

[Tarea 09] Ejercicios Unidad 04-A-B | Eliminación gaussiana vs Gauss-Jordan

Conjunto de Ejercicios

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

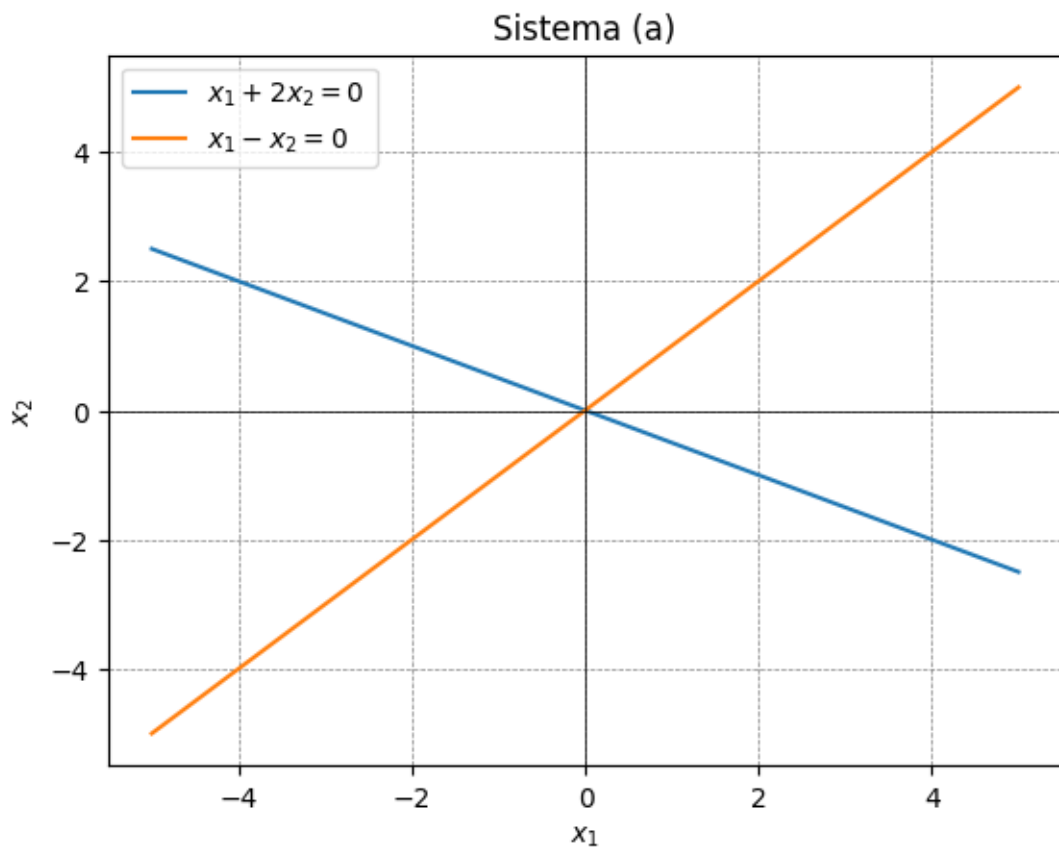
def plot_system(x_vals, y_vals, eqs, title):
    plt.figure()
    for y, label in zip(y_vals, eqs):
        plt.plot(x_vals, y, label=label)
    plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
    plt.grid(color = 'gray', linestyle = '--', linewidth = 0.5)
    plt.legend()
    plt.title(title)
    plt.xlabel("$x_1$")
    plt.ylabel("$x_2$")
    plt.show()
```

a.

$$x_1 + 2x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 = 0.$$

