– NOMBRE: **Carolina Segovia**

TEORIA IMPORTANTE

→ En un universo con principio cosmologico, el elemento de linea es la metrica de FRW, el sistema de coordenadas es esferico y (r,θ,ϕ) son coordenadas comoviles.

El valor de k en FRW esta relacionado con la curvatura del espacio-tiempo. Ademas el factor de escala $R(t)$ es un valor que se deduce de las ecuaciones de campo de Einstein, conociendo la distribucion de materia.

La metrica de FRW escrita de manera mas sencilla:

$$\mathrm{ds}^2 = c^2\mathrm{dt}^2 - R^2(t)[d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2(\theta)d\phi^2)] \tag{1}$$

→ Las ecuaciones de campo de Einsten vinculan el espacio-tiempo (geometria) con el tensor energia-momento (distribucion de materia).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^2}T_{\mu\nu} \tag{2}$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energia momento, $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, R el parametro de curvatura y Λ la constante cosmologica.

El modelo de $T^{\mu\nu}$ es el de un fluido perfecto, el cual esta caracterizado en todo momento por su densidad ρ y su presion p. En universo homogeneo e isotropico, ρ y p solo pueden ser funciones del tiempo.

Conociendo la distribucion de materia a traves del modelo y combinando ecuaciones obtenidas con lo deducido anteriormente se obtienen las ecuaciones de Friedmann-Lemaitre:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right)R + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R \tag{3}$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda c^2 R^2 - c^2 k \tag{4}$$

planteando la conservacion de la energia momento se obtiene:

$$\frac{d(\rho R^3)}{\mathrm{dR}} = -\frac{3\mathrm{pR}^2}{c^2} \tag{5}$$

→ Con las ecuaciones (3), (4) y (5) se puede obteer la variacion de $R(t)$, $\rho(t)$ y $p(t)$.

PROBLEMAS ANALISIS ANALITICO

Problema 1: *La cosmologia moderna esta constituida en el principio cosmologico, el cual se basa en la hipotesis de un universo homogeneo e isotropo.Si el universo es isotropo, entonces es homogeneo. ¿Por que?*

– El principio cosmológico postula que el universo es homogéneo e isótropo a gran escala.

La isotropoa significa que en un punto dado el universo se ve igual en todas las direcciones, mientras que la homogeneidad significa que todos los puntos del espacio son equivalentes.

Ahora bien, si el universo es isótropo en todos sus puntos, entonces la curvatura espacial no puede depender de la posición: debe ser constante. Un espacio 3D de curvatura constante es un espacio maximalmente simetrico, y por definición tales espacios son homogéneos e isótropos.

Por lo tanto, la condición de isotropía global (no solo alrededor de un punto privilegiado) implica homogeneidad: no puede haber un “centro” ni regiones especiales. Esto justifica la forma de la métrica de Friedmann, Robertson y Walker (FRW), que describe un universo de curvatura constante.

Problema 2:

a) *Sabiendo que la ecuacion de estado para un fluido ideal es* $p{=}\omega\rho c^2$*, determinar como varia* ρ *en funcion de* $R(t)$ *y* ω*.*

– En universo FRW con fluido perfecto, a partir de la conservacion de la energia momento se obtiene la ecuacion de continuidad cosmologica:

$$\frac{d(\rho R^3)}{\mathrm{dR}}{=}{-}\frac{3\mathrm{pR}^2}{c^2} \quad\Rightarrow\quad \dot{\rho}+\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)\frac{3\dot{R}}{R}{=}0$$

sustituyendo $p{=}\omega\rho c^2$ en la ecuacion anterior

$$\dot{\rho}+\frac{3\rho\dot{R}}{R}+\frac{(\omega\rho c^2)}{c^2}\frac{3\dot{R}}{R}{=}0 \quad\Rightarrow\quad \dot{\rho}+\frac{3\rho\dot{R}}{R}+\frac{3\omega\rho\dot{R}}{R}{=}\,\dot{\rho}+\frac{3\rho\dot{R}}{R}(1{+}\omega){=}0$$

