Ensino Médio: Análise Combinatória

Temos uma página sobre Análise Combinatória com Exercícios com os conceitos utilizados, respostas ou comentários.

Introdução à Análise Combinatória

Análise Combinatória é um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias.

Na maior parte das vezes, tomaremos conjuntos Z com m elementos e os grupos formados com elementos de Z terão p elementos, isto é, p será a taxa do agrupamento, com $p \leq m$.

Arranjos, Permutações ou Combinações, são os três tipos principais de agrupamentos, sendo que eles podem ser simples, com repetição ou circulares. Apresentaremos alguns detalhes de tais agrupamentos.

Observação: É comum encontrarmos na literatura termos como: arranjar, combinar ou permutar, mas todo o cuidado é pouco com os mesmos, que às vezes são utilizados em concursos em uma forma dúbia!

Arranjos

São agrupamentos formados com p elementos, ($p<m$) de forma que os p elementos sejam distintos entre sí pela ordem ou pela espécie. Os arranjos podem ser simples ou com repetição.

Arranjo simples: Não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_s(m,p) = m!/(m-p)!$

Cálculo para o exemplo: $A_s(4,2) = 4!/2!=24/2=12$.

Exemplo: Seja Z={A,B,C,D}, m=4 e p=2. Os arranjos simples desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 12 grupos que não podem ter a repetição de qualquer elemento mas que podem aparecer na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

A_s={AB,AC,AD,BA,BC,BD,CA,CB,CD,DA,DB,DC}

Arranjo com repetição: Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $A_r(m,p) = m^p$.

Cálculo para o exemplo: $A_r(4,2) = 4^2=16$.

Exemplo: Seja C={A,B,C,D}, m=4 e p=2. Os arranjos com repetição desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 16 grupos que onde aparecem elementos repetidos em cada grupo. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

A_r={AA,AB,AC,AD,BA,BB,BC,BD,CA,CB,CC,CD,DA,DB,DC,DD}

Arranjo condicional: Todos os elementos aparecem em cada grupo de p elementos, mas existe uma condição que deve ser satisfeita acerca de alguns elementos.

Fórmula: $N=A(m_1,p_1).A(m-m_1,p-p_1)$

Cálculo para o exemplo: $N=A(3,2).A(7-3,4-2)=A(3,2).A(4,2)=6\times12=72$.

Exemplo: Quantos arranjos com 4 elementos do conjunto {A,B,C,D,E,F,G}, começam com duas letras escolhidas no subconjunto {A,B,C}?

Aqui temos um total de m=7 letras, a taxa é p=4, o subconjunto escolhido tem m_1=3 elementos e a taxa que este subconjunto será formado é p_1=2. Com as letras A,B e C, tomadas 2 a 2, temos 6 grupos que estão no conjunto:

P_{ABC} = {AB,BA,AC,CA,BC,CB}

Com as letras D,E,F e G tomadas 2 a 2, temos 12 grupos que estão no conjunto:

P_{DEFG} = {DE,DF,DG,ED,EF,EG,FD,FE,FG,GD,GE,GF}

Usando a regra do produto, teremos 72 possibilidades obtidas pela junção de um elemento do conjunto P_{ABC} com um elemento do conjunto P_{DEFG}. Um típico arranjo para esta situação é CAFG.

Permutações

Quando formamos agrupamentos com m elementos, de forma que os m elementos sejam distintos entre sí pela ordem. As permutações podem ser simples, com repetição ou circulares.

Permutação simples: São agrupamentos com todos os m elementos distintos.

Fórmula: $P_s(m) = m!$.

Cálculo para o exemplo: $P_s(3) = 3!=6$.

Exemplo: Seja C={A,B,C} e m=3. As permutações simples desses 3 elementos são 6 agrupamentos que não podem ter a repetição de qualquer elemento em cada grupo mas podem aparecer na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

$$P_s=\{ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA\}$$

Permutação com repetição: Dentre os m elementos do conjunto $C=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$, faremos a suposição que existem m_1 iguais a x_1, m_2 iguais a x_2, m_3 iguais a x_3, ... , m_n iguais a x_n, de modo que $m_1+m_2+m_3+...+m_n=m$.

