3ª Lista de Exercícios de SMA-354 Cálculo 2

Cálculo de integrais 2

Exercício 1 Calcule

(**a**) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\sqrt{\cos x}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\cos^5\frac{t}{2}\,dt$ (**c**) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 t\cos^2 t\,dt$ (**d**) $\displaystyle\int \frac{\sec^4 t}{\tan t}\,dt$

(**e**) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 x\sec x\,dx$

Exercício 2 Calcule

(**a**) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^3}{\sqrt{9+x^2}}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int_2^6 \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$ (**c**) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$ (**d**) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}\,dx$

Exercício 3 Calcule

(**a**) $\displaystyle\int \frac{x^3+2}{x^2-x-6}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-2x^2+x}\,dx$ (**c**) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+5}{x(x^2+1)}\,dx$ (**d**) $\displaystyle\int \frac{2x^2+x+7}{(x^2+4)^2}\,dx$

(**e**) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-9}\,dx$ (**f**) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$ (**g**) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x(x-3)(x-4)}\,dx$ (**h**) $\displaystyle\int \frac{3}{x^3-16x}\,dx$

(**i**) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2-2x}\,dx$ (**l**) $\displaystyle\int \frac{5}{(x^2-1)(x^2-9)}\,dx$ (**m**) $\displaystyle\int \frac{x^4+2x^2-8x+4}{x^3-8}\,dx$

Exercício 4 Calcule

(**a**) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}\,dx$ (**b**) $\displaystyle\int_0^1 x^2\arcsin x\,dx$ (**c**) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{4+\cos^2 x}$

(**d**) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}x+\cos x}$ Dica: Faça $u=\tan(x/2)$ e use as identidades $\operatorname{sen}x = 2\operatorname{sen}(x/2)\cos(x/2)$ e $\cos x = \cos^2(x/2) - \operatorname{sen}^2(x/2)$

(**e**) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}$ (**f**) $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x^2-4}}$ (**g**) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

Gabarito

Exercício 1 (**a**) $\frac{2}{7}(\cos x)^{7/2} - \frac{2}{3}(\cos x)^{3/2} + C$ (**b**) $\frac{16}{115}$ (**c**) $\frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin 4t + C$ (**d**) $\frac{1}{2}\tan^2 t + \ln|\tan t| + C$

(**e**) $\sqrt{3} + \ln(2-\sqrt{3})/2$

Exercício 2 (**a**) $9(2-\sqrt{2})$ (**b**) $\frac{1}{12}(3\sqrt{2}-\sqrt{10})$ (**c**) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$ (**d**) $\frac{(x^2-9)^{3/2}}{27x^3}$

Exercício 3 (**a**) $\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{29}{5}\ln|x-3| + \frac{6}{5}\ln|x+2| + C$ (**b**) $5\ln\left|\frac{x}{x-1}\right| - \frac{6}{x-1} + C$

(**c**) $5\ln x - 2\ln(x^2+1) - \arctan x + C$ (**d**) $\frac{15}{16}\arctan\frac{x}{2} - \frac{x+4}{8(x^2+4)} + C$

(**e**) $x + 2\ln|x-3| - 2\ln|x+3| + C$

Exercício 4 (**a**) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right| + \arctan\sqrt{x} + C$ (**b**) $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$ (**c**) $\arctan\frac{1}{2}$ (**d**) $-\ln\left|1-\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(**e**) $\frac{3}{10}(x+1)^{2/3}(2x-3) + C$ (**f**) $\frac{1}{4}x\sqrt{x^2-4}(x^2+6) + 6\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C$ (**g**) $\arcsin\frac{x-3}{3} + C$

Integração de funções racionais

Considere

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx$$

onde N e D são polinômios.

- **passo 1:** reduza ao caso grau(N)<grau(D): para isso use divisão de polinômios: de fato existe uma unica escolha de polinômios Q, R com grau(R)<grau(D) tais que

$$N(x) = Q(x)D(x) + R(x)\,.$$

Com isso,

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int \left(Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\right) dx$$

- **passo 2:** (a partir de agora assuma grau(N)<grau(D)) Fatore o denominador: é sempre possível fatorar o polinômio $D(x)$ como produto de termos lineares $(x - r)$ e quadráticos irredutíveis $x^2 + 2\rho x + \sigma$ onde $\Delta = \rho^2 - \sigma < 0$:

$$D(x) = \alpha(x - r_1)^{k_1} \cdot (x - r_2)^{k_2} \;......\; (x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1} \cdot (x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2} \;...... \tag{1}$$

- **passo 3:** reescreva a função racional $N(x)/D(x)$ como soma de frações simples: se D é fatorado como em (1), então podemos escrever de maneira única

$$\begin{aligned}
\frac{N(x)}{D(x)} \quad = \quad & \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-r_1)^2} + ... + \frac{A_{1,k_1}}{(x-r_1)^{k_1}} + \\
& + \frac{A_{2,1}}{(x-r_2)} + \frac{A_{2,2}}{(x-r_2)^2} + ... + \frac{A_{2,k_2}}{(x-r_2)^{k_2}} + \\
& + ... + \\
& + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^2} + ... + \frac{B_{1,h_1}x + C_{1,h_1}}{(x^2 + 2\rho_1 x + \sigma_1)^{h_1}} + \\
& + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)} + \frac{B_{2,2}x + C_{2,2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^2} + ... + \frac{B_{2,h_2}x + C_{2,h_2}}{(x^2 + 2\rho_2 x + \sigma_2)^{h_2}} + \\
& + ... +
\end{aligned}$$

