Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

par

Jean-Pierre JOUANOLOU

THÈSE DE DOCTORAT D'ÉTAT

ès SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

par

M. JOUANOLOU Jean-Pierre

pour obtenir le grade Docteur ès-Sciences

Sujet de thèse : Catégories Dérivées en Cohomologie ℓ-adique

soutenue le : 3 Juillet 1969 devant la Commission d'examen

MM. SAMUEL Président

GROTHENDIECK

VERDIER Examinateurs

DIXMIER

PREFACE

Description

Special thanks to Fan Xuanrui to provide us with a copy of the thesis.

TABLE DE MATIÈRES

§ I. — CATÉGORIES DES FAISCEAUX SUR UN IDÉOTOPE

1. Généralités.

Définition **1.1**. — *On appelle* idéotope *untriple* (x,a,j) *formé d'un topos* X, *d'un anneau commutatif unifière* A *et d'un idéal propre* J *de* A.

On suppose donné dans la suite du paragraphe un idéotope (X,A,J). On note $A-\mathrm{Mod}_X$ la catégorie des faisceaux de A_X-Modules et

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$$

la catégorie abélienne des systèmes projectifs indexés par $\mathbf{N}$ de A_X-Modules.

Définition **1.2**. — *On appelle* (A,J)-faisceau *sur* X, *ou s'il n'y a pas de confusion possible* A-faisceau *sur* X, *un système projectif*

$$F=(\mathbf{F}_n,u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N},m\geq n}$$

de A_X*-Modules, vérifiant*

$$J^{n+1}F_n=0$$

pour tout entier $n\geq 0$. *On note* $\mathbf{E}(X,J)$ *la sous-catégorie, abélienne, pleine de* $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbf{N}^\circ, A-\mathrm{Mod}_X)$ *engendrée par les* A*-faisceaux.*

Pour des raisons qui apparaîtront par la suite, la catégorie $\mathbf{E}(X,J)$ ne mérite pas le nom de catégorie des A-faisceaux sur X; c'est seulement une catégorie quotient de la précédente que nous baptiserons ainsi. Aussi, pour éviter le risque de confusion, nous arrivera-t-il, étant donnés deux A-faisceaux E et F, de noter

$$\mathrm{Hom}_a(E,F)$$

(a pour anodin) l'ensemble des $\mathbf{E}(X,J)$-morphismes de E dans F.

Notons pour tout objet T de X par $\mathbf{T}$, ou même T s'il n'y a pas de confusion possible, le topos X/T. Le foncteur restriction pour les faisceaux de A-Modules induit de façon évidente un foncteur restriction

$$\mathbf{E}(X,J) \longrightarrow \mathbf{E}(T,J)$$

$$E \mapsto E|T.$$

Proposition-définition **1.4.** — *Soit $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X:*

1) *On dit que E est* essentiellement nul *s'il est nul en tant que pro-objet, ce qui revient à dire que pour tout entier $n \geq 0$, il existe un entier $p \geq 0$ tel que le morphisme de transition*

$$E_{n+p} \longrightarrow E_n$$

soit nul.

2) *On dit que E est* négligeable *s'il vérifie l'une des reltions équivalentes suivantes:*

   (i) Il existe un recouvrement $(T_i \longrightarrow e_X)_{i\in I}$ de l'objet final e_X de X tel que les A-faisceaux $E|T_i$ soient essentiellement nuls.

   (ii) Idem, mais en supposant de plus que les T_i sont des ouverts de X.

Preuve: Pour voir l'équivalence de (i) et (ii), il suffit d'observer que pour tout $i \in I$, le faisceau image U_i de T_i par le morphisme canonique $T_i \longrightarrow e_X$ est tel que le morphisme restriction

$$\mathbf{U}_i \longrightarrow \mathbf{T}_i$$

soit fidèle.

Il est clair que lorsque l'objet final de X est quasicompact (SGA4 VI 1.1), il revient au même pour un A-faisceau de dire qu'il est essentiellement nul ou qu'il est négligeable. Il est par ailleurs immédiat que la sous-catégorie pleine

(1.4.1) $\quad N(X,J)$ ou plus simplement N_X)

de $\mathbf{E}(X,J)$ engendré par les A-faisceaux négligeables est *épaisse* dans $\mathbf{E}(X,J)$.