Fórmula: Se $m=m_1+m_2+m_3+...+m_n$, então

$$P_r(m)=C(m,m_1).C(m-m_1,m_2).C(m-m_1-m_2,m_3)\ ...\ C(m_n,m_n)$$

Anagrama: Um anagrama é uma (outra) palavra construída com as mesmas letras da palavra original trocadas de posição.

Cálculo para o exemplo: $m_1=4$, $m_2=2$, $m_3=1$, $m_4=1$ e $m=6$, logo:
$P_r(6)=C(6,4).C(6-4,2).C(6-4-1,1)=C(6,4).C(2,2).C(1,1)=15$.

Exemplo: Quantos anagramas podemos formar com as 6 letras da palavra ARARAT. A letra A ocorre 3 vezes, a letra R ocorre 2 vezes e a letra T ocorre 1 vez. As permutações com repetição desses 3 elementos do conjunto C={A,R,T} em agrupamentos de 6 elementos são 15 grupos que contêm a repetição de todos os elementos de C aparecendo também na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

P_r={AAARRT,AAATRR,AAARTR,AARRTA,AARTTA,
AATRRA,AARRTA,ARAART,ARARAT,ARARTA,
ARAATR,ARAART,ARAATR,ATAARA,ATARAR}

Permutação circular: Situação que ocorre quando temos grupos com m elementos distintos formando uma circunferência de círculo.

Fórmula: $P_c(m)=(m-1)!$

Cálculo para o exemplo: $P(4)=3!=6$

Exemplo: Seja um conjunto com 4 pessoas K={A,B,C,D}. De quantos modos distintos estas pessoas poderão sentar-se junto a uma mesa circular (pode ser retangular) para realizar o jantar sem que haja repetição das posições?

Se considerássemos todas as permutações simples possíveis com estas 4 pessoas, teriamos 24 grupos, apresentados no conjunto:

P_c={ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB,BACD,BADC,
BCAD,BCDA,BDAC,BDCA,CABD,CADB,CBAD,CBDA,
CDAB,CDBA, DABC,DACB,DBAC,DBCA,DCAB,DCBA}

Acontece que junto a uma mesa "circular" temos que:

ABCD=BCDA=CDAB=DABC
ABDC=BDCA=DCAB=CABD
ACBD=CBDA=BDAC=DACB
ACDB=CDBA=DBAC=BACD
ADBC=DBCA=BCAD=CADB
ADCB=DCBA=CBAD=BADC

Existem somente 6 grupos distintos, dados por:

P_c={ABCD,ABDC,ACBD,ACDB,ADBC,ADCB}

Combinações

Quando formamos agrupamentos com p elementos, (p<m) de forma que os p elementos sejam distintos entre sí apenas pela espécie.

Combinação simples: Não ocorre a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos.

Fórmula: $C(m,p) = m!/[(m-p)!\ p!]$

Cálculo para o exemplo: $C(4,2)=4!/[2!2!]=24/4=6$

Exemplo: Seja C={A,B,C,D}, m=4 e p=2. As combinações simples desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 6 grupos que não podem ter a repetição de qualquer elemento nem podem aparecer na ordem trocada. Todos os agrupamentos estão no conjunto:

C_s={AB,AC,AD,BC,BD,CD}

Combinação com repetição: Todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo até p vezes.

