Algoritmo de Ford-Fulkerson

Esta página descreve o algoritmo dos pseudocaminhos aumentadores para o problema do fluxo máximo. O algoritmo foi publicado por Ford e Fulkerson (e independentemente por Kotzig) em 1956.

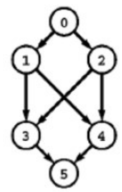
Pseudocaminhos

Um *pseudocaminho* num digrafo é uma sequência de vértices dotada da seguinte propriedade: para cada par *v w* de vértices consecutivos,

> *v-w* é um arco do digrafo ou
> *w-v* é um arco do digrafo.

No primeiro caso, dizemos que *v-w* é um *arco direto* (= *forward arc*) do pseudocaminho. No segundo caso, dizemos que *w-v* é um *arco reverso* (= *backward arc*) do pseudocaminho. Um pseudocaminho sem arcos reversos é um caminho.

Exemplo A. Considere o digrafo definido pelo conjunto de arcos `0-1 0-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-5 4-5`. A sequência de vértices



`0-2-`**`3-1`**`-4-5`

é um pseudocaminho. O arco `1-3` é reverso. Todos os demais arcos são diretos.

Pseudocaminhos aumentadores

Suponha dado um digrafo capacitado e um fluxo no digrafo que respeita as capacidades dos arcos. Dizemos que um arco *v-w* está *cheio* se o fluxo no arco é igual à capacidade do arco. Dizemos que um arco *v-w* está *vazio* se o fluxo no arco é nulo.

Em relação a esse fluxo, um pseudocaminho é *aumentador* (= *augmenting*) se vai do vértice inicial ao final do digrafo e tem as seguintes propriedades:

- nenhum arco direto do pseudocaminho está cheio e
- nenhum arco reverso do pseudocaminho está vazio.

Pseudocaminhos aumentadores são uma generalização dos caminhos aumentadores que usamos para obter um emprelhamento máximo num grafo bipartido.

A operação de *enviar ε unidades de fluxo* ao longo de um pseudocaminho aumentador consiste no seguinte:

- some ε ao fluxo em cada arco direto do pseudocaminho (ou seja, faça $f_{vw} = f_{vw} + \varepsilon$) e
- subtraia ε do fluxo em cada arco reverso (ou seja, faça $f_{wv} = f_{wv} - \varepsilon$).

É fácil verificar que o resultado dessa operação é um fluxo. Ademais, a operação soma ε à intensidade do fluxo.

A operação de envio de ε unidades de fluxo ao longo de um pseudocaminho aumentador é análoga à operação $M \oplus P$ usada para aumentar um emprelhamento num grafo bipartido.

Exemplo B. Considere o digrafo capacitado definido pela tabela abaixo (o mesmo do exemplo A). A segunda linha da tabela dá as capacidades dos arcos e a terceira define um fluxo (com "-" no lugar de `0`). O vértice inicial é `0` e o final é `5`.

```
0-1 0-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-5 4-5
  2   3   3   1   1   1   2   3
  2   1   2   -   -   1   2   1
```

A sequência `0-2-3-1-4-5` (arcos reversos pintados de vermelho) é um pseudocaminho aumentador. Se enviarmos `1` unidade de fluxo ao longo desse pseudocaminho, teremos um novo fluxo:

```
0-1 0-2 1-3 1-4 2-3 2-4 3-5 4-5
  2   2   1   1   1   1   2   2
```

A intensidade do novo fluxo é maior que a intensidade do original.

Exercícios 1

1. Mostre que o envio de ε unidades de fluxo ao longo de um pseudocaminho aumentador produz um novo fluxo.

Capacidade residual de um pseudocaminho

Suponha dado um digrafo capacitado com vértice inicial e vértice final. Seja f um fluxo no digrafo que respeita a capacidade c. Suponha dado um pseudocaminho aumentador relativo a f. A capacidade *residual* de um arco direto v-w do pseudocaminho é a diferença

$$c_{vw} - f_{vw}\,,$$

sendo c_{vw} a capacidade e f_{vw} o fluxo no arco v-w. A capacidade *residual* de um arco reverso w-v do pseudocaminho é

$$f_{wv}\,.$$

A *capacidade residual* do pseudocaminho todo é a menor das capacidades residuais dos seus arcos. É claro que a capacidade residual de um pseudocaminho aumentador é estritamente positiva.

