GEOMETRIC ASPECTS OF CONTROL THEORY
(MONOGRAPHY)

CANDIDATE: CAROLINA DA SILVA CORREA
ORIENTOR: PROF MARCOS M. ALEXANDRINO

Contents

Part 1. **Introduction**

1. Motivation

To introduce control systems, let's consider a very simple physical system: a train moving along a 1-dimensional railway. If the train moves with constant acceleration a, and at $t = 0$ it's position and velocity are x_0 and v_0 (respectively), it's motion is given by the solution to the following ODE:

$$\begin{cases} x''(t) = a \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

However, in reality, trains very rarely move with constant acceleration: usually, theres a conductor controlling how the train moves. To consider a very simplified model, let's say that, at any instant t, the conductor can choose the acceleration $a(t)$ of the train, with the constraint $|a| \leq 1$. We denote by $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ the function $t \mapsto a(t)$, which will be called the *control function*. The equation of motion of the train now becomes:

$$\begin{cases} x''(t) = u(t) \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

If $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ is well-behaved enough (see Part 3), we can find a unique $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that solves this equation almost everywhere. This class of well-behaved functions will be the *admissible control functions*. An important subset of the admissible control functions is the class of *piecewise constant function*, that is, functions $u : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ such that there is a collection of intervals covering $\mathbb{R}$ with u being constant in the interior of each such interval.

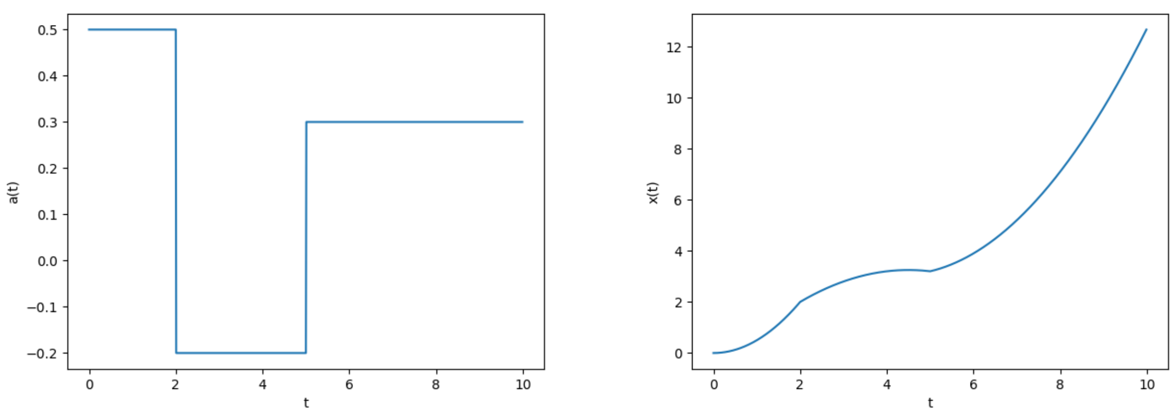


Figure 1.1. An exemple of a piecewise constant $u(t)$, and the corresponding solution $x(t)$ for $x_0 = v_0 = 0$

The equation $x'' = u$ (with the constraint $|u| \leq 1$) is an exemple of a *control system* with *control parameter* u. We will define precisely what this is later. For now, let's focus on what we can do with a control system.

The possibility of choosing the function u, and therefore the evolution of the system represented by Equation 1.2, gives rise to many interesting problems, for exemple:

- Given an initial state (x_0, v_0), can we choose an admissible u such that we eventually reach another state (x_1, v_1)? (If this is the case, we say that (x_1, y_1) is reachable from (x_0, v_0))
- Given an initial state (x_0, v_0) and another state (x_1, v_1) reachable from (x_0, v_0), is there an admissible u that minimizes the time we take to go from (x_0, v_0) from (x_1, v_1)? If this is the case, how can we find such u?
- Given an initial state (x_0, v_0) and another state (x_1, v_1) reachable from (x_0, v_0), is there an admissible u that minimizes the amount of work we make to go from (x_0, v_0) from (x_1, v_1)? If this is the case, how can we find such u?

In this simple exemple (and considering only piecewise constant controls), all of those question can be answered using rather elementar techiniques.

Let's now express our system in the language of differential geometry to shed some light on how we will approach control systems.

We use the usual trick to reduce the order of Equation 1.1 from 2 to 1. Consider the plane $\mathbb{R}^2$ with coordinates (y^1, y^2). Given $x : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $a \in \mathbb{R}$, we define $q : I \to \mathbb{R}^2$ and $X_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ by $q(t) = (x(t), x'(t))$, $X_a(y^1, y^2) = (y^2, a)$. Equation 1.1 can now be expressed as:

$$\begin{cases} q'(t) = X_a(q(t)) \\ q(0) = (x_0, v_0) = q_0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Notice that the solution to the equation above is completly determined by the vector field $X_a \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ and the initial condition $q_0 \in \mathbb{R}^2$.

The control system expressed by the equation $x'' = u$ can now be expressed as $q' = X_u(q)$. The space of possible values for the control parameter u, namely $U = [-1, 1]$, is called the *space of control parameters*. Our control system now can be sythesised as the (parametrized) family of vector fields $\{X_u\}_{u \in U}$, each determining an ODE with which our system can evolve.

2. So... What is a control system?

Part 2. Jáfizsla

3. Motivação

3.1. Campos Vetoriais e Fluxos. Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, podemos considerar o sistema dinâmico dado pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

onde $p \in M$ e $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to M$ é uma curva (suave) em M.

Pelo teorema de existência e unicidade das soluções de EDOs, cada $p \in M$ dá origem à uma única solução maximal $\gamma_p : I_p \to M$ do sistema dinâmico.

Mais ainda, dado $t \in \mathbb{R}$, sendo $M_t = \{p \in M : t \in I_p\}$, cada M_t é um aberto de M, e o mapa

$$P^t : M_t \to M_{-t}$$

$$p \mapsto \gamma_p(t)$$

é um difeomorfismo.

A família à 1 parâmetro de difeomorfismos $t \mapsto P^t$ é dita o fluxo de X, e vamos denotá-la por $P^t = e^{tX}$.