```
x_vals = np.linspace(-5, 5, 400)
y1_a = -x_vals / 2
y2_a = x_vals
plot_system(
    x_vals, [y1_a, y2_a],
    ["$x_1 + 2x_2 = 0$", "$x_1 - x_2 = 0$"],
```

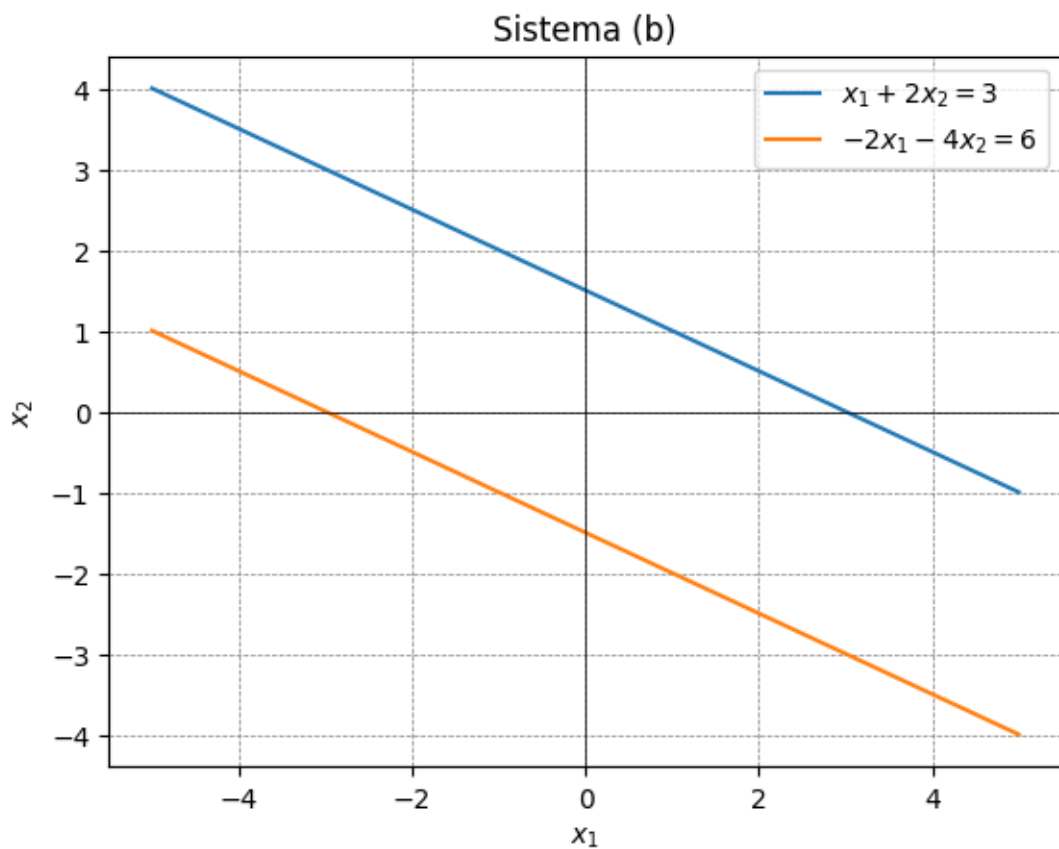
```
"Sistema (a)"
)
```



b.

$$x_1 + 2x_2 = 3, \quad -2x_1 - 4x_2 = 6.$$

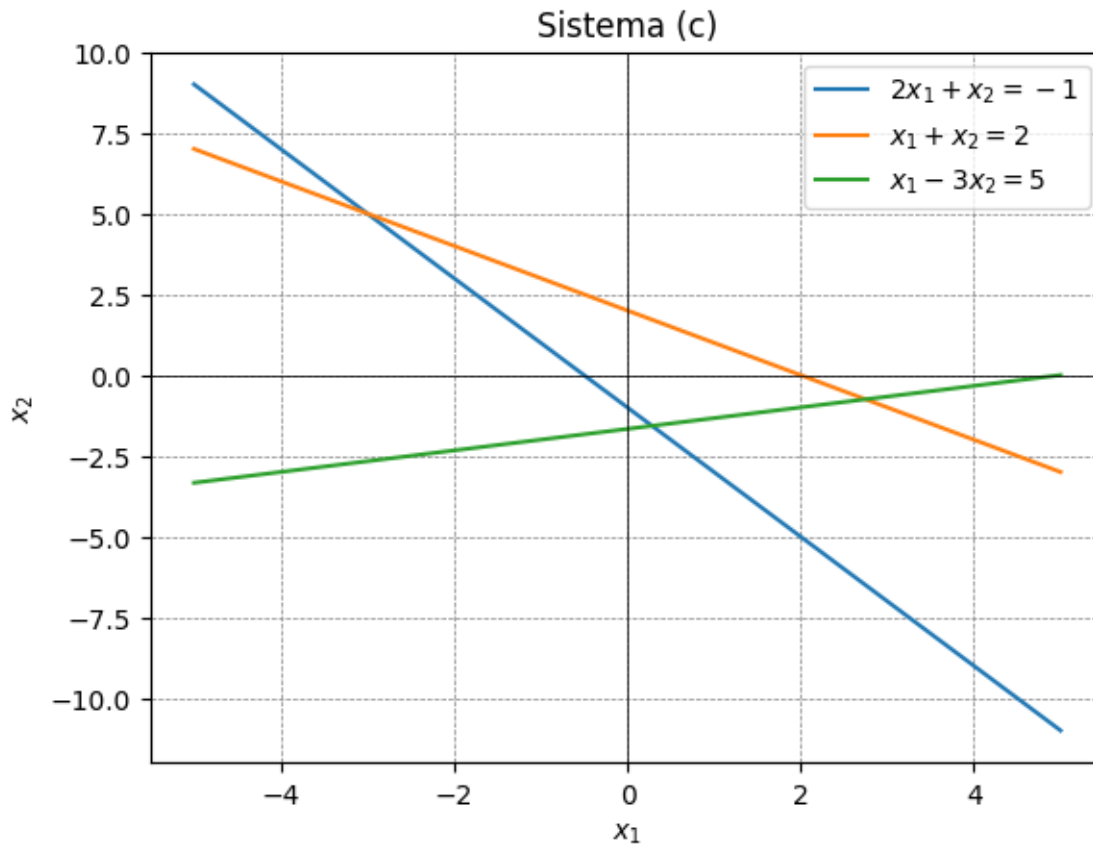
```
y1_b = (3 - x_vals) / 2
y2_b = (6 + 2 * x_vals) / -4
plot_system(
    x_vals, [y1_b, y2_b],
    ["$x_1 + 2x_2 = 3$", "$-2x_1 - 4x_2 = 6$"],
    "Sistema (b)"
)
```



c.

$$2x_1 + x_2 = -1, \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_1 - 3x_2 = 5.$$