Fórmula: $C_r(m,p)=C(m+p-1,p)$

Cálculo para o exemplo: $C_r(4,2)=C(4+2-1,2)=C(5,2)=5!/[2!3!]=10$

Exemplo: Seja C={A,B,C,D}, m=4 e p=2. As combinações com repetição desses 4 elementos tomados 2 a 2 são 10 grupos que têm todas as repetições possíveis de elementos em grupos de 2 elementos não podendo aparecer o mesmo grupo com a ordem trocada. De um modo geral neste caso, todos os agrupamentos com 2 elementos formam um conjunto com 16 elementos:

C_r={AA,AB,AC,AD,BA,BB,BC,BD,CA,CB,CC,CD,DA,DB,DC,DD}

mas para obter as combinações com repetição, deveremos excluir deste conjunto os 6 grupos que já apareceram antes, pois AB=BA, AC=CA, AD=DA, BC=CB, BD=DB e CD=DC, assim as combinações com repetição dos elementos de C tomados 2 a 2, são:

Cr={AA,AB,AC,AD,BB,BC,BD,CC,CD,DD}

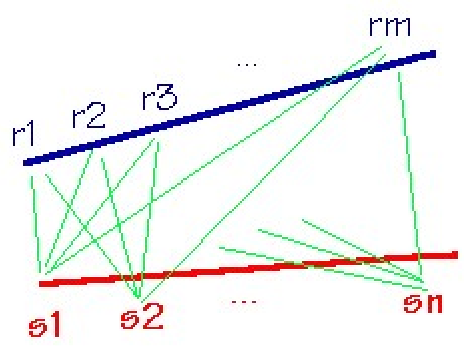
Regras gerais sobre a Análise Combinatória

Problemas de Análise Combinatória normalmente são muito difíceis mas eles podem ser resolvidos através de duas regras básicas: a regra da soma e a regra do produto.

Regra da soma: A regra da soma nos diz que se um elemento pode ser escolhido de m formas e um outro elemento pode ser escolhido de n formas, então a escolha de um ou outro elemento se realizará de m+n formas, desde que tais escolhas sejam independentes, isto é, nenhuma das escolhas de um elemento pode coincidir com uma escolha do outro.

Regra do Produto: A regra do produto diz que se um elemento H pode ser escolhido de m formas diferentes e se depois de cada uma dessas escolhas, um outro elemento M pode ser escolhido de n formas diferentes, a escolha do par (H,M) nesta ordem poderá ser realizada de m.n formas.

Exemplo: Consideremos duas retas paralelas ou concorrentes sem que os pontos sob análise estejam em ambas, sendo que a primeira **r** contem m pontos distintos marcados por r_1, r_2, r_3, ..., r_m e a segunda **s** contem n outros pontos distintos marcados por s_1, s_2, s_3, ..., s_n. De quantas maneiras podemos traçar segmentos de retas com uma extremidade numa reta e a outra extremidade na outra reta?



É fácil ver isto ligando r_1 a todos os pontos de s e assim teremos n segmentos, depois ligando r_2 a todos os pontos de s e assim teremos n segmentos, e continuamos até o último ponto para obter também n segmentos. Como existem m pontos em r e n pontos em s, teremos m.n segmentos possíveis.

Número de Arranjos simples

Seja C um conjunto com m elementos. De quantas maneiras diferentes poderemos escolher p elementos (p<m) deste conjunto? Cada uma dessas escolhas será chamada um arranjo de m elementos tomados p a p. Construiremos uma sequência com os m elementos de C.

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots, c_{m-2}, c_{m-1}, c_m$$

Cada vez que um elemento for retirado, indicaremos esta operação com a mudança da cor do elemento para a cor vermelha.

Para escolher o primeiro elemento do conjunto C que possui m elementos, temos m possibilidades. Vamos supor que a escolha tenha caído sobre o m-ésimo elemento de C.

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots, c_{m-2}, c_{m-1}, \color{red}{c_m}$$

Para escolher o segundo elemento, devemos observar o que sobrou no conjunto e constatamos que agora existem apenas m-1 elementos. Suponhamos que tenha sido retirado o último elemento dentre os que sobraram no conjunto C. O elemento retirado na segunda fase é o (m-1)-ésimo.