Définition **1.5**. — *Soit* (X,A,J) *un idéotope. On appelle* catégorie *des* (A,J)-faisceaux *(ou A-faisceaux s'il n'y a pas de confusion possible) sur* X *et on note*

$$(A,J)-\mathrm{fsc}(X) \quad \textit{(ou plus simplement } A-\mathrm{fsc}(X))$$

la catégorie abélienne quotient (thèse Gabriel III.1)

$$\mathbf{E}(X,J)/N_X.$$

1.6. Soit T un objet de X. Il est clair que le foncteur restriction (1.3) est exact et envoie N_X dans N_T, d'où par passage au quotient un foncteur exact, appelé encore *restriction*,

$$r_{T,X} : A-\mathrm{fsc}(X) \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(T). \tag{1.6.1}$$

Soient maintenant T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un morphisme. Se plaçant dans le topos $\mathbf{T}'$, on déduit de (1.6.1) un foncteur exact

$$f^* : A-\mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A-\mathrm{fsc}(T), \tag{1.6.2}$$

vérifiant les propriétés de transitivité habituelles.

Ces remarques étant faites, nous utiliserons dans la suite sans plus d'explications le langage local pour les A-faisceaux.

Proposition **1.7**. — *Les propriétés suivantes sont de nature locale pour la topologie de* X.

(i) La propriété pour un A-faisceau d'être nul, i.e. isomorphe au système projectif nul.

(ii) La propriété pour une suite

$$E' \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} E''$$

de Afaisceaux d'être exacte.

(iii) *La propriété pour un morphisme $u : E \longrightarrow F$ de A-faisceaux d'être un monomorphisme (resp. un épimorphisme, resp. un isomorphisme).*

(iv) *La propriété pour deux morphismes $u, v : E \rightrightarrows F$ d'être égaux.*

Preuve : L'assertion (i) est immédiate. On en déduit (ii) en l'appliquant successivement à $\mathrm{Im}(v \circ u)$ et à $\mathrm{Ker}(v)/\mathrm{Im}(u)$. L'assertion (iii) est un cas particulier de (ii). Enfin (iv) s'obtient en appliquant (i) à $\mathrm{Im}(v - u)$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient T et T' deux objets de X et $f : T \longrightarrow T'$ un épimorphisme. Le foncteur*

$$f^* : A - \mathrm{fsc}(T') \longrightarrow A - \mathrm{fsc}(T)$$

est fidèle.

Preuve: Appliquer 1.7 (i) au topos $\mathbf{T}'$.

Corollaire **1.7.1**. — *Soient E et F deux A-faisceaux sur X. Lorsque T parcourt les objets de X, le préfaisceau*

$$T \mapsto \mathrm{Hom}(E|T, F|T)$$

est séparé.

Preuve: Simple traduction de 1.7 (iv).

Remarque 1.7.3. En général, le préfaisceau précédent n'est pas un faisceau. Nous verrons toutefois qu'il en est ainsi lorsque le topos X est noethérien (SGA4 VI 2.11), ou lorsque E est de type J-adique.

2. Cas où l'objet final de X est quasicompact.

On se propose maintenant de donner un certain nombre de catégories équivalentes à $A - \mathrm{fsc}(X)$, lorsque l'objet final de X est quasicompact. Nous aurons besoin cela d'un certain nombre de lemmes techniques, dont la plupart n'utilisent pas cette hypothèse.

2.1.

3. A-faisceaux de type constant, strict ou J-adique.

4. Opérations externes.

5. Produit tensoriel.

6. Foncteurs associés aux homomorphismes.

6.1. Soient $E = (E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux A-faisceaux sur un topos X. Pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$, on définit comme suit un nouveau A-faisceau, noté

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(E,F),$$

la mention de l'anneau A pouvant être éventuellement supprimée s'il n'y a pas de confusion possible. Soient $m' \geq m \geq n$ trois entiers ≥ 0.

7. Catégories dérivées.

8. Changement d'anneau.

§ II. — CONDITIONS DE FINITUDE

Dans tout ce chapitre, on fixe un anneau commutatif unifère *noethérien* A et un idéal J de A. Sauf mention expresse du contraire, tous les topos considérés seront supposés *localement noethériens* (SGA 4 VI 2.11.).