reescribiendo en forma diferencial

$$\frac{d\rho}{\mathrm{dt}}{=}{-}3(1{+}\omega)\frac{\dot{R}}{R}\rho$$

usando regla de la cadena

$$\frac{d\rho}{\mathrm{dt}}{=}\frac{d\rho}{\mathrm{dR}}\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}}{=}{-}3(1{+}\omega)\frac{\mathrm{dR}}{\mathrm{dt}}\frac{\rho}{R}$$

luego acomodando llegamos a

$$\frac{1}{\rho}d\rho{=}{-}3(1{+}\omega)\frac{1}{R}\mathrm{dR}$$

integrando

$$\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right){=}{-}3(1{+}w)\ln\left(\frac{R}{R_0}\right){=}\ln\left(\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+\omega)}\right)$$

reescribiendo obtenemos el resultado:

$$\rho(R){=}\rho_0\left(\frac{R}{R_0}\right)^{-3(1+\omega)}$$

notar que ρ_0 y R_0 son valores de ρ y R a t_0.

b) *Se considera que* $\rho(t){=}\rho_m(t)+\rho_r(t)+\rho_\Lambda(t)$*, donde* m *denota la materia (barionica y oscura),* r *la radiacion y* Λ *la energia del vacio. Dar la expresion general de* $\rho(t)$ *y en funcion del redshift* z*.*

– En el inciso anterior demostramos que cada componente evoluciona como $\rho{\propto}R^{-3(1+\omega)}$ para los tres fluidos relevantes:

→ Materia: $\omega{=}0{\Rightarrow}\rho_m(t){=}\rho_{m,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-3}$

→ Radiacion: $\omega{=}\frac{1}{3}{\Rightarrow}\rho_r(t){=}\rho_{r,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-4}$

→ Energia del vacio: $\omega{=}{-}1{\Rightarrow}\rho_\Lambda(t){=}\rho_{\Lambda,0}$

con lo cual tendriamos que

$$\rho(t)=\rho_m(t)+\rho_r(t)+\rho_\Lambda(t)=\rho_{m,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-3}+\rho_{r,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-4}+\rho_{\Lambda,0}$$

pero yo lo quiero en funcion del redshift, usamos que

$$1+z=\frac{R_0}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1+z}=\frac{R(t)}{R_0}$$

entonces

$$\rho(t)=\rho_{m,0}(1+z)^3+\rho_{r,0}(1+z)^4+\rho_{\Lambda,0}$$

es decir

$$\rho(z)=\rho_{m,0}(1+z)^3+\rho_{r,0}(1+z)^4+\rho_{\Lambda,0}$$

c) *Sea el parametro de Hubble* $H=\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$ *a un tiempo dado. Demostrar que* $\rho=\frac{3}{8\pi G}\left[H^2+\frac{c^2k}{R^2}\right]$.

- Partimos de la segunda ecuacion de Friedman-Lemaitre:

$$\dot{R}^2=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2+\frac{1}{3}\Lambda c^2R^2-c^2k$$

dividimos en ambos lados por R^2 y reconocemos $H=\frac{\dot{R}}{R}$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{3}\Lambda c^2-\frac{c^2k}{R^2} \quad \Rightarrow \quad H^2=\frac{8\pi G}{3}\rho+\frac{1}{3}\Lambda c^2-\frac{c^2k}{R^2}$$

obtenemos

$$\rho+\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}=\frac{3}{8\pi G}\left[H^2+\frac{c^2k}{R^2}\right] \tag{6}$$

donde $\rho=\rho_m+\rho_r$ y $\rho_\Lambda=\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$.

- Comentario: Entiendo que debo definirlo asi o considerar que $\Lambda=0$ para demostrar lo que pide el problema.

d) *Si* $k=0$ *el universo es plano. La densidad en ese universo es la densidad critica* $\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}$. *Analizar que tipo de universo resulta si* $\rho>\rho_c$ *y si* $\rho<\rho_c$.