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots, c_{m-2}, \color{red}{c_{m-1}}, \color{red}{c_m}$$

Após a segunda retirada, sobraram m-2 possibilidades para a próxima retirada. Do que sobrou, se retirarmos o terceiro elemento como sendo o de ordem (m-2), teremos algo que pode ser visualizado como:

$$c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots, \color{red}{c_{m-2}}, \color{red}{c_{m-1}}, \color{red}{c_m}$$

Se continuarmos o processo de retirada, cada vez teremos 1 elemento a menos do que na fase anterior. Para retirar o p-ésimo elemento, restarão m-p+1 possibilidades de escolha.

Para saber o número total de arranjos possíveis de m elementos tomados p a p, basta multiplicar os números que aparecem na segunda coluna da tabela abaixo:

Retirada	Número de possibilidades
1	m
2	m-1
3	m-2
...	...
p	m-p+1
No.de arranjos	m(m-1)(m-2)...(m-p+1)

Denotaremos o número de arranjos de m elementos tomados p a p, por A(m,p) e a expressão para seu cálculo será dada por:

$$A(m,p) = m(m-1)(m-2)...(m-p+1)$$

Exemplo: Consideremos as 5 vogais de nosso alfabeto. Quais e quantas são as possibilidades de dispor estas 5 vogais em grupos de 2 elementos diferentes? O conjunto solução é:

{AE,AI,AO,AU,EA,EI,EO,EU,IA,IE,
IO,IU,OA,OE,OI,OU,UA,UE,UI,UO}

A solução numérica é A(5,2)=5×4=20.

Exemplo: Consideremos as 5 vogais de nosso alfabeto. Quais e quantas são as possibilidades de dispor estas 5 vogais em grupos de 2 elementos (não necessariamente diferentes)?

Sugestão: Construir uma reta com as 5 vogais e outra reta paralela à anterior com as 5 vogais, usar a regra do produto para concluir que há 5x5=25 possibilidades.

O conjunto solução é:

{AA,AE,AI,AO,AU,EA,EE,EI,EO,EU,IA,IE,II, IO,IU,OA,OE,OI,OO,OU,UA,UE,UI,UO,UU}

Exemplo: Quantas placas de carros podem existir no atual sistema brasileiro de trânsito que permite 3 letras iniciais e 4 algarismos no final?

XYZ-1234

Sugestão: Considere que existem 26 letras em nosso alfabeto que podem ser dispostas 3 a 3 e 10 algarismos que podem ser dispostos 4 a 4 e em seguida utilize a regra do produto.

Número de Permutações simples

Este é um caso particular de arranjo em que p=m. Para obter o número de permutações com m elementos distintos de um conjunto C, basta escolher os m elementos em uma determinada ordem. A tabela de arranjos com todas as linhas até a ordem p=m, permitirá obter o número de permutações de m elementos:

Retirada	Número de possibilidades
1	m
2	m-1
...	...
p	m-p+1
...	...
m-2	3
m-1	2
m	1
No.de permutações	m(m-1)(m-2)...(m-p+1)...4.3.2.1

Denotaremos o número de permutações de m elementos, por P(m) e a expressão para seu cálculo será dada por:

$$P(m) = m(m-1)(m-2) \ldots (m-p+1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Em função da forma como construímos o processo, podemos escrever:

$$A(m,m) = P(m)$$

Como o uso de permutações é muito intenso em Matemática e nas ciências em geral, costuma-se simplificar a permutação de m elementos e escrever simplesmente:

$$P(m) = m!$$

Este símbolo de exclamação posto junto ao número m é lido como: *fatorial de m*, onde m é um número natural.

Embora zero não seja um número natural no sentido que tenha tido origem nas coisas da natureza, procura-se dar sentido para a definição de fatorial de m de uma forma mais ampla, incluindo m=0 e para isto podemos escrever:

$$0!=1$$

Em contextos mais avançados, existe a função gama que generaliza o conceito de fatorial de um número real, excluindo os inteiros negativos e com estas informações pode-se *demonstrar* que 0!=1.