- **passo 4:** integrar cada pedaço (lembre que integral indefinida faz sentido depois de fixar um intervalo contido no domínio da função):

  –
  $$\int \frac{A}{x - r} = A \ln|x - r| + k : k \in \mathbb{R}\,.$$

  –
  $$\int \frac{A}{(x-r)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-r)^{n-1}} + k : k \in \mathbb{R} \qquad (n > 1)\,.$$

  –
  $$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2\rho x + \sigma} \qquad (\sigma - \rho^2 > 0) :$$

  Primeiro passo: reduzir o numerador a apenas uma constante fazendo aparecer a derivada do denominador: como

  $$Bx + C = \frac{B}{2}(2x + 2\rho) + C - B\rho$$

temos

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{x^2+2\rho x+\sigma} &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2\rho}{x^2+2\rho x+\sigma} + (C-B\rho)\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma} \\ &= \frac{B}{2}\ln\left(x^2+2\rho x+\sigma\right) + (C-B\rho)\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma}\end{aligned}$$

(observe que $x^2+2\rho x+\sigma > 0$).

Para o segundo termo nosso objetivo é usar a intergal conhecida $\int \frac{dt}{1+t^2} = atg(t)$: observe que $x^2+2\rho x+\sigma = x^2+2\rho x+\rho^2+\sigma-\rho^2 = (x+\rho)^2+\sigma-\rho^2$ e que $\sigma-\rho^2>0$, assim pode ser escrito como $\left(\sqrt{\sigma-\rho^2}\right)^2$.

logo

$$\int \frac{1}{x^2+2\rho x+\sigma} = \int \frac{1/(\sigma-\rho^2)}{1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\int \frac{1/\sqrt{\sigma-\rho^2}}{1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\, atg\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right).$$

Em conclusão,

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2\rho x+\sigma} = \frac{B}{2}\ln\left(x^2+2\rho x+\sigma\right) + \frac{C-B\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\, atg\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right) + k : k \in \mathbb{R}$$

–

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} \qquad (\sigma-\rho^2>0, n>1):$$

neste caso podemos fazer como antes obtendo

$$\begin{aligned}\int \frac{Bx+C}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} &= \frac{B}{2}\int \frac{2x+2\rho}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} + (C-B\rho)\int \frac{1}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} \\ &= \frac{B}{2}\frac{1}{(1-n)\left(x^2+2\rho x+\sigma\right)^{n-1}} + (C-B\rho)\int \frac{1}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n}\end{aligned}$$

e ainda

$$\int \frac{dx}{(x^2+2\rho x+\sigma)^n} = \int \frac{1/(\sigma-\rho^2)^n}{\left(1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n}\, dx =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}^{2n-1}}\int \frac{1/\sqrt{\sigma-\rho^2}}{\left(1+\left(\frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}\right)^2\right)^n}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma-\rho^2}^{2n-1}}\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$$

sendo $t = \frac{x+\rho}{\sqrt{\sigma-\rho^2}}$.

A última integral pode ser calculada iterativamente desta forma:

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^n} = \int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} - \int t\frac{t}{(1+t^2)^n}$$

e, ainda integrando por partes,

$$\int t\frac{t}{(1+t^2)^n} = \int t\frac{1}{2}\frac{2t}{(1+t^2)^n} = t\frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}} - \int \frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}},$$

isto é,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t^2)^n} &= -t\frac{1/2}{(1-n)(1+t^2)^{n-1}} + \left(1+\frac{1}{2-2n}\right)\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{2}\frac{1}{(n-1)(1+t^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{1}{(1+t^2)^{n-1}} :\end{aligned}$$

depois de $n-1$ iterações o expoente de $(1+t^2)$ é 1 e sabemos integrar.

Por exemplo,

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} + atg(t)\right) + k : k \in \mathbb{R}$$

- Técnica alternativa: também podemos sempre escrever

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-r_1)} + \frac{A_{2,1}}{(x-r_2)} + ... + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2+2\rho_1 x+\sigma_1)} + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{(x^2+2\rho_2 x+\sigma_2)} + ... + \left(\frac{F(x)}{G(x)}\right)'$$

onde

$$G(x) = (x-r_1)^{k_1-1}\cdot(x-r_2)^{k_2-1} \;......\; (x^2+2\rho_1 x+\sigma_1)^{h_1-1}\cdot(x^2+2\rho_2 x+\sigma_2)^{h_2-1} \;......$$

e $F(x)$ é um polinômio incógnito com grau(F)<grau(G). Feito isso a integração é imediata.

Resumindo, a primitiva de uma qualquer função racional é sempre calculável: é uma combinação de funções racionais, logaritmos de polinômios e arcotangentes de polinômios.