phantom, "\downarrow\sim"] \end{tikzcd}$$

Lorsque f est un morphisme propre, on utilise la même construction que pour (ii). Pour montrer enfin que le morphisme (1.1.6) ainsi construit est un isomorphisme, on se ramène au cas où E est de degré 0, et alors l'assertion résulte, comme pour (ii), de l'assertion analogue pour les A_n–Modules (SGA4 XVII).

Proposition **1.1.7** (Formule de projection). — *Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens, $E \in \mathrm{D}^{-}(X,A)$ et $F \in \mathrm{D}^{-}(X,A)$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} f^*(F)) \xleftarrow{\sim} \mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} F.$$

Preuve : Nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme **1.1.8**. — *Si d est un entier majorant la dimension des fibres de f, on a pour tout A-faisceau M sur X*

$$\mathrm{R}^i f_!(M) = 0 \quad (i > 2d).$$

(Résulte immédiatement de l'assertion analogue pour les composants de M).

Choisissant une campactification de f, on se ramène à montrer (1.1.7) successivement lorsque f est une immersion ouverte, ou un morphisme propre. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 7.7.10.(iv)). Dans le second cas, on définit un morphisme

$$\mathbf{R} f_*(E) \underline{\otimes} F \longrightarrow \mathbf{R} f_*(E \underline{\otimes} f^* F)$$

sur le modèle de (J.L. Verdier: The Lefschetz fixed point formula in étale cohmology, in "Conference on local fiels held at Drieberger" preuve de 3.2), en se ramenant à F plat et E f_*-acyclique (ce qui est possible grâce à 1.1.8). Enfin, pour voir que (1.1.9) est un isomorphisme, on se ramène par les dévissages habituels au cas où E et F sont réduits au degré 0 et F plat, et alors l'assertion résulte de la formule de projection pour les A_n–Modules ($n \in \mathbf{N}$), appliquée aux composants de E et F.

Proposition **1.1.10** (Formule de Künneth). — *Considérons un diagramme* *cartésien de schémas noethériens*

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Z Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd},$$

et posons $h = f \circ p = g \circ q$. Si $E \in \mathrm{D}^-(X, A)$ et $F \in D^-(Y, A)$, on a un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} h_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F).$$

Preuve : Formellement la même que celle de l'assertion correspondante pour les faisceaux de A_n–Modules ($n \in \mathbf{N}$) (SGA4 XVII). De (1.1.7) appliqué à f, on déduit un isomorphisme

(1.1.10.1) $$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} f^* \mathbf{R} g_!(F)).$$

Le théorème de changement de base propre pour f (1.1.5.(i)) montre que

(1.1.10.2) $$f^* \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} p_! q^*(F).$$

Comparant avec (1.1.10.1), on a donc

$$\mathbf{R} f_!(E) \underline{\otimes} \mathbf{R} g_!(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F)).$$

La formule de projection (1.1.7) pour le morphism p montre que

$$E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} p_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F),$$

d'où

$$\mathbf{R} f_!(E \underline{\otimes} \mathbf{R} p_! q^*(F)) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} f_! \mathbf{R} p_!(p^* E \underline{\otimes} q^* F),$$

et le résultat annoncé puisque $f \circ p = h$.

Proposition **1.1.11.** — *Soient X et Y deux schémas noethériens, $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini, et $E \in \mathrm{D}(X, A)$.*

(i) *Si* $E \in \mathrm{D}_c(X,A)$*, alors* $\mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_c(Y,A)$.

(ii) *Si* $E \in \mathrm{D}^-(X,A)_{torf}$*, alors* $\mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}^-(Y,A)_{torf}$.

(iii) *Supposons que* f *soit propre et lisse, et que* ℓ *soit premier aux caractéristiques résiduelles de* Y*. Alors:*

$$E \in \mathrm{D}_t(X,A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_t(Y,A).$$

$$E \in \mathrm{D}_{parf}(X,A) \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{R}f_!(E) \in \mathrm{D}_{parf}(Y,A).$$

Preuve : Montrons (i). Grâce à (1.1.8), on peut supposer E de degré 0 associé à un A-faisceau J-adique constructible. Alors, l'assertion est essentiellement (SGA5 VI 2.2.2). Pour la première partie de (iii), on est ramène de même à voir que si E est un A-faisceau J-adique constant tordu constructible, les A-faisceaux $\mathrm{R}^p f_*(E)$ ($p \in \mathbf{N}$) sont constants tordus constructibles. Cela se voit comme (SGA5 V 2.2.2), en utilisant le lemme de SHIH (SGA5 V A 3.2) et la stabilité des catégories des faisceaux abéliens localement constants constructibles par images directes supérieures (SGA4 XVI 2.2). L'assertion (ii) résulte sans peine de (1.1.7), et on en déduit aussitôt la deuxième partie de (iii) (compte tenu de la première).

1.2. Soient X et Y deux schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample. On définit alors comme suit un foncteur exact

$$\mathbf{R}f^! : \mathrm{D}^+(Y,A) \longrightarrow \mathrm{D}^+(X,A). \tag{1.2.1}$$

D'après (EGA II 5.3.3), il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & P^r_Y \arrow[dl, "q"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

avec j une immersion. On en déduit aussitôt une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & U \arrow[dl, "p"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

où i est une immersion fermée et p un morphisme lisse équidimensionel de dimension r. Avec les notations de (SGA5 VI 1.3.4), on pose alors pour tout $F \in \mathrm{D}^+(X,A)$

$$\mathbf{R} f^!(F) = \mathbf{R} i^!(p^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r))[2r],$$

où le foncteur $\mathbf{R} i^!$ a été défini en (I 7.7.11). Pour avoir que cette définition ne dépend pas, à isomorphisme près, des choix faits, on est ramené, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum*, à prouver le théorème de *pureté cohomologique* suivant.

