Deber 02: Errores Numéricos - Métodos Numéricos

Ivonne Ayala

October 29, 2024

Introducción

Este documento presenta la resolución del conjunto de ejercicios relacionados con errores numéricos y métodos numéricos. Cada ejercicio incluirá la descripción del problema, el desarrollo completo del procedimiento, y se enfatizará la respuesta final.

Ejercicio 1

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Variable	Valor Exacto	Valor Truncado (4 dígitos)
π	3.14159265	3.141
e	2.71828182	2.718
$\sqrt{2}$	1.41421356	1.414
$\frac{22}{7}$	1.4142135623	1.414

Table 1: Comparación entre valor exacto y valor truncado

a) $p = \pi$, $p^* = \frac{22}{7}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = \left| \pi - \frac{22}{7} \right| \approx 1.72759265$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{\left|\pi - \frac{22}{7}\right|}{\pi} \approx 0.54990982$$

b) $p = \pi$, $p^* = 3.1416$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |\pi - 3.1416| \approx 7.35 * 10^{-6}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|\pi - 3.1416|}{\pi} \approx 2.33957 * 10^{-6}$$

c) $p = e$, $p^* = 2.718$

Solución:

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |e - 2.718| \approx 2.8182 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 2.718|}{e} \approx 1.036757 * 10^{-4}$$

d) $p = \sqrt{2}$, $p^* = 1.414$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = \left|\sqrt{2} - 1.414\right| \approx 2.1356 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{\left|\sqrt{2} - 1.414\right|}{\sqrt{2}} \approx 1.5100652 * 10^{-4}$$

Ejercicio 2

Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*

Variable	**Valor**
8!	40320
e	2.71828182
9!	362880
$\sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}$	24.89
10^{π}	1385.45573

Table 2: Valores a usar en el Ejercicio 2

a) $p = e$, $p^* = 22000$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |e - 22000| \approx 21997.28172$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|e - 22000|}{e} \approx 8092.347731$$

b) $p = 10^{\pi}$, $p^* = 1400$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |10^{\pi} - 1400| = 14.54427$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|10^\pi - 1400|}{10^\pi} = 0.010497$$

c) $p = 8!$, $p^* = 39900$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |40320 - 39900| = 420$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|40320 - 39900|}{40320} \approx 0.0104166$$

d) $p = 9!$, $p^* = \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}| \approx 362855.11$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|362880 - \sqrt{18\pi} \cdot \frac{9}{e}|}{362880} \approx 0.999931$$

Ejercicio 3

Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p

a) $p = \pi$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \pi \approx 3.1416 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\pi - 3.1416 \times 10^{-4}, \pi + 3.1416 \times 10^{-4}\right]$$

b) $p = e$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$

- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot e \approx 2.7183 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[e - 2.7183 \times 10^{-4}, e + 2.7183 \times 10^{-4}\right]$$

c) $p = \sqrt{2}$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{2} \approx 1.4142 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\sqrt{2} - 1.4142 \times 10^{-4}, \sqrt{2} + 1.4142 \times 10^{-4}\right]$$

d) $p = \sqrt{7}$ **Solución:**

- **Error relativo máximo:** $E_r = 10^{-4}$
- **Condición de error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} \leq 10^{-4}$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot |p|$$

$$|p - p^*| \leq 10^{-4} \cdot \sqrt{7} \approx 2.6458 \times 10^{-4}$$

- **Intervalo para p^*:**

$$p^* \in \left[\sqrt{7} - 2.6458 \times 10^{-4}, \sqrt{7} + 2.6458 \times 10^{-4}\right]$$

Ejercicio 4

Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para al menos cinco dígitos

Variable	Valor Exacto	Valor Redondeado (3 dígitos)
e	2.71828	2.718
-10π	-31.41592	-31.416
$6e$	16.30969	16.310
$10\pi + 6e$	-15.10623	-15.106
$10\pi + 6e - 1$	-16.10623	-16.106
$2\frac{5}{3}$	3.33333	3.333
$\sqrt{2}\sqrt{3}$	2.44945	2.449

Table 3: Comparación entre valor exacto y valor truncado

a) e **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |-2.71828 + 2.718| \approx 2.8 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.8 * 10^{-4}}{-2.71828} \approx 1.03006 * 10^{-4}$$

b) $-10\pi + 6e - 1$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |-16.10623 + 16.106| \approx 2.3 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{2.3 * 10^{-4}}{-16.10623} \approx 1.42801 * 10^{-5}$$

c) $\frac{5}{3} \cdot 2$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.33333 - 3.333| \approx 3.3 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{3.3 * 10^{-4}}{3.33333} \approx 9.90000 * 10^{-5}$$

d) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$ **Solución:**

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.44945 - 2.449| \approx 4.5 * 10^{-4}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{4.5 * 10^{-4}}{2.44945} \approx 1.83714 * 10^{-4}$$