- Partimos de la expresion del inciso c)

$$\rho=\frac{3}{8\pi G}\left[H^2+\frac{c^2k}{R^2}\right]=\rho_c+\frac{3c^2k}{8\pi \mathrm{G}\mathrm{R}^2}$$

entonces

$$\rho-\rho_c=\frac{3c^2}{8\pi \mathrm{G}\mathrm{R}^2}k$$

como $\frac{3c^2}{8\pi \mathrm{GR}^2}>0$ el signo de $\rho-\rho_c$ es el signo de k

→ Si $\rho>\rho_c \Rightarrow k>1$: Universo cerrado (curvatura espacial positiva).

→ Si $\rho<\rho_c \Rightarrow k<-1$: Universo abierto (curvatura espacial negativa; volumen infinito).

$\rightarrow$ Si $\rho = \rho_c \Rightarrow k = 0$: Universo plano (euclideo; volumen infinito).

e) *Se define* $\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c}$ *al parametro adimensional de densidad. Aqui la densidad puede ser de contribuciones* $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_\Lambda$ *(materia, radiacion, energia oscura). Se define* $\Omega_k(t) = -\frac{c^2 k}{H^2(t) R^2(t)}$ *al parametro de densidad de curvatura tal que para todos los tiempos cosmicos* t*, se cumple que:* $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$.

Debo ver como varia $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$ *en funcion de* k *y dar una expresion de* $\Omega_i(t)$.

– Comencemos teniendo en cuenta definiciones claves:

- Densidad critica: $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$
- Parametro de escala - ec.(38): $a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{1+z}$
- Parametros de densidad - ec.(39): $\Omega_i(t) = \frac{8\pi G}{3H^2(t)} \rho_i(t) \Rightarrow \Omega_{i,0} \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0}$ con $i = m, r, \Lambda$.
- Curvatura: $\Omega_k(t) = -\frac{c^2 k}{H^2(t) R^2(t)} \Rightarrow \Omega_{k,0} \equiv -\frac{c^2 k}{H_0^2 R_0^2}$

Partiendo de (6) inciso (c)

$$\rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G}\left[H^2 + \frac{c^2 k}{R^2}\right] \quad \Rightarrow \quad \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda = \frac{3}{8\pi G}\left[H^2 + \frac{c^2 k}{R^2}\right]$$

despejo H^2

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) - \frac{c^2 k}{R^2} \tag{7}$$

ahora usando la definicion de $a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0}$ recordemos

$$\rho_m = \rho_{m,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-3} \quad \Rightarrow \quad \rho_m = \rho_{m,0} a^{-3}$$

$$\rho_r = \rho_{r,0}\left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{-4} \quad \Rightarrow \quad \rho_r = \rho_{r,0} a^{-4}$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}$$

reemplazamos en (7)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0}) - \frac{c^2 k}{R^2}$$

divido por H_0^2

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}(\rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0}) - \frac{c^2 k}{R^2 H_0^2}$$

es decir se tiene

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{m,0} a^{-3} + \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{r,0} a^{-4} + \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{\Lambda,0} - \frac{c^2 k}{R^2 H_0^2}$$

pero $R^2 \equiv a^2 R_0^2$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{m,0} a^{-3} + \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{r,0} a^{-4} + \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_{\Lambda,0} - \frac{c^2 k}{R_0^2 H_0^2} a^{-2}$$

por lo tanto se llega a

$$H^2=H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-3}+\Omega_{r,0}a^{-4}+\Omega_{\Lambda,0}+\Omega_{k,0}a^{-2}) \tag{8}$$

divido H^2 y se obtiene inmediatamente

$$\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\Lambda+\Omega_k=1 \tag{9}$$

donde

$$\Omega_m(t)=\frac{H_0^2}{H^2(t)}\Omega_{m,0}a^{-3},\quad \Omega_r(t)=\frac{H_0^2}{H^2(t)}\Omega_{r,0}a^{-4},\quad \Omega_\Lambda(t)=\frac{H_0^2}{H^2(t)}\Omega_{\Lambda,0},\quad \Omega_k(t)=\frac{H_0^2}{H^2(t)}\Omega_{k,0}a^{-2}$$

