Productos de Renta Fija y Tasas de Interés

Hernán Reisin

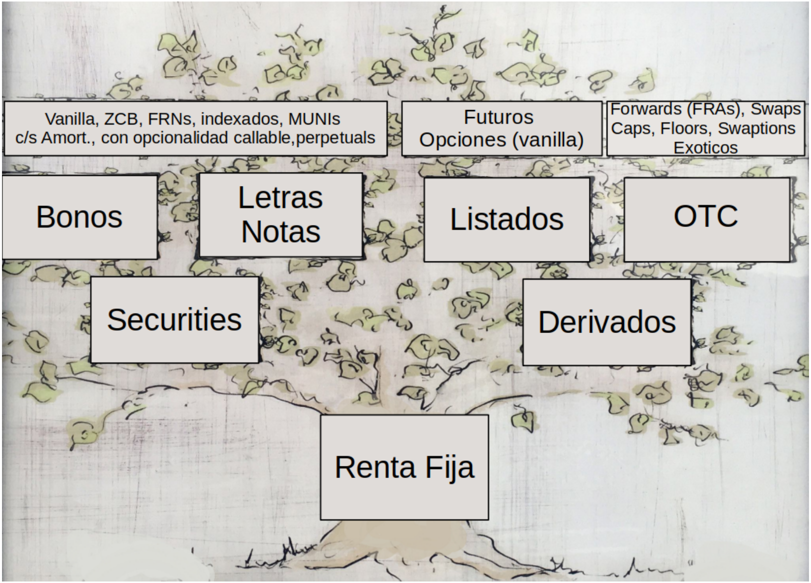
QUANt UCEMA 2020
2020, Buenos Aires

Quien les habla

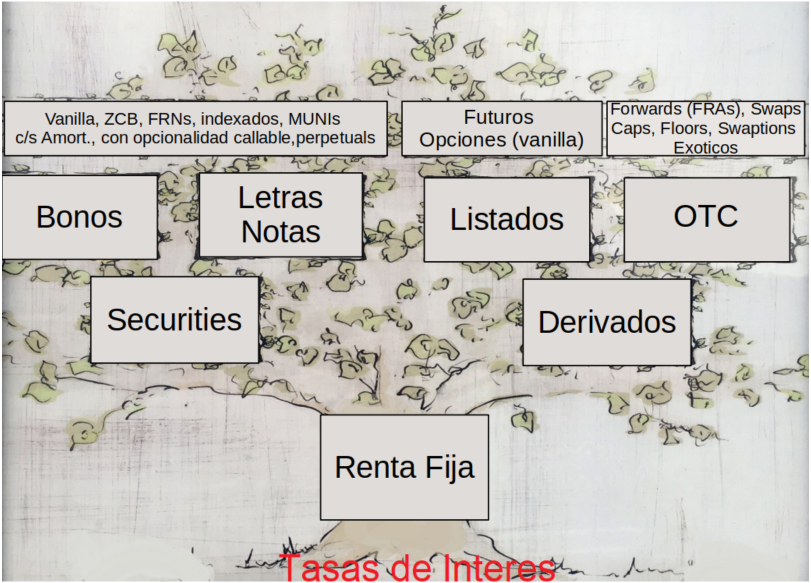
Disclaimer The views and opinions expressed here are those of the author and do not necessarily reflect the position of my current or former employer.

Introducción

Derivados de Tasa

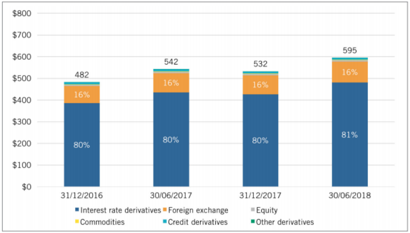


Derivados de Tasa

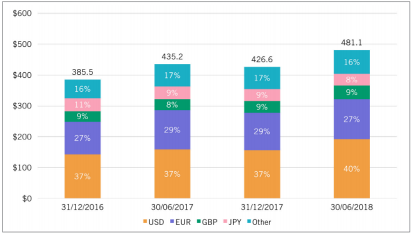


Las tasas de interés subyacen a todos [*estos*/*los*] derivados.
En estos derivados la tasa de interés es el driver *dominante*

Derivados de Tasa



Source: BIS OTC Derivatives Statistics

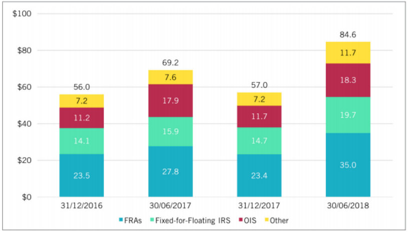


Source: BIS OTC Derivatives Statistics

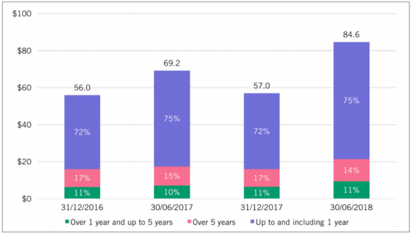
https://www.isda.org/a/gmGEE/Key-Trends-in-the-Size-and-Composition-of-OTC-Derivatives-Markets.pdf

- El mercado global de derivados OTC tuvo $\sim U\$S600$ (US) trillions de notional outstanding a mediados de 2018.
- La mayor parte en derivados de tasa de interés (81 %) y en contratos denominados en U$S (40 %).

Derivados de Tasa - US market



Source: DTCC and Bloomberg SDRs

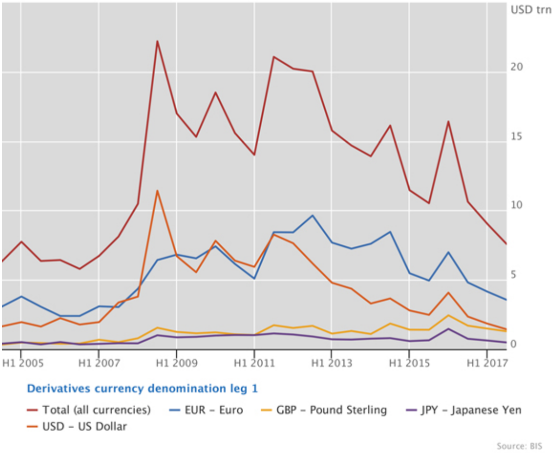


Source: DTCC and Bloomberg SDRs

https://www.isda.org/a/gmGEE/Key-Trends-in-the-Size-and-Composition-of-OTC-Derivatives-Markets.pdf

- El outstanding amount de derivados de tasa creció durante 2018 principalmente debido a trades a corto plazo como Forward Rate Agreements (FRA), Overnight Index Swaps (OIS) y Swaps fix-float.
- La mayor porción de contratos IRD corresponde a maturities de corto plazo.

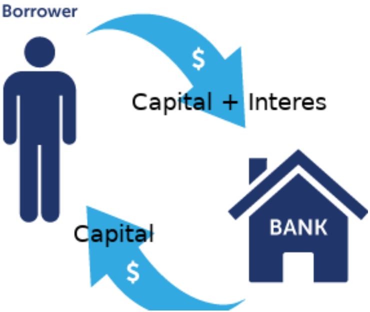
Derivados de Tasa



https://www.bis.org/publ/otc_hy1805.htm

- A diferencia del outstanding amount el *gross market value* de OTC IRDs está en marcado descenso (en 2017 regresó a niveles del 2007).

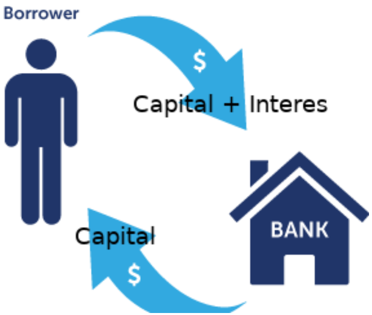
Generalidades acerca Interés

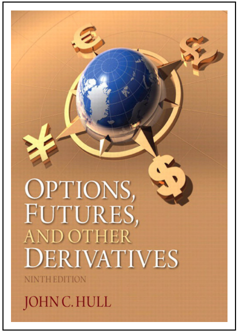


El interés es un incentivo al prestamista para ceder el uso de su capital a otro individuo. El rendimiento de ese dinero debe compensar el rendimiento que obtendría realizando otra inversión (el costo de oportunidad) o la depreciación por devaluación. Incluye además el pago de un "premium" al prestamista en compensación a éste por tomar el riesgo crediticio de no-devolución del préstamo.