O campo vetorial X é dito completo se $M_t = M$ para cada $t \in \mathbb{R}$, ou equivalentemente se $I_p = \mathbb{R}$ para cada $p \in M$. É notável que todo campo vetorial com suporte compacto é completo.

3.2. **Sistemas de Controle.** No sistema dinâmico gerado por um único campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, os estados futuros são completamente determinados pelo estado presente. Mais especificamente, se o estado do sistema no tempo t é dado por $p(t)$, então $p(t) = e^{(t-t_0)X}(p(t_0))$ para qualquer t_0, e em particular $p(t) = e^{tX}p(0)$.

Um sistema de controle geométrico nada mais é que uma família de campos vetoriais $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$, onde interpretamos que podemos escolher, controlar, qual dos campos em $\mathcal{F}$ será utilizado para determinar o futuro do sistema, e que podemos trocar a escolha de campo a qualquer momento.

É usual parametrizarmos a família $\mathcal{F}$ utilizando algum conjunto U (que a princípio não supomos possuir nenhuma estrutura adicional), escrevendo $\mathcal{F} = \{X_u\}_{u \in U}$. A variável u é dita o parâmetro de controle, e o conjunto U o espaço de parâmetros de controle.

Uma função $u : \mathbb{R} \to U$ (chamada função controle) e um ponto $p \in M$ determinam o seguinte sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = (X_{u(t)})_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

A família à um parâmetro de campos $t \mapsto X_{u(t)}$ é dita um campo vetorial não-autônomo. Se essa família for regular o suficiente (condições específicas são dadas na parte 4), sempre existirá uma solução maximal $\gamma : I_p \to M$ absolutamente contínua e que satisfaz a equação diferencial em quase todo ponto (no sentido de medidas).

Um caso particular relevante é quando a função u é constante por partes. Nesse caso, dado um tempo $t \in \mathbb{R}$, existem $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_k = t$ tal que u é constante (T_i, T_{i+1}) para cada $0 \leq i < k$. Sendo:

$$u((T_i, T_{i+1})) = \{u_{i+1}\}$$

$$t_{i+1} = T_{i+1} - T_i$$

A solução da equação diferencial é dada por:

$$\gamma(t) = e^{t_k X_{u_k}} \circ \cdots \circ e^{t_1 X_{u_1}}(p)$$

É bem comum (e é o que faremos pelo restante desse texto) tratarmos apenas de funções controle constantes por partes.

Algo interessante a ser estudado são quais pontos de M podem ser alcançados por um sistema de controle partindo de algum ponto inicial. A propriedade de podermos chegar em qualquer ponto final partindo de qualquer ponto inicial é chamada controlabilidade.

Dado um sistema de controle $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ e um ponto $p \in M$ o conjunto

$$\mathcal{A}_p = \{e^{t_k X_k} \circ \cdots \circ e^{t_1 X_1}(p) : t_1, \ldots, t_k > 0; X_1, \ldots X_k \in \mathcal{F}\}$$

é chamado de conjunto alcançável do sistema de controle $\mathcal{F}$.

Relacionadas aos conjuntos alcançáveis, e usualmente possuindo uma estrutura mais simples, são as órbitas do sistema de controle. Elas são os conjuntos da forma

$$\mathcal{O}_p = \{e^{t_k X_k} \circ \cdots \circ e^{t_1 X_1}(p) : t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}; X_1, \ldots X_k \in \mathcal{F}\}$$

As órbitas de um sistema de controle podem ser vistas como as órbitas da ação do menor pseudo-grupo gerado pelos fluxos dos campos em $\mathcal{F}$.

É notável que os conjuntos alcançáveis sempre são subconjuntos das órbitas. Como as órbitas possuem uma estrutura bem simples (de variedades imersas, como discutido na seção 5), estudá-las nos permite construir uma boa base para o estudo dos conjuntos alcançáveis.

4. Cálculo Cronológico

Nesta sessão, desenvolveremos o chamado Cálculo Cronológico, que nos providenciará uma notação muito útil para trabalharmos com familias de campos de vetores (ou seja, sistemas de controle) e em particular será útilizada na prova do Teorema da Órbita.

O que faremos é criar um formalismo que nos permita tratar o grupo de difeomorfismos $\text{Diff}(M)$ como um grupo de Lie (de dimensão infinita) com álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$. Não faremos efetivamente isso, ou seja, não providenciaremos $\text{Diff}(M)$ com uma estrutura de variedade, simplesmente desenvolveremos um formalismo que nos permita utilizar notações análogas às de grupos de Lie.

Enunciaremos vários resultados sem demonstrá-los. As demonstrações podem ser encontradas no capítulo 2 de [1].

4.1. **Estruturas em uma variedade em termos da álgebra $C^\infty(M)$.** Seja M uma variedade, e denote por $C^\infty(M)$ a $\mathbb{R}$-álgebra das funções suaves $M \to \mathbb{R}$, com soma e multiplicação definidas pontualmente:

$$(a+b)(p) = a(p) + b(p)$$
$$(a \cdot b)(p) = a(p)b(p)$$
$$(\lambda \cdot a)(p) = \lambda a(p)$$

para $a, b \in C^\infty(M)$.

Vamos mostrar como podemos expressar algumas estruturas de uma variedade (em particular, pontos, difeomorfismos e campos vetoriais) em termos de $C^\infty(M)$.

Um ponto $p \in M$ define um homomorfismo de álgebras $\hat{p} : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dado pela avaliação $\hat{p} : f \mapsto f(p)$. Reciprocamente, temos que:

Proposição 4.1. *Dado um homomorfismo não-trivial de álgebras $\varphi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, existe um ponto $p \in M$ tal que $\varphi = \hat{p}$*

Podemos também reconstruir a topologia e a estrutura suave de M à partir de $C^\infty(M)$, pois uma sequência de pontos p_i converge para p se e somente se, para todo $a \in C^\infty(M)$, $\hat{p}_i(a)$ converge para $\hat{p}(a)$, e uma função $f : M \to \mathbb{R}$ é suave se e somente se f é da forma $p \mapsto \hat{p}(a)$ para algum $a \in C^\infty(M)$.