Proposition **1.2.3**. — *Soient S, X, Y trois schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "j"] \arrow[dr, "g"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

un S-couple lisse (SGA4 XVI 3.1) purement de codimension d. Pour tout $F \in$ $\mathrm{D}^+(S,A)$, *on a un isomorphisme canonique fonctoriel (classe fondamentale locale)*

(1.2.3.1) $$\mathbf{R} j^!(f^* F) \xleftarrow{\ \sim\ } g^*(F) \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d].$$

Preuve : Par (I 7.7.12), il s'agit de définir un morphisme

$$\mathbf{R} j_*(g^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d]) \longrightarrow f^* F,$$

soit, d'après la formule de projection (I 7.7.12 (iv)),

$$f^* F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{R} j_*(\mathbf{Z}_\ell(-d)[-2d]) \longrightarrow f^* F.$$

On est ainsi ramené à définir (1.2.3.1) dans le cas où $A = \mathbf{Z}_\ell = F$. Il s'agit alors d'exhiber un morphisme

$$\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \mathbf{R} j^!(\mathbf{Z}_\ell(d))[2d].$$

Mais on sait, d'après l'assertion analogue (SGA4 VI 3) pour les composantes, que

$$\mathrm{R}^S j^!(\mathbf{Z}_\ell(d)) = 0 \quad \text{pour } s < 2d,$$

de sorte qu'il suffit d'exhiber un morphisme de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux

$$\mathbf{Z}_\ell \longrightarrow \mathrm{R}^{2d} j^!(\mathbf{Z}_\ell(d)).$$

On prend le système projectif des morphismes classes fondamentales correspondants

$$\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z} \longrightarrow \mathrm{R}^{2d} j^!(\mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes d}).$$

Enfin, pour voir que (1.2.3.1) est un isomorphisme, on peut supposer que F est réduit au degré 0, associé à un A-faisceau noté de même. Alors, l'assertion résulte du théorème de pureté cohomologique pour les A_n–Modules ($n \in \mathbf{N}$), appliqué aux composants de F.

Notation 1.2.4. Si F est un A-faisceau sur Y (resp. un objet de $\mathrm{D}^+(Y,A)$), on pose pour tout $p \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{R}^p f^!(F) = \mathrm{H}^p(\mathbf{R} f^! F).$$

1.2.5. Si X, Y, Z sont trois schémas noethériens admettant des Modules inversibles amples, et $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux morphismes quasiprojectifs, on a un isomorphisme

$$\mathbf{R}(g \circ f)^! \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} g^! \circ \mathbf{R} f^!,$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de tels morphismes.

Cela se voit, comme dans le cas usuel des faisceaux abéliens de torsion, par la méthode de factorisation de Lichtenbaum.

Proposition **1.2.5** (Formule d'induction). — *Sous les hypothèses préliminaires de (1.2), soient $E \in \mathrm{D}_c^-(Y,A)$ et $F \in \mathrm{D}^+(X,A)$. On a un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f^*E, \mathbf{R} f^! F).$$

Preuve : Si f est une immersion fermée, on a (I 7.7.13) un isomorphisme

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} f^* \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f_*A, \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)),$$

soit, d'après l'isomorphisme de Cartan (E et f_*A sont à cohomologie constructible)

$$\mathbf{R} f^! \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \xrightarrow{\sim} f^* \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E, \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f_*A,F)).$$

Utilisant à nouveau (I 7.7.3), on a

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\xrightarrow{\sim} f^*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,f^*\mathbf{R}f^!F),$$

d'où, d'après l'adjonction entre f^* et f_* (I 7.7.6)

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \xrightarrow{\quad\sim\quad} f^*f_*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F)$$

$$\xrightarrow{\quad\sim\quad} \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

Lorsque f est lisse et équidimensionnel de dimension r, on a

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\xrightarrow{\sim} f^*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell}\mathbf{Z}_\ell(r)[2r];$$

de (I 7.7.2 (ii)), on déduit alors aussitôt un morphisme “canonique”

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

Pour voir que c'est un isomorphisme, on peut supposer que E et F sont réduits au degré 0 et que $\mathrm{H}^0(E)$ est un A-faisceau constructible. Il s'agit alors de voir que les morphismes canoniques

$$(I6.4.1.1) \qquad f^*\mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(E,F)\longrightarrow \mathscr{E}\mathrm{xt}^p_A(f^*E,f^*F)$$

sont des isomorphismes; vu leur définition, cela est conséquence immédiate de l'assertion analogue pour les A_n–Modules (SGA4 XVIII). Enfin, dans le cas général, on choisit une factorisation $f=p\circ i$ du type (1.2.2). Des deux cas précédents, on déduit des isomorphismes

$$\mathbf{R}f^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}p^i\mathbf{R}i^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}p^!\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(i^*E,\mathbf{R}i^!F)$$
$$\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(p^*i^*E,\mathbf{R}p^!\mathbf{R}i^!F)\xrightarrow{\sim}\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(f^*E,\mathbf{R}f^!F).$$

On assure ensuite, comme d'habitude, que l'isomorphisme composé ne dépend pas de la factorisation choisie.

1.3. Soient $u:A\longrightarrow B$ une A-algèbre et K un idéal de B tel que $u(J)\subset K$. On utilise dans l'énoncé suivant les notations de (I 8).

Proposition **1.3.1.** — *Soit $f:X\longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens.*

1) Soit $E \in \mathrm{D}(X,A)$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{L}\,u^{*}\,\mathbf{R}\,f_{!}(E) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,f_{!}\,\mathbf{L}\,u^{*}(E),$$

lorsque $E \in \mathrm{D}^{-}(X,A)$, ou lorsque A est local régulier et J est son idéal maximal.

2) Plaçons-nous maintenant dans le cas où Y admet un Module inversible ample. On suppose de plus que ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y, que l'anneau A est local régulier et que J est son idéal maximal. Alors pour tout $F \in \mathrm{D}^{+}(Y,A)$, on a un morphisme canonique fonctoriel

$$\mathbf{L}\,u^{*}\,\mathbf{R}\,f^{!}(F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,f^{!}\,\mathbf{L}\,u^{*}(F),$$

qui est un isomorphisme *lorsque B est une A-algèbre finie et $K = JB$.*

Preuve : Montrons 1), et définissons d'abord un morphisme

$$\mathbf{L}\,u^{*}\,\mathbf{R}\,f_{!}(E) \longrightarrow \mathbf{R}\,f_{!}\,\mathbf{R}\,u^{*}(E). \tag{1.3.1.1}$$

D'après (I. 8.1.6), il suffit dans chacun des cas considérés de définir un morphisme

$$\mathbf{R}\,f_{!}(E) \longrightarrow u_{*}\,\mathbf{R}\,f_{!}\,\mathbf{L}\,u^{*}(E). \tag{1.3.1.2}$$