Ejercicio 5

Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son:

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

a) $4\arctan(1) + \arctan(1/2)$ **Solución:**

Usando el polinomio de Maclaurin, aproximamos:

$$\arctan(1) \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} \approx 0.9333$$

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{32} \approx 0.4635$$

Por lo tanto,

$$4\arctan(1) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \approx 4 \times 0.9333 + 0.4635 = 4.1967$$

Comparado con el valor real de $\pi \approx 3.1416$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.1416 - 4.1967| \approx 1.0551$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|3.1416 - 4.1967|}{3.1416} \approx 0.3359$$

b) $16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239)$ **Solución:**

Usando el polinomio de Maclaurin, aproximamos:

$$\arctan\left(\frac{1}{5}\right) \approx \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{125} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3125} \approx 0.1974$$

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{239^5} \approx 0.0042$$

Por lo tanto,

$$16\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - 4\arctan\left(\frac{1}{239}\right) \approx 16 \times 0.1974 - 4 \times 0.0042 = 3.1512$$

Comparado con el valor real de $\pi \approx 3.1416$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |3.1416 - 3.1512| \approx 0.0096$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|3.1416 - 3.1512|}{3.1416} \approx 0.0031$$

Ejercicio 6

El número e se puede definir por medio de:

$$e = \sum \frac{1}{n!}, \text{ donde } n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 \text{ para } n \neq 0 \text{ y } 0! = 1$$

Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 5$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 5$:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}$$

$$e \approx 1 + 1 + 0.5 + 0.1667 + 0.0417 + 0.0083 = 2.7183$$

Comparado con el valor real de $e \approx 2.718281828$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.718281828 - 2.7183| \approx 1.8172 \times 10^{-5}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.718281828 - 2.7183|}{2.718281828} \approx 6.6846 \times 10^{-6}$$

b) $\sum \frac{1}{n!}$ hasta $n = 10$ **Solución:**

Calculamos el valor aproximado de e hasta $n = 10$:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!}$$

$e \approx 1+1+0.5+0.1667+0.0417+0.0083+0.0014+0.0002+0.000025+0.000003+0.0000003 = 2.71828$

Comparado con el valor real de $e \approx 2.718281828$.

- **Error absoluto:**

$$E_a = |p - p^*| = |2.718281828 - 2.7182818| \approx 2.8 \times 10^{-8}$$

- **Error relativo:**

$$E_r = \frac{|p - p^*|}{|p|} = \frac{|2.718281828 - 2.7182818|}{2.718281828} \approx 1.03 \times 10^{-8}$$

Ejercicio 7

Intersección de dos puntos en una línea recta

Suponga que dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_2$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección x de la línea:

$$x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{y} \quad x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

Use los datos $(x_1, y_1) = (1.31, 3.24)$ y $(x_2, y_2) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

Solución:

- **Datos:**
$$(x_1, y_1) = (1.31, 3.24), \quad (x_2, y_2) = (1.93, 5.76)$$

- **Primer método:** $x = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
Calculemos cada término aplicando redondeo a tres dígitos:
$$y_2 - y_1 = 5.76 - 3.24 = 2.52$$
Redondeado a tres dígitos: $y_2 - y_1 \approx 2.52$.
$$x_2 - x_1 = 1.93 - 1.31 = 0.62$$
Redondeado a tres dígitos: $x_2 - x_1 \approx 0.62$.
Entonces,
$$x = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$

- **Segundo método:** $x = x_1 - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$
Calculemos cada término aplicando redondeo a tres dígitos:
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2.52}{0.62} \approx 4.06$$
Entonces,
$$x = x_1 - 4.06 = 1.31 - 4.06 = -2.75$$

- **Análisis de resultados:**
Los dos métodos dan valores distintos debido a la acumulación de errores de redondeo en cada paso intermedio. El primer método da un resultado positivo y parece más adecuado para representar la intersección x entre los puntos, ya que este valor corresponde a una proporción directa en la pendiente. Por otro lado, el segundo método da un resultado negativo que, en este contexto, no es coherente con la posición de los puntos en la recta.

- **Conclusión:** El primer método es mejor, ya que minimiza los errores de redondeo en los cálculos y produce un resultado más coherente con la geometría de los puntos dados.