Similarmente, um difeomorfismo $P : M \to M$ define um isomorfismo de álgebras $\hat{P} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, dado pela composição $\hat{P} : a \mapsto a \circ P$. Reciprocamente:

Proposição 4.2. *Dado um isomorfismo de álgebras $A : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, existe um difeomorfismo $P \in \mathit{Diff}(M)$ tal que $A = \hat{P}$*

Além disso, um vetor $X_p \in TM$ pode ser definido como uma derivação pontual em p, $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ (ou seja, um mapa linear tal que $X_p(ab) = a(p)X_p(b) + X_p(a)b(p)$), e dessa forma um campo de vetores $X \in \mathfrak{X}(M)$ define uma derivação $\hat{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ (ou seja, um mapa linear tal que $\hat{X}(ab) = a\hat{X}(b) + \hat{X}(a)b$), dado por $\hat{X}(a)(p) = X_p a$. Reciprocamente, dada uma derivação $D : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, temos um campo de vetores X tal que $D = \hat{X}$, dado por $X_p a = D(a)(p)$.

Portanto, a partir de agora, vamos identificar pontos de M com homomorfismos não-triviais de álgebras $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, difeomorfismos de M com isomorfismos de álgebras $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, e campos vetoriais de M com derivações $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$.

Note que avaliar um campo X num ponto p é o mesmo que compor p com X, isto é, $X_p = p \circ X$. O mesmo vale para difeomorfismos P, ou seja, $P(p) = p \circ P$.

4.2. **Topologia em $C^\infty(M)$.** Vamos definir uma topologia em $C^\infty(M)$ da seguinte maneira:

- Escolha alguma imersão $M \to \mathbb{R}^N$, e sejam $h_i \in \mathfrak{X}(M)$ a projeção ortogonal de $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^N)$ no espaço tangente à M, ponto à ponto.

- Dado $s \geq 0$, e $K \subseteq M$ um compacto, defina a seguinte seminorma:

$$\|a\|_{s,K} = \sup\{|h_{i_1} \cdots \circ h_{i_l} a(p)| : a \in C^\infty(M), p \in K, 0 \leq l \leq s\}$$

- Coloque em $C^\infty(M)$ a topologia gerada pelas seminormas $\|\|_{s,K}$

A topologia descrita acima não depende da escolha de imersão $M \to \mathbb{R}^N$, e da à $C^\infty(M)$ a estrutura de um espaço de Frechét. É possível demonstrar que todo campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ e todo difeomorfismo $P \in \mathrm{Diff}(M)$, quando considerados como funcionais lineares em $C^\infty(M)$, são contínuos.

4.3. **Familias à 1 parâmetro de funcionais e operadores.** Como $C^\infty(M)$ é um espaço de Frechét, dada uma familia à 1 parâmetro $t \mapsto a_t \in C^\infty(M)$, podemos falar de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade dessas familias. Considere uma família $t \mapsto a_t$. Definimos as seguinte propriedades:

- Continuidade e diferenciabilidade da maneira usual em espaços de Frechét.
- a_t é mensurável se, para cada $p \in M$, $t \mapsto a_t(p)$ é mensurável.
- a_t é localmente integrável se ela é mensurável, e, para cada seminorma $\|\|_{s,K}$, $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|a_t\|_{s,K} dt < \infty$$

  Dada uma família a_t localmente integrável e $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, podemos definir a integral

$$\int_{t_0}^{t_1} a_t dt \in C^\infty(M)$$

  que obedece as propriedades usuais de integrais
- a_t é absolutamente contínua se existe uma família b_t integrável tal que

$$a_t = b_{t_0} + \int_{t_0}^{t} b_{t_0} dt$$

- a_t é localmente limitada se para cada seminorma $\|\|_{s,K}$ e cada intervalo compacto $I \subseteq \mathbb{R}$, existe uma constante $C_{s,K,I}$ tal que, para $t \in I$, $\|a_t\|_{s,K} \leq C_{s,K,I}$.

Dada uma família $t \mapsto A_t$ de funcionais (mapas $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$) ou operadores (mapas $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$) lineares em $C^\infty(M)$, dizemos que A_t tem alguma propriedade (continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade, etc.) se para cada $a \in C^\infty(M)$, $t \mapsto A_t a$ tem essa propriedade.

Mais ainda, definimos fracamente integrais e derivadas dessas famílias, ou seja, sendo A_t uma família de funcionais ou operadores lineares em $C^\infty(M)$, definimos:

- Se A_t é diferenciável, definimos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t : a \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(A_t a)$$

- Se A_t é localmente integrável, definimos

$$\int_{t_0}^{t_1} A_t dt : a \mapsto \int_{t_0}^{t_1} (A_t a) dt$$

Integrais e derivadas de funcionais e operadores lineares também são funcionais ou operadores lineares, pela linearidade de integrais e derivadas.

Além disso, derivadas de familias de operadores obedecem a regra de Leibniz, isto é:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t \circ B_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_t \circ B_t + A_t \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_t$$

4.4. **Campos não-autônomos e a exponencial cronológica.** Um campo vetorial não autônomo é uma família à 1 parâmetro $t \mapsto X_t$ de campos vetoriais (ou seja, $X_t \in \mathfrak{X}(M)$) que seja localmente limitada. Dado um campo vetorial não autônomo, podemos considerar a EDO:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = \gamma(t) \circ X_t \\ \gamma(0) = p_0 \end{cases}$$

Utilizando o teorema de Caratheodory para soluções de EDOs e o fato de X_t ser localmente limitado, podemos demonstrar que existe uma solução maximal $\gamma_{p_0} : I_{p_0} \to M$ Lipchitz contínua e diferenciável para quase todo $t \in I_{p_0}$ que satisfaz a EDO para quase todo $t \in I_{p_0}$.

Mais ainda, podemos demonstrar que $p \mapsto \gamma_p(t)$ é suave para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, e portanto, a família $P^t : p \mapsto \gamma_p(t)$ é uma família a um parâmetro de difeomorfismo de M. Denotamos

$$P^t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$$

,

a exponecial cronológica pela direita.