El prestatario acepta el pago de un interés a cambio del derecho sobre el uso de ese capital. Ese interés será en última instancia una transferencia de parte del rendimiento que consiga el prestatario al disponer de ese capital prestado.

Generalidades acerca Interés





An interest rate in a particular situation defines the amount of money a borrower promises to pay the lender. For any given currency, many different types of interest rates are regularly quoted. These include mortgage rates, deposit rates, prime borrowing rates, and so on. The interest rate applicable in a situation depends on the credit risk. This is the risk that there will be a default by the borrower of funds, so that the interest and principal are not paid to the lender as promised. The higher the credit risk, the higher the interest rate that is promised by the borrower.

Risk Drivers de Tasas de Interés

- **Oferta y Demanda.** La tasa de interés es el costo de acceder a un préstamo de dinero (entre el entramado de individuos, institucionales, bancos, gobiernos, organismos supranacionales, etc.). Demanda *vs.* disponibilidad.
- **Política monetaria.** Gobiernos actuan intentando influir en las tasas de referencia fomentando o desfavoreciendo la oferta de dinero mediante emisión monetaria, recompra de securities (inyección de liquidez), suscripción de letras (e.g. LELIQ), regulación de la liquidez de la plaza (e.g. encajes bancarios).
- **Inflación.** Depreciación de la moneda y devaluación del poder de compra impactan en la oferta de dinero. El prestador ofrece a plazos mas cortos o a cambio de mayor tasa de interés para compensar el riesgo de crédito.

Interés

Se determina sobre el principal de un préstamo o depósito como el producto de dicho nocional (N) por de la tasa de interés (r) por el numero de días entre los pagos que ocurren en t_1 y t_2

$$c = N \times r \times \tau(t_1, t_2) \tag{1}$$

Usada para reportar tasas interbancarias (localmente la 'tasa nominal').

La tasa del interés r tiene unidades implicitas de $1/\textit{tiempo}$. Si r es una tasa anual entonces τ se mide como una fracción de año. También suelen expresarse en *basis points*, 1 bp es 0.01 % *per annum*.

El plazo de la acumulación del interés sigue convenciones para el cómputo de la medida de tiempo (day count convention).

¿Cuáles son los factores aleatorios? N suele no serlo, la tasa r suele ser aleatoria, $\tau(t_1, t_2)$ el período debiera ser siempre determinístico (excepto algunas sutilezas, como los cambios inesperados de feriados)

Interés de Composición Simple

- El valor de la inversión al término del período de acumulación es

$$V(t_1) = V(t_0) + c_1 = V(t_0) + V(t_0) \times r \times \tau(t_0, t_1)$$

- El valor de la inversión al término del siguiente período de acumulación es

$$V(t_2) = V(t_1) + c_2 = V(t_1) + V(t_0) \times r \times \tau(t_1, t_2)$$

- Lo mismo ocurre para cualquier período de reinversión posterior

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) + c_n = V(t_{n-1}) + V(t_0) \times r \times \tau(t_{n-1}, t_n)$$

- Podemos pensar el interés simple como el interés que resulta de reinvertir solo el capital y *cashear* los rendimientos provenientes del interés

$$\boxed{V(t_n) = V(t_{n-1}) + V(t_0) \times r \times \tau(t_{n-1}, t_n)}$$

- El valor nominal de la inversión a tiempo t_n puede resumirse por recursividad

$$V(t_n) = V(t_0)\left[1 + \sum_{i=1}^{n} r\,\tau(t_{i-1}, t_i)\right]$$

Interés de Composición Compuesta

- El valor de la inversión al término del período de acumulación es

$$V(t_1) = V(t_0) + c_1 = V(t_0) + V(t_0) \times r \times \tau(t_0, t_1)$$

  (hasta aca es idéntico al caso anterior)

- El valor de la inversión al término del siguiente período de acumulación es

$$V(t_2) = V(t_1) + c_2 = V(t_1) + V(t_1) \times r \times \tau(t_1, t_2)$$

- Lo mismo ocurre para cualquier período de reinversión posterior

$$V(t_n) = V(t_{n-1}) + c_n = V(t_{n-1}) + V(t_{n-1}) \times r \times \tau(t_{n-1}, t_n)$$

- Podemos pensar el interés compuesto como el interés que resulta de reinvertir el capital *más* los rendimientos de interés

$$\boxed{V(t_n) = V(t_{n-1}) \left[1 + r \times \tau(t_{n-1}, t_n)\right]}$$

- El valor nominal de la inversión a tiempo t_n puede resumirse por recursividad

$$V(t_n) = V(t_0) \left[\prod_{i=1}^{n} \left[1 + r\,\tau(t_{i-1}, t_i)\right]\right]$$

Interés de Composición Compuesta - Frecuencia de composición

La tasa de interés puede medirse (o aplicarse) a distintos plazos. Si la tasa se compone anualmente entonces una tasa de interés del 20 % significa que al final del primer año \$100 valdrán $\$100 \times 1{,}2 = \$120$.

Si el interés 20 % p.a. se compone semestralmente, significa que se gana 10 % cada 6 meses, por lo tanto \$100 valdrán $\$100 \times 1{,}1 \times 1{,}1 = \$121$ al final del primer año.

En general, si la composición tiene una frecuencia anual k, una inversión a m años tendrá un rendimiento de

$$V(t_0)\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{km}$$

Take away: la tasa se reporta anual pero su composición puede tener distintos plazos

Interés de Composición Contínua

- Volvamos al caso inicial de composición compuesta

$$V(t_2) = V(t_1)\left[1 + r \times \tau(t_1, t_2)\right]$$

pero consideremos que existen k períodos de pago entre tiempos t_1 y t_2 (frecuencia de composición).

- En el contexto de interés compuesto

$$V(t_2) = V(t_1)\left[1 + r\frac{\tau(t_1, t_2)}{k}\right]^k$$

- En el límite $k \to \infty$ llegamos a la composición contínua

$$V(t_2) = V(t_1)\exp\left[r\tau(t_1, t_2)\right]$$

de la que despejamos la tasa de interés según

$$r = \frac{\ln(V(t_2)) - \ln(V(t_1))}{\tau(t_1, t_2)}, \qquad \text{(recuerden esta fórmula)}$$

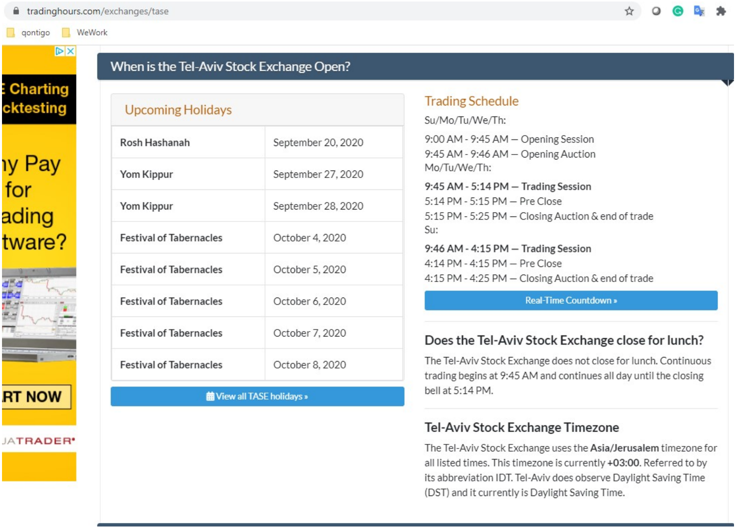
En la práctica $k = 360 \sim \infty$

Convenciones de Mercado

Convenciones de Mercado

- Cómputo de la medida de tiempo $\tau(t_1, t_2)$, *day count convention*.
- Para valuar un derivado de tasas hay que generar un calendario en base a la convención de días laborables (especificado en el prospecto o contrato).
- La elección del calendario de feriados es en general afín a las monedas del instrumento.

Business Day Convention



tradinghours.com/exchanges/tase

qontigo WeWork

When is the Tel-Aviv Stock Exchange Open?

