

# :: Praktikum Statistika menggunakan R ::

## 09. Analisis Variogram

## Analisis Variogram

MA2181 Analisis Data / MA2081  
Statistika Dasar / MA2082 Biostatistika

Kelompok Keilmuan Statistika

Laboratorium Statistika dan Komputasi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam



## TUJUAN

1

Memahami mekanisme stokastik yang berkembang menjadi observasi barisan.

2

Mengenal model-model variogram