Ela é a solução única da seguinte equação diferencial:

$$\begin{cases} \dot{P}^t = P^t \circ X_t \\ P^0 = \mathrm{Id} \end{cases}$$

Considere o inverso $Q^t = (P^t)^{-1}$. Ele satisfaz $P^t \circ Q^t = \mathrm{Id}$, e portanto:

$$\dot{P}^t \circ Q^t + P^t \circ \dot{Q}^t = 0 \implies P^t \circ X_t \circ Q^t + P^t \circ \dot{Q}^t \implies \dot{Q}^t = (-X_t) \circ Q^t$$

Dessa forma denotamos:

$$Q^t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (-X_\tau) d\tau$$

a exponecial cronológica pela esquerda.

O fluxo e^{tX} de um campo vetorial é um caso específico da exponecial cronológica, mais especificamente quando X_t é a constante X. Ele satisfaz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tX} = X \circ e^{tX} = e^{tX} \circ X$$

4.5. **O colchete de Lie e a Adjunta.** Considere dois campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. A composição $X \circ Y$ não é um campo (ou seja, uma derivação de $C^\infty(M)$):

$$(X \circ Y)(ab) = X(Y(a)b + aY(b)) = (X \circ Y)(a)b + Y(a)X(b) + X(a)Y(b) + a(X \circ Y)(b)$$

No entando, é facil verificar que $X \circ Y - Y \circ X$ é um campo:

$$(X \circ Y - Y \circ X)(ab) = (X \circ Y - Y \circ X)(a)b + a(X \circ Y - Y \circ X)(b)$$

Denotamos esse campo por:

$$[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$$

o colchete de Lie de X e Y. Ele possui as seguintes propriedades:

- (**Anti-comutatividade**) $[X, Y] = -[Y, X]$
- (**Identidade de Jacobi/Regra de Leibniz**) $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

E portanto $\mathfrak{X}(M)$ com o colchete de Lie forma uma álgebra de Lie.

O significado geométrico do colchete de Lie pode ser melhor entendido utilizando pullbacksde campos vetoriais por difeomorfismos. Para fazermos isso, vamos primeiro expressá-los usando a linguagem do cálculo cronológico.

Dessa forma, seja $X_p \in T_pM$, $P \in \mathrm{Diff}(M)$, e $\gamma : I \to M$ uma curva com $\gamma'(0) = X_p$. Seja ainda $a \in C^\infty(M)$. Note que:

$$(dP_pX_p)a = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\gamma(t) \circ P)a = ((\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\gamma(t)) \circ P)a = (X_p \circ P)a$$

E portanto $dP_pX_p = X_p \circ P$.

O pullback de um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ por $P \in \mathrm{Diff}(M)$ é dado por:

$$p \circ (P^*X) = d(P^{-1})_{P(p)}X_{P(p)} = p \circ P \circ X \circ P^{-1}$$

.

E portanto $(P^*X) = P \circ X \circ P^{-1}$. Denotamos:

$$(\mathrm{Ad}P)X = P \circ X \circ P^{-1}$$

É facilmente verificável que $\mathrm{Ad}P : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é um automorfismo de álgebras de Lie.

Chamamos $\mathrm{Ad} : \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}(M)))$ de representação adjunta, pois possui propriedades bastante similares à representação adjunta de grupos de Lie. Da mesma maneira que em grupos de Lie, denotamos:

$$(\mathrm{ad}X)Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(\mathrm{Ad}e^{tX})Y$$

Verificarmos que:

$$(\mathrm{ad}X)Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}(e^{tX} \circ Y \circ e^{-tX}) = X \circ Y - Y \circ X = [X, Y]$$

$\mathrm{ad} : \mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(\mathfrak{X}(M))$ é a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(M)$ (onde $\mathrm{Der}(\mathfrak{X}(M))$ denota as derivações de $\mathfrak{X}(M)$).

5. O Teorema da Órbita

Nessa seção discutiremos as órbitas de um sistema de controle e alguns conceitos relacionados (sistemas de controle localmente finitamente gerados, integração de distribuições singulares e não-singulares). Para simplificarmos a notação, consideraremos que todos os campos são completos, mas a discussão a seguir pode ser facilmente traduzida para campos não completos utilizando formalismos de pseudogrupos e feixes.

O teorema que descreve a estrutura das órbitas é o seguinte:

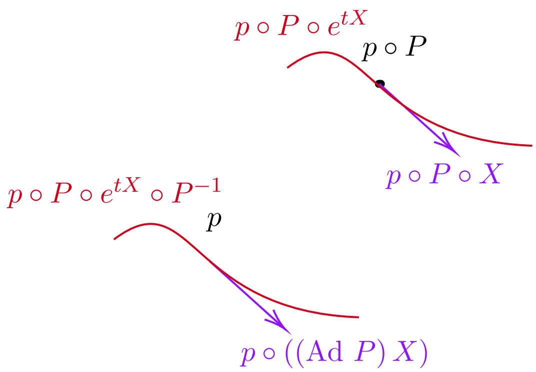
Teorema 5.1 (Teorema da Órbita/Teorema de Sussmann)**.** *Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ e $p_0 \in M$. Então:*

- *$\mathcal{O}_{p_0}$ é uma subvariedade imersa e conexa de M*
- *$T_p\mathcal{O}_{p_0} = span\{p \circ (Ad\ P)X : P \in \mathcal{P}, X \in \mathcal{F}\}$*

Onde $\mathcal{P}$ é o grupo gerado pelos fluxos dos campos em $\mathcal{F}$. Explicitamente:

$$\mathcal{P} = \{e^{t_1X_1} \circ \cdots \circ e^{t_kX_k} : t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}; X_1, \ldots X_k \in \mathcal{F}\}$$

5.1. **Demonstração do Teorema de Sussmann.** Primeiramente, imagine que $\mathcal{O}_{p_0}$ é, de fato, uma variedade imersa, e seja $p \in \mathcal{O}_{p_0}$. Para cada $P \in \mathcal{P}$, $X \in \mathcal{F}$, $t \mapsto p \circ P \circ e^{tX} \circ P^{-1}$ é uma curva em $\mathcal{O}_{p_0}$, e portanto $p \circ (\mathrm{Ad}P)X \in T_p\mathcal{O}_{p_0}$ (como no esquema abaixo).



Dessa forma, vamos definir:

$$\Pi_p = \mathrm{span}\{p \circ (\mathrm{Ad}\ P)X : P \in \mathcal{P}, X \in \mathcal{F}\}$$

Esse será nosso candidato à espaço tangente $T_p\mathcal{O}_{p_0}$.