Digamos que δ é a capacidade residual de um pseudocaminho aumentador P e ε é um número 0 e δ. Se enviarmos ε unidades de fluxo ao longo de P, produziremos um novo fluxo que respeita as capacidades dos arcos. A intensidade do novo fluxo será ε unidades maior que a intensidade do fluxo original.

Exemplo C. Considere o digrafo capacitado definido pela tabela (o mesmo dos exemplos A e B). O vértice inicial é `0` e o final é `5`. A segunda linha da tabela dá as capacidades dos arcos e a terceira define um fluxo.

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5
2	3	3	1	1	1	2	3
2	1	2	-	-	1	2	1

As capacidades residuais dos arcos do pseudocaminho aumentador `0-2-3-1-4-5` estão indicadas a seguir:

0-2	2-3	**3-1**	1-4	4-5
2	1	**2**	1	2

A capacidade residual do pseudocaminho todo é `1`.

Exercícios 2

1. Considere o digrafo capacitado definido pela tabela abaixo, com as capacidades dadas na segunda linha da tabela. Seja `0` o vértice inicial e `3` o vértice final. O fluxo dado na terceira linha respeita as capacidades? Qual a intensidade desse fluxo? Calcule a capacidade residual do pseudocaminho aumentador `0-2-1-3`. Use o pseudocaminho para encontrar um novo fluxo. Qual a intensidade do novo fluxo?

0-1	0-2	1-2	1-3	2-3
2	2	2	2	2
2	-	2	-	2

O algoritmo de Ford-Fulkerson

O algoritmo de Ford-Fulkerson, também conhecido como *algoritmo dos pseudocaminhos aumentadores*, resolve o problema do fluxo máximo. ⚠ Cada iteração começa com um fluxo f que respeita as capacidades dos arcos. A primeira iteração começa com o fluxo nulo. O processo iterativo consiste no seguinte:

enquanto existe pseudocaminho aumentador para f **faça**
  encontre um pseudocaminho aumentador P
  calcule a capacidade residual δ de P
  envie δ unidades de fluxo ao longo de P e atualize f
devolva f

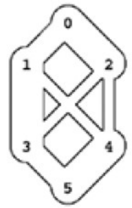
Por incrível que pareça, esse simples algoritmo produz um fluxo de intensidade máxima! A prova desse fato, será discutida na próxima página, depois que tivermos introduzido o conceito de capacidade de um corte.

Eis uma propriedade importante do algoritmo: se as capacidades dos arcos são números inteiros, o fluxo em cada arco também permanecerá inteiro ao longo da execução do algoritmo.

Exemplo D. Calculemos um fluxo máximo no digrafo capacitado descrito a seguir tomando `0` como vértice inicial e `5` como vértice final.

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5

2	3	3	1	1	1	2	3



Comece com fluxo nulo. Considere o pseudocaminho aumentador `0-1-3-5`, que tem capacidade residual `2`. Envie `2` unidades de fluxo ao longo do pseudocaminho para obter um segundo fluxo:

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5
2	-	2	-	-	-	2	-

Agora considere o pseudocaminho aumentador `0-2-4-5` relativo ao segundo fluxo. Esse pseudocaminho tem capacidade residual `1`. Envie `1` unidade de fluxo ao longo desse pseudocaminho para obter um terceiro fluxo:

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5
2	1	2	-	-	1	2	1

Agora considere o pseudocaminho aumentador 0-2-**3-1**-4-5 relativo ao terceiro fluxo. Esse pseudocaminho tem capacidade residual `1`. Envie `1` unidade de fluxo ao longo desse pseudocaminho para obter um quarto fluxo:

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5
2	2	1	1	1	1	2	2

Não há pseudocaminho aumentador para esse quarto fluxo.