1. Catégorie des A-faisceaux constructibles.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **1.1**. — *On dit qu'un A-faisceau $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est* J-adique constructible *s'il est J-adique (I 3.8.) et si pour tout $n \in \mathbf{N}$, le A_n-Module F_n est constructible. On dit que F est un* A-faisceau constructible *s'il est isomorphe dans* $A-\mathrm{fsc}(X)$ *à un A-faisceau J-adique constructible. On appelle catégorie des A-faisceaux constructibles et on note*

$$A-\mathrm{fscn}(X) \quad \textit{(“n” pour “noethérien”)}$$

la sous-catégorie pleine de $A-\mathrm{fsc}(X)$ *engendrée par les A-faisceaux constructibles.*

Proposition **1.2**. — *Soit $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un A-faisceau sur X. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est un A-faisceau constructible.

(ii) F est de type strict (I 3.2.) et, notant F' le A-faisceau strict associé à F (I 3.3.), il existe localement une application croissante $\gamma \geq$ id *telle que $\chi_\gamma(F')$ (I 2.2) soit J-adique constructible.*

(iii) *Pour tout entier $r \geq 0$, le A-faisceau $F \otimes_A A_r$ est de type constant (I 3.6.) associé à un A_r-Module constructible.*

Preuve :

Corollaire **1.3.** —

Preuve :

Corollaire **1.4.** —

Proposition **1.5.** —

Preuve :

Lemme **1.6.** —

Corollaire **1.6.** —

Proposition **1.7.** —

Preuve :

Lemme **1.8.** —

Lemme **1.9.** —

Lemme **1.10.** —

Proposition **1.11.** —

Preuve :

1.12.

Proposition **1.12.4.** —

Preuve :

1.13.

Définition **1.14.** —

Proposition **1.15.** —

Preuve :

Proposition **1.17.** —

Preuve :

Corollaire **1.18.** —

Proposition **1.19.** —

Preuve :

1.20. Nous allons maintenant expliciter la structure de la catégorie $A-\mathrm{fsc}(X)$, lorsque le topos X est connexe. Rappelons tout d'abord quelques faits concernant le pro-groupe fondamental d'un topos. Étant donné un pro-groupe strict

$$G = (G_i)_{i \in I},$$

on définit comme suit un topos, noté

$$\mathrm{B}_G$$

et appelé *topos classifiant* de G. Un objet de B_G, appelé encore *G-ensemble*, est un ensemble M muni d'une application

$$p : M \longrightarrow \varinjlim_i \mathrm{Hom}(G_i, M)$$

$$m \mapsto (g_i \mapsto g_i m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”})$$

telle que l'on ait

$$g_i(g_i' m) = (g_i g_i')m \quad \text{pour } i \text{ “assez grand”}.$$

Autrement dit, M admet une filtration par des G_i-ensembles ($i \in I$), avec compatibilité des diverses opérations. Un morphisme de G-ensembles $M \longrightarrow N$ est une application $u : M \longrightarrow N$ qui rend le diagramme

Proposition **1.20.4.** —

Preuve :

Corollaire **1.20.5.** —

Preuve :

Proposition **1.21.** —

Preuve :

Proposition **1.22.** —

Proposition **1.23.** —

Preuve :

Proposition **1.24.** —

Preuve :

Proposition **1.25.** —

Preuve :

Proposition **1.26.** —

Preuve :

Exemple 1.27.

Proposition **1.28.** —

Preuve :

Proposition **1.29.** —

Preuve :

2. Conditions de finitude dans les catégories dérivées.

Soit X un topos localement noethérien.

Définition **2.1**. — *On dit qu'un complexe E de A-faisceaux sur X est* à cohomologie constructible *(resp.* constante tordue constructible*) si tous ses objets de cohomologie sont des A-faisceaux constructibles (resp. constants tordus constructibles).*

Définition **2.2**. —

Proposition **2.3**. —

Preuve :

Proposition **2.4**. —

Preuve :

Proposition **2.5**. —

Preuve :

Proposition **2.6**. —

Preuve :

Proposition **2.7**. —

Preuve :

Corollaire **2.8**. —

2.9.

Proposition **2.9.2**. —

Preuve :

2.10.

Proposition **2.10.2**. —

Preuve :

Proposition **2.10.3**. —

Preuve :

Proposition **2.10.5.** —

Preuve :

2.11. Trace et cup-produit.

Proposition **2.11.3.** —

Preuve :

2.12.

Proposition **2.12.1.** —

Preuve :

Proposition **2.12.2.** —

Preuve :

Proposition **2.12.3.** —

Preuve :

2.13. Changement d'anneau. Soient X un topos localement noethérien, A et B deux anneaux commutatifs unifères noethériens, J et K deux idéaux de A et B respectivement et $u : A \longrightarrow B$ un morphisme d'anneaux unifères, tel que $u(J) \subset K$. On utilise par ailleurs libreent les notations de (I 8.1).