Upcoming Holidays

Rosh Hashanah	September 20, 2020
Yom Kippur	September 27, 2020
Yom Kippur	September 28, 2020
Festival of Tabernacles	October 4, 2020
Festival of Tabernacles	October 5, 2020
Festival of Tabernacles	October 6, 2020
Festival of Tabernacles	October 7, 2020
Festival of Tabernacles	October 8, 2020

View all TASE holidays »

Trading Schedule

Su/Mo/Tu/We/Th:

9:00 AM - 9:45 AM — Opening Session
9:45 AM - 9:46 AM — Opening Auction

Mo/Tu/We/Th:

9:45 AM - 5:14 PM — Trading Session
5:14 PM - 5:15 PM — Pre Close
5:15 PM - 5:25 PM — Closing Auction & end of trade

Su:

9:46 AM - 4:15 PM — Trading Session
4:14 PM - 4:15 PM — Pre Close
4:15 PM - 4:25 PM — Closing Auction & end of trade

Real-Time Countdown »

Does the Tel-Aviv Stock Exchange close for lunch?

The Tel-Aviv Stock Exchange does not close for lunch. Continuous trading begins at 9:45 AM and continues all day until the closing bell at 5:14 PM.

Tel-Aviv Stock Exchange Timezone

The Tel-Aviv Stock Exchange uses the **Asia/Jerusalem** timezone for all listed times. This timezone is currently **+03:00**. Referred to by its abbreviation IDT. Tel-Aviv does observe Daylight Saving Time (DST) and it currently is Daylight Saving Time.

Ajuste de fechas de pago

- **No-Adjustment.** Los feriados son ignorados. Pagos o débitos pueden ocurrir y efectivizarse en días feriados.
- **Previous / Following.** Los flujos correspondientes a un feriado se efectúan (y computan) el día laboral inmediato previo / posterior.
- **Modified Previous / Modified Following.** Los flujos de fondo se ajustan al día laboral previo/posterior más próximo, excepto que sea de otro mes. Si el potencial dia ajustado es de otro mes se aplica Following /Previus.
- **End of Month - No Adjustment.** Los pagos se supone que ocurren el último día calendario del mes, sin importar si no es laborable.
- **End of Month - Previous (Following)**. Ídem el anterior pero se corre al día hábil previo (posterior) si el fin de mes es no laborable.

Unidad de tiempo

- El tiempo $\tau(t_1, t_2)$ entre dos fechas $t_1 = d_1/m_1/y_1$ y $t_2 = d_2/m_2/y_2$ se mide en unidades de años (*year fraction*).
- El ***day count convention*** salva la indeterminación acerca de qué significa la diferencia entre dos fechas: "$t_2 - t_1$" y permite definir la medida de tiempo entre ellas
  - ***Actual*/365.** El año tiene 365 días

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{\#\text{ de días transcurridos entre } t_1 \text{ y } t_2}{365}$$

  - ***Actual*/360.** Idéntico al caso anterior pero el año tiene 360 días
  - **30/360.** Los meses cuentan por 30 días, y los años por 360 días

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{min(d_2, 30) + (30 - d_1)^+}{360} + \frac{(m_2 - m_1 - 1)^+}{12} + y_2 - y_1$$

  - ***Actual*/*Actual*.** Considera los días transcurridos seguún el año sea bisiesto o no

$$\tau(t_1, t_2) = \frac{\#\text{ días en año bisiesto}}{366} + \frac{\#\text{ días en año no bisiesto}}{365}$$

  - **30/360 US**, **30E/360**, **30E/360 ISDA**, **Actual/365L**, ...

Resumen de Ajuste de fechas

1. Los días t_1 y t_2 pueden ser modificados según el calendario de feriados y la convención de ajuste de días laborables

$$t_1 \rightarrow t_1^*, t_2 \rightarrow t_2^*$$

2. La medida temporal se define por la convención de conteo de días (dcc).
3. Se computa el cupón

$$c = N \times r \times \tau_{dcc,calendar[USD]}(t_1^*, t_2^*) \tag{2}$$

Ejemplo. Pago semestral entre t_1 =1 Enero 2019 y t_2 =14 de Junio de 2019, bajo calendario USD ajuste Mod-Follow. t_1^* =2 Enero 2019 y t_2 =17 de Junio de 2019

$\tau(t_1, t_2)$	dcc
0.4583333	30/360
0.4547945	actual/actual
0.4611111	actual/360
0.4547945	actual/365

La diferencia es magnificada por el Nocional (e.g. millones de U$S).


inp_array));
-1 < b && a.splice
-1 < b && a.splice
function use_array(a, b) {
(a, b) {
for (var c = -1, d
dynamicSort(a) {
d[a] ? -1 : c[a] > d[a]
a.length + 1;
} else {

Coding Time

¿Qué es LIBOR?

LIBOR

LIBOR is short for *London Interbank Offered Rate*. It is an unsecured short-term borrowing rate between banks. LIBOR rates have traditionally been calculated each business day for 10 currencies and 15 borrowing periods. The borrowing periods range from one day to one year. LIBOR rates are used as reference rates for hundreds of trillions of dollars of transactions throughout the world. One popular derivatives transaction that uses LIBOR as a reference interest rate is an interest rate swap (see Chapter 7). LIBOR rates are published by the British Bankers Association (BBA) at 11:30 a.m. (UK time). The BBA asks a number of different banks to provide quotes estimating the rate of interest at which they could borrow funds just prior to 11:00 a.m. (UK time). The top quarter and bottom quarter of the quotes for each currency/borrowing-period combination are discarded and the remaining ones are averaged to determine the LIBOR fixings for a day. Typically the banks submitting quotes have a AA credit rating.[1] LIBOR is therefore usually considered to be an estimate of the short-term unsecured borrowing rate for a AA-rated financial institution.

In recent years there have been suggestions that some banks may have manipulated their LIBOR quotes. Two reasons have been suggested for manipulation. One is to make the banks' borrowing costs seem lower than they actually are, so that they appear healthier. Another is to profit from transactions such as interest rate swaps whose cash flows depend on LIBOR fixings. The underlying problem is that there is not enough interbank borrowing for banks to make accurate estimates of their borrowing rates for all the different currency/borrowing-period combinations that are used. It seems likely that over time the large number of LIBOR quotes that have been provided each day will be replaced by a smaller number of quotes based on actual transactions in a more liquid market.

Hull

- ¿Por qué se usaba LIBOR como tasa de referencia? Se suponía una tasa del costo de prestar dinero entre bancos-AA
- Plazos desde O/N hasta 12 meses, en varias monedas

Reemplazo de LIBOR

Before discussing solutions, let's review what we're trying to solve.

It became apparent after the financial crisis that LIBOR was being manipulated. Financial firms misstated their LIBOR submissions—often in collusion with each other—to make better returns on their swap books. During the financial crisis, they also submitted artificially low rates to avoid signaling financial weakness. Manipulation was possible because of the way LIBOR submissions were made. Banks were asked to estimate the rate at which they *could* borrow from other banks, not rates at which they *actually* borrowed. Their quotes were hypothetical—guesses if you will—and were therefore particularly easy to compromise.

At the same time, the way banks fund themselves has changed. The unsecured London interbank market, which LIBOR was designed to measure, was active when LIBOR was created, but that just isn't how banks finance themselves any more. The Fed estimates that on a typical day there are currently around six to seven actual market transactions—totaling about $500 million—that could underpin one- and three-month U.S. dollar LIBOR across all of the panel banks. For the six-month tenor, there are only two or three transactions per day. At the one-year tenor the average is one transaction per day, and on many days there are none.[4] That means that the majority of panelist submissions each day are based solely on "expert judgment."

https://www.newyorkfed.org/newsevents/speeches/2019/hel190226

- Bancos en Londres y New York manipularon la tasa LIBOR (tasa de préstamos no-colateralizados), que es auto-reportada.
- Además eran trades ilíquidos "200 trillions of exposures calculated on transactions worth few hundred millions"

Reemplazo de LIBOR

> LIBOR. But SOFR is an overnight rate—there's no such thing as three-month or six-month SOFR.
>
> One solution to this difference is to use the daily SOFR for each day during the term, either averaged or compounded each day until the end of the period. ISDA has indicated that derivatives will fall back to this kind of average, and the SOFR floating rate notes issued recently use a similar approach. To facilitate this method, the New York Fed is preparing to produce a backward-looking compounded average alongside the daily SOFR.

https://www.newyorkfed.org/newsevents/speeches/2019/hel190226

- Secured Overnight Finance Rates (SOFR) es *benchmark* alternativo (pero es overnight, en tanto LIBOR era O/N hasta 1y)
- Es un repo-rate overnight colateralizado con letras del Tesoro de USA
- Basado en transaccones reales, aprox. 1 trillion USD por día
- Como las transacciones subyacentes estan colateralizadas la tasa es casi *risk-free*