```
# Literal (c)
y1_c = (-1 - 2 * x_vals)
y2_c = (2 - x_vals)
y3_c = (5 - x_vals) / -3
plot_system(
    x_vals, [y1_c, y2_c, y3_c],
    ["$2x_1 + x_2 = -1$", "$x_1 + x_2 = 2$", "$x_1 - 3x_2 = 5$"],
    "Sistema (c)"
)
```



d.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1.$$

```
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

def plane_x1(x2, x3):
    return 1 - x2 - x3

def plane_x2(x1, x3):
    return (1 - x1 - x3) / 4

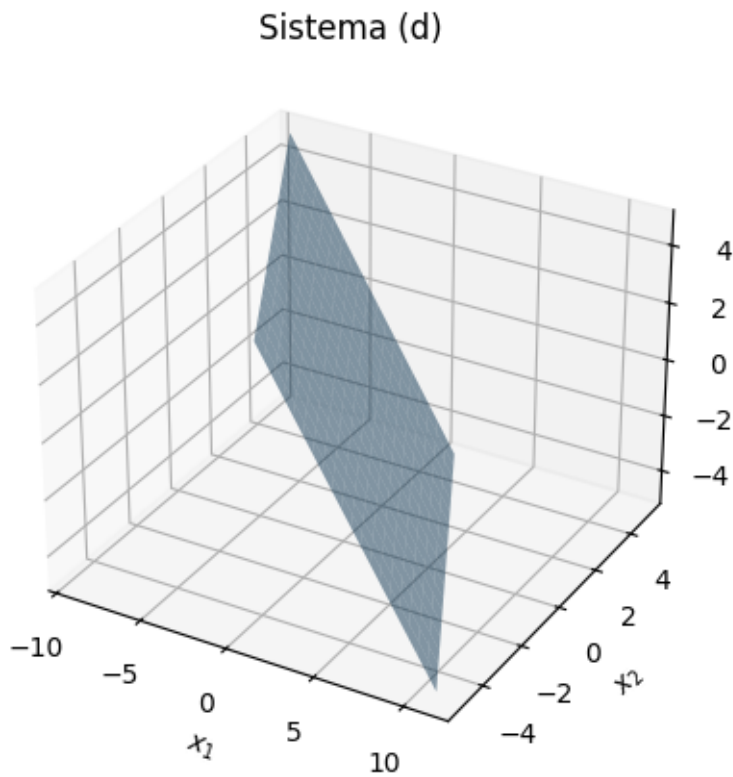
x2_vals = np.linspace(-5, 5, 20)
x3_vals = np.linspace(-5, 5, 20)
x2_grid, x3_grid = np.meshgrid(x2_vals, x3_vals)
```