Proposition **2.13.1.** —

Preuve :

Théorème **2.13.2.** —

Preuve :

Lemme **2.13.3.** —

Lemme **2.13.4.** —

Lemme **2.13.5.** —

Lemme **2.13.6.** —

Remarques 2.13.7.

Proposition **2.13.9.** —

Preuve :

Remarques 2.13.10.

Proposition **2.14.** —

Preuve :

Remarques 2.15. Comme pour (2.13.2), l'hypothèse (i) a servi uniquement pour assurer que le complexe $\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(E,F)$ est à cohomologie constructible. Elle est donc inutile en particulier dans la cas où $E \in \mathrm{D}_t^-(X,A)$.

§ III. — APPLICATIONS AUX SCHÉMAS

Le texte qui suit ayant un caractère essentiellement provisoire (cf. l'appendice basé sur une construction de *Deligne*), nous ferons toutes les hypothèses simplificatrices qui nous paraîtront nécessaires pour la clarté de l'exposé.

Soit ℓ un nombre premier. On fixe comme précédemment un anneau noethérien A et un idéal propre J de A. On suppose de plus que A est une $\mathbf{Z}_\ell$-algèbre et que J contient ℓA. Pour simplifier (cf. supra), tous les schémas considérés sont *noethériens*.

1. Opérations externes.

1.1. Soient X et Y deux schémas noethériens, et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini. On définit comme suit un foncteur exact

$$\mathrm{R}f_! : \mathrm{D}(X,A) \longrightarrow \mathrm{D}(Y,A), \tag{1.1.1}$$

appelé *image directe à supports propres*. D'après Nagata et Mumford il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

où i est une immersion ouverte et q un morphisme propre. On pose alors

$$\mathrm{R}f_! = \mathrm{R}q_* \circ \mathrm{R}i_!.$$

on vérifie, grâce à la technique de factorisation de *Lichtenbaum* (SGA4 XVIII), que le résultat ne dépend pas, à isomorphisme près, de la factorisation choisie.

La même technique de factorisation montre que si $g : Y \longrightarrow Z$ est un autre morphisme séparé de type fini, on a un isomorphisme

$$\mathrm{R}(g \circ f)_! \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}g_! \circ \mathrm{R}f_!, \tag{1.1.2}$$

avec la condition de cocycles habituelle pour un triple de morphismes.

Définition **1.1.3**. — *Si E est un A-faisceau sur X (resp. un objet de $\mathrm{D}(X,A)$), on pose pour tout $p \in \mathbf{Z}$*

$$\mathrm{R}^p f_!(E) = \mathrm{H}^p(\mathrm{R}f_!(E)).$$

On obtient ainsi un foncteur cohomologique qui n'est pas en général (sauf bien sûr si le morphisme f est propre) le foncteur cohomologique dérivé de $\mathrm{R}^\circ f_!$.

1.1.4. Il est clair que si $F = (F_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est un A-faisceau, on a pour tout $p \in \mathbf{Z}$

$$\mathrm{R}^p f_!(F) = (\mathrm{R}^p f_!(F_n))_{n\in\mathbf{N}}.$$

Proposition **1.1.5**. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

un carré cartésien de schéma noethériens.

*(i) (***Théorème de changement de base propre***) Si f (donc f') est séparé de type fini, on a pour tout $E \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^*\mathrm{R}f_!(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f'_!(g')^*(E).$$

*(ii) (***Théorème de changement de base lisse***) Si ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y et g est lisse, on a pour tout $E \in \mathrm{D}^+(X,A)$ un isomorphisme canonique fonctoriel*

$$g^*\mathrm{R}f_*(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}(f')_*(g')^*(E).$$

Preuve :

Proposition **1.1.7.** —

Preuve :

Lemme **1.1.8.** — *Si d est un entier majorant la dimension des fibres de f, on a pour tout A-faisceau M sur X*

$$\mathrm{R}^i f_!(M) = 0 \quad (i > 2d).$$

(Résulte immédiatement de l'assertion analogue pour les composants de M).

Proposition **1.1.10.** —

Preuve :

Proposition **1.1.11.** —

Preuve :

1.2.

Proposition **1.2.3.** —

Preuve :

Proposition **1.2.5.** —

Preuve :

1.3. Soient $u : A \longrightarrow B$ une A-algèbre et K un idéal de B tel que $u(J) \subset K$. On utilise dans l'énoncé suivant les notations de (I 8).