Mais il est immédiat que $u_{*}\,\mathbf{R}\,f_{!} \simeq \mathbf{R}\,f_{!}u_{*}$, de sorte que l'on définit (1.3.1.2) en appliquant le foncteur $\mathbf{R}\,f_{!}$ au morphisme d'adjonction (I 8.1.7)

$$E \longrightarrow u_{*}\,\mathbf{L}\,u^{*}(E).$$

Pour voir que (1.3.1.1) est un isomorphisme, on se ramène, par le way-out functor lemme, au cas où $E \in \mathrm{D}^{-}(X,A)$. Alors, grâce à la conservativité du foncteur u_{*}, il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$B \underline{\otimes}_{A} \mathbf{R}\,f_{!}(E) \longrightarrow \mathbf{R}\,f_{!}(B \underline{\otimes}_{A} E)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (1.1.7). Montrons 2). Pour définir un morphisme

$$\mathbf{L}\,u^{*}\,\mathbf{R}\,f^{!}(F) \longrightarrow \mathbf{R}\,f^{!}\,\mathbf{L}\,u^{*}(F), \tag{1.3.1.3}$$

on se ramène encore, grâce à (I 8.1.6), à définir un morphisme

$$\mathbf{R}f^!(F) \longrightarrow u_*\mathbf{R}f^!\mathbf{L}u^*(F). \tag{1.3.1.4}$$

On a évidemment $u_*\mathbf{R}f^! \simeq \mathbf{R}f^!u_*$; on prend pour (1.3.1.4) l'image par $\mathbf{R}f^!$ du morphisme d'adjonction (I 8.1.7). Pour voir que (1.3.1.3) est un isomorphisme, on se ramène, après avoir choisi une "lissification" (1.2.2), à le faire successivement pour une immersion fermée et un morphisme lisse équidimensionnel. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 8.1.16 (iii)). Dans le second, on se ramène aussitôt à (I 8.1.16 (i)).

2. Dualité.

Dans tout ce paragraphe, tous les schémas considérés sont de caractéristique résiduelles premières à ℓ.

2.1. Soient X et Y deux schémas noethériens et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample et on se propose de définir un morphisme "trace"

$$\mathrm{Tr}_f : \mathbf{R}f_!\mathbf{R}f^! \longrightarrow \mathrm{id} \tag{2.1.1}$$

entre foncteurs de $\mathrm{D}(Y,A)$ dans $\mathrm{D}(Y,A)$.

Lorsque f est une immersion fermée, on dispose d'un tel morphisme, à savoir le morphisme d'adjonction déduit de (I 7.7.12 (i)).

Lorsque f est un morphisme lisse équidimensionnel de dimension r, il s'agit de définir pour tout $F \in \mathrm{D}(Y,A)$ un morphisme fonctoriel

$$\mathbf{R}f_!(f^*F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r)[2r]) \longrightarrow F. \tag{2.1.2}$$

Comme $A \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r)$ est localement libre constructible, on définit sur le modèle de (1.1.7), mais sans hypothèse de degré sur F, un isomorphisme de "projection"

$$\mathbf{R}f_!(\mathbf{Z}_\ell(r))[2r] \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} F \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}f_!(f^*F \underline{\otimes}_{\mathbf{Z}_\ell} \mathbf{Z}_\ell(r))[2r],$$

ce qui ramène à faire la construction de (2.1.2) dans le cas où $A = \mathbf{Z}_\ell = F$. Dans ce cas, comme $\mathrm{R}^i f_! = 0$ pour $i > 2d$ (1.1.8), il s'agit d'exhiber un morphisme "trace"

$$\mathrm{R}^{2r} f_!(\mathbf{Z}_\ell(r)) \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell.$$

On prend le système projectif des morphismes traces "habituels"

$$\mathrm{R}^{2r} f_!(\mu_{\ell^{n+1}}^{\otimes r}) \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z}.$$

Dans le cas général, on choisit pour définir (2.1.1) une factorisation $f = p \circ i$ du type (1.2.2). Désignant par

$$u : \mathbf{R}\, i_! \mathbf{R}\, i^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

$$v : \mathbf{R}\, p_! \mathbf{R}\, p^! \longrightarrow \mathrm{id}$$

les morphismes traces définis par les méthodes précédentes pour i et p respectivement, on définit Tr_f par la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{R} f_! \mathrm{R} f^! \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Tr}_f"'] & \mathrm{R}\, p_! \mathrm{R}\, i_! \mathrm{R}\, i^! \mathrm{R}\, p^! \arrow[d, "\mathrm{R}\, p_!(u\, \mathrm{R}\, p^!)"] \\ \mathrm{id} & \mathrm{R}\, p_! \mathrm{R}\, p^! \arrow[l, "v"] \end{tikzcd} .$$

On s'assure ensuite, de a façon habituelle, que le résultat ne dépend pas de la factorisation choisie.

2.2. Sous les hypothèses précédentes, on se propose maintenant de définir, pour $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$ et $F \in \mathrm{D}^+(Y,A)$ un morphisme "canonique" fonctoriel

(2.2.1) $$\mathbf{R} f_* \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R} f_! E, F).$$

Pour cela, nous allons d'abord définir, pour $L \in \mathrm{D}^-(X,A)$ et $M \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un morphisme fonctoriel

(2.2.2) $$\mathbf{R} f_* \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(L,M) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R} f_! L, \mathbf{R} f_! M).$$

On prendra alors pour (2.2.1) le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R} f_! E, \mathbf{R} f_! \mathbf{R} f^! F) \arrow[dr, "\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathrm{id}, \mathrm{Tr}_f)"] & \\ \mathbf{R} f_* \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \arrow[ur, "(2.2.2)"] & & \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R} f_! E, F) \end{tikzcd}$$

Il reste à définir (2.2.2). Lorsqu f est une immersion ouverte, le foncteur $f_!$ commute aux limites inductives filtrantes, et permet donc de définir pour tout couple (E,F) de A-faisceaux sur X un morphisme fonctoriel

$$f_!\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}_A(f_!E,f_!F), \tag{2.2.3}$$

à partir des morphismes analogues dans la catégorie des A–Modules. Pour définir (2.2.2) dans ce cas, on peut supposer L quasilibre et M flasque, de sorte que $\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(L,M)$ est flasque. Le morphisme (2.2.3) fournit par fonctorialité un morphisme de complexes

$$f_!\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(L,M) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(f_!L,f_!M). \tag{2.2.4}$$

Choisissant une résolution quasilibre $P \longrightarrow f_!L$ et une résolution flasque $f_!M \longrightarrow Q$, on prend pour (2.2.2) le composé de (2.2.4) et du morphisme canonique

$$\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(f_!L,f_!M) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(P,Q).$$

Lorsque f est propre, il s'agit de définir un morphisme

$$\mathbf{R}f_*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(L,M) \longrightarrow \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R}f_*L,\mathbf{R}f_*M).$$