Ahora de (9)

$$\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\Lambda-1=-\Omega_k=-\left(-\frac{c^2k}{H^2(t)R^2(t)}\right)=\frac{c^2k}{H^2(t)R^2(t)}$$

→ $\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\Lambda<1 \quad\Rightarrow\quad k=-1$ (abierto).

→ $\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\Lambda>1 \quad\Rightarrow\quad k=1$ (cerrado).

→ $\Omega_m+\Omega_r+\Omega_\Lambda=1 \quad\Rightarrow\quad k=0$ (plano).

- Comentario: Despues me di cuenta que existe una manera mas sencilla de resolver este problema, y que el desarrollo hasta la expresion (9) es del inciso (g).

- Comentario: Esto se resuelve como en pagina 18 - cap_7 del teorico proporcionado en el clasroom.

f) *Definimos el parametro de desaceleracion* $q=-\frac{\mathbb{R}\ddot{R}}{\dot{R}^2}$. *Demostrar que* $q=\frac{1}{2}(\Omega_m+2\Omega_r-2\Omega_\Lambda)$.

- Recordemos que las escuaciones de campo cosmologicas estan dadas por

$$\ddot{R}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)R+\frac{1}{3}\Lambda c^2R$$

$$\dot{R}^2=\frac{8\pi G}{3}\rho R^2+\frac{1}{3}\Lambda c^2R^2-c^2k$$

en la primera ecuacion multiplico por el factor $\frac{R}{\dot{R}^2}$ y recordando que $H=\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}$

$$\ddot{R}\frac{R}{\dot{R}^2}=-\frac{4\pi G}{3}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)R\frac{R}{\dot{R}^2}+\frac{1}{3}\Lambda c^2R\frac{R}{\dot{R}^2} \quad\Rightarrow\quad \ddot{R}\frac{R}{\dot{R}^2}=-\frac{4\pi G}{3H^2}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{1}{3H^2}\Lambda c^2$$

ahora $p=\omega\rho c^2$ y $q=-\frac{\mathbb{R}\ddot{R}}{\dot{R}^2}$

$$\ddot{R}\frac{R}{\dot{R}^2}=-\frac{4\pi G}{3H^2}\left(\rho+\frac{3p}{c^2}\right)+\frac{1}{3H^2}\Lambda c^2 \quad\Rightarrow\quad q=\frac{4\pi G}{3H^2}\rho(1+3\omega)-\frac{1}{3H^2}\Lambda c^2$$

y $\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G} \quad\Rightarrow\quad 2\rho_c=\frac{3H^2}{8\pi G}2=\frac{3H^2}{4\pi G} \quad\Rightarrow \frac{1}{2\rho_c}=\frac{4\pi G}{3H^2}$ con lo cual reescribiendo

$$q=\frac{\rho}{2\rho_c}(1+3\omega)-\frac{\Lambda c^2}{3H^2}=\frac{1}{2\rho_c}\sum_i\rho_i(1+3\omega_i)-\frac{\Lambda c^2}{3H^2}$$

sea $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$ y teniendo en cuenta que en materia $(\omega = 0)$, en radiacion $\left(\omega = \frac{1}{3}\right)$

$$q = \frac{\rho_m}{2\rho_c} + \frac{\rho_r}{\rho_c} - \Omega_\Lambda = \frac{1}{2}(\Omega_m + 2\Omega_r - 2\Omega_\Lambda)$$

lo cual es lo que se deseaba obtener.

g) *El parametro adimensional se define como* $a = \frac{R(t)}{R_0}$*, donde* R_0 *es el tiempo presente y* $a_0 = 1$.