Proposition **1.3.1.** — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme séparé de type fini entre schémas noethériens.*

1) Soit $E \in \mathrm{D}(X, A)$. On a un isomorphisme canonique

$$\mathrm{L}u^*\mathrm{R}f_!(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f_!\mathrm{L}u^*(E),$$

lorsque $E \in \mathrm{D}^-(X, A)$, ou lorsque A est local régulier et J est son idéal maximal.

2) *Plaçons-nous maintenant dans le cas où Y admet un Module inversible ample. On suppose de plus que ℓ est premier aux caractéristiques résiduelles de Y, que l'anneau A est local régulier et que J est son idéal maximal. Alors pour tout $F \in \mathrm{D}^+(Y,A)$, on a un morphisme canonique fonctoriel*

$$\mathrm{L}u^*\mathrm{R}f^!(F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{R}f^!\mathrm{L}u^*(F),$$

qui est un isomorphisme *lorsque B est une A-algèbre finie et $K = JB$.*

Preuve : Montrons 1), et définissons d'abord un morphisme

$$\mathrm{L}u^*\mathrm{R}f_!(E) \longrightarrow \mathrm{R}f_!\mathrm{R}u^*(E). \tag{1.3.1.1}$$

D'après (I. 8.1.6), il suffit dans chacun des cas considérés de définir un morphisme

$$\mathrm{R}f_!(E) \longrightarrow u_*\mathrm{R}f_!\mathrm{L}u^*(E). \tag{1.3.1.2}$$

Mais il est immédiat que $u_*\mathrm{R}f_! \simeq \mathrm{R}f_!u_*$, de sorte que l'on définit (1.3.1.2) en appliquant le foncteur $\mathrm{R}f_!$ au morphisme d'adjonction (I 8.1.7)

$$E \longrightarrow u_*\mathrm{L}u^*(E).$$

Pour voir que (1.3.1.1) est un isomorphisme, on se ramène, par le way-out functor lemma, au cas où $E \in \mathrm{D}^-(X,A)$. Alors, grâce à la conservativité du foncteur u_*, il s'agit de montrer que le morphisme canonique

$$B \otimes_A \mathrm{R}f_!(E) \longrightarrow \mathrm{R}f_!(B \otimes_A E)$$

est un isomorphisme, ce qui résulte de (1.1.7). Montrons 2). Pour définir un morphisme

$$\mathrm{L}u^*\mathrm{R}f^!(F) \longrightarrow \mathrm{R}f^!\mathrm{L}u^*(F), \tag{1.3.1.3}$$

on se ramène encore, grâce à (I 8.1.6), à définir un morphisme

$$\mathrm{R}f^!(F) \longrightarrow u_*\mathrm{R}f^!\mathrm{L}u^*(F). \tag{1.3.1.4}$$

On a évidemment $u_*\mathrm{R}f^! \simeq \mathrm{R}f^!u_*$; on prend pour (1.3.1.4) l'image par $\mathrm{R}f^!$ du morphisme d'adjonction (I 8.1.7). Pour voir que (1.3.1.3) est un isomorphisme, on se ramène, après avoir choisi une "lissification" (1.2.2), à le faire successivement pour une immersion fermée et un morphisme lisse équidimensionnel. Dans le premier cas, ce n'est autre que (I 8.1.16 (iii)). Dans le second, on se ramène aussitôt à (I 8.1.16 (i)).

2. Dualité.

Dans tout ce paragraphe, tous les schémas considérés sont de caractéristique résiduelles premières à ℓ.

2.1. Soient X et Y deux schémas noethériens et $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme quasiprojectif. On suppose que Y admet un Module inversible ample et on se propose de définir un morphisme “trace”

$$\mathrm{Tr}_f : \mathrm{R}f_!\mathrm{R}f^! \longrightarrow \mathrm{id} \tag{2.1.1}$$

3. Formalisme des fonctions L.

Soit p un nombre premier $\neq \ell$. On note f l'élément de Frobenius $u \mapsto u^p$ ($u \in \overline{\mathbf{F}}_p$), qui est un générateur topologique du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_p/\mathbf{F}_p)$.