Lema 5.1. *Para cada $p \in \mathcal{O}_{p_0}$, $\dim \Pi_p = \dim \Pi_{p_0}$*

Demonstração: Necessariamente existe $Q \in \mathcal{P}$ tal que $p = p_0 \circ Q$. Considere o isomorfismo $dQ_{p_0} : T_{p_0}M \to T_pM$. Dado um elemento arbitrário $p_0 \circ (\mathrm{Ad}P)X \in \Pi_{p_0}$, temos que:

$$dQ_{p_0}(p_0 \circ (\mathrm{Ad}P)X \in \Pi_{p_0}) = p_0 \circ P \circ X \circ P^{-1} \circ Q =$$
$$= p_0 \circ Q \circ Q^{-1} \circ P \circ X \circ P^{-1} \circ Q = (p_0 \circ Q) \circ (\mathrm{Ad}(Q^{-1} \circ P)X) \in \Pi_p$$

E dessa forma, $dQ_{p_0}(\Pi_{p_0}) \subseteq \Pi_p$. Similarmente, $d(Q^{-1})_p(\Pi_p) \subseteq \Pi_{p_0}$. Portanto, Π_p e Π_{p_0} tem a mesma dimensão. □

Introduzimos a notação:

$$(\mathrm{Ad}\mathcal{P})\mathcal{F} = \{(\mathrm{Ad}\ P)X : P \in \mathcal{P}, X \in \mathcal{F}\}$$

Vamos agora colocar uma topologia e estrutura suave em $\mathcal{O}_{p_0}$.

Seja $m = \dim \Pi_{p_0}$. Para um ponto arbitrário $p \in \mathcal{O}_{p_0}$, sejam $V_1, \ldots, V_m \in (\mathrm{Ad}\mathcal{P})\mathcal{F}$ tais que $\{p \circ V_1, \ldots, p \circ V_m\}$ seja uma base de Π_p. Introdizimos o mapa:

$$\psi_p : (t_1, \ldots, t_m) \mapsto p \circ e^{t_1 V_1} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m}$$

Primeiramente, demonstramos que a imagem de ψ_p está contida em $\mathcal{O}_{p_0}$. De fato, cada V_i pode ser escrito como $V_i = (\mathrm{Ad}P_i)X_i$ para $P_i \in \mathcal{P}$ e $X_i \in \mathcal{F}$. Dessa forma:

$$e^{tV_i} = e^{t(\mathrm{Ad}P_i)X_i} = P_i \circ e^{tX_i} \circ P_i^{-1} \in \mathcal{P}$$

e portanto $\psi_p(t_1, \ldots, t_m) \in \mathcal{O}_{p_0}$.

Como

$$\left.\frac{\partial \psi_p}{\partial t_i}\right|_0 = q \circ V_i$$

$\psi_p|_O$ é uma imersão para uma vizinhaça $O \subseteq \mathbb{R}^m$ suficiente pequena da origem.

Os conjuntos da forma $\psi_p(O)$, onde O é uma vizinhaça da origem tal que $\psi_p|_O$ é uma imersão, são candidatos à base de uma topologia em $\mathcal{O}_{p_0}$. Vamos demonstrar algumas propriedades desses conjuntos:

- Para $t \in O$, $(d\psi_p)_t(T_t\mathbb{R}^m) = \Pi_{\psi_p(t)}$.

  Como o posto de $\psi_p|_O$ é m e $\dim \Pi_{\psi_p(t)} = m$, basta demonstrarmos que $\left.\frac{\partial \psi_p}{\partial t_i}\right|_t \in \Pi_{\psi_p(t)}$.
  Temos que:

$$\left.\frac{\partial \psi_p}{\partial t_i}\right|_t = \left.\frac{\partial}{\partial t_i}\right|_t p \circ e^{t_1 V_1} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m} = p \circ e^{t_1 V_1} \circ \cdots \circ e^{t_i V_i} \circ V_i \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m} =$$

$$= p \circ e^{t_1 V_1} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m} \circ e^{-t_m V_m} \circ \cdots \circ e^{-t_{i+1} V_{i+1}} \circ V_i \circ e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m}$$

  Sendo $Q = e^{t_{i+1} V_{i+1}} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m}$, temos:

$$\left.\frac{\partial \psi_p}{\partial t_i}\right|_t = \psi_p(t) \circ (\mathrm{Ad} Q^{-1}) V_i \in \Pi_{\psi_p(t)}$$

  □

- Os conjuntos da forma $\psi_p(O)$ formam uma base para uma topologia em $\mathcal{O}_{p_0}$. O espaço topológico gerado por essa base será denotado por $\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$

  É sufiente demonstrarmos que dado $\psi_p(O)$ e $p' \in \psi_p(O)$, para O' pequeno o suficiente, $\psi_{p'}(O') \subseteq \psi_p(O)$

  Sejam $V_1', \dots, V_m' \in \mathcal{F}$ os campos tais que

$$\psi_{p'}(t_1, \dots, t_m) = p' \circ e^{t_1 V_1'} \circ \cdots \circ e^{t_m V_m'}$$

  Considere primeiramente a curva $t_1 \mapsto p' \circ e^{t_1 V_1'}$. Como para t_1 pequeno o suficiente sua velocidade $(p' \circ e^{t_1 V_1'}) \circ V_1'$ pertence à $T_{p' \circ e^{t_1 V_1'}} \psi_{p'}(O') = \Pi_{p' \circ e^{t_1 V_1'}} = T_{p' \circ e^{t_1 V_1'}} \psi_p(O)$, para t_1 pequeno o sufiente $(p' \circ e^{t_1 V_1'}) \in \psi_p(O)$.

  Aplicando o mesmo argumento à curva $t_2 \mapsto p' \circ e^{t_1 V_1'} \circ e^{t_2 V_2'}$, obtemos que $p' \circ e^{t_1 V_1'} \circ e^{t_2 V_2'} \in \psi_p(O)$ para t_1 e t_2 pequenos o suficiente, e prosseguindo indutivamente, obtemos que $\psi_{p'}(t) \in \psi_p(O)$ para t pequeno o suficiente. □

- A espaço $\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$ é conexo.