Demmostrar que $H(t)^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a(t)^{-3} + \Omega_{r,0}a(t)^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a(t)^{-2})$ *en terminos del redshift* $H(z)^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2)$.

- En el inciso (e) - expresion (9) se demostro que

$$H^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-3} + \Omega_{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}a^{-2})$$

en terminos del redshift solo es recordar que $a(t) \equiv \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{1+z}$

$$H(z)^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0}(1+z)^2)$$

h) *La ecuacion (9) se puede transformar en*

$$\left(\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}}\right)^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}a^2 + \Omega_{k,0}) \tag{10}$$

donde $H_0, \Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}, \Omega_{\Lambda,0}$ *son los valores a tiempo presente. La solucion general de la ecuacion (10) es numerica pero podemos encontrar soluciones analiticas para algunas soluciones particulares.*

Los modelos con $\Lambda = 0$ *se llaman modelos de Friedmann, en este caso la expresion (10) se transforma en:*

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dt}}\right)^2 = H_0^2(\Omega_{m,0}a^{-1} + \Omega_{r,0}a^{-2} + \Omega_{k,0}) \tag{11}$$

Comentario: No crei necesario resolver paso a paso los siguientes subincisos ya que estos se encuentran bien resueltos y bien detallados en el teorico del cap_7 proporcionado para este practico. Ademas los lei de ahi y los entendi. Por lo tanto solo indico en que secciones se encuentran las resoluciones..

i. *Cuales son los casos posibles segun el valor de* k
   - 3.1. Modelos de Friedmann: $\Lambda = 0$

ii. *Si consideramos ahora que* $\rho_m \gg \rho_r$ *, modelos con polvo, ¿como es la evolucion de* $a(t)$*?*
   - 3.1.1 Modelos solo con polvo, $\Omega_{r,0} = 0$

iii. *En los modelos con solo radiacion, ¿como varia* $a(t)$?
   - 3.1.2 Modelos solo con radiacion, $\Omega_{m,0} = 0$

iv. *¿En el modelo Einstein de Sitter?*
   - 3.2. Modelo de Sitter

i) *Nuestro universo parece ser muy cercano a* $k = 0$ *con tres etapas claras: la era de radiacion, la era de materia y la era de la energia oscura. Completar la siguiente tabla con la evolucion de* $a(t)$ *y graficar* $a(t)$.

- Para la era de materia utilice el modelo de Friedmann con solo polvo $\Omega_{r,0} = 0$.

- Para la era de la radiacion utilice el modelo de Friedmann con solo radiacion $\Omega_{m,0}=0$.

- Por ultimo para la era de la energia oscura utilice el modelo de Sitter $\Omega_{r,0}=0$ y $\Omega_{m,0}=0$.

  Comentario: Utilizo la expresion de $\rho(a)$ en vez de $\rho(R)$ a traves de la relacion $a=\frac{R}{R_0}$.

Tipo de energia	w	$\rho(a)=\rho_m+\rho_r+\rho_\Lambda$	$a(t)$
Materia	0	$\rho_m=\rho_{m,0}a^{-3}$	$=\left(\frac{3H_0t}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$
Radiacion	$\frac{1}{3}$	$\rho_r=\rho_{r,0}a^{-4}$	$=(2H_0t)^{\frac{1}{2}}$
Λ	-1	$\rho_\Lambda=\rho_{\Lambda,0}$	$=\exp(H_0(t-t_0))$

Tabla 1.

- Para el grafico considero $t_0=\frac{1}{H_0}$ y $\beta=H_0t$.