La construction que nous allons faire de (2.2.5) vaut plus généralement pour un morphisme quasicompact et quasiséparé. Cette dernière hypothèse implique que le foncteur f_* commute aux limites inductives filtrantes, et permet donc comme précédemment de définir pour tout couple (E,F) de A-faisceaux sur X un morphisme fonctoriel

$$f_*\mathscr{H}\mathrm{om}_A(E,F) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}_A(f_*E,f_*F), \tag{2.2.6}$$

à partir des morphismes analogues dans la catégorie des A–Modules. Pour définir (2.2.5), on peut supposer L quasilibre et M flasque, de sorte que $\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(L,M)$ est flasque. Le morphisme (2.2.6) fournit par fonctorialité un morphisme de complexes

$$f_*\mathscr{H}\mathrm{om}_A(L,M) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_A(f_*L,f_*M). \tag{2.2.7}$$

On prend pour (2.2.5) le composé de (2.2.7) et du morphisme

$$\mathscr{H}\mathrm{om}^{\bullet}_{A}(f_* L, f_* M) \longrightarrow \mathscr{H}\mathrm{om}^{\bullet}_{A}(P, f_* M)$$

déduit d'une résolution quasilibre $P \longrightarrow f_* L$ de $f^* L$.

Enfin, dans le cas général, on choisit une compactification $f = q \circ i$ de f, et on définit (2.2.2) de façon évidente à partir des morphismes déjà définis pour i et q respectivement. Bien, entendu, on s'assure que le résultat ne dépend pas des choix faits, et notamment de la compactification choisie.

Proposition **2.2.8**. — *Sous les hypothèses préliminaires de (2.1), soient* $E \in \mathrm{D}^-(X, A)$ *et* $F \in \mathrm{D}^+(Y, A)$*. On a des isomorphismes canoniques fonctoriels :*

(i) $\mathbf{R} f_* \mathbf{R} \mathscr{H}\mathrm{om}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R} \mathscr{H}\mathrm{om}_A(\mathbf{R} f_! E, F)$.

(ii) $\mathbf{R}\, \overline{\mathrm{Hom}}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\, \overline{\mathrm{Hom}}_A(\mathbf{R} f_! E, F)$.

(iii) $\mathbf{R}\, \mathrm{Hom}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\, \mathrm{Hom}_A(\mathbf{R} f_! E, F)$.

(iv) $\mathrm{Hom}_A(E, \mathbf{R} f^! F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(\mathbf{R} f_! E, F)$.

Preuve : Nous allons voir que (2.2.1) est un isomorphisme. Les autres assertions en résulteront en appliquant aux deux membres les foncteurs respectifs $\mathbf{R}\overline{\Gamma}(Y, .)$, $\mathbf{R}\Gamma(Y, .)$ (I 7.4.10) et $\mathrm{Hom}_A(A, .)$ d'après (I 7.4.18). Pour voir que (2.2.1) est un isomorphisme, on se ramène par le way-out functor lemma au cas où E et F sont les complexes de degré 0 associés à des A-faisceaux notés de même. Les constructions aboutissant à la définition de (2.2.1) peuvent alors être faites au moyen de résolutions flasques ou quasilibres dans $\mathbf{E}(X, J)$ et $\mathbf{E}(Y, J)$. Si $E = (E_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $F = (F_n)_{n \in \mathbf{N}}$, l'assertion résulte alors aussitôt du fait que les morphismes de dualité

$$\mathbf{R} f_* \mathbf{R} \mathscr{H}\mathrm{om}_{A_m}(E_m, \mathbf{R} f^! F_n) \longrightarrow \mathbf{R} \mathscr{H}\mathrm{om}_{A_m}(\mathbf{R} f_! E_m, F_n) \quad (m, n \in \mathbf{N}; m \geq n)$$

sont des isomorphismes, et de ce que les foncteurs $\mathrm{R}^i f_*$ ($i \in \mathbf{Z}$) commutent aux limites inductives filtrantes.

2.3. A partir de maintenant, on suppose, pour simplifier, que $A = \mathbf{Z}_\ell$ et $J = \ell\mathbf{Z}_\ell$. Étant donné un complexe $K \in \mathrm{D}^+(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on pose pour tout $F \in \mathrm{D}^-(X, \mathbf{Z}_\ell)$

$$\mathrm{D}_K(F) = \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(F, K).$$

Définition **2.3.1**. — *Soit X un schéma noethérien. On dit qu'un complexe K de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux sur X est* dualisant *si pour tout $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on a $\mathrm{D}_K(F) \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, et si le morphisme "de Cartan"*

$$F \longrightarrow \mathrm{D}_{K^\circ}\mathrm{D}_K(F) \tag{2.3.2}$$

que l'en en déduit est un isomorphisme.

Explicitons (2.3.2). Comme $D_K(F) \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, le morphisme (I 7.6.5)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathrm{D}_K(F) \underline{\otimes} F, K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathrm{D}_K(F), \mathrm{D}_K(F))$$

est un isomorphisme (II 2.6). L'image inverse de l'identité de $\mathrm{D}_K(F)$ définit un morphisme

$$F \underline{\otimes} \mathrm{D}_K(F) \longrightarrow K.$$

Comme $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, une nouvelle application de l'isomorphisme de Cartan permet d'en déduire le morphisme (2.3.2) annoncé.

Proposition **2.3.2** (Formules d'échange). — *Soient X et Y deux schémas noethériens de caractéristique résiduelles premières à ℓ, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample. Étant donné $K_Y \in \mathrm{D}^+(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, on pose*

$$K_X = \mathbf{R}f^!(K_Y), \quad \mathrm{D}_X = \mathrm{D}_{K_X}, \quad \mathrm{D}_Y = \mathrm{D}_{K_Y}.$$

a) Il existe, pour $F \in \mathrm{D}^-(X, \mathbf{Z}_\ell)$, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbf{R}f_*\mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_Y\mathrm{R}f_!(F). \tag{i}$$

Si K_X et K_Y sont dualisants et $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$, on a un isomorphisme fonctoriel

$$\mathbf{R}f_!\mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_Y\mathbf{R}f_*(F). \tag{ii}$$

b) Il existe, pour $\mathrm{D}^-(Y,\mathbf{Z}_\ell)$, *un isomorphisme fonctoriel*

$$(i) \qquad \mathbf{R}f^!\,\mathrm{D}_Y(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X(f^*F).$$

Si K_X *et* K_Y *sont dualisants et* $F \in \mathrm{D}_c^b(Y,\mathbf{Z}_\ell)$, *on a un isomorphisme fonctoriel*

$$(ii) \qquad f^*\,\mathrm{D}_Y(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X\,\mathbf{R}f^!(F).$$

Preuve : Formellement identique à celle de (SGA5 I 1.12), dont d'ailleurs (2.3.2) n'est qu'une paraphrase.