Reemplazo de LIBOR

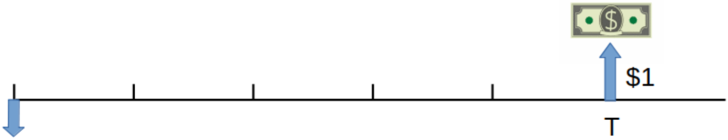
Country	LIBOR Rate	New Risk-Free Rate	Transition Committee
United States	USD LIBOR	SOFR	Alternative Reference Rates Committee
United Kingdom	GBP LIBOR	SONIA	Sterling Working Group on Risk-Free Rates
Japan	TIBOR, JPY LIBOR and Euroyen TIBOR	TONA	Cross-Industry Committee on Japanese Yen Interest Rate Benchmarks
Europe	EURIBOR and EUR LIBOR	ESTER	European Money Markets Institute (EMMI) and Euro RFR Working Group
Canada	CDOR	CORRA	Canadian Alternative Reference Rate Working Group (CARR)
Switzerland	CHF LIBOR	SARON	The National Working Group on Swiss Franc Reference Rates
Australia	BBSW	RBA Cash Rate (AONIA)	Australian Financial Markets Association
Hong Kong	HIBOR	HONIA	Treasury Markets Association's Market Practices Committee

- La transición está programada para 2022
- SONIA es un-secured, O/N, sobre mercado líquido y activo.
- Euro short-term rate (ESTR) es O/N, también es casi una tasa risk-free

Bonos de Cupón Cero, Tasas Spot y Forward

Zero-Coupon Bonds

- Un bono es una forma *securitizada* de un préstamo.
- Los bonos son los instrumentos financieros principales en un mercado donde se comercie el valor tiempo del dinero.
- Un bono de cupón cero (*zero-coupon bond*, ZCB) con vencimiento en T (a.k.a. T-bond) es un contrato que le garantiza al poseedor el derecho de recibir una unidad monetaria a ser pagada en el tiempo de madurez T, sin pago intermedio alguno.



- Siendo $P(t, T)$ el valor del bono a tiempo t se cumple que (en ausencia de default)

$$
\begin{aligned}
&P(t, T) > 0, \text{ si } t < T \\
&P(T, T) = 1 \\
&P(t, T) = 0, \text{ si } t > T \\
&P(t, T) \text{ es diferenciable en T}
\end{aligned}
$$

(¿qué pasaría ante default?)

Tasas spot simple

El valor de un ZCB es la cantidad que nos permite medir en cada momento el valor de un pago futuro. Esta relación de dinero entre dos tiempos distintos (el settlement y el vencimiento) tiene una tasa implícita asociada.

Todas las tasas spot pueden ser definidas en términos de precios de ZCB.

Recíprocamente, los precios de los ZCB pueden recuperarse a partir de una estructura de tasas de interés dada (term-structure que vamos a ver mas adelante). Así, dado un mercado de ZCB, podemos construir toda la curva de tasas asociada en forma biunívoca.

La **tasa de interés spot simple** (anualizada) a tiempo t para un horizonte T, es la tasa de retorno implícita en el precio de un ZCB

$$F(t,T) \doteq \frac{1}{T-t}\frac{P(T,T)-P(t,T)}{P(t,T)} = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)}-1\right)$$

da lugar a

$$P(T,T) = P(t,T)[1+F(t,T)(T-t)]$$

Tasas spot compuesta

Del mismo modo, la **tasa de interés *spot* contínuamente compuesta** para el período $[t, T]$ es el log-retorno del ZCB que vence en T.

$$R(t,T) \doteq \frac{\ln P(T,T) - \ln P(t,T)}{T-t} = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

da lugar a

$$P(T,T) = P(t,T)\exp\left[R(t,T)(T-t)\right]$$

Tasas spot instantánea

Partiendo de la tasa contínua (sobre un plazo finito de tiempo)

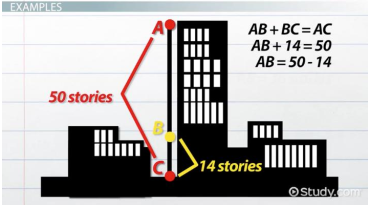
$$R(t,T) \doteq \frac{\ln P(T,T) - \ln P(t,T)}{T-t} = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

En el límite de un préstamo por tiempo infinitesimal se realiza a la **tasa short instantánea**

$$r(t) = \lim_{T \to t^+} R(t,T) = \lim_{T \to t^+} -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

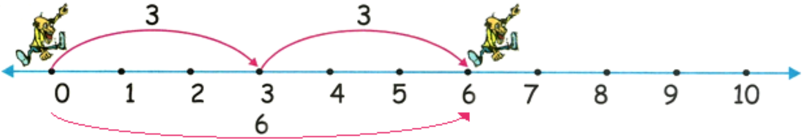
Representa el yield de un bono que expira en un tiempo infinitesimal. . . . Existen bonos que expiran en un día pero no necesariamente representan las tasas de interés instantáneas. En la práctica debería tomarse como el yield de bonos líquidos cortos (e.g. $T = 1m$) como proxies de la tasa spot instantánea

Tasa Forward Simple



Postulado de suma de segmentos

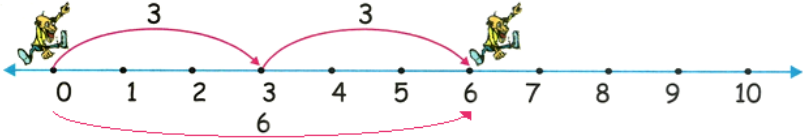
Hacemos una inversión en t_0, a tiempo t_3 reinvertimos a la tasa vigente (a $t = t_3$) y en tiempo t_6 cobramos la renta total



$$N\left[1 + F(t_0, t_6)(t_6 - t_0)\right] = N\left[1 + F(t_0, t_3)(t_3 - t_0)\right]\left[1 + F(t_3, t_6)(t_6 - t_3)\right]$$

¿Está bien esta relación? El plazo $t_3 \to t_6$ comienza en el futuro, no podemos usar una tasa spot el segundo período!

Tasa Forward Simple



$$N\left[1 + F(t_0, t_6)(t_6 - t_0)\right] = N\left[1 + F(t_0, t_3)(t_3 - t_0)\right]\left[1 + F(t_3, t_6)(t_6 - t_3)\right]$$

Hoy es t_0 no t_3, por lo tanto no conocemos $R(t_3, t_6)$... pero tenemos un buen estimador por no-arbitrage (tasas implícitas). La expresión correcta es

$$N\left[1 + F(t_0, t_6)(t_6 - t_0)\right] = N\left[1 + F(t_0, t_3)(t_3 - t_0)\right]\left[1 + F(t_0; t_3, t_6)(t_6 - t_3)\right]$$

donde $F(t_0; t_3, t_6)$ es la tasa forward simple que conocemos hoy t_0, para una reinversión que ocurrirá entre t_3 y t_6. Queda definida por los préstamos entre los otros dos plazos

$$F(t_0; t_3, t_6) = \frac{1}{t_6 - t_3}\left[\frac{1 + F(t_0, t_6)(t_6 - t_0)}{1 + F(t_0, t_3)(t_3 - t_0)} - 1\right]$$

Tasa Forward Simple

Generalizando para tiempos t_0, S y T

$$F(t_0; S, T) = \frac{1}{T - S}\left[\frac{1 + F(t_0, T)(T - t_0)}{1 + F(t_0, S)(S - t_0)} - 1\right]$$

Que en términos de ZCBs con vencimientos en S y en T permite definir la tasa **tasa forward simple (o símplemente compuesta)** implícita de este proceso con reinversión futura como

$$F(t_0; S, T) \doteq \frac{1}{T - S}\left(\frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)} - 1\right)$$

La tasa forward es una tasa que involucra tres puntos del tiempo: el momento en que se pacta la tasa (t_0), el momento en que se efectiviza el préstamo forward a tiempo (S) y el horizonte del préstamo (T). Los tiempos S y T ocurren en el futuro!