O fatorial de um número inteiro não negativo pode ser definido de uma forma recursiva através da função P=P(m) ou com o uso do sinal de exclamação:

$$(m+1)! = (m+1).m!, \quad 0! = 1$$

Exemplo: De quantos modos podemos colocar juntos 3 livros A, B e C diferentes em uma estante? O número de arranjos é P(3)=6 e o conjunto solução é:

P={ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA}

Exemplo: Quantos anagramas são possíveis com as letras da palavra AMOR? O número de arranjos é P(4)=24 e o conjunto solução é:

P={AMOR,AMRO,AROM,ARMO,AORM,AOMR,MARO,MAOR,
MROA,MRAO,MORA,MOAR,OAMR,OARM,ORMA,ORAM,
OMAR,OMRA,RAMO,RAOM,RMOA,RMAO,ROAM,ROMA}

Número de Combinações simples

Seja C um conjunto com m elementos distintos. No estudo de arranjos, já vimos antes que é possível escolher p elementos de A, mas quando realizamos tais escolhas pode acontecer que duas coleções com p elementos tenham os mesmos elementos em ordens trocadas. Uma situação típica é a escolha de um casal (H,M). Quando se fala casal, não tem importância a ordem da posição (H,M) ou (M,H), assim não há a necessidade de escolher duas vezes as mesmas pessoas para formar o referido casal. Para evitar a repetição de elementos em grupos com a mesma quantidade p de elementos, introduziremos o conceito de combinação.

Diremos que uma coleção de p elementos de um conjunto C com m elementos é uma combinação de m elementos tomados p a p, se as coleções com p elementos não tem os **mesmos** elementos que já apareceram em outras coleções com o mesmo número p de elementos.

Aqui temos outra situação particular de arranjo, mas não pode acontecer a repetição do mesmo grupo de elementos em uma ordem diferente.

Isto significa que dentre todos os A(m,p) arranjos com p elementos, existem p! desses arranjos com os **mesmos elementos**, assim, para obter a combinação de m elementos tomados p a p, deveremos dividir o número A(m,p) por m! para obter apenas o número de arranjos que contem conjuntos distintos, ou seja:

C(m,p) = A(m,p) / p!

Como

A(m,p) = m.(m-1).(m-2)...(m-p+1)

então:

C(m,p) = [m.(m-1).(m-2). ... .(m-p+1)] / p!

que pode ser reescrito

C(m,p)=[m.(m-1).(m-2)...(m-p+1)]/[(1.2.3.4....(p-1)p]

Multiplicando o numerador e o denominador desta fração por

(m-p)(m-p-1)(m-p-2)...3.2.1

que é o mesmo que multiplicar por (m-p)!, o numerador da fração ficará:

m.(m-1).(m-2).....(m-p+1)(m-p)(m-p-1)...3.2.1 = m!

e o denominador ficará:

p! (m-p)!

Assim, a expressão simplificada para a combinação de m elementos tomados p a p, será uma das seguintes:

$$C(m,p) = \binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Número de arranjos com repetição

Seja C um conjunto com m elementos distintos e considere p elementos escolhidos neste conjunto em uma ordem determinada. Cada uma de tais escolhas é denominada um arranjo com repetição de m elementos tomados p a p. Acontece que existem m possibilidades para a colocação de cada elemento, logo, o número total de arranjos com repetição de m elementos escolhidos p a p é dado por m^p. Indicamos isto por:

$$A_{rep}(m,p) = m^p$$

Número de permutações com repetição

Consideremos 3 bolas vermelhas, 2 bolas azuis e 5 bolas amarelas. Coloque estas bolas em uma ordem determinada. Iremos obter o número de permutações com repetição dessas bolas. Tomemos 10 compartimentos numerados onde serão colocadas as bolas. Primeiro coloque as 3 bolas vermelhas em 3 compartimentos, o que dá C(10,3) possibilidades. Agora coloque as 2 bolas azuis nos compartimentos restantes para obter C(10-3,2) possibilidades e finalmente coloque as 5 bolas amarelas. As possibilidades são C(10-3-2,5).