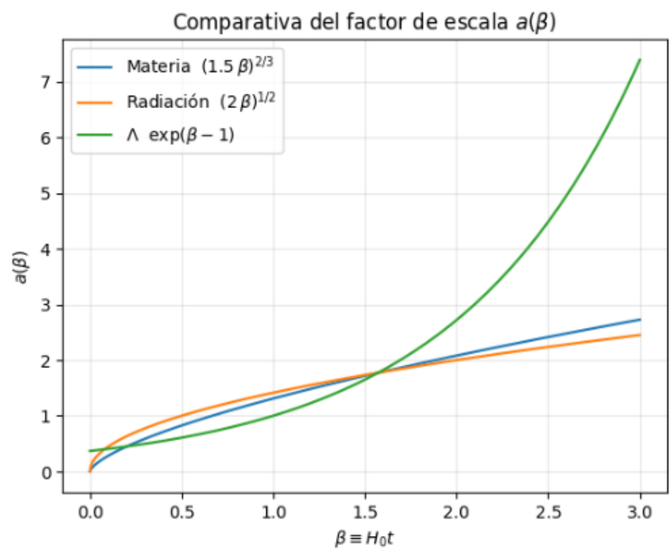

Figura 1.

Problema 3: *Supongamos que un foton es emitido en un tiempo t_E y es recibido por un observador en un tiempo t_R. Demostrar que el redshift cosmologico z se relaciona con el factor de expansion como:*

$$1+z=\frac{R(t_R)}{R(t_E)}$$

Esto implica que si el universo se esta expandiendo, el foton tendra corrimiento al rojo dado por el valor de z.

- Consideremos la metrica de FRW $\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-R^2(t)[d\chi^2+S^2(\chi)(d\theta^2+\mathrm{sen}^2(\theta)d\phi^2)]$ y ademas supongamos que el observador se encuentra en el origen del sistema de coordenadas.

  El foton es emitido en un tiempo t_E y es recibido por el observador a un tiempo t_R. Un foton viaja en una linea espacial nula, es decir se cumple $\mathrm{d}s=0$. El camino del foton es radial, luego $d\theta=d\phi=0$.

  La metrica de FRW se tranforma en

$$0=c^2\mathrm{d}t^2-R^2(t)d\chi^2 \quad\Rightarrow\quad R^2(t)d\chi^2=c^2\mathrm{d}t^2 \quad\Rightarrow\quad c\int\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=\int d\chi$$

ahora bien, un foton se emitio a tiempo t_E y el observador recibio la señal a tiempo t_R, pero en general se emitira otro foton a tiempo $t_E+\delta t_E$ y por lo tanto el observador recibira señales a t_R y $t_R+\delta t_R$.

Comentario: Para comprender mejor, pienso en una onda electromagnetica. La forma de la onda es periodica, y por definicion el periodo de la onda

$$\delta t = \frac{1}{\nu}$$

donde ν es la frecuencia.

– El primer maximo consecutivo de la onda recorre una distancia comovil R

$$\int_{t_E}^{t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} = R$$

de igual manera el segundo maximo consecutivo

$$\int_{t_E+\delta t_E}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} = R$$

es decir, ambos maximos de la onda recorren la misma distancia comovil. Ahora

$$\int_{t_E+\delta t_E}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} = \int_{t_E+\delta t_E}^{t_E} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} + \int_{t_E}^{t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} + \int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)}$$

$$R = -\int_{t_E}^{t_E+\delta t_E} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} + R + \int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} \quad \Rightarrow \quad \int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} = \int_{t_E}^{t_E+\delta t_E} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)}$$

es decir nos quedamos con que

$$\int_{t_R}^{t_R+\delta t_R} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)} = \int_{t_E}^{t_E+\delta t_E} \frac{\mathrm{cdt}}{R(t)}$$

pero δt_R y δt_E son muy pequeños tal que $R(t)$ es aproximadamente constante en cada intervalo $\Rightarrow$ $R(t) \approx R(t_R)$ y $R(t) \approx R(t_E)$ en cada lado

$$\frac{\delta t_R}{R(t_R)} = \frac{\delta t_E}{R(t_E)}$$

recordemos que

$$\frac{\delta t_R}{\delta t_E} = \frac{1/\nu_R}{1/\nu_E} = \frac{\nu_E}{\nu_R}$$

y por lo tanto

$$1+z = \frac{\lambda_R}{\lambda_E} = \frac{\nu_E}{\nu_R} = \frac{\delta t_R}{\delta t_E} = \frac{R(t_R)}{R(t_E)}$$

– Conclusion: La expansion del universo estira el periodo de la onda y por lo tanto disminuye la frecuencia - estira su longitud de onda, en la misma proporcion que crece el factor de escala $R(t)$.