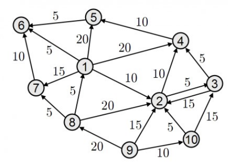
Exemplo E. Veja outra sequência de pseudocaminhos aumentadores (coluna direita da tabela abaixo) para o digrafo capacitado do [exemplo D](). Cada um dos pseudocaminhos aumentadores tem capacidade residual `1`. A sequência transforma um fluxo inicial de intensidade `0` em um fluxo final de intensidade `4` (coluna esquerda da tabela):

0-1	0-2	1-3	1-4	2-3	2-4	3-5	4-5	
2	3	3	1	1	1	2	3	
-	-	-	-	-	-	-	-	0-1-4-5
1	-	-	1	-	-	-	1	0-2-**4-1**-3-5
1	1	1	-	-	1	1	1	0-2-3-5
1	2	1	-	1	1	2	1	0-1-4-5
2	2	1	1	1	1	2	2	

Note que todos os fluxos da sequência respeitam as capacidades. O último fluxo é máximo pois não há pseudocaminho aumentador para ele.

Exercícios 3

1. Para que serve o algoritmo de Ford-Fulkerson? Que problema resolve?
2. ☆ Como começa cada iteração do algoritmo de Ford-Fulkerson? (Cuidado! Não quero uma descrição das ações que ocorrem durante a iteração! Quero saber, isto sim, quais as informações disponíveis no início de uma iteração genérica, antes que a execução da iteração comece.)
3. Encontre um fluxo máximo no digrafo capacitado da figura. Suponha que o vértice inicial é 9 e o final é 6.



4. ☆ *Fluxo inteiro.* Suponha que todas as capacidades de um digrafo capacitado são números inteiros. Mostre que o fluxo em cada arco permanece inteiro ao longo da execução do algoritmo de Ford-Fulkerson.
5. ☆ *Caminhos aumentadores.* Um *caminho* aumentador é um pseudocaminho aumentador sem arcos reversos. Mostre que o [algoritmo de]()

Ford-Fulkerson pode não produzir um fluxo máximo se usar apenas *caminhos* aumentadores.

Desempenho do algoritmo

O consumo de tempo do algoritmo de Ford-Fulkersonal é proporcional ao número de iterações. Tudo se reduz, portanto, à seguinte questão: Quantos pseudocaminhos aumentadores são necessários para produzir um fluxo máximo a partir do fluxo nulo?

> NÚMERO DE PSEUDOCAMINHOS AUMENTADORES: Se todos os arcos do digrafo têm capacidade inteira e menor que uma constante M então o número de pseudocaminhos aumentadores necessário para atingir um fluxo máximo é menor que VM, sendo V o número de vértices do digrafo.

Eis a prova desse fato. Como as capacidades dos arcos são números inteiros, o fluxo em cada arco é um número inteiro. Portanto, ao longo da execução do algoritmo, a capacidade residual de cada arco em qualquer pseudocaminho aumentador é um número inteiro positivo. Logo, cada pseudocaminho aumentador tem capacidade residual pelo menos 1 e assim aumenta em pelo menos 1 a intensidade do fluxo.

Resta apenas mostrar que não existe fluxo de intensidade maior que VM. Como não temos arcos paralelos, o número de arcos que saem do vértice inicial é menor que V. Portanto, qualquer fluxo tem intensidade menor que VM. (Esse raciocínio é um caso particular da delimitação superior por capacidade de cortes que veremos adiante.)

Essa estimativa do número de pseudocaminhos aumentadores não é excessivamente pessimista: existem digrafos capacitados (veja o exemplo F) em que o número de pseudocaminhos aumentadores chega muito perto de VM.