Proposition **2.3.3**. — *Soient X un schéma noethérien de caractéristiques résiduelles premières à ℓ.*

(i) Si X est régulier, de dimension finie, et satisfait aux conditions de (SGA5 I 3.4.1), le complexe $\mathbf{Z}_\ell$ est dualisant sur X.

(ii) Si X est régulier excellent de caractéristique 0, et admet un Module inversible ample, alors pour tout morphisme quasiprojectif $f : T \longrightarrow Y$, le complexe $\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)$ est dualisant sur T.

(iii) Soient k un corps et $f : X \longrightarrow S = \mathrm{Spec}(k)$ un morphisme quasiprojectif, avec dim$(X) \leq 2$. Alors $\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)$ est dualisant sur X.

Preuve : Montrons par exemple (ii), les autres assertions se prouvant de façon essentiellement identique, à partir des énoncés correspondants de (SGA5 I). Montrons tout d'abord que si $E \in \mathrm{D}_c^b(T,\mathbf{Z}_\ell)$, alors $\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(E,\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)) \in \mathrm{D}_c^b(T,\mathbf{Z}_\ell)$.

Lemme **2.3.4**. — *Si* $F \in \mathrm{D}_c^+(X,\mathbf{Z}_\ell)$, *alors* $\mathbf{R}f^!(F) \in \mathrm{D}_c^+(T,\mathbf{Z}_\ell)$.

On se ramène à le voir lorsque F est un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau constructible. Alors cela résulte de la façon habituelle (SGA5 VI) du lemme de Shih, et de l'énoncé analogue pour les $\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z}$–Modules constructibles ($n \in \mathbf{N}$) et pour les $\mathbf{Z}_\ell[T]$–Modules constructibles. Comme les hypothèses de (II 2.5 (iii)) sont réalisées (SGA5 I 3.3.1) il résulte du lemme que

$$\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(E,\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)) \in \mathrm{D}_c^+(T,\mathbf{Z}_\ell).$$

Pour voir qu'il est borné, on peut supposer que E est un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau constructible. Alors, on peut prendre une résolution quasilibre (resp. flasque) de E (resp. $\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)$) "canonique" dans $\mathbf{E}(T,\ell\mathbf{Z}_\ell)$, en ce sens que c'est un système projectif de résolutions quasilibres (resp. flasques) des composants. Comme la dimension quasi-injective des $\mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$ est indépendante de n (preuve de SGA5 I 3.4.3), l'assertion en résulte aussitôt. Il reste à voir que, posant

$$K = \mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell)$$

le morphisme canonique $E \longrightarrow \mathrm{D}_K \circ \mathrm{D}_K(E)$ est un isomorphisme. Pour cela, désignant par $u_\circ : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ le morphisme d'anneaux canonique, il suffit (II 8.2.2) de voir que le morphisme correspondant

$$\mathbf{L}u_\circ^*(E) \longrightarrow \mathbf{L}u_\circ^*\mathrm{D}_K \circ \mathrm{D}_K(E) \tag{2.3.5}$$

est un isomorphisme. Posant $L = \mathbf{R}u_\circ^*(K)$, les différentes compatibilités exposées en (I 8) montrent que (2.3.5) s'identifie au morphisme canonique

$$\mathbf{L}u_\circ^*(E) \longrightarrow \mathrm{D}_L \circ \mathrm{D}_L(\mathbf{L}u_\circ^*(E)).$$

Comme $L = \mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (1.3.1;2), et $\mathbf{L}u_\circ^*(E) \in \mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ (II 2.13.1), l'assertion résulte alors de (SGA5 I 3.4.3). On aurait pu également utiliser (II 2.13.9), qui éclaire bien la situation.

Proposition **2.3.6**. — *Soient k un corps séparablement clos de caractéristique différente de ℓ, $S = \mathrm{Spec}(k)$ et $f : X \longrightarrow S$ et $g : Y \longrightarrow S$ deux S-schémas quasiprojectifs, d'où un diagramme commutatif évident*

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}.$$

On suppose que les schémas de type fini sur S et de dimension $\leq dim(X) + dim(Y)$ sont fortement désingularisables (SGA5 3.1.5) ce qui a lieu notamment su $car(k) = 0$, ou si k est parfait et $dim(X \times_S Y) \leq 2$. On pose

$$K_X = \mathbf{R}f^!(\mathbf{Z}_\ell), \quad K_Y = \mathbf{R}g^!(\mathbf{Z}_\ell), \quad K_{X\times_S Y} = \mathbf{R}h^!(\mathbf{Z}_\ell).$$

Ces complexes sont dualisants pour X, Y et $X \times_S Y$ respectivement, et on note D_X, D_Y, $\mathrm{D}_{X\times_S Y}$ *les foncteurs dualisants correspondants.*

Alors

a) Il existe un isomorphisme canonique

$$p^* K_X \underline{\otimes} q^* K_Y \xrightarrow{\sim} K_{X\times_S Y}.$$

b) Pour $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$ *et* $G \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Z}_\ell)$*, il existe un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$p^* \mathrm{D}_X(F) \underline{\otimes} q^* \mathrm{D}_Y(G) \xrightarrow{\sim} D_{X\times_S Y}(p^* F \underline{\otimes} q^* G).$$

Preuve : L'énoncé est une paraphrase de (SGA5 III 3.1). Le fait que K_X, K_Y et $K_{X\times_S Y}$ soient dualisants résulte, sur le modèle de la preuve de (2.3.3), de (SGA5 I App.7.5). Utilisant (II 2.13.9), et diverses compatibilités évidentes, les assertions a) et b) résultent par simple passage à la limite des assertions correspondantes (SGA5 III 3.1) pour les $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$–Modules ($n \in \mathbf{N}$).