  Basta notarmos que os mapas $t \mapsto p \circ e^{tX}$ são contínuos em$\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$ para $X \in \mathcal{F}$, e portanto quaisquer dois pontos de $\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$ podem ser conectados por curvas contínuas e portanto $\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$ é conexo.

Induzimos agora uma estrutura suave em $\mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}}$ declarando os mapas $\psi_p|_O$ como cartas. Note que $T_p \mathcal{O}_{p_0}^{\mathcal{F}} = \Pi_p$.

Isso conclui a demonstração do Teorema de Órbita. □

5.2. **Folheações.** Considere uma partição $L = \{L_\alpha\}$ de M em variedades conexas imersas. As variedades imersas L_α são chamadas de folhas da partição, e a folha que contém um ponto $p \in M$ é escrita como L_p.

Definição 5.1. *Uma partição $\{L_\alpha\}$ de M em variedades conexas imersas é dita uma folheção singular se para cada $p \in M$ e cada vetor $v \in T_p L_p$, existe um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tangente as folhas da partição tal que $X_p = v$.*

Definição 5.2. *Uma folheação singular $\{L_\alpha\}$ é dita regular se todas as suas folhas possuem a mesma dimensão.*

Teorema 5.2. *As órbitas $\{\mathcal{O}_p\}$ de um sistema de controle $\mathcal{F}$ formam uma folheação singular.*

Demonstração: Sejam $V_1, \dots, V_m \in (\mathrm{Ad}\mathcal{P})\mathcal{F}$ tais que $\{p \circ V_1, \dots, p \circ V_m\}$ seja uma base de $T_p\mathcal{O}_p$. Então, qualquer $v \in T_p\mathcal{O}_p$ pode ser escrito como $v = \sum t_i(p \circ V_i)$.

Simplesmente defina o campo $X = \sum t_i V_i$. Como cada $V_i \in (\mathrm{Ad}\mathcal{P})\mathcal{F}$, para cada $q \in M$, $X_q = \sum t_i(q \circ V_i) \in T_q\mathcal{O}_q$. □

Dada uma folheação singular L, indicamos por $\mathfrak{X}(L)$ o conjunto dos campos em M tangentes à folheação, ou seja:

$$\mathfrak{X}(L) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \forall p \in M, X_p \in T_pL_p\}$$

Podemos facilmente verificar, pontualmente, que $\mathfrak{X}(L)$ é um $C^\infty(M)$-submódulo de $\mathfrak{X}(M)$:

Proposição 5.1. *$\mathfrak{X}(L)$ é um $C^\infty(M)$-submódulo de $\mathfrak{X}(M)$*

Demonstração: Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(L)$, $f \in C^\infty(M)$. Temos que:

- $(X+Y)_p = X_p + Y_p \in T_pL_p$
- $(fX)_p = f(p)X_p \in T_pL_p$

□

Além disso, podemos demonstrar:

Proposição 5.2. *$\mathfrak{X}(L)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$*

Demonstração: Tendo em vista a proposição anterior, basta demonstrarmos que dados $X, Y \in \mathfrak{X}(L)$, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(L)$.

Considere a família à 1 parâmetro $t \mapsto (\mathrm{Ad}e^{tX})Y$. Como e^{tX} preserva a folha onde estão os pontos (isto é, $p \in L_\alpha \iff p \circ e^{tX} \in L_\alpha$), para cada $p \in M$, $p \circ (\mathrm{Ad}e^{tX})Y \in T_pL_p$, e portanto:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} p \circ (\mathrm{Ad}e^{tX})Y = p \circ (\mathrm{ad}X)Y = p \circ [X, Y] \in T_pL_p$$

Ou seja, $[X, Y] \in \mathfrak{X}(L)$ □

Com isso, podemos fazer uma estimativa inferior do espaço tangente às órbitas de um sistema de controle:

Definição 5.3. *Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$. Definimos Lie$\mathcal{F}$ como sendo a menor subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$ que contenha $\mathcal{F}$ e também seja um $C^\infty(M)$-submódulo de $\mathfrak{X}(M)$.*

Note que a definição acima está bem definida pois a intersecção de uma família de subálgebras de Lie que também são $C^\infty(M)$-submódulos de $\mathfrak{X}(M)$ também é uma subálgebra de Lie e um $C^\infty(M)$-submódulo.

Definição 5.4. *$Lie_p\mathcal{F} = \{X_p : X \in Lie\mathcal{F}\}$*

Indicando por $\mathcal{O}$ a folheção de M nas órbitas de $\mathcal{F}$, é claro que $\mathrm{Lie}\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(\mathcal{O})$. Dessa forma, temos:

Proposição 5.3. *$Lie_p\mathcal{F} \subseteq T_p\mathcal{O}_p$*

5.3. **Uma melhor descrição de $T_p\mathcal{O}_p$.** Existe um caso específico, no qual famílias da campos analíticos são inclusas, onde podemos melhor descrever o espaço tangente à uma órbita $T_p\mathcal{O}_p$. É o caso das famílias localmente finitamente geradas. Vamos agora explorar este caso.

Definição 5.5. *Um $C^\infty(M)$-submódulo $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ é dito finitamente gerado se exitem campos $V_1, \dots, V_k$ tal que:*

$$\mathcal{V} = \{\sum a_i V_i : a_i \in C^\infty(M)\}$$

O conjunto $V_1, \dots, V_k$ é dito um gerador de $\mathcal{V}$.