```

x1_plane = plane_x1(x2_grid, x3_grid)
x2_plane = plane_x2(x1_plane, x3_grid)

ax.plot_surface(x1_plane, x2_grid, x3_grid, alpha=0.5,
               label=" $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$ ")
ax.set_title("Sistema (d)")
ax.set_xlabel(" $x_1$ ")
ax.set_ylabel(" $x_2$ ")
ax.set_zlabel(" $x_3$ ")
plt.show()

```



2. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones.

(La solución exacta para cada sistema es $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.)

```

def gaussian_elimination_with_rounding(A, b):
    n = len(b)

```

```

A = np.array(A, dtype=float)
b = np.array(b, dtype=float)

for i in range(n):
    pivot = A[i, i]
    A[i, :] = np.round(A[i, :] / pivot, 2)
    b[i] = np.round(b[i] / pivot, 2)

    for j in range(i + 1, n):
        factor = A[j, i]
        A[j, :] = np.round(A[j, :] - factor * A[i, :], 2)
        b[j] = np.round(b[j] - factor * b[i], 2)

x = np.zeros(n)
for i in range(n - 1, -1, -1):
    x[i] = np.round((b[i] - np.dot(A[i, i + 1:], x[i + 1:])), 2)

return x

```

a.

- $-x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$
- $\frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$
- $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11$

```

A_a = [
    [-1, 4, 1],
    [5/3, 2/3, 2/3],
    [2, 1, 4]
]
b_a = [8, 1, 11]

solution_a = gaussian_elimination_with_rounding(A_a, b_a)

solution_a

```

```
array([-1.05,  0.98,  3.03])
```

b)

- $4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5$
- $\frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1$
- $x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9$

```
# Literal (b)
A_b = [
    [4, 2, -1],
    [1/9, 1/9, -1/3],
    [1, 4, 2]
]
b_b = [-5, -1, 9]

solution_b = gaussian_elimination_with_rounding(A_b, b_b)

solution_b
```

```
array([-1.02,  1.02,  2.97])
```

3. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

```
def gaussian_elimination_with_pivoting(A, b):
    n = len(b)
    A = np.array(A, dtype=float)
    b = np.array(b, dtype=float)
    swaps = []

    for i in range(n):
        max_row = np.argmax(np.abs(A[i:, i])) + i
        if max_row != i:
            A[[i, max_row]] = A[[max_row, i]]
            b[[i, max_row]] = b[[max_row, i]]
            swaps.append((i, max_row))

        pivot = A[i, i]
        A[i, :] /= pivot
        b[i] /= pivot

        for j in range(i + 1, n):
```

```

        factor = A[j, i]
        A[j, :] -= factor * A[i, :]
        b[j] -= factor * b[i]

x = np.zeros(n)
for i in range(n - 1, -1, -1):
    x[i] = b[i] - np.dot(A[i, i + 1:], x[i + 1:])

return x, swaps

```

a.

$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \quad 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \quad x_1 + x_2 = 3.$$

```

A_a = [
    [1, -1, 3],
    [3, -3, 1],
    [1, 1, 0]
]
b_a = [2, -1, 3]

solution_a, swaps_a = gaussian_elimination_with_pivoting(A_a, b_a)
(solution_a, swaps_a)

```

(array([1.1875, 1.8125, 0.875]), [(0, np.int64(1)), (1, np.int64(2))])

b.

$$2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1, \quad -x_1 + 2x_3 = 3, \quad 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1.$$

```

A_b = [
    [2, -1.5, 3],
    [-1, 0, 2],
    [4, -4.5, 5]
]
b_b = [1, 3, 1]
solution_b, swaps_b = gaussian_elimination_with_pivoting(A_b, b_b)
(solution_b, swaps_b)

```

(array([-1., 0., 1.]), [(0, np.int64(2))])

c.

$$2x_1 = 3, \quad x_1 + 1.5x_2 = 4.5, \quad -3x_2 + 0.5x_3 = -6.6, \quad 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8$$