Como o número de pseudocaminhos aumentadores depende das capacidades dos arcos, o algoritmo não pode ser considerado satisfatório: a mera multiplicação de todas as capacidades por 100, por exemplo, pode multiplicar o consumo de tempo por 100. (Em linguagem técnica, diz-se que o algoritmo é apenas *fracamente* polinomial.) Para obter um desempenho que não dependa das capacidades será preciso escolher os pseudocaminhos aumentadores de maneira mais cuidadosa. É o que faremos nas próximas páginas.

Exemplo F. Considere o seguinte digrafo capacitado com vértice inicial `0` e vértice final `3`:

```
0-1 0-2 1-2 1-3 2-3
  M   M   1   M   M
```

Começando com fluxo nulo, tome a seguinte sequência periódica de pseudocaminhos aumentadores:

```
0-1-2-3
0-2-1-3
0-1-2-3
0-2-1-3
0-1-2-3
0-2-1-3
. . .
```

Eis a correspondente sequência de fluxos:

```
0-1 0-2 1-2 1-3 2-3
```

```
0   0   0   0   0
1   0   1   0   1
1   1   0   1   1
2   1   1   1   2
2   2   0   2   2
3   2   1   2   3
3   3   0   3   3
. . .
M   M   0   M   M
```

O fluxo tem intensidade `2M` e o número de iterações é `2M`. Como `V = 4`, o número de iterações é `(V-2)M`.

(É bem verdade que poderíamos atingir o fluxo máximo em apenas duas iterações se os pseudocaminhos aumentadores fossem escolhidos de maneira diferente. Infelizmente, a versão do algoritmo dada acima não ensina como escolher bons pseudocaminhos aumentadores.)

Exercícios 4

1. Um *caminho aumentador* é um pseudocaminho aumentador sem arcos reversos. É verdade que existe uma sequência de caminhos aumentadores que leva do fluxo nulo ao fluxo máximo?
2. [Sedgewick 22.21] Considere o digrafo capacitado abaixo, com vértice inicial `0` e vértice final `5`. Mostre, no estilo do exemplo E, uma sequência de pseudocaminhos aumentadores que leva a um fluxo máximo. Mostre outra sequência, diferente da primeira. Mostre mais uma, diferente das anteriores.

```
0-1 0-2 0-3 1-2 1-3 1-4 2-4 2-5 3-4 3-5 4-5
  2   3   2   1   1   1   1   2   2   3   2
```

3. [Sedgewick 22.41] Considere o digrafo capacitado abaixo, com vértice inicial `0` e vértice final `5`. Dê uma sequência de pseudocaminhos aumentadores que produza um fluxo "com ciclo" (ou seja, um fluxo cuja decomposição em caminhos e ciclos tenha um ciclo). Cada um dos pseudocaminhos aumentadores deve ser simples (ou seja, não pode ter vértices repetidos).

```
0-1 0-2 0-3 1-3 1-4 2-1 2-5 3-4 3-5 4-2 4-5
  2   3   2   1   1   1   2   2   3   1   2
```

4. *Emparelhamento em grafo bipartido.* Use o algoritmo de Ford-Fulkerson para encontrar um emparelhamento máximo num grafo bipartido. Aplique sua técnica ao grafo bipartido a seguir. Um dos "lados" do grafo consiste nos vértices `0 1 2 3 4` e outro consiste nos vértices `5 6 7 8 9`.

```
0-5 0-6 1-5 1-6 2-5 2-6 3-5 3-7 3-8 3-9 4-6 4-7 4-8 4-9
```

5. Seja *G* um digrafo com vértice inicial e vértice final e com capacidades *nos vértices* (mas sem capacidades nos arcos). Como calcular um fluxo máximo dentre os que respeitam as capacidades?

Veja também minha página Fluxo em Redes.

Veja slides 10 a 83 da aula24.pdf de José Coelho de Pina (2011).

---

www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_para_grafos/
Atualizado em 2016-12-06
Paulo Feofiloff
IME-USP