Proposição 5.4. *Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ um $C^\infty(M)$-submódulo finitamente gerado, e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então, se para todo $V \in \mathcal{V}$, temos que:*

$$(adX)V \in \mathcal{V}$$

Segue que:

$$(Ade^{tX})V \in \mathcal{V}$$

Para todo $V \in \mathcal{V}$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $V_1, \ldots, V_k$ um conjunto gerador de $\mathcal{V}$. Por hipótese, temos:

$$[X, V_i] = \sum a_{ij} V_j$$

É suficiente mostrarmos que para cada $1 \leq i \leq k$ e cada $t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$V_i(t) = (\mathrm{Ad}e^{tX})V_i \in \mathcal{V}$$

Diferenciando $V_i(t)$, obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\dot{V}_i(t) = (\mathrm{Ad}e^{tX})[X, V_i] = \sum (\mathrm{Ad}e^{tX})(a_{ij}V_j) = \sum (e^{tX}a_{ij})V_j(t)$$

Definindo $a_{ij}(t) = e^{tX}a_{ij}$, e avaliando num ponto $p \in M$:

$$(p \dot{\circ} V_i)(t) = \sum p(a_{ij}(t))(p \circ V_j(t))$$

Defina a matriz $A_p(t) = [p(a_{ij}(t))]$. Se $\Gamma_p(t) = [\gamma_{p,ij}(t)]$ é a solução da EDO:

$$\dot{\Gamma}_p = A_p(t)\Gamma_p$$
$$\Gamma_p(0) = \mathrm{Id}$$

Então, como $p \mapsto A_p(t)$ é suave, $p \mapsto \Gamma_p(t)$ também é suave. Ou seja, as funções $\gamma_{ij} : p \mapsto \gamma_{p,ij}$ são suaves.

Dessa forma, $V_i(t)$ pode ser escrito como:

$$V_i(t) = \sum \gamma_{ij}(t)V_i(0) = \sum \gamma_{ij}V_i \in \mathcal{V}$$

□

Vamos introduzir agora submódulos localmente finitamente gerados.

Definição 5.6. *Dada uma família $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$, e $U \subseteq M$ um aberto, definimos:*

$$\mathcal{F}|_U = \{X|_U : X \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathfrak{X}(U)$$

Definição 5.7. *Um $C^\infty(M)$-submódulo $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ é dito localmente finitamente gerado se para cada $p \in M$, existe uma vizinhaça aberta U de p tal que $\mathcal{V}|_U$ é finitamente gerado.*

E demonstramos um análogo à proposição 4.3 para submódulos localmente finitamente gerados:

Proposição 5.5. *Seja $\mathcal{V} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ um $C^\infty(M)$-submódulo localmente finitamente gerado, e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então, se para todo $V \in \mathcal{V}$, temos que:*

$$(adX)V \in \mathcal{V}$$

Segue que:

$$(Ade^{tX})V \in \mathcal{V}$$

Para todo $V \in \mathcal{V}$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Seja $p \in M$, e U uma vizinhaça de p tal que $\mathcal{V}|_U$ é finitamente gerado. Temos que, para cada $V \in \mathcal{V}$, $(\mathrm{ad}X|_U)V_U \in \mathcal{V}|_U$, e portanto $(\mathrm{Ad}e^{tX|_U})V|_U \in \mathcal{V}|_U$. Como p é arbitrário, temos que $(\mathrm{Ad}e^{tX})V \in \mathcal{V}$ □

Por fim, estamos prontos para demonstrar:

Teorema 5.3. *Seja $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{X}(M)$ uma família tal que $Lie\mathcal{F}$ seja localmente finitamente gerada. Então:*

$$T_p\mathcal{O}_p = Lie_p\mathcal{F}$$

Demonstração: Note que por definição, para todo $X \in \mathcal{F}$, $Y \in \mathrm{Lie}\mathcal{F}$, $(\mathrm{ad}X)Y \in \mathrm{Lie}\mathcal{F}$.
Dessa forma, $(\mathrm{Ad}e^{tX})Y \in \mathrm{Lie}\mathcal{F}$.
Como

$$T_p\mathcal{O}_p = \mathrm{span}\{(\mathrm{Ad}e^{t_1X_1} \circ \cdots \circ e^{t_kX_k})Y : X_1, \ldots, X_k, Y \in \mathcal{F}; t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}\}$$

,
temos que $T_p\mathcal{O}_p \subseteq \mathrm{Lie}_p\mathcal{F}$. Como $\mathrm{Lie}_p\mathcal{F} \subseteq T_p\mathcal{O}_p$, temos que $\mathrm{Lie}_p\mathcal{F} = T_p\mathcal{O}_p$. □

5.4. **Integração de Distribuições.** Como aplicação do Teorema da Órbita, derivamos alguns teoremas para integração de distribuições: o Teorema de Frobenius (para distribuições regulares) e o Teorema de Stefan-Sussmann (para distribuições singulares).

Definição 5.8. *Uma distribuição singular Δ consiste da escolha de um subespaço $\Delta_p \subseteq T_pM$ para cada $p \in M$, de forma que para cada $p \in M$, exista uma vizinhaça U_p de p e uma coleção de campos $X_1, \ldots, X_k$ tal que, para $q \in U_p$, $\Delta_q = span\{q \circ X_1, \ldots, q \circ X_k\}$.*

Definição 5.9. *Uma distribuição singular Δ é dita regular de posto k se cada Δ_p tem dimensão k.*

Dizemos que uma distribuição (singular) Δ é integrável se existe uma folheação (singular) L tal que, para todo $p \in M$, $T_pL_p = \Delta_p$. Cada L_p é dita uma variedade integral de Δ, e L é dita uma folheação integral de Δ.

Note que uma distribuição regular integrável sempre será integrada em uma folheação regular. Existem exemplos bem simples de distribuições não integráveis em dimensão baixa.

De maneira similar à folheações, indicamos por $\mathfrak{X}(\Delta)$ os campos tangentes à uma distribuição Δ:

$$\mathfrak{X}(\Delta) = \{X \in \mathfrak{X}(M) : \forall p \in M, X_p \in \Delta_p\}$$

Ainda similarmente às folheações, podemos facilmente verificar, pontualmente, que $\mathfrak{X}(\Delta)$ é um $C^\infty(M)$-submódulo de $\mathfrak{X}(M)$:

Proposição 5.6. *$\mathfrak{X}(\Delta)$ é um $C^\infty(M)$-submódulo de $\mathfrak{X}(M)$*

Demonstração: Dados, $X, Y \in \mathfrak{X}(\Delta)$ e $f \in C^\infty(M)$, basta verificarmos pontualmente:

- $(X+Y)_p = X_p + Y_p \in \Delta_p$
- $(fX)_p = f(p)X_p \in \Delta_p$

□

No entanto, diferentemente das folheações, $\mathfrak{X}(\Delta)$ pode não ser uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.