En el límite de un préstamo que empieza muy próximo a t_0 se recupera la tasa spot simple

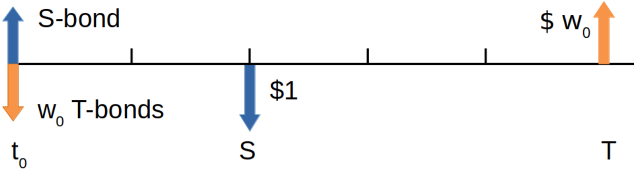
$$F(t_0; t_0, T) = \frac{1}{T - t_0}\left(\frac{P(t_0, t_0)}{P(t_0, T)} - 1\right) = \frac{1}{T - t_0}\left(\frac{1}{P(t_0, T)} - 1\right) \doteq F(t_0, T)$$

Lock-In de Tasa Forward Simple mediante ZCB

- Armamos un portafolio Π vendiendo en corto un S-bond y comprando $\omega_0 = P(t_0, S)/P(t_0, T)$ unidades de T-bond.
- El valor de este portfolio es

$$V_\Pi(t) = \frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)} P(t, T) - P(t, S)$$

Esta estrategia no tiene costo de entrada: $V_\Pi(t_0) = 0$



- El efecto neto de esta operación es la inversión forward de \$1 a tiempo S que resultará en un ingreso de $\$\frac{P(t_0,S)}{P(t_0,T)}$ a tiempo T, cuya tasa implícita es

$$\frac{1}{T - S}\left(\frac{P(t_0, S)}{P(t_0, T)} - 1\right)$$

- Este portfolio es una manera de realizar la tasa forward entre S y T.

Tasa Forward Compuesta

Al igual que con la tasas spot, puede definirse la **tasa forward contínuamente compuesta** a partir de no-arbitraje entre prestamos pactados a t_0

$$\underbrace{N \exp^{[R(t_0,T)(T-t_0)]}}_{\text{préstamo spot entre } t_0 \text{ y } T} = \underbrace{\underbrace{N \exp^{[R(t_0,S)(S-t_0)]}}_{\text{préstamo spot entre } t_0 \text{ y } S} \quad exp^{[R(t_0;S,T)(T-S)]}}_{\text{préstamo total con reinversión forward entre S y T}}$$

Al despejar encontramos la tasa compuesta como

$$R(t_0;S,T) = \frac{1}{(T-S)}[R(t_0,T)(T-t_0) - R(t_0,S)(S-t_0)]$$

que expresada en función de los ZCBs recuperamos una tasa definida en términos de log-retornos

$$R(t_0;S,T) \doteq \frac{\ln P(t_0,S) - \ln P(t_0,T)}{T-S}$$

Tasa Forward Instantánea

Cuando la duración del préstamo forward cuya tasa es

$$R(t_0; S, T) = \frac{\ln P(t_0, S) - \ln P(t_0, T)}{T - S}$$

es muy pequeño obtenemos la **tasa forward instantánea**

$$\begin{aligned} f(t_0; T) &= \lim_{T \to S^+} R(t_0; S, T) \\ &= \lim_{T \to S^+} \frac{\ln P(t_0, S) - \ln P(t_0, T)}{T - S} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t_0, T)}{\partial T} \end{aligned}$$

Intuitivamente, la tasa forward instantánea $f(t_0; T)$ es una tasa forward a tiempo t para un préstamo futuro de muy corto plazo,

$$f(t_0, T) \simeq R(t_0, T, T + \delta T)$$

Relación biunívoca entre ZCB y tasas

La definición de tasa spot simple conduce a la identidad

$$F(t_0, T) \doteq \frac{1}{T - t_0}\left(\frac{1}{P(t_0, T)} - 1\right) \quad \longleftrightarrow \quad P(t_0, T) = \frac{1}{1 + F(t_0, T)(T - t_0)}$$

La definición de tasa spot compuesta conduce a la identidad

$$R(t_0, T) \doteq -\frac{\ln P(t_0, T)}{T - t_0} \quad \longleftrightarrow \quad P(t_0, T) = \exp\left[-R(t_0, T)(T - t_0)\right]$$

La definición de tasa forward instantánea conduce a la identidad

$$f(t_0, S) \doteq -\frac{\partial \ln P(t_0, T)}{\partial T} \quad \longleftrightarrow \quad P(t_0, T) = \exp\left[-\int_{t_0}^{T} f(t_0, u)du\right]$$

Por construcción todas estas relaciones son consistentes. Lo que establecen es una relación entre observables hoy (t_0) y tasas definidas en función de esos observables. Pero no hay **ninguna** estocasticidad, ni tienen ninguna utilidad para **predecir** valores futuros (inciertos), e.g. $P(t, T)$, con $t > t_0$, pues las tasas forward aplican a tiempo t_0.

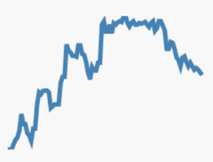
La Term-Structure

Term-structure y evolución de P(t,T)

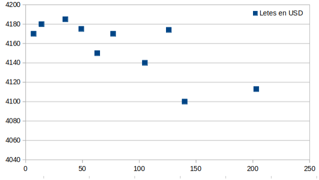
LETES EN USD | LETES EN PESOS

ESPECIE	PLAZO	ULT. OPERADO
U13S9	Inmediata	$ 4.150,00
U15N9	Inmediata	$ 4.174,00
U16G9	Inmediata	$ 4.185,00
U19L9	Inmediata	$ 4.170,00
U25O9	Inmediata	$ 4.140,00
U26L9	Inmediata	$ 4.180,00
U27S9	Inmediata	$ 4.170,00
U29N9	Inmediata	$ 4.100,00

$t \rightarrow P(t, T)$ para U13S9, T=13/9/2019

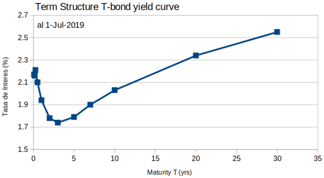


$T \rightarrow P(t, T)$ Term-structure de precios LETES en USD al 12 Julio 2019



- $t \rightarrow P(t, T)$ es un proceso estocástico, el precio futuro de un bono es incierto.
- $T \rightarrow P(t, T)$ es la *term-structure* de precios de ZCBs. Es una curva "suave" en maturity T. Se denomina también como **curva de descuento**

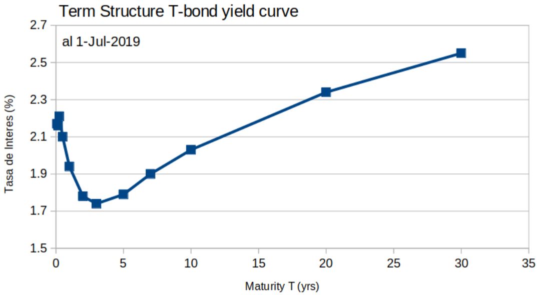
Zero-Coupon Bonds (mercado líquido)



https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield
https://www.cnbc.com/quotes/?symbol=US10Y

- $t \to R(t, T)$ es un proceso estocástico debido a que el precio futuro de un bono es incierto
- $T \to R(t, T)$ es la *term-structure* de tasas de ZCBs. Es una curva suave en maturity T. Tambien se la conoce como **curva zero** o **zero coupon yield curve**.

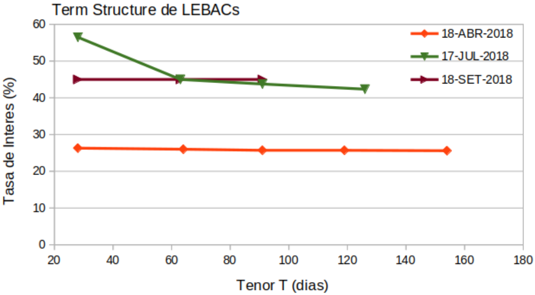
Term-Structure



https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=yield

- La Curva Cero es en general creciente en T para tenors grandes. La explicación de su forma normal creciente puede hallarse en que:
  - Mayor horizonte de inversion implica mayor riesgo (el tiempo es un risk-factor).
  - "Liquidity premium": menor liquidez en el tramo largo.
- Se dice que está "invertida" si $R(t, T_1) > R(t, T_2)$ con $T_1 < T_2$.

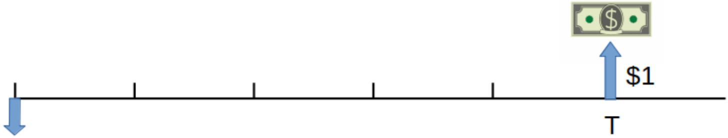
Term-Structure vs. t



- $T \to P(t, T)$ evoluciona con una dinámica estocástica.
- Es un problema de alta dimensionalidad (la curva posee muchos tenors).