Étant donné un schéma X de type fini sur $\mathbf{F}_p$, on note X° l'ensemble des points fermés de X, et, pour tout $x \in X^\circ$, on désigne par $d(x)$ le degré résiduel de x. Choisissant pour tout $x \in X^\circ$ un point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on rappelle (SGA 5 XV 3) que la fonction L d'un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible F sur X est définie par la formule

$$L_F(f) = \prod_{x \in X^\circ} (1/\det(1 - f_{F_{\overline{x}}}^{-d(x)} t^{d(x)})). \tag{3.0}$$

Grâce à la propriété de multiplicativité de (SGA 5 XV 3.1 a)), on peut prolonger cette définition à $\mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$, en posant pour tout $E \in \mathrm{D}_c^b(X, \mathbf{Q}_\ell)$

$$L_E(f) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (L_{\mathrm{H}^i(E)}(t))^{(-1)^i}. \tag{3.1}$$

Proposition **3.2**. — *Soit X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_p$.*

a) Pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

de $\mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$*, on a*

$$L_E(t)=L_{E'}(t)L_{E''}(t).$$

En particulier, pour tout $m\in\mathbf{Z}$*, on a*

$$L_{E[m]}(t)=(L_E(t))^{(-1)^m}.$$

b) Soient Y *un sous-schéma fermé de* X*, et* $U=X-Y$ *l'ouvert complémentaire. On a*

$$L_E=L_{E|U}L_{E|Y},$$

pour tout $E\in\mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$*.*

c) Soit $h:X\longrightarrow S$ *un morphisme de schémas de type fini sur* $\mathbf{F}_p$*. Pour tout* $E\in\mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$*, on a*

$$L_E=\prod_{s\in S^\circ}L_{E|X_s}.$$

Preuve : Immédiat à partir des assertions analogues pour les objets de cohomologie (SGA5 XV 3.1).

Proposition **3.3**. — *Soient* X *un schéma de type fini sur* $\mathbf{F}_p$*,* $g:X\longrightarrow\mathbf{F}_p$ *le morphisme structural et* $E\in\mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$*. Alors*

$$L_E=\mathrm{L}_{\mathrm{R}\,g_!(E)}.$$

En particulier, L_E *est une fraction rationnelle.*

Preuve : On peut supposer que E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible, et alors l'assertion n'est autre que (SGA5 XV 3.2).

Corollaire **3.4**. — *Soit* $h:X\longrightarrow S$ *un morphisme de schémas de type fini sur* $\mathbf{F}_p$*. Pour tout* $E\in\mathrm{D}_c^b(X,\mathbf{Q}_\ell)$*, on a*

$$L_E=\mathrm{L}_{\mathrm{R}\,h_!(E)}.$$

Nous allons maintenant déduire de (3.3) une *équation fonctionnelle* pou les fonctions L, du moins si X est projectif sur $\mathbf{F}_p$.

Définition **3.5**. — *Soient* $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ *un schéma de type fini sur* $\mathbf{F}_p$, *et* $\overline{X} = X \times_{\mathbf{F}_p} \overline{\mathbf{F}}_p$. *Pour tout* $E \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$, *on pose*

$$\chi(E) = \mathrm{rang}(\mathrm{R}\, g_! E) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i [\mathrm{H}^i_c(\overline{X}, \overline{E}) : \mathbf{Q}_\ell],$$

$$\delta(E) = \det(\mathrm{R}\, g_!(E)) = \prod_{i \in \mathbf{Z}} (\det f_{\mathrm{H}^i_c(\overline{X}, \overline{E})})^{(-1)^i},$$

où $\overline{E}$ *désigne l'image inverse de* E *au-dessus de* $\overline{X}$.

D'après les propriétés d'additivité et de multiplicativité respectives de la trace et du déterminant dans la catégorie des $\mathbf{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie, il es clair que pour tout triangle exact

$$\begin{tikzcd} & E'' \arrow[dl, dashed] & \\ E' \arrow[rr] & & E, \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

on a

(3.5.1) $$\chi(E) = \chi(E') + \chi(E'').$$

(3.5.2) $$\delta(E) = \delta(E')\delta(E'').$$

En particulier, pour tout $m \in \mathbf{Z}$ et tout $E \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$,

$$\chi(E[m]) = (-1)^m \chi(E) \quad \text{et} \quad \delta(E[m]) = (\delta(E))^{(-1)^m}.$$