Avant d'énoncer la proposition suivante, précisons quelques définitions et notations de (I 8.3). Soit X un schéma noethérien. On définit la catégorie, notée

$$\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsc}(X)$$

des $\mathbf{Q}_\ell$*-faisceaux* sur X, au moyen de la partie multiplicative $\mathbf{Z}_\ell - 0$ de $\mathbf{Z}_\ell$ (I 8.3). Étant donné $d \in \mathbf{Z}$ le $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau $\mathbf{Z}_\ell(d)$ définit un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau, noté de préférence

$$\mathbf{Q}_\ell(d).$$

Comme on l'a indiqué dans (I 8.3), on étend sans peine aux $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux le formalisme développé pour les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux. Ainsi, on dit qu'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau F est *constructible* (resp. *constant tordu constructible*) s'il est isomorphe à l'image d'un $\mathbf{Z}_\ell$-faisceau du même type. La sous-catégorie pleine, notée $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(X)$ (reps. $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$), de $\mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsc}(X)$ engendrée par les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles) est *exacte*. De même, si K est un objet de $\mathrm{D}(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on dit que K est à cohomologie constructible (resp. constante tordu constructible) s'il est isomorphe dans $\mathrm{D}(X,\mathbf{Q}_\ell)$ à un complexe de $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux constructible (resp. constant constructible). On note

$$\mathrm{D}_c(X,\mathbf{Q}_\ell) \quad (\text{resp.}\, \mathrm{D}_t(X,\mathbf{Q}_\ell))$$

la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathrm{D}(X,\mathbf{Q}_\ell)$ définie par les complexes à cohomologie constructible (resp. constante tordue constructible).

Proposition **2.3.7** (Dualité locale). — *Soient X un schéma quasiprojectif et lisse de dimension d sur un corps séparablement clos, et x un point fermé de X. Pour tout $F \in \mathrm{D}^b_c(X,\mathbf{Q}_\ell)$, on a une dualité parfaite entre espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{Q}_\ell$*

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^{2d-i}_{\mathbf{Q}_\ell}(F,\mathbf{Q}_\ell(d))_x \times \mathrm{H}^i_x(F) \longrightarrow \mathbf{Q}_\ell.$$

Preuve : On convient d'identifier, comme on l'a fait dans l'énoncé, un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible ponctuel et le $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie correspondant (SGA5 VI 1.4.3). Soit

$$i : x \hookrightarrow X$$

l'immersion fermée canonique. Posons $K_X = \mathbf{Z}_\ell(d)[2d]$ et $K_x = \mathbf{Z}_\ell$; ce sont des complexes dualisants pour X et x respectivement (2.3.3) et l'on a (1.2.3)

$$\mathbf{R}\, i^!(K_X) \xrightarrow{\sim} K_x \quad (\text{canoniquement}).$$

Notant $\mathrm{D}_X = \mathrm{D}_{K_X}$, $\mathrm{D}_x = \mathrm{D}_{K_x}$, la formule d'induction complémentaire fournit un isomorphisme (2.3.2 b) (ii))

$$i^*\,\mathrm{D}_X(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_X\,\mathbf{R}\, i^!(F).$$

Avec des notations évidentes, on a donc

$$\mathrm{D}_X(F)_x \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Q}_\ell}(\mathbf{R}\Gamma_x(F),\mathbf{Q}_\ell).$$

L'assertion en résulte aussitôt, grâce au fait que $\mathbf{Q}_\ell$ est un injectif dans la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels.

Remarque 2.3.8. Nous avons seulement donné ici la variante la moins technique du théorème de dualité locale, et renvoyons le lecteur à (SGA5 I 4) pour des énoncés plus généraux.

2.4. Replaçons-nous sous les hypothèses préliminaires de (2.3.6). Nous allons indiquer brièvement comment les constructions de (SGA5 III 3) se transposent dans notre cadre et permettent de démontrer un théorème de *Lefschetz-Verdier*.

Proposition **2.4.1**. — *Soient* $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$, $G \in \mathrm{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell)$.

a) Il existe un isomorphisme canonique fonctoriel

$$\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, q^*G) \xrightarrow{\sim} p^*\mathrm{D}_X(F)\underline{\otimes} q^*G.$$

b) Il existe un accouplement parfait canonique

$$\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}q^!G) \times \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(q^*G, \mathbf{R}p^!F) \longrightarrow K_{X\times_S Y}.$$

Preuve : Formellement identique à celle de (SGA5 III 3.2), à partir de (2.3.2) et (2.3.6). On notera que, comme tous les complexes entrant en jeu sont à cohomologie constructible, on dispose sans restriction de l'isomorphisme de Cartan (II 2.6).

Proposition **2.4.2**. — *Si* $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)$, $G \in \mathrm{D}_c^b(Y, \mathbf{Z}_\ell)$, *on a des isomorphismes canoniques*

(i) $\mathbf{R}h_*\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}q^!G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{R}p_!(F), \mathbf{R}q_*(G))$.

(ii) $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(p^*F, \mathbf{R}q^!G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{R}p_!(F), \mathbf{R}q_*(G))$.

Preuve : La preuve de l'assertion (i) est formellement identique à celle de (SGA5 III 2.2.1). On en déduit (ii) en appliquant aux deux membres le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_\ell}(\mathbf{Z}_\ell, .)$ (I 7.4.6).

Supposons maintenant que X et Y soient *propres* sur S, et soient $F \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$, $G \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$. Les complexes $\mathbf{R}f_*(F)$ et $\mathbf{R}g_*(G)$ sont *parfaits* : en effet, (1.1.11 (i) et (ii)), ils appartiennent à $\mathrm{D}_c^b(S, \mathbf{Z}_\ell)_{\mathrm{torf}}$ et, comme le corps k est séparablement clos, $\mathrm{D}_c(S, \mathbf{Z}_\ell) = \mathrm{D}_t(S, \mathbf{Z}_\ell)$.

Donnons-nous de plus deux familles φ et ψ de supports sur $X \times_S Y$. On construit alors comme suit un diagramme

(2.4.3)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{H}^0_{\varphi}(X \times_S Y, \mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}(p^*F, \mathbf{R}q^*G)) \times \mathrm{H}^0_{\psi}(X \times_S Y, \mathbf{R} \arrow[dll, "(a)"'] \\
\mathrm{Hom}(\mathbf{R}f_*F, \mathbf{R}g_*G) \times \mathrm{Hom}(\mathbf{R}g_*G, \mathbf{R}f_*F) \arrow[drr, "(c)"'] & & \\
 & & \mathrm{H}^0(S, \mathbf{Z}_\ell)
\end{tikzcd}$$

Compte tenu de l'isomorphisme (2.4.2 (ii)), la flèche (a) n'est autre que la restriction du support. La flèche (b) résulte sans peine de l'accouplement (2.4.1 b)). La flèche (c) est le cup-produit défini en (II 2.11). Enfin, la flèche s'obtient immédiatement à partir du morphisme trace

$$\mathbf{R}h_*(K_{X\times_S Y}) \longrightarrow \mathbf{Z}_\ell.$$

Théorème **2.4.4** (Lefschetz-Verdier). — *Le diagramme (2.4.3) ci-dessus est commutatif.*

Preuve : Utilisant les notations de (II 2.13.9), il suffit de voir que pour tout $n \in \mathbf{N}$, le diagramme déduit de (2.4.3) après application du foncteur $\mathbf{L}(\alpha_n)^*$ est commutatif. Comme le foncteur $\mathbf{L}(\alpha_n)^*$ commute à toutes les opérations usuelles, l'assertion résulte donc de (SGA 5 III 3.3) pour les $(\mathbf{Z}/\ell^{n+1}\mathbf{Z})$–Modules ($n \in \mathbf{N}$).