Term structure

El precio de un ZCB es el valor presente de un flujo futuro de una unidad de moneda a tiempo T



$$D(T) = P(t, T) = NPV(\$1 \text{ pagado en t=T})$$

Precisamos la T-S para poder descontar flujos futuros, ergo para valuar

$$\pi(t) = P(t, T_1)c_1 + P(t, T_2)c_2 + \ldots + P(t, T_i)c_i + \ldots + P(t, T_n)c_n$$

Los ZCB son usados como factores de descuento, y la T-S de precios se denomina también como **curva de descuento**.

Money Market

Money-Market

- Instrumentos de inversión a muy corto plazo.
- Se invierten M_0 unidades de dinero a una tasa *overnight* $r_1 = r(t_0, t_1)$ por un plazo $\tau_1 = \tau\left(t_0, t_1\right)$

$$M(t_0, t_1) = M_0\left(1 + r_1\tau_1\right)$$

- Al término de cada vencimiento se reinvierte la totalidad del capital e intereses (*"rolling over" strategy*)

$$\begin{aligned} M(t_0, t_n) &= M_0\left(1 + r_1\tau_1\right)\left(1 + r_2\tau_2\right)\ldots\left(1 + r_n\tau_n\right) \\ &\approx M_0 \exp\left(r_1\tau_1\right)\exp\left(r_2\tau_2\right)\ldots\exp\left(r_n\tau_n\right) \\ &\approx M_0 \exp\left(r_1\tau_1 + r_2\tau_2 + \ldots + r_n\tau_n\right) \end{aligned}$$

- En el límite contínuo

$$M(t_0, t) = M_0 \exp\left(\int_0^{\tau(t_0,t)} r(u)du\right)$$

Money-Market

- En el tiempo t_0 se conoce $r_1(t_0, t_1)$, es una cuenta determinista

$$M(t_0, t_1) = M_0 \left(1 + r_1 \tau_1\right)$$

- En el tiempo t_0 la tasa *overnight* r_2 es desconocida

$$M(t_0, t_2) = M_0 \left(1 + r_1 \tau_1\right) \left(1 + r_2 \tau_2\right)$$

- El retorno de la cuenta MM es una variable estocástica (r es incierta bajo la filtración $\mathcal{F}_t$)

$$M(t_0, t) = M_0 \exp\left(\int_0^{\tau(t_0, t)} r(u) du\right)$$

- $M(t)$ es un activo que crece instantáneamente a tiempo t según la tasa corta

$$dM(t) = M(t) r(t) dt$$

Es un activo libre de riesgo en tanto su valor futuro a tiempo $t + \Delta t$ sea conocido a tiempo t. Por esto se denomina tasa libre de riesgo a $r(t)$ sobre el período $[t, t + \Delta t]$.

¿El Money-Market como Factor de Descuento?

La cuenta MM permite relacionar cantidades de moneda a diferentes tiempos: un depósito de \$1 en el MM a tiempo t_0 redundará en $M(t_0, T)$ unidades de \$ a tiempo T.

En forma equivalente un depósito de $M_0 = \$1/M(t_0, T)$ en t_0 permitirá obtener \$1 a tiempo T. Entendido así podríamos considerar

$$D(t, T) = \frac{1}{M(t, T)} = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \tag{3}$$

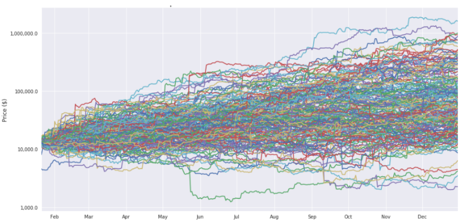
como un factor de descuento al igual como consideramos el precio $P(t, T)$ de un ZCB.

¿El Money Market como Factor de Descuento?

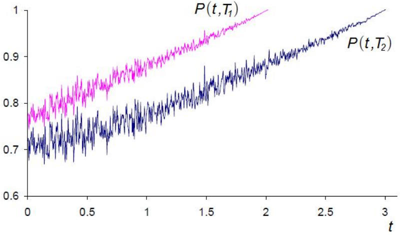
La diferencia fundamental radica en que en el caso del bono $P(t,T)$ se conoce a tiempo t_0 su valor terminal en T y su valor presente es observable del mercado. Sabemos hoy cuantas unidades del ZCB comprar hoy para obtener \$1 al vencimiento.

En el caso del money market, se conoce la tasa corta que nos permite conocer su valor inmediato próximo. Pero se desconoce el valor que tendrá el MM en un tiempo futuro $T > t$, por lo tanto no sabemos <u>cuántas unidades</u> de dinero invertir en el money market hoy a fin de obtener \$1 en tiempo T.

M(t,T)



Pull-to-par de P(t,T)



El money market tiene una condición <u>inicial</u>: la tasa corta.
El bono de ZC tiene una condición <u>terminal</u>: la amortización al vencimiento.

Factor de descuento - Zero coupon bonds

- En la medida de riesgo neutral el precio de un bono descontado por la money market es martingala

$$\frac{P(t,T)}{M(t,t)} = E^Q\left[\left.\frac{P(T,T)}{M(t,T)}\right|\mathcal{F}_t\right]$$

Dado que $P(T,T) = 1$ entonces resulta

$$P(t,T) = E^Q\left[\left.\frac{M(t,t)}{M(t,T)}\right|\mathcal{F}_t\right] = E^Q\left[\left.\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right|\mathcal{F}_t\right] \qquad (4)$$

El precio de un ZCB es la esperanza de la inversa del money market en la MRN. Este factor de descuento sí es conocido hoy.

- La inversa del Money-Market no lo es

$$\frac{1}{M(t,T)} = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \qquad (5)$$

Factor de descuento - Zero coupon bonds

$$P(t,T) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Si la tasa es determinista

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \tag{6}$$

Si es además constante

$$P(t,T) = \exp\left(-r(T-t)\right) \tag{7}$$

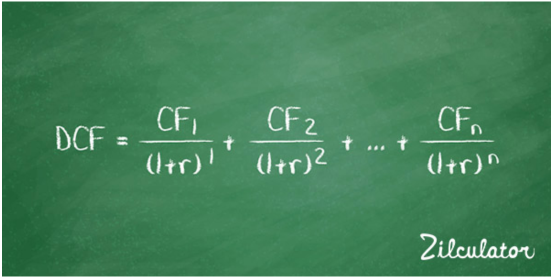
Valuación de Bonos

Valuación de Bonos

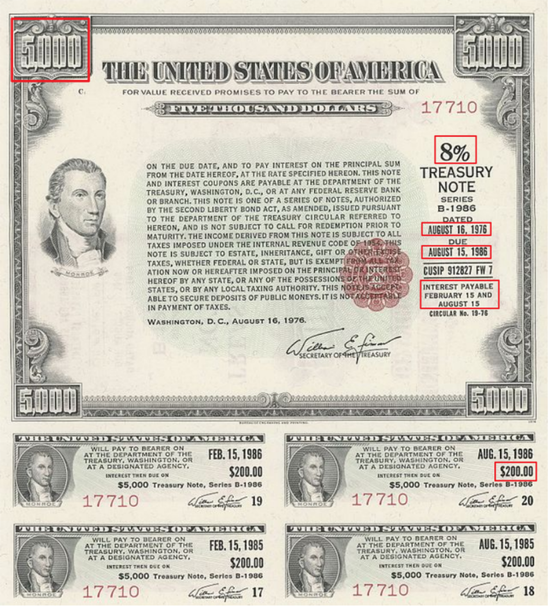
El valor presente de los flujos futuros esperados. Por no-arbitraje descontamos los flujos con bonos a distintos plazos.

Podemos encarar modelos más elaborados cuando incorporemos explicitamente la estocasticidad de la(s) tasa(s).

