Algoritmo de Edmonds-Karp

Origem: Wikipédia, a enciclopédia livre.

Na Ciência da computação e teoria dos grafos, o **Algoritmo de Edmonds-Karp** é uma implementação do Algoritmo de Ford-Fulkerson para a resolução do problema de fluxo máximo em uma rede de fluxo. A característica que o distingue é que o caminho de aumento mais curto é usado em cada iteração, o que garante que o calculo vai terminar. Na maioria das implementações, o caminho de aumento mais curto é encontrado usando uma busca em largura, a qual roda em um tempo de $O(VE^2)$. Isto é assintoticamente mais lento que algoritmo remarcagem-para-frente, o qual roda em $O(V^3)$, mas é freqüentemente mais rápido para utilização em grafos esparsos. O algoritmo foi publicado pela primeira vez pelo cientista russo Dinic, em 1970, e depois, de forma independente, por Edmonds e Karp que o publicaram em 1972. O algoritmo de Dinic inclui técnicas adicionais para reduzir o tempo para a ordem de $O(V^2E)$.

Índice

Algoritmo

Este algoritmo é idêntico ao Algoritmo de Ford-Fulkerson, exceto que a ordem de busca quando encontra que o caminho de aumento de fluxo definido. O caminho encontrado deve ser o caminho mais curto com capacidade disponível.

Exemplo de implementação

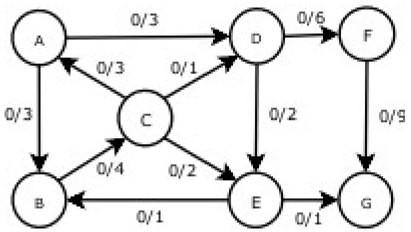
Implementação Python:

```
def edmonds_karp(C, source, sink):
    n = len(C) # C is the capacity matrix
```

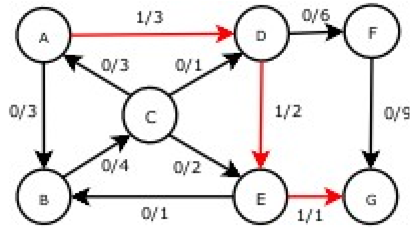
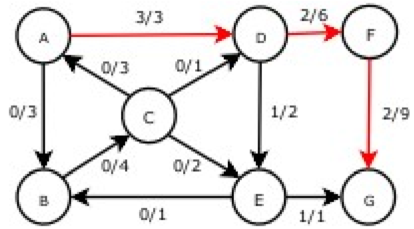
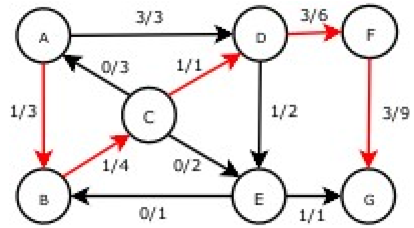
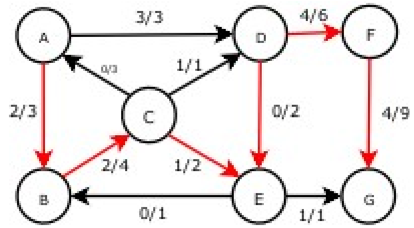
```
    F = [[0] * n for _ in xrange(n)]
    # residual capacity from u to v is C[u][v] - F[u][v]

    while True:
        path = bfs(C, F, source, sink)
        if not path:
            break
        # traverse path to find smallest capacity
        u,v = path[0], path[1]
        flow = C[u][v] - F[u][v]
        for i in xrange(len(path) - 2):
            u,v = path[i+1], path[i+2]
            flow = min(flow, C[u][v] - F[u][v])
        # traverse path to update flow
        for i in range(len(path) - 1):
            u,v = path[i], path[i+1]
            F[u][v] += flow
            F[v][u] -= flow
    return sum([F[source][i] for i in xrange(n)])

def bfs(C, F, source, sink):
    P = [-1] * len(C) # parent in search tree
    P[source] = source
    queue = [source]
    while queue:
        u = queue.pop(0)
        for v in xrange(len(C)):
            if C[u][v] - F[u][v] > 0 and P[v] == -1:
                P[v] = u
                queue.append(v)
                if v == sink:
                    path = []
                    while True:
                        path.insert(0, v)
                        if v == source:
                            break
                        v = P[v]
                    return path
    return None
```

Exemplo

Dada uma rede de sete nós e capacidade como mostrado abaixo:



No pares f/c escritos nos arcos, f é o fluxo actual, e c é a capacidade. A capacidade residual de u para v é $c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$, a capacidade total, menos a vazão que já esta sendo usada. Se o fluxo da rede de u para v é negativo, isto *contribui* para capacidade residual.

Caminho	Capacidade	Rede resultante
A, D, E, G	$\min(c_f(A,D), c_f(D,E), c_f(E,G)) =$ $\min(3-0, 2-0, 1-0) =$ $\min(3,2,1) = 1$	
A, D, F, G	$\min(c_f(A,D), c_f(D,F), c_f(F,G)) =$ $\min(3-1, 6-0, 9-0) =$ $\min(2,6,9) = 2$	
A, B, C, D, F, G	$\min(c_f(A,B), c_f(B,C), c_f(C,D), c_f(D,F), c_f(F,G)) =$ $\min(3-0, 4-0, 1-0, 6-2, 9-2) =$ $\min(3,4,1,4,7) = 1$	
A, B, C, E, D, F, G	$\min(c_f(A,B), c_f(B,C), c_f(C,E), c_f(E,D), c_f(D,F), c_f(F,G)) =$ $\min(3-1, 4-1, 2-0, 0--1, 6-3, 9-3) =$ $\min(2,3,2,1,3,6) = 1$	

Note como o comprimento do caminho aumentante encontrado pelo algoritmo nunca diminui. Os caminhos encontrados são os mais curtos possíveis. O fluxo encontrado é igual a capacidade que cruza o menor corte no grafo separando a fonte e o consumo. Há somente um corte mínimo neste grafo, particionando-se os nodos nos conjuntos $\{A, B, C, E\}$ e $\{D, F, G\}$, com a capacidade $c(A, D) + c(C, D) + c(E, G) = 3 + 1 + 1 = 5$.

Referências

- E. A. Dinic, Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation, *Soviet Math. Doklady*, Vol 11 (1970) pp1277-1280.
- J. Edmonds and R. M. Karp, Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems, *Journal of the ACM*, Vol 19, No. 2 (1972) pp248-264. PDF (necessita autenticação) (http://delivery.acm.org/10.1145/330000/321699/p248-edmonds.pdf)