O número total de possibilidades pode ser calculado como:

$$\binom{10}{3}\binom{10-3}{2}\binom{10-3-2}{5}=\frac{10!}{3!7!}\,\frac{7!}{2!5!}\,\frac{5!}{5!0!}=\frac{10!}{3!2!5!}$$

Tal metodologia pode ser generalizada.

Número de combinações com repetição

Considere m elementos distintos e ordenados. Escolha p elementos um após o outro e ordene estes elementos na mesma ordem que os elementos dados. O resultado é chamado uma combinação com repetição de m elementos tomados p a p. Denotamos o número destas combinações por $C_{rep}(m,p)$. Aqui a taxa p poderá ser maior do que o número m de elementos.

Seja o conjunto A=(a,b,c,d,e) e p=6. As coleções (a,a,b,d,d,d), (b,b,b,c,d,e) e (c,c,c,c,c,c) são exemplos de combinações com repetição de 5 elementos escolhidos 6 a 6.

Podemos representar tais combinações por meio de símbolos # e vazios Ø onde cada ponto # é repetido (e colocado junto) tantas vezes quantas vezes aparece uma escolha do mesmo tipo, enquanto o vazio Ø serve para separar os objetos em função das suas diferenças

```
(a,a,b,d,d,d) equivale a ##Ø#ØØ###Ø
(b,b,b,c,d,e) equivale a Ø###Ø#Ø#Ø#
(c,c,c,c,c,c) equivale a ØØ######ØØ
```

Cada símbolo possui 10 lugares com exatamente 6# e 4Ø. Para cada combinação existe uma correspondência biunívoca com um símbolo e reciprocamente. Podemos construir um símbolo pondo exatamente 6 pontos em 10 lugares. Após isto, os espaços vazios são prenchidos com barras. Isto pode ser feito de C(10,6) modos. Assim:

$$C_{\mathbf{rep}}(5,6) = C(5+6-1,6)$$

Generalizando isto, podemos mostrar que:

$$C_{\mathbf{rep}}(m,p) = C(m+p-1,p)$$

Propriedades das combinações

O segundo número, indicado logo acima por p é conhecido como a *taxa* que define a quantidade de elementos de cada escolha.

Taxas complementares

$$C(m,p)=C(m,m-p)$$

Exemplo: C(12,10) = C(12,2)=66.

Relação do triângulo de Pascal

C(m,p)=C(m-1,p)+C(m-1,p-1)

Exemplo: C(12,10)=C(11,10)+C(11,9)=605

Número Binomial

O número de combinações de m elementos tomados p a p, indicado antes por C(m,p) é chamado Coeficiente Binomial ou número binomial, denotado na literatura científica como:

$$C(m,p) = \binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Exemplo: C(8,2)=28.

Extensão: Existe uma importante extensão do conceito de número binomial ao conjunto dos números reais e podemos calcular o número binomial de qualquer número real r que seja diferente de um número inteiro negativo, tomado a uma taxa inteira p, somente que, neste caso, não podemos mais utilizar a notação de combinação C(m,p) pois esta somente tem sentido quando m e p são números inteiros não negativos. Como Pi=3,1415926535..., então:

$$\binom{\pi}{2} = \frac{\pi(\pi-1)}{2} = 3,36400587375$$

A função envolvida com este contexto é a função gama. Tais cálculos são úteis em Probabilidade e Estatística.

Teorema Binomial

Se m é um número natural, para simplificar um pouco as notações, escreveremos m_p no lugar de C(m,p). Então:

$$(a+b)^m = a^m+m_1a^{m-1}b+m_2a^{m-2}b^2+m_3a^{m-3}b^3+...+m_mb^m$$

Alguns casos particulares com m=2, 3, 4 e 5, são:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3\ a^2b + 3\ ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4\ a^3b + 6\ a^2b^2 + 4\ ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5\ a^4b + 10\ a^3b^2 + 10\ a^2b^3 + 5\ ab^4 + b^5$

A demonstração segue pelo Princípio da Indução Matemática.