```

A_c = [
    [2, 0, 0, 0],
    [1, 1.5, 0, 0],
    [0, -3, 0.5, 0],
    [2, -2, 1, 1]
]
b_c = [3, 4.5, -6.6, 0.8]
solution_c, swaps_c = gaussian_elimination_with_pivoting(A_c, b_c)
(solution_c, swaps_c)

```

```
(array([ 1.5,  2. , -1.2,  3. ]), [(1, np.int64(2)), (2, np.int64(3))])
```

d.

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_4 &= 2, \\
 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\
 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0, \\
 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3.
 \end{aligned}$$

```

A_d = [
    [1, 1, 1, 1],
    [2, 1, -1, -1],
    [4, -1, 2, 0],
    [3, -1, -2, 2]
]
b_d = [2, 1, 0, -3]

solution_d, swaps_d = gaussian_elimination_with_pivoting(A_d, b_d)
(solution_d, swaps_d)

```

```
(array([ 0.03030303,  1.45454545,  0.66666667, -0.15151515]),
 [(0, np.int64(2)), (2, np.int64(3))])
```

4. Use el algoritmo de eliminación gaussiana y la aritmética computacional de precisión de 32 bits para resolver los siguientes sistemas lineales.

a.

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9, \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8, \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

```

A_a = np.array([
    [1/4, 1/5, 1/6],
    [1/3, 1/4, 1/5],
    [1/2, 1.0, 2.0]
], dtype=np.float32)

b_a = np.array([9.0, 8.0, 8.0], dtype=np.float32)

x_a = np.linalg.solve(A_a, b_a)

print("Solución")
print(x_a)
print()

```

Solución
 $[-227.0767 \quad 476.92267 \quad -177.69215]$

b.

$$\begin{aligned}
 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 &= 15913, \\
 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 &= 28.544, \\
 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 &= 8.4254.
 \end{aligned}$$

```

A_b = np.array([
    [3.333, 15920.0, -10.333],
    [2.222, 16.71, 9.612],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852]
], dtype=np.float32)

b_b = np.array([15913.0, 28.544, 8.4254], dtype=np.float32)

x_b = np.linalg.solve(A_b, b_b)

print("Solución")
print(x_b)
print()

```

Solución
 $[0.99999964 \quad 1. \quad 1.0000002 \quad]$

c.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7},$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9}$$

```
A_c = np.array([
    [ 1.0,    1/2,    1/3,    1/4 ],
    [1/2,    1/3,    1/4,    1/5 ],
    [1/3,    1/4,    1/5,    1/6 ],
    [1/4,    1/5,    1/6,    1/7 ]
], dtype=np.float32)

b_c = np.array([
    1/6, 1/7, 1/8, 1/9
], dtype=np.float32)

x_c = np.linalg.solve(A_c, b_c)

print("Solución")
print(x_c)
print()
```

Solución

[-0.03174521 0.595231 -2.380937 2.7777684]

d.

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7,$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2,$$

$$-2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5,$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3.$$

Reordenada:

- $2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 3x_5 = 7$
- $1x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 1x_4 + 1x_5 = 2$

- $0x_1 - 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 1x_5 = -5$
- $3x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 5x_5 = 6$
- $1x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 = -3$

```
A_d = np.array([
    [ 2.0,  1.0, -1.0,  1.0, -3.0],
    [ 1.0,  0.0,  2.0, -1.0,  1.0],
    [ 0.0, -2.0, -1.0,  1.0, -1.0],
    [ 3.0,  1.0, -4.0,  0.0,  5.0],
    [ 1.0, -2.0, -1.0, -1.0,  1.0]
], dtype=np.float32)

b_d = np.array([ 7.0, 2.0, -5.0, 6.0, -3.0], dtype=np.float32)

x_d = np.linalg.solve(A_d, b_d)