En su expresión más sencilla todos los cashflows descuentan a una tasa constante



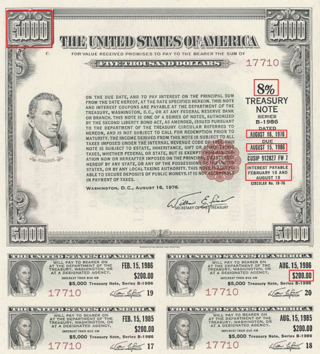
Bono de cupón fijo



- Bono a 10yr
- \$5000 de nocional
- Tasa fija de 8 % (anual)
- Pago semestral de cupón

- 20 cupones de \$200
- Interés simple, 4 % cupón

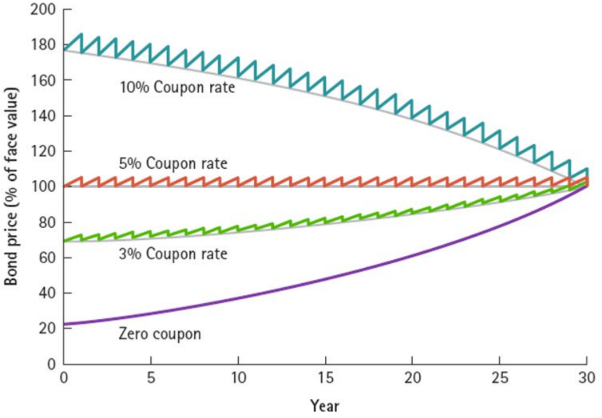
Bono de cupón fijo



$$
\begin{aligned}
\pi(t, T_n) &= P(t, T_n)N + P(t, T_1)N\, r\, \tau\,(t, t_1) + \ldots + P(t, T_n)N\, r\, \tau\,(t_{n-1}, t_n) \\
&= P(t, T_n)N + N\, r \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, \tau\,(t_{i-1}, t_i)
\end{aligned}
$$

Cupones de pago determinista.

Bono de cupón fijo



 43

- Premium: $\pi(0) > N$
- Par: $\pi(0) = N$
- Discount: $\pi(0) < N$
- En todos los casos se tiene que dar el pull-to-par.

Bono perpetuo - Consol

Obligaciones en forma de bonos perpetuos, los cupones se pagan en forma sostenida sin fecha de expiración.
El valor principal no es repagado.

BUSINESS INSIDER

Subscribe

The 1000-year bond: A Danish energy company just issued debt with a maturity date of 3017

Sam Jacobs, Business Insider Australia Nov 17, 2017, 3:55 AM

- **A Danish energy company just issued debt with a maturity date of 3017.**
- **Danish energy company Orsted raised 500 million euros overnight via the hybrid bond.**
- **Hybrid bonds are so-named because they include features of both debt and equity.**

While the actual maturity date isn't until 3017, the first "par call" on the debt is scheduled for 24 November 2024. The par call will give Orsted the opportunity to redeem funds at a value equal to or slightly above the issue price.

Until then, the hybrid bond will have a fixed coupon rate of 2.25%.

Bono perpetuo - Consol

Calular el precio de un Consol es un ejercicio de aritmética con solución cerrada (si la term-structure es plana)

$$\pi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{(1+r)^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{(1+r)^i} - c$$

Es una serie geométrica que converge si $|k| < 1$

$$a + ak + ak^2 + ak^3 + \cdots + ak^n = \sum_{i=0}^{n} ak^i = \frac{a(1-k^{n+1})}{1-k}$$

En el límite $n \longrightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^{\infty} ak^i = \frac{a}{1-k}$$

Por lo tanto

$$\pi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c}{(1+r)^i} - c = \frac{c}{1-\frac{1}{1+r}} - c = \frac{c(1+r)}{r} - c = \frac{c}{r}$$

Bono de cupón flotante, FRN

Los cupones no son a tasa fija sino que siguen una tasa variable. El valor de cada cupón se determina al momento del reset de tasa, generalmente coincidente o próximo al pago del cupón anterior.

Debemos especificar la formula general

$$\pi(t, T_n) = P(t, T_n)N + \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)c_i$$

para cupones de la forma

$$c_i = N\, F(T_{i-1}; T_i)\, \tau\, (T_{i-1}, T_i)$$

donde $F(T_{i-1}, T_i)$ es la **tasa spot simple futura**, imperante a tiempo T_{i-1}, pero el cupón c_i es pagado en T_i. Cuando $t = T_{i-1}$, $F(T_{i-1}, T_i)$ será la tasa spot, no es una tasa forward $F(t, T_{i-1}, T_i)$!

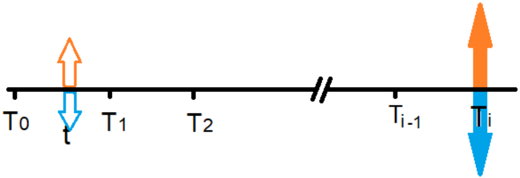
$$\pi(t, T_n) = P(t, T_n)N + N \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, F(T_{i-1}; T_i)\, \tau\, (T_{i-1}, T_i)$$

Bono de cupón flotante, FRN

Por definición, existe una relación entre la tasa futura y los factores de descuento

$$c_i = F(T_{i-1}; T_i)\tau(T_{i-1}, T_i) = \frac{P(T_i, T_i) - P(T_{i-1}, T_i)}{P(T_{i-1}, T_i)} = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

¿Cuál es el valor presente de estos dos flujos futuros?



1. El valor presente de -\$1 pagado en T_i es $-P(t, T_i)$.
2. El valor presente de $\frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)}$ pagado en T_i, hoy es $P(t, T_{i-1})$
   2.1 $P(t, T_{i-1})$ hoy valdrá \$1 en T_{i-1}
   2.2 $\omega_0 = 1/P(T_{i-1}, T_i)$ unidades de $P(T_{i-1}, T_i)$, valen $\omega_0 P(T_{i-1}, T_i) = \$1$ en T_{i-1}, valdrán $\omega_0 P(T_i, T_i) = \$1/P(T_{i-1}, T_i)$ en T_i
   2.3 O sea que $P(t, T_{i-1})$ en t valdrán \$1 en T_{i-1} que valdrá $\$1/P(T_{i-1}, T_i)$ en T_i

Bono de cupón flotante, FRN

El valor nominal del cupón

$$c_i = \frac{1}{P(T_{i-1}, T_i)} - 1$$

¿Cuál es el valor presente de estos dos flujos futuros?

$$c_i^* = P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)$$

Volviendo al FRN

$$\begin{aligned}
\pi(t, T_n) &= P(t, T_n)N + N\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\, F(T_{i-1}; T_i)\, \tau\,(T_{i-1}, T_i) \\
&= P(t, T_n)N + N\sum_{i=1}^{n} [P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)] \\
&= P_n N + N[(P_0 - \cancel{P_1}) + (\cancel{P_1} - \cancel{P_2}) + \ldots + (\cancel{P_{n-2}} - \cancel{P_{n-1}}) + (\cancel{P_{n-1}} - P_n)]
\end{aligned}$$

suma telescópica que "sorprendentemente" simplifica a

$$\boxed{\pi(t, T_n) = P(t, T_0)N}$$

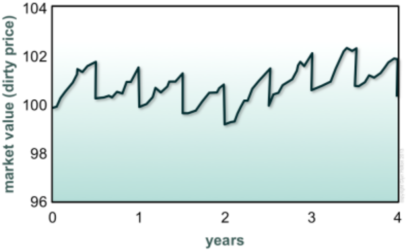
donde T_0 (es la fecha de fixing del cupón inmediato *anterior* al día de la valuación. De todos los flujos futuros ninguno importa!!

Clean price, Dirty price, y Accrued Interest

El FRN tiene precio $\pi(t, T_n) = P(t, T_0)N$. T_0 no es una fecha fija, sino que es el último *fixing* relativo a t [1]

$$\pi(t, T_n) \approx \begin{cases} N \exp^{[r(t-T_0)]}, & t \in [T_0, T_1] \\ N \exp^{[r(t-T_1)]}, & t \in [T_1, T_2] \\ \ldots & \\ N \exp^{[r(t-T_{n-1})]}, & t \in [T_{n-1}, T_n] \end{cases}$$

El precio sigue una forma de diente de sierra que vale $\pi(t = T_i, T_i) = N$ en cada día de *fixing* y fluctúa en los días restantes.