Iremos considerar a Proposição P(m) de ordem m, dada por:

P(m): $(a+b)^m=a^m+m_1a^{m-1}b+m_2a^{m-2}b^2+m_3a^{m-3}b^3+...+m_mb^m$

P(1) é verdadeira pois $(a+b)^1 = a + b$

Vamos considerar verdadeira a proposição P(k), com k>1:

P(k): $(a+b)^k=a^k+k_1a^{k-1}b+k_2a^{k-2}b^2+k_3a^{k-3}b^3+...+k_kb^k$

para provar a propriedade P(k+1).

Para que a proposição P(k+1) seja verdadeira, deveremos chegar à conclusão que:

$$(a+b)^{k+1}=a^{k+1}+(k+1)_1a^kb+(k+1)_2a^{k-1}b^2+...+(k+1)_{(k+1)}b^{k+1}$$

$(a+b)^{k+1}=$	$(a+b).(a+b)^k$
=	$(a+b).[a^k+k_1a^{k-1}b+k_2a^{k-2}b^2+k_3a^{k-3}b^3+...+k_kb^k]$
=	$a.[a^k+k_1a^{k-1}b+k_2a^{k-2}\,b^2+k_3a^{k-3}b^3+...+k_kb^k]$ $+b.[a^k+k_1a^{k-1}b+k_2a^{k-2}b^2+k_3a^{k-3}b^3+...+k_k\,b^k]$
=	$a^{k+1}+k_1a^kb+k_2a^{k-1}b^2+k_3a^{k-2}b^3+...+k_kab^k$ $+a^kb+k_1a^{k-1}b^2+k_2a^{k-2}\,b^3+k_3a^{k-3}b^4+...+k_kb^{k+1}$
=	$a^{k+1}+[k_1+1]a^kb+[k_2+k_1]a^{k-1}b^2+[k_3+k_2]a^{k-2}b^3$ $+[k_4+k_3]\,a^{k-3}b^4+...+[k_{k-1}+k_{k-2}]a^2b^{k-1}+[k_k+k_{k-1}]ab^k+k_kb^{k+1}$
=	$a^{k+1}+[k_1+k_0]\,a^kb+[k_2+k_1]a^{k-1}b^2+[k_3+k_2]a^{k-2}b^3$ $+[k_4+k_3]a^{k-3}b^4+...+[k_{k-1}+k_{k-2}]a^2b^{k-1}+[k_k+k_{k-1}]ab^k+k_kb^{k+1}$

Pelas propriedades das combinações, temos:

$k_1+k_0=C(k,1)+C(k,0)=C(k+1,1)=(k+1)_1$

$k_2+k_1=C(k,2)+C(k,1)=C(k+1,2)=(k+1)_2$

$k_3+k_2=C(k,3)+C(k,2)=C(k+1,3)=(k+1)_3$

$k_4+k_3=C(k,4)+C(k,3)=C(k+1,4)=(k+1)_4$

... ...

$k_{k-1}+k_{k-2}=C(k,k-1)+C(k,k-2)=C(k+1,k-1)=(k+1)_{k-1}$

$k_k+k_{k-1}=C(k,k)+C(k,k-1)=C(k+1,k)=(k+1)_k$

E assim podemos escrever:

$(a+b)^{k+1}=$	$a^{k+1}+(k+1)_1a^kb + (k+1)_2a^{k-1}b^2 + (k+1)_3a^{k-2}b^3$ $+(k+1)_4a^{k-3}b^4 +...+ (k+1)_{k-1}a^2b^{k-1} + (k+1)_kab^k + k_kb^{k+1}$

que é o resultado desejado.

Construída por Ulysses Sodré. Atualizada em 24/mar/2005.