print("Solución")
print(x_d)
```

Solución

```
[ 1.8974359  2.4615386  0.02564103 -0.46153846 -0.41025642]
```

5. Dado el sistema lineal:

$$x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2, \quad -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3, \quad \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2.$$

- Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
- Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
- Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ -1 & 2 & -\alpha & 3 \\ \alpha & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 + F_2 \rightarrow F_1 \\ -\alpha F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & -\alpha^2+2\alpha+3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(\alpha+1) F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2+2\alpha+2 & -\alpha+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha^2+1 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

a) Para no tener soluciones

$$\begin{array}{ll}
 -\alpha^2+1=0 & \alpha+1 \neq 0 \\
 -\alpha^2 = -1 & \\
 \sqrt{-\alpha^2} = \pm i & \\
 \alpha = \pm i & \\
 \alpha = 1 & \\
 \alpha = -1 &
 \end{array}$$

b) Para tener infinitas soluciones

c) Para tener única solución

$$\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= -\alpha \left(\frac{\alpha+1}{-\alpha^2+1} \right) - 1 \\
 x_2 &= 1 \\
 x_3 &= \frac{\alpha+1}{(-\alpha^2+1)}
 \end{aligned}$$

Figura 1: Resolución del ejercicio

Ejercicios Aplicados

6. Suponga que en un sistema biológico existen n especies de animales y m fuentes de alimento. Si x_j representa la población de las j -ésimas especies, para cada $j = 1, \dots, n$; b_i representa el suministro diario disponible del i -ésimo alimento y a_{ij} representa la cantidad del i -ésimo alimento.

El sistema lineal es:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \quad \dots, \quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

a. Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 500 \\ 350 \\ 400 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 2700 \\ 900 \end{bmatrix},$$

¿Existe suficiente alimento para satisfacer el consumo promedio diario?

```
A = np.array([
    [1, 2, 0, 3],
    [1, 0, 2, 2],
    [0, 0, 1, 1],
], dtype=float)

x = np.array([1000, 500, 350, 400], dtype=float)
b = np.array([3500, 2700, 900], dtype=float)

consumo_actual = A @ x

print("Consumo total actual de cada recurso:")
print(consumo_actual)
print("Disponibilidad de cada recurso (b):")
print(b)
```

Consumo total actual de cada recurso:

[3200. 2500. 750.]

Disponibilidad de cada recurso (b):

[3500. 2700. 900.]

Con estos datos concluimos que sí existe suficiente alimento para el consumo promedio diario.

b. ¿Cuál es el número máximo de animales de cada especie que se podría agregar de forma individual al sistema con el suministro de alimento que cumpla con el consumo?

b)

Consumen $\rightarrow (3200 \quad 2500 \quad 750)$

Sobra $\rightarrow (300 \quad 200 \quad 150)$

$$\begin{array}{l} 300 x_1 \text{ come} \\ 200 x_1 \text{ come} \\ \text{no come} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 \leq \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

$$1x_1 \leq 300 \wedge 1x_1 \leq 200 \therefore x_1 \leq 200$$

El máximo de la especie x_1 es 200.

$$\begin{array}{l} 150 x_2 \text{ come} \\ \text{no come} \\ \text{no come} \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \leq \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

El máximo de la especie x_2 es 150.

$$\begin{array}{l} \text{no come} \\ 100 \text{ come} \\ 150 \text{ come} \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \leq \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

El máximo de la especie x_3 es 100.

$$\begin{array}{l} 100 \text{ come} \\ 100 \text{ come} \\ 150 \text{ come} \end{array} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \leq \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

El máximo de la especie x_4 es 100.

Figura 2: Solución B

- c. Si la especie 1 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies restantes se podría soportar?

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = (500 \quad 350 \quad 400)$$

Consume $\rightarrow \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 750 \end{pmatrix}$

Sobran $\rightarrow \begin{pmatrix} 1300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$

$$\begin{matrix} 650 \\ x \\ x \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 \leq \begin{pmatrix} 1300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Para la especie x_2 el incremento individual es 650

$$\begin{matrix} x \\ 600 \\ 150 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \leq \begin{pmatrix} 1300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Para la especie x_3 el incremento individual es 150

$$\begin{matrix} 433,33 \\ 600 \\ 150 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \leq \begin{pmatrix} 1300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Para la especie x_4 el incremento máximo es 150

Figura 3: Solución C

- d. Si la especie 2 se extingue, ¿qué cantidad de incremento individual de las especies res-

tantes se podría soportar?

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = (350, 400)$

Consumen $\rightarrow \begin{pmatrix} 1200 \\ 1500 \\ 750 \end{pmatrix} \quad \text{Sobra} \rightarrow \begin{pmatrix} 2300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} x \\ 600 \\ 150 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \leq \begin{pmatrix} 2300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$

Para la especie x_3 el incremento individual es 150.

$\begin{matrix} 150 \\ 150 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_4 \leq \begin{pmatrix} 2300 \\ 1200 \\ 150 \end{pmatrix}$

Para la especie x_4 el incremento individual es 150.

Figura 4: Solución D

EJERCICIOS TEÓRICOS

7. Repita el ejercicio 4 con el método Gauss-Jordan.

Use el algoritmo de Gauss-Jordan y la aritmética computacional de precisión de 32 bits para resolver los siguientes sistemas lineales.