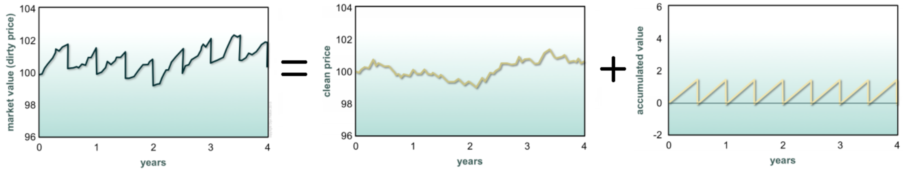
[1] Simplifiquemos, suponiendo r determinista, $P(t, T) = \exp[-r(T-t)] = \exp[t(t-T)]$

Clean price, Dirty price, y Accrued Interest

El interés acumulado (*accrued interest*) es una medida de cuanto interés se acumuló a una dada fecha desde el último pago de cupón

$$AI = NF(T_{i-1}; T_i)\,\tau\,(T_{i-1}, t)$$

El precio de compra (Dirty) sufre caidas en los días ex-coupon. Sumado a este movimiento *determinístico* existen movimientos del precio que reflejan movimientos de las tasas de descuento o del riesgo crediticio del bono (no es risk-free). El Dirty Price puede desagregarse en el Clean Price y el Interés Acumulado



$$\boxed{Dirty\ Price = Clean\ Price + AI}$$

Yields

Yield to Maturity o T.I.R. de Bonos

Dado un bono de nocional N que paga un cashflow $\{\tilde{c}_i\}_{i\in[1,n]}$ en las fechas $\{T_i\}_{i\in[1,n]}$ ($\tilde{c}_i$ es cualquier cash flow, cupones o pagos de amortización)

$$\pi(t) = N\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)\tilde{c}_i$$

La *Tasa Interna de Retorno* o el *yield to maturity* (contínuamente compuesto) y_t de este bono es la constante (en tenors no en tiempo) que es solución de

$$p_t = N\sum_{i=1}^{n} \exp[-y_t(T_i - t)]\tilde{c}_i$$

donde p_t es el valor de mercado del bono a tiempo t. Como el precio de mercado varía con el tiempo, también lo hace la yield.

Reminder

$$P(t,T) = E^Q\left[\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Si la tasa es determinista

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(u)du\right) \tag{8}$$

Si es además constante

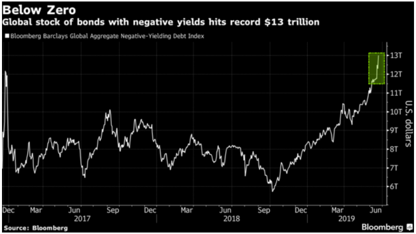
$$P(t,T) = \exp\left(-r(T-t)\right) \tag{9}$$

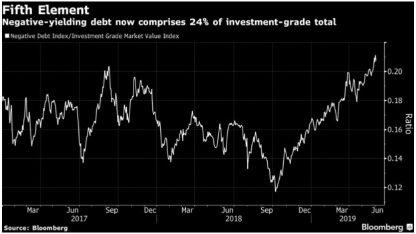
Hasta hace unos años

$$\begin{aligned} &P(t,T) \leq 1 \\ &P(t,T_1) < P(t,T_2),\ \text{si } T_1 > T_2 \end{aligned}$$

pero...

Negative Yields ("defy gravity")





https://www.bloomberg.com/news/articles/2019-06-21/the-world-now-has-13-trillion-of-debt-with-below-zero-yields

Negative Yields, ¿por qué?

Suele otorgarse más valor a activos aprovechables en el momento que a aquellos pueden estarán disponibles en el futuro, más aún existe una posibilidad de no poder disponer nunca de ellos (default). Entonces ...

- El Banco Central Europeo cobra a los bancos 0.4 % por ser depositarios de su dinero. Los bonos con yield negativo tienen un rendimiento menos negativo que el costo de almacenamiento en el BCE.
- Estos bonos son seguros y líquidos (en los mercados secundarios). En caso de condiciones de stress de mercado estos bonos soberanos son menos riesgosos que los bonos corporativos. El yield negativo es un premium que los inversores están dispuestos a pagar a cambio de mitigar riesgo.
- El inversor paga hoy yields negativas con la expectativa de que sean aún más negativas en el futuro (capitalización).

Duration de Bonos

¿Cuán sensible es el precio del bono ante movimientos paralelos de toda la curva de rendimiento zero: $T \to R(0, T)$. El precio basal es

$$\pi = \frac{N}{s} \sum_{i=1}^{n} \exp[-y_i T_i] c_i$$

El precio del bono ante un desplazamiento paralelo pequeño (mismo *shock* aplicado a todos los tenors) de la curva zero $T \to R(0, T) + s$, es [2]

$$\begin{aligned} \pi^* &= N \sum_{i=1}^{n} \exp[-(y_i + s) T_i]\, c_i = N \sum_{i=1}^{n} \exp[-y_i T_i]\, c_i \, \exp[-s T_i] \\ &\approx N \sum_{i=1}^{n} \exp[-y_i T_i]\, c_i \,(1 - s T_i) \end{aligned}$$

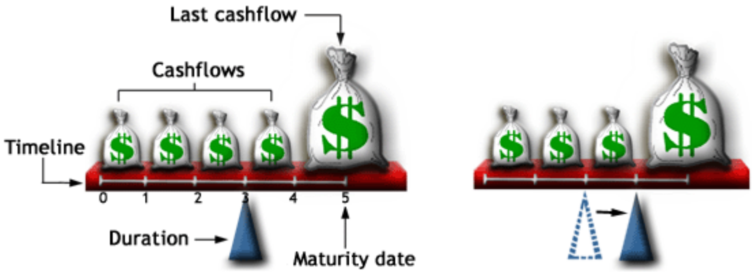
Restando el precio basal π y dividiendo por el tamaño del shock obtenemos el calculo de la derivada por diferencias finitas

$$\frac{d\pi}{ds} \approx \frac{\pi^* - \pi}{s} \approx -N \sum_{i=1}^{n} T_i \exp[-y_i T_i] c_i$$

[2] Para simplificar la notación $y_i = R(0, T_i)$ y considero $t = 0$

Duration de Bonos

$$D_{Mac} \doteq \frac{1}{\pi}\frac{d\pi}{ds}\bigg|_{s=0} = \sum_{i=1}^{n} T_i \left(\frac{\exp[-yT_i]c_i}{\sum_{j=1}^{n} \exp[-yT_j]c_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} T_i\,\omega_i$$



Convexity

La Duration de un bono se define como

$$D \doteq - \left. \frac{1}{\pi} \frac{d\pi}{ds} \right|_{s=0} = - \frac{N \sum_{i=1}^{n} T_i \exp[-y_i T_i] c_i}{\pi} = \sum_{i=1}^{n} T_i \, \omega_i$$

En esencia la Duración es para un bono lo que para opciones sobre equity es Delta. El equivalente de *gamma* para bonos es la *Convexidad*:

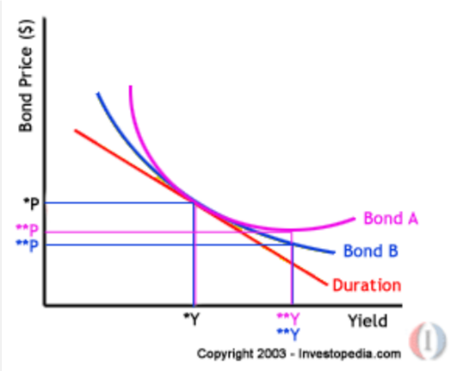
$$C \doteq \frac{1}{\pi} \left. \frac{d^2\pi}{ds^2} \right|_{s=0} = \frac{N \sum_{i=1}^{n} (T_i)^2 \exp[-y_i T_i] c_i}{\pi} = \sum_{i=1}^{n} (T_i)^2 \omega_i$$

Así se obtiene una aproximación a segundo orden para el cambio $\Delta\pi$ del precio de un bono con respecto a movimientos paralelos de la curva zero

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\pi}{\pi} &\approx \frac{1}{\pi} \left[\left. \frac{d\pi}{ds} \right|_{s=0} \Delta s + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2\pi}{ds^2} \right|_{s=0} (\Delta s)^2 \right] \\ &\approx -D \, \Delta s + \frac{1}{2} C \, (\Delta s)^2 \end{aligned}$$

Convexity

La Duration es una sensibilidad útil para pequeños movimientos de la yield curve. La relación precio-yield puede mostrar disntinta sensibilidad para bonos con igual Duration (la tangente en el punto $y = y_*$).



Pero a grandes variaciones de la yield, los precios de los bonos pueden diferir, si la curvaturas son distintas. La Convexidad es una medida de la curvatura de los cambios de precio. Es necesaria porque el precio no es una función lineal de la tasa de descuento, sino una función convexa de la tasa.