Considerando expansion $R(t_R) > R(t_E)$ $\Rightarrow$ $1+z>1$ $\Rightarrow$ $z>0$; hay corrimiento al rojo.

Problema 4: *Las mediciones de distancias en un universo en expansion son dificiles de determinar.*

a) *Obtener ley de Hubble - Lemaitre*: *Quiero mostrar que para galaxias cercanas $z \ll 1$ la velocidad de recesion es proporcional a la distancia propia presente $v = H_0 d$.*

– Recordemos que $a(t) = \frac{R(t)}{R_0} = \frac{1}{1+z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{R_0}{R} - 1$, diferenciando la expresion:

$$\mathrm{dz} = d\left(\frac{R_0}{R}\right) = -\frac{R_0 \dot{R}}{R^2}\mathrm{dt} = -(z+1)\frac{\dot{R}}{R}\mathrm{dt}$$

pero $H(t) = \frac{\dot{R}}{R}$ y $H_0 = H(t_0)$

$$\mathrm{dz} = -(z+1)H(t)\mathrm{dt}$$

para objetos cercanos puedo expandir $R(t)$ alrededor de t_0

$$R(t) \simeq R_0 + \dot{R}_0\ (t - t_0) = R_0\ [1 + H_0(t - t_0)]$$

calculamos la coordenada comovil χ

$$\chi = \int_t^{t_0} \frac{c\ \mathrm{dt}}{R(t)} \simeq \frac{c}{R_0}(t_0 - t)$$

la distancia propia hoy es

$$d = R_0 \chi \simeq \frac{c}{H_0} z$$

y asociando la velocidad de recesion $v = \mathrm{cz}$

$$v = H_0 d$$

como se deseaba probar.

b) *La distancia propia de un objeto a coordenada χ, a un tiempo t es $d = R(t)\chi$ pero no puede medirse en la practica.*

Las distancias mas importantes son la distancia de luminosidad d_L y la distancia diametro angular d_A. Demostrar que $d_L = R_0 S(\chi)(1+z)$ y $d_A = R_0 \frac{S(\chi)}{(1+z)}$.

– Por definicion la luminosidad es:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad d_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F}\right)^{1/2}$$

en un universo en expansion, la radiacion emitida por una fuente a un tiempo t_E y recibida hoy a t_0 se reparte sobre una esfera (comovil) de area $A = 4\pi\ R_0^2\ S(\chi)^2$. La luminosidad absoluta de la fuente es $L(t)$.

Por problema 3) el cambio en la frecuencia debido al redshift cosmologico es

$$1 + z = \frac{\nu}{\nu_0} \Rightarrow \nu_0 = \frac{\nu}{1+z}$$

y el area aumenta con el redshift

$$A = 4\pi\ R_0^2\ S(\chi)^2(1+z)^2$$

por tanto tenemos

$$F = \frac{L(t_E)}{4\pi\ R_0^2\ S(\chi)^2(1+z)^2} \quad \Rightarrow \quad d_L = R_0 S(\chi)(1+z)$$

– Si el objeto tiene tamaño fisico l en el instante de emision t_E, su tamaño angular observado es $\Delta\theta$. De la parte angular de la metrica (con $\mathrm{dt} = d\chi = d\phi = 0$) se obtiene

$$l = R(t_E) S(\chi) \Delta\theta$$

la distancia angular se define como

$$d_A = \frac{l}{\Delta\theta} = R(t_E)S(\chi) \quad \Rightarrow \quad d_A = \frac{R_0 S(\chi)}{1+z}$$

que es lo que queriamos probar.