3. Formalisme des fonctions L.

Soit p un nombre premier $\neq \ell$. On note f l'élément de Frobenius $u \mapsto u^p$ ($u \in \overline{\mathbf{F}}_p$), qui est un générateur topologique du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$.

Étant donné un schéma X de type fini sur $\mathbf{F}_p$, on note X° l'ensemble des points fermés de X, et, pour tout $x \in X^\circ$, on désigne par $d(x)$ le degré résiduel de x. Choisissant pour tout $x \in X^\circ$ un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on rappelle (SGA 5 XV 3) que la fonction L d'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible F sur X est définie par la formule

$$L_F(f) = \prod_{x \in X^\circ} (1/\det(1 - f_{F_{\bar{x}}}^{-d(x)} t^{d(x)})). \tag{3.0}$$

Grâce à la propriété de multiplicativité de (SGA 5 XV 3.1 a)), on peut prolonger cette définition à $\mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, en posant pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$

$$L_E(f) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (L_{\mathrm{H}^i(E)}(t))^{(-1)^i}. \tag{3.1}$$

Proposition **3.2**. — *Soit X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$.*

a) Pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a

$$L_E(t) = L_{E'}(t) L_{E''}(t).$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{Z}$, on a

$$L_{E[m]}(t) = (L_E(t))^{(-1)^m}.$$

b) Soient Y un sous-schéma fermé de X, et $U = X - Y$ l'ouvert complémentaire. On a

$$L_E = L_{E|U} L_{E|Y},$$

pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$.

c) Soit $h : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbf{F}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a

$$L_E = \prod_{s \in S^\circ} L_{E|X_s}.$$

Preuve : Immédiat à partir des assertions analogues pour les objets de cohomologie (SGA5 XV 3.1).

Proposition **3.3**. — *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$, $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ le morphisme structural et $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Alors*

$$L_E = L_{\mathbf{R}\, g_!(E)}.$$

En particulier, L_E est une fraction rationnelle.

Preuve : On peut supposer que E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible, et alors l'assertion n'est autre que (SGA5 XV 3.2).

Corollaire **3.4**. — *Soit $h : X \longrightarrow S$ un morphisme de schémas de type fini sur $\mathbf{F}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on a*

$$L_E = L_{\mathbf{R}\, h_!(E)}.$$

Nous allons maintenant déduire de (3.3) une *équation fonctionnelle* pou les fonctions L, du moins si X est projectif sur $\mathbf{F}_p$.

Définition **3.5**. — *Soient $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$, et $\overline{X} = X \times_{\mathbf{F}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$. Pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, on pose*

$$\chi(E) = \mathrm{rang}(\mathbf{R}\, g_! E) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i [\mathrm{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E}) : \mathbf{Q}_\ell],$$

$$\delta(E) = \det(\mathbf{R}\, g_!(E)) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (\det f_{\mathrm{H}_c^i(\overline{X}, \overline{E})})^{(-1)^i},$$

où $\overline{E}$ désigne l'image inverse de E au-dessus de $\overline{X}$.

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité respectives de la trace et du déterminant dans la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, il es clair que pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E, \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

on a

(3.5.1) $$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

$$(3.5.2) \qquad \delta(E) = \delta(E')\delta(E'').$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$,

$$\chi(E[m]) = (-1)^m \chi(E) \quad \text{et} \quad \delta(E[m]) = (\delta(E))^{(-1)^m}.$$

Proposition **3.6**. — *Soit* $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ *un schéma projectif sur* $\mathbf{F}_p$. *On pose* $K_X = \mathbf{R}\, g^!(\mathbf{Q}_\ell)$, *et* $\mathrm{D}_X = \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Q}_\ell}(., K_X)$. *Alors, pour tout* $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, *on a l'identité*

$$L_{\mathrm{D}_X(E)}(t) = (-t)^{-\chi(E)}\delta(E)L_E(t^{-1}).$$

Preuve : Le second membre a un sens d'après (3.3). Posons $S = \mathrm{Spec}$ et $\mathrm{D}_S = \mathbf{R}\,\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Q}_\ell}(., \mathbf{Q}_\ell)$. D'après (2.3.2 a)), on a

$$\mathbf{R}\, g_*(\mathrm{D}_X\, E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_S\, \mathbf{R}\, g_*(E),$$

donc (3.3)

$$L_{\mathrm{D}_X}(E) = L_{\mathrm{D}_S(\mathbf{R}\, g_*(E))}.$$

Comme $L_E = L_{\mathbf{R}\, g_*(E)}$ (3.3), l'assertion résultera du lemme suivant

Lemme **3.7**. — *Si* $F \in \mathrm{D}_c^b(S, \mathbf{Q}_\ell)$, *on a :*

$$L_{\mathrm{D}_S(F)}(t) = (-t)^{\chi(F)}\delta(F)L_F(t^{-1}).$$

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité (3.5.1) et (3.5.2), on peut supposer que $F \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(S)$. Alors F correspond (SGA5 VII 1.4.2) à un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension fini V muni d'une opération continue f_V du Frobenius, et le $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{D}_S(F) = \mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Q}_\ell}(F, \mathbf{Q}_\ell)$ correspond (II 1.26) au $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel $V^\vee$ muni de l'opération continue $(f_V^\vee)^{-1}$ du Frobenius. Il suffit alors de montrer que, étant donnés un corps K, un K-espace vectoriel de dimension finie V et un automorphisme u de V, on a l'identité

$$(3.8) \qquad 1/\det(1 - u^{-1}t) = (-t)^{-\dim(V)}\det(u)/\det(1 - ut^{-1})$$

dans $K(t)$. On peut pour cela supposer K algébriquement clos, donc u triangulable, puis, grâce aux propriétés de multiplicativité du déterminant, que $\dim(V)=1$. Alors u est l'homothétie définie par un scalaire non nul λ, et (3.8) est l'identité évidente

$$1/(1-(t/\lambda))=(-\lambda/t)/(1-(\lambda/t)).$$

Bien entendu, la formule (3.6) ne présente d'intérêt en pratique que si l'on dispose d'une expression simple pour $\mathrm{D}_X(E)$. Nous allons maintenant donner des cas où il en est ainsi.