Proposition **3.6**. — *Soit* $g : X \longrightarrow \mathbf{F}_p$ *un schéma projectif sur* $\mathbf{F}_p$. *On pose* $K_X = \mathrm{R}\, g^!(\mathbf{Q}_\ell)$, *et* $\mathrm{D}_X = \mathrm{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(., K_X)$. *Alors, pour tout* $E \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$, *on a l'identité*

$$L_{\mathrm{D}_X(E)}(t) = (-t)^{-\chi(E)} \delta(E) L_E(t^{-1}).$$

Preuve : Le second membre a un sens d'après (3.3). Posons $S = \mathrm{Spec}$ et $\mathrm{D}_S = \mathrm{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(., \mathbf{Q}_\ell)$. D'après (2.3.2 a)), on a

$$\mathrm{R}\, g_*(D_X E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}_S\, \mathrm{R}\, g_*(E),$$

donc (3.3)

$$L_{\mathrm{D}_X}(E) = L_{\mathrm{D}_S(\mathrm{R}\, g_*(E))}.$$

Comme $L_E = L_{\mathrm{R}\, g_*(E)}$ (3.3), l'assertion résultera du lemme suivant

Lemme **3.7**. — *Si $F \in \mathrm{D}^b_c(S, \mathbf{Q}_\ell)$, on a :*

$$L_{\mathrm{D}_S(F)}(t) = (-t)^{\chi(F)} \delta(F) L_F(t^{-1}).$$

D'après les propriétés d'additivité et demultiplicativité (3.5.1) et (3.5.2), on peut supposer que $F \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(S)$. Alors F correspond (SGA5 VII 1.4.2) à un $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension fini V muni d'une opération continue f_V du Frobenius, et le $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau $\mathrm{D}_S(F) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(F, \mathbf{Q}_\ell)$ correspond (II 1.26) au $\mathbf{Q}_\ell$-espace vectoriel V^ν muni de l'opération continue $(f^\nu_V)^{-1}$ du Frobenius. Il suffit alors de montrer que, étant donnés un corps K, un K-espace vectoriel de dimension finie V et un automorphisme u de V, on a l'identité

$$1/\det(1 - u^{-1} t) = (-t)^{-\dim(V)} \det(u)/\det(1 - u t^{-1}) \tag{3.8}$$

dans $K(t)$. On peut pour cela supposer K algébriquement clos, donc u triangulable, puis, grâce aux propriétés de multiplicativité du déterminant, que $\dim(V) = 1$. Alors u est l'homothétie définie par un scalaire non nul λ, et (3.8) est l'identité évidente

$$1/(1 - (t/\lambda)) = (-\lambda/t)/(1 - (\lambda/t)).$$

Bien entendu, la formule (3.6) ne présente d'intérêt en pratique que si l'on dispose d'une expression simple pour $\mathrm{D}_X(E)$. Nous allons maintenant donner des cas où il en est ainsi.

Proposition **3.9**. — *On suppose X quasiprojectif, lisse et purement de dimension n sur $\mathbf{F}_p$. Posant pour tout $E \in \mathrm{D}^b_c(S, \mathbf{Q}_\ell)$*

$$E^V = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell),$$

on a un isomorphisme

$$\mathrm{D}_X(E) \simeq E^V(n)[2n]$$

dans chacun des cas suivants

(i) $E \in \mathrm{D}^b_t(X, \mathbf{Q}_\ell)$

(ii) *X est une courbe, et E est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible de la forme $i_*(M)$, où $i : U \hookrightarrow X$ est l'inclusion d'un ouvert dense de X et $M \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(U)$.*

Preuve : Comme $\mathrm{D}_X(E) = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(n))[2n]$, le cas (i) résulte du lemme suivant.

Lemme **3.9.1**. — *Étant donnés un schéma noethérien X, $F \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$ et $G \in \mathbf{Q}_\ell - \mathrm{fscn}(U)$, on a:*

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(F, G) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Il s'agit de voir que si $F \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$ et $G \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fscn}(X)$, les $\mathbf{Z}_\ell$-faisceaux $\mathrm{Ext}^j_{\mathbf{Z}_\ell}(F, G)$ $(j \geq 1)$ sont annulés par une puissance de ℓ. D'après (I 6.4.2) et (II 1.2.1), on peut, quitte à se restreindre à des parties localement fermées convenables de X, supposer que $G \in \mathbf{Z}_\ell - \mathrm{fsct}(X)$. Alors, compte tenu de (II 1.26), l'assertion résulte de l'assertion analogue, bien connue, pour les $\mathbf{Z}_\ell$-modules de type fini. Montrons (ii).