```
import numpy as np

def gauss_jordan(A, b):
    A = A.astype(np.float32)
```

```

b = b.astype(np.float32)

n = A.shape[0]

for i in range(n):
    max_row = i + np.argmax(np.abs(A[i:, i]))
    if max_row != i:
        A[[i, max_row], :] = A[[max_row, i], :]
        b[i], b[max_row] = b[max_row], b[i]

    pivote = A[i, i]
    if np.isclose(pivote, 0.0):
        raise ValueError()
    A[i, :] = A[i, :] / pivote
    b[i] = b[i] / pivote

    for j in range(n):
        if j != i:
            factor = A[j, i]
            A[j, :] = A[j, :] - factor * A[i, :]
            b[j] = b[j] - factor * b[i]

return b

```

a.

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9, \quad \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8, \quad \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8.$$

```

A_a = np.array([
    [1/4, 1/5, 1/6],
    [1/3, 1/4, 1/5],
    [1/2, 1.0, 2.0 ]
], dtype=np.float32)

b_a = np.array([9.0, 8.0, 8.0], dtype=np.float32)

sol_a = gauss_jordan(A_a, b_a)
print("Solución:", sol_a)

```

Solución: [-227.07693 476.92322 -177.69237]

b.

$$3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913,$$

$$2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 = 28.544,$$

$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254.$$

```
A_b = np.array([
    [3.333, 15920.0, -10.333],
    [2.222, 16.71, 9.612 ],
    [1.5611, 5.1791, 1.6852]
], dtype=np.float32)

b_b = np.array([15913.0, 28.544, 8.4254], dtype=np.float32)

sol_b = gauss_jordan(A_b, b_b)
print("Solución:", sol_b)
```

Solución: [0.9998865 1.0000001 1.0001063]

c.

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7},$$

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8}.$$

$$\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9}$$

```
A_c = np.array([
    [ 1.0, 1/2, 1/3, 1/4 ],
    [ 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 ],
    [ 1/3, 1/4, 1/5, 1/6 ],
    [ 1/4, 1/5, 1/6, 1/7 ]
], dtype=np.float32)

b_c = np.array([
    1/6, 1/7, 1/8, 1/9
], dtype=np.float32)

sol_c = gauss_jordan(A_c, b_c)
print("Solución:", sol_c)
```

Solución: [-0.03174686 0.5952499 -2.380982 2.7777972]

d.

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7,$$

$$x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2,$$

$$-2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5,$$

$$3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3.$$

Reordenada:

- $2x_1 + 1x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 3x_5 = 7$
- $1x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 1x_4 + 1x_5 = 2$
- $0x_1 - 2x_2 - 1x_3 + 1x_4 - 1x_5 = -5$
- $3x_1 + 1x_2 - 4x_3 + 0x_4 + 5x_5 = 6$
- $1x_1 - 2x_2 - 1x_3 - 1x_4 + 1x_5 = -3$

```
A_d = np.array([
    [ 2.0,  1.0, -1.0,  1.0, -3.0 ],
    [ 1.0,  0.0,  2.0, -1.0,  1.0 ],
    [ 0.0, -2.0, -1.0,  1.0, -1.0 ],
    [ 3.0,  1.0, -4.0,  0.0,  5.0 ],
    [ 1.0, -1.0, -1.0, -1.0,  1.0 ]
], dtype=np.float32)

b_d = np.array([7.0, 2.0, -5.0, 6.0, -3.0], dtype=np.float32)

sol_d = gauss_jordan(A_d, b_d)
print("Solución:", sol_d)
```

Solución: [1.8830408 2.8070176 0.73099405 1.4385962 0.09356717]

Declaración de uso de IA

En la preparación de este contenido, se utilizó ChatGPT para generar las instrucciones de los ejercicios, comprender el código, realizar correcciones y asistir en la presentación de las gráficas, con el objetivo de optimizar el proceso de elaboración y mantener la responsabilidad del producto final en el criterio del autor.