Problema 5: *La constante cosmologica ¿Como fue su descubrimiento a traves de las supernovas tipo Ia? ¿Que significa un universo con constante cosmologica?*

- *Las supernovas funcionan como* ***candelas estándar*** $\Rightarrow$ *nos dan* ***distancias de luminosidad*** d_L.

  En un universo FRW, $d_L(z){=}(1{+}z)R_0S(\chi)$ y $\chi(z)$ depende de $H(z)$.

  A fines de los años 90 se vio que, a mismo z, las supernovas estában **más débiles** (mayor d_L) de lo que predicen modelos sin Λ $\Rightarrow$ la expansión está **acelerándose**.

- Λ se modela como **energía del vacío** con $w{=}{-}1$; $p_\Lambda{=}{-}\rho_\Lambda c^2$ y $\rho_\Lambda{=}\,$cte (no se diluye).

  En resumen: Las supernovas midieron $d_L(z)$ y obligaron a introducir una componente con $\boldsymbol{w{=}{-}1}$que hace **acelerar** la expansión; en las ecuaciones, eso es la **constante cosmológica** $\boldsymbol{\Lambda}$, cuya densidad es constante y cuya presión negativa produce $\ddot{R}>0$.

PROBLEMAS ANALISIS NUMERICO

Ejercicio 1:

```
program ejercicio1
        implicit none
        real :: res, f
        integer :: z
        external f

        open(11, file="salida.dat" ,status="new")
        do z = 1, 600
                call qromb(f, 0., z*0.001, res)
                        write(11,*)z**0.001, res, res/(1+z*0.001), (1.+z*0.001)*res
        end do
        close(11)
end program ejercicio1

function f(s)
        implicit none
        real :: c, h0, r0, r, m, k, l
        real :: s
        real :: f
        c = 299792.458
        h0 = 70.
        r0 = 1.
        r = 0.
        m = 0.3
        k = 0.
        l = 0.7
        f= c/(h0*r0*sqrt((r*((1.+s)**4.))+(m*((1.+s)**3.))+(k*((1.+s)**2.))+l))
        return
end function f

include "qromb.f"
include "polint.f"
include "locate.f"
include "trapzd.f"

##Notas: res = coordenada comovil
```

Figura 2.

Ejercicio 2:

```
from astropy import units as u
import numpy as np
from scipy.integrate import quad
import pandas as pd


def omega_redshift(*,omega_m0,omega_rad0,omega_lambda0,omega_k0):
    def w_z(z):
        w_m = omega_m0*(1+z)**3
        w_rad = omega_rad0*(1+z)**4
        w_k = omega_k0*(1+z)**2
        w_l = omega_lambda0
        return (w_m+w_rad+w_k+w_l)**(-0.5)
    return w_z

def c_h_r_constant():
    c = 300000#*(u.meter/u.second)
    #c = c.to(u.km/u.second)
    r0 = 1
    h0=70#*(u.km/(u.second*u.Mpc))
    return c/(h0*r0)

def xi_z(omega_m0,omega_rad0,omega_lambda0,omega_k0,z):
    w_z = omega_redshift(
        omega_m0=omega_m0,
        omega_rad0=omega_rad0,
        omega_lambda0=omega_lambda0,
        omega_k0=omega_k0)
    I,err = quad(w_z,0,z)
    return [c_h_r_constant()*I,c_h_r_constant()*err]

z_array = np.arange(0,6,0.001)
xi_array = [xi_z(omega_m0=0.3,omega_lambda0=0.7,omega_rad0=0,omega_k0=0,z=z)[0] for z in z_array]
xi_array = np.array(xi_array)
dl_array = xi_array*(1+z_array)
da_array = xi_array/(1+z_array)

values = {'z':z_array,'xi':xi_array, 'dl':dl_array, 'da':da_array}
df = pd.DataFrame(values)
df.to_csv("data_xi.txt",sep='\t')
```