Il s'agit de voir que

$$P^j = \underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) = 0 \quad (j \geq 1).$$

Comme M est constante tordu constructible, il résulte du cas (i) que $P^j | U = 0$. Il nous suffit donc de voir que pour tout point fermé x de $Y = X - U$ et tout point géométrique $\overline{x}$ au-dessus de x, on a $P^j_{\overline{x}} = 0$. Le pendant pour les $\mathbf{Q}_\ell$-faisceaux de la variante (SGA5 I 4.6.2) du théorème de dualité locale fournit un accouplement parfait

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_{\mathbf{Q}_\ell}(E, \mathbf{Q}_\ell(1)) \times \underline{\mathrm{H}}^{2-j}_{\overline{x}}(E) \longrightarrow \mathbf{Q}_{\ell'} \tag{3.9.2}$$

avec (SGA5 I 4.5.1)

$$\underline{\mathrm{H}}^{2-j}_{\overline{x}} = (\underline{\mathrm{H}}^{2-j}_{x}(E))_{\overline{x}}.$$

Comme le morphisme d'adjonction canonique

$$E \longrightarrow i_* i^*(E)$$

est un isomorphisme, il résulte de la première suite exacte de (SGA4 V 4.5) que

$$\underline{\mathrm{H}}^0_x(E) = \underline{\mathrm{H}}^1_x(E) = 0,$$

d'où aussitôt le résultat annoncé.

Ceci dit, lorsque X est projectif sur $\mathbf{F}_\ell$, la formule (3.6) prend la forme

$$L_{E^\vee}(p^{-n}t) = (-1)^{-\chi(E)}\delta(E)L_E(t^{-1}), \tag{3.10}$$

dans chacun des cas de (3.9). Compte tenu de (3.2 a)), cela résulte du lemme suivant.

Lemme **3.11**. — *Soient X un schéma de type fini sur $\mathbf{F}_\ell$, et $F \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Posant $F(j) = F \otimes \mathbf{Q}_\ell(j)$ $(j \in \mathbf{Z})$, on a la relation*

$$L_{F(j)}(t) = L_F(p^{-j}t).$$

D'après les propriétés de multiplicativité (3.2 a)), on peut pour le voir supposer que F est un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau constructible; alors, comme le Frobenius opère sur $\mathbf{Q}_\ell(j) \simeq \mathbf{Q}_\ell$ (non canoniquement) par l'homothétie de rapport p^{-j}, l'assertion est immédiate sur la définition (3.0).

Supposons maintenant qu'on ait de plus un isomorphisme

$$E^\vee \xrightarrow{\sim} E(\rho) \quad \text{pour un } \rho \in \mathbf{Z}.$$

Alors la formule (3.10) prend la forme

$$L_E(p^{-n-\rho}t) = (-t)^{-\chi(E)}\delta(E)L_E(t^{-1}),$$

ou encore, après avoir posé $q = n + \rho$ et fait le changement de variable $t \mapsto t^{-1}$,

$$L_E(1/qt) = (-t)^{\chi E}\delta(E)L_E(t). \tag{3.12}$$

Remarque 3.13. Sous les hypothèses de (3.9), l'existence d'un tel entier p est assurée dans les cas suivants

cas (i) $E \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

cas (ii) $M \xrightarrow{\sim} \mathbf{Q}_\ell(m)$ pour un $m \in \mathbf{Z}$, et alors $p = -2m$.

(Pour ce dernier cas, il est immédiat que

$$i_*(M^\vee) \simeq (i_*(M))^\vee. \quad)$$

Explicitons enfin une relation importante entre les entiers $\chi(E)$ et $\delta(E)$.

Proposition **3.14**. — *Soient X un schéma projectif et lisse purement de dimension n sur $\mathbf{Z}_p$ et $E \in \mathrm{D}^b_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$. On suppose qu'il existe un entier m tel que*

$$\mathrm{D}_X(E) \xrightarrow{\sim} E(m),$$

et on pose $q = p^m$. Alors, on a, l'égalité

$$\delta(E)^2 = q^{\chi(E)}.$$

Preuve : La substitution $t \mapsto 1/qt$ dans (3.12) fournit l'équation fonctionnelle

(3.12 bis) $$L_E(t) = (-1/qt)^{\chi(E)}\delta(E)L_E(1/qt).$$

Multipliant (3.12) et (3.12 bis) membre à membre, on obtient l'identité

$$L_E(t)L_E(1/qt) = q^{-\chi(E)}(\delta(E))^2 L_E(t)L_E(1/qt),$$

d'où aussitôt la relation désirée, compte tenu du fait que L_E n'est pas identiquement nulle, comme il est clair sur sa définition (3.0).