Tirando una moneda

Ejemplo muy simple: usando MCMC podemos obtener la distribución a posteriori de los casos de éxito del experimento.

Defino el modelo

- Likelihood: distribución binomial $\binom{10}{4} p^4.(1-p)^6$
- Prior: Beta(α, β) con dos sets de parámetros distintos
  - $\alpha, \beta = 1 \longrightarrow$ no informativa
  - $\alpha, \beta = 5 \longrightarrow$ supone una moneda balanceada, pero con un desvio de $\approx$ 0,15
- Posterior: Beta(5,7) $\longrightarrow$ de bibliografía

Modelo Bayesiano de punto de cambio

Ejemplo un poco más complejo: los datos corresponden a una serie de tiempo de emisiones de rayos X de una estrella. Los datos crudos dan el tiempo de llegada individual de los fotones (en segundos) y su energía (en keV) y siguen aproximadamente una distribución de Poisson.
El objetivo es identificar el punto de cambio y estimar las intensidades del proceso Poisson antes y después del mismo.

Defino el modelo

- Consideremos el siguiente modelo jerárquico de punto de cambio para el número de ocurrencias Y_i de un evento durante el intervalo i con punto de cambio k.
  - $Y_i|k, \theta, \lambda \sim \text{Poisson}(\theta)$ for $i = 1, ..., k$
  - $Y_i|k, \theta, \lambda \sim \text{Poisson}(\lambda)$ for $i = k+1, ..., n$
- Asumiendo las siguientes distribuciones prior:
  - $\theta \sim \text{Gamma}(0{,}5, b_1 = 100)$ (pdf=$g_1(\theta)$)
  - $\lambda \sim \text{Gamma}(0{,}5, b_2 = 100)$ (pdf=$g_2(\lambda)$)
  - $k \sim \text{Uniforme}(2, ..., n-1)$ (pmf=$u(k)$)

donde Gamma $(\alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$

Defino el modelo

La inferencia para este modelo está basada en una distribución **posterior** $f(k, \theta, \lambda|\mathbf{Y})$ donde $\mathbf{Y}= (Y_1, ..., Y_n)$. La distribución posterior se obtiene como el producto de todas las distribuciones:

$$
\begin{aligned}
f(k, \theta, \lambda|\mathbf{Y}) \propto & \prod_{i=1}^{k} f_1(Y_i|k, \theta, \lambda) \prod_{i=1}^{k} f_2(Y_i|k, \theta, \lambda) \\
& \times g_1(\theta) g_2(\lambda) u(k) \\
& = \prod_{i=1}^{k} \frac{\theta^{Y_i} e^{-\theta}}{Y_i!} \prod_{i=k+1}^{n} \frac{\lambda^{Y_i} e^{-\lambda}}{Y_i!} \\
& \times \frac{1}{\Gamma(0{,}5) b_1^{0{,}5}} \theta^{-0{,}5} e^{-\theta/b_1} \times \frac{1}{\Gamma(0{,}5) b_2^{0{,}5}} \lambda^{-0{,}5} e^{-\lambda/b_2} \\
& \times \frac{1}{n-2} 1(k \in 2, 3, ..., n-1)
\end{aligned}
$$

donde $1(k \in 2, 3, ..., n-1)$ es una función indicador

Bibliografía

1. Canal ritvikmath
2. Canal mathematicalmonk
3. Canal Normalized Nerd channel
4. Monte Carlo Markov Chain, Cory Maklin
5. Introduction to Bayesian statistics, part 2: MCMC and the Metropolis–Hastings algorithm, StataCorp LLC
6. Bayesian Modeling with R and Stan, Salt Lake City R Users Group
7. Videos MCMC, Andres Farall
8. MCMC in R
9. A Markov chain Monte Carlo example in astronomy