Proposition **3.9**. — *On suppose X quasiprojectif, lisse et purement de dimension n sur $\mathbf{F}_p$. Posant pour tout $E\in \mathrm{D}^b_c(S,\mathbf{Q}_\ell)$*

$$E^V=\mathscr{H}\mathrm{om}^\bullet_{\mathbf{Q}_\ell}(E,\mathbf{Q}_\ell),$$

on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}_X(E)\simeq E^V(n)[2n]$$

dans chacun des cas suivants

(i) $E\in \mathrm{D}^b_t(X,\mathbf{Q}_\ell)$

(ii) X est une courbe, et E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible de la forme $i_*(M)$, où $i:U\hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert dense de X et $M\in\mathbf{Q}_\ell-\mathrm{fsct}(U)$.

Preuve : Comme $\mathrm{D}_X(E)=\mathbf{R}\mathscr{H}\mathrm{om}_{\mathbf{Q}_\ell}(E,\mathbf{Q}_\ell(n))[2n]$, le cas (i) résulte du lemme suivant.

Lemme **3.9.1**. — *Étant donnés un schéma noethérien X, $F\in\mathbf{Q}_\ell-\mathrm{fsct}(X)$ et $G\in\mathbf{Q}_\ell-\mathrm{fscn}(U)$, on a:*

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(F,G)=0\quad (j\geq 1).$$

Il s'agit de voir que si $F\in\mathbf{Z}_\ell-\mathrm{fsct}(X)$ et $G\in\mathbf{Z}_\ell-\mathrm{fscn}(X)$, les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux $\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{Z}_\ell}(F,G)$ $(j\geq 1)$ sont annulés par une puissance de ℓ. D'après (I 6.4.2) et (II 1.2.1), on peut, quitte à se restreindre à des parties localement fermées convenables de X, supposer que $G\in\mathbf{Z}_\ell-\mathrm{fsct}(X)$. Alors, compte tenu de (II 1.26), l'assertion résulte de l'assertion analogue, bien connue, pour les $\mathbf{Z}_\ell$–Modules de type fini. Montrons (ii).

Il s'agit de voir que

$$P^j = \mathscr{E}\mathrm{xt}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Comme M est constante tordu constructible, il résulte du cas (i) que $P^j | U = 0$. Il nous suffit donc de voir que pour tout point fermé x de $Y = X - U$ et tout point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on a $P^j_{\overline{x}} = 0$. Le pendant pour les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux de la variante (SGA5 I 4.6.2) du théorème de dualité locale fournit un accouplement parfait

$$\mathscr{E}\mathrm{xt}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) \times \mathbf{H}^{2-j}_{\overline{x}}(E) \longrightarrow \mathbf{Q}_{\ell'} \tag{3.9.2}$$

avec (SGA5 I 4.5.1)

$$\mathbf{H}^{2-j}_{\overline{x}} = (\mathbf{H}^{2-j}_x(E))_{\overline{x}}.$$

Comme le morphisme d'adjonction canonique

$$E \longrightarrow i_* i^*(E)$$

est un isomorphisme, il résulte de la première suite exacte de (SGA4 V 4.5) que

$$\mathbf{H}^0_x(E) = \mathbf{H}^1_x(E) = 0,$$

d'où aussitôt le résultat annoncé.

Ceci dit, lorsque X est projectif sur $\mathbf{F}_\ell$, la formule (3.6) prend la forme

$$L_{E^\vee}(p^{-n}t) = (-1)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}), \tag{3.10}$$

dans chacun des cas de (3.9). Compte tenu de (3.2 a)), cela résulte du lemme suivant.

Lemme **3.11**. — *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_\ell$, et $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Posant $F(j) = F \otimes \mathbf{Q}_\ell(j)$ ($j \in \mathbf{Z}$), on a la relation*

$$L_{F(j)}(t) = L_F(p^{-j}t).$$

D'après les propriétés de multiplicativité (3.2 a)), on peut pour le voir supposer que F est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible; alors, comme le Frobenius opère sur $\mathbf{Q}_\ell(j) \simeq \mathbf{Q}_\ell$ (non canoniquement) par l'homothétie de rapport p^{-j}, l'assertion est immédiate sur la définition (3.0).

Supposons maintenant qu'on ait de plus un isomorphisme

$$E^\vee \xrightarrow{\sim} E(\rho) \quad \text{pour un } \rho \in \mathbf{Z}.$$

Alors la formule (3.10) prend la forme

$$L_E(p^{-n-\rho}t) = (-t)^{-\chi(E)}\delta(E)L_E(t^{-1}),$$

ou encore, après avoir posé $q = n + \rho$ et fait le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$,

$$L_E(1/qt) = (-t)^{\chi E}\delta(E)L_E(t). \tag{3.12}$$

Remarque 3.13. Sous les hypothèses de (3.9), l'existence d'un tel entier p est assurée dans les cas suivants

cas (i) $E \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

cas (ii) $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

(Pour ce dernier cas, il est immédiat que

$$i_*(M^\vee) \simeq (i_*(M))^\vee. \quad)$$

Explicitons enfin une relation importante entre les entiers $\chi(E)$ et $\delta(E)$.

Proposition **3.14**. — *Soient X un schéma projectif et lisse purement de dimension n sur $\mathbf{Z}_p$ et $E \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$. On suppose qu'il existe un entier m tel que*

$$\mathrm{D}_X(E) \xrightarrow{\sim} E(m),$$

et on pose $q = p^m$. Alors, on a, l'égalité

$$\delta(E)^2 = q^{\chi(E)}.$$

Preuve : La substitution $t \mapsto 1/qt$ dans (3.12) fournit l'équation fonctionnelle

(3.12 bis) $$L_E(t) = (-1/qt)^{\chi(E)}\delta(E)L_E(1/qt).$$

Multipliant (3.12) et (3.12 bis) membre à membre, on obtient l'identité

$$L_E(t)L_E(1/qt) = q^{-\chi(E)}(\delta(E))^2 L_E(t)L_E(1/qt),$$

d'où aussitôt la relation désirée, compte tenu du fait que L_E n'est pas identiquement nulle, comme il est clair sur sa définition (3.0).