Definição 5.10. *Uma distribuição Δ satisfaz a condição de Frobenius se $\mathfrak{X}(\Delta)$ é uma sub-álgebra de Lie de $\mathfrak{X}(M)$.*

Note que, se Δ é integrável, e L é a folheação integral de Δ, então $\mathfrak{X}(\Delta) = \mathfrak{X}(L)$. Dessa forma, a condição de Frobenius é uma condição necessária para a integrabilidade de uma distribuição.

O clássico Teorema de Frobenius diz que ela também é suficiente no caso regular:

Teorema 5.4 (Teorema de Frobenius)**.** *Seja Δ uma distribuição regular. Então, Δ é integrável se e somente se Δ satisfaz a condição de Frobenius.*

Demonstração: Já vimos que se Δ é integrável então Δ satisfaz a condição de Frobenius. Suponha que Δ satisfaz a condição de Frobenius. Considere a família $\mathfrak{X}(\Delta) \subseteq \mathfrak{X}(M)$ como um sistema de controle geométrico. Então, $\text{Lie}\mathfrak{X}(\Delta) = \mathfrak{X}(\Delta)$, e dessa forma para cada $p \in M$, $\text{Lie}_p\mathfrak{X}(\Delta) = \Delta_p$.

Além disso, podemos demonstrar que $\mathfrak{X}(\Delta)$ é localmente finitamente gerada: dado $p \in M$ e $V \in \mathfrak{X}(\Delta)$, seja U uma vizinhaça de p tal que existam campos $X_1, \ldots, X_k$ onde, para $q \in U$, $\Delta_q = \text{span}\{q \circ X_1, \ldots, q \circ X_k\}$. Para cada $q \in U$, existe únicos (são únicos pois cada Δ_q tem dimensão k, e temos que k vetores que geram Δ_q, ou seja, eles formam uma base de Δ_q) $f_i(q) \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$, tais que $q \circ V = \sum f_i(q)(q \circ X_i)$.

Como V é suave e cada X_i é suave, as funções $f_i : q \mapsto f_i(q)$ também são suaves. Dessa forma $V|_U = \sum f_i X_i|_U$. Além disso, dadas quaisquer k funções suaves $g_1, \ldots, g_k$, temos que $\sum g_i X_i|_U \in \mathfrak{X}(\Delta)|_U$. Dessa forma, $X_1, \ldots, X_k$ são um conjunto gerador de $\mathfrak{X}(\Delta)|_U$.

Como $\text{Lie}\mathfrak{X}(\Delta) = \mathfrak{X}(\Delta)$ é localmente finitamente gerada, temos que $T_p\mathcal{O}_p = \text{Lie}_p\mathfrak{X}(\Delta) = \Delta_p$, e portanto $\mathcal{O}$ é uma folheação integral de Δ. $\square$

O Teorema de Frobenius não se sustenta quando Δ é uma distribuição singular: a falha na demonstração acontece ao tentarmos achar as funções f_i (é possível garantir a existencia de tais funções mas não sua suavidade). Existem exemplos de distribuições singulares satisfazendo a condição de Frobenius mas que não são integráveis.

Dessa forma, para distribuições singulares, invocamos a descrição de $T_p\mathcal{O}_p$ do Teorema da Órbita para fornecemos uma condição necessária e suficiente para integrabilidade de distribuições.

Dado $P \in \text{Diff}(M)$, denote por $\Delta_p \circ P = \{X_p \circ P : X_p \in \Delta_p\}$.

Definição 5.11. *Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ e Δ uma distribuição singular. Então, dizemos que Δ é invariante com respeito a X se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\Delta_p \circ e^{tX} \subseteq \Delta_{p \circ e^{tX}}$.*

Teorema 5.5 (Teorema de Stefan-Sussmann)**.** *Seja Δ uma distribuição singular. Então, são equivalentes:*

- *Δ é invariante com respeito à todo $X \in \mathfrak{X}(\Delta)$.*
- *Δ é integrável.*

Demonstração: Primeiramente suponha que Δ é integrável, seja L uma folheação integral de Δ e $X \in \mathfrak{X}(\Delta) = \mathfrak{X}(L)$. Seja ainda $p \in M$. Como e^{tX} mapeia L_p em L_p (isto é, $e^{tX}(L_p) \subseteq L_p$), temos que $d(e^{tX})_p(T_pL_p) \subseteq T_{e^{tX}(p)}L_p$, e portanto $\Delta_p \circ e^{tX} \subseteq \Delta_{p \circ e^{tX}}$, ou seja, Δ é invariante com respeito à X.

Agora suponha que Δ é invariante com respeito à todo $X \in \mathfrak{X}(\Delta)$. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\Delta)$. Como $p \circ (\text{Ad}e^{tX})Y = ((p \circ e^{tX}) \circ Y) \circ e^{-tX})$, e $(p \circ e^{tX}) \circ Y \in \Delta_{p \circ e^{tX}}$, temos que $p \circ (\text{Ad}e^{tX})Y \in \Delta_{p \circ e^{tX} \circ e^{-tX}} = \Delta_p$.

Considere a folheação $\mathcal{O}$ dada pelas órbitas de $\mathfrak{X}(\Delta)$. Como, para cada $p \in M$,

$$T_p\mathcal{O}_p = \{p \circ (\text{Ad}e^{t_1X_1} \circ \cdots \circ e^{t_kX_k})Y : X_1, \ldots, X_k, Y \in \mathfrak{X}(\Delta)\}$$

temos que $T_p\mathcal{O}_p \subseteq \Delta_p$. Como é claro que $\Delta_p \subseteq T_p\mathcal{O}_p$, temos que $\mathcal{O}$ é uma folheação integral de Δ. $\square$

Part 3. **Appendixes**

References

[1] A. Agrachev Y. Sachkov *Control theory from the Geometric viewpoint* Encyclopedia of Mathematical Science, Control Theory and Optimization.
[2] M. M. Alexandrino, R. G. Bettiol, *Lie Groups and Geometric Aspects of Isometric Actions*. Springer Verlag (2015)
[3] D.D. Holm, T. Schamah, C. Stoica *Geometric Mechanics and Symmetry*, Oxford Texts in Applied and Engineering Mathematics.
[4] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer
[5] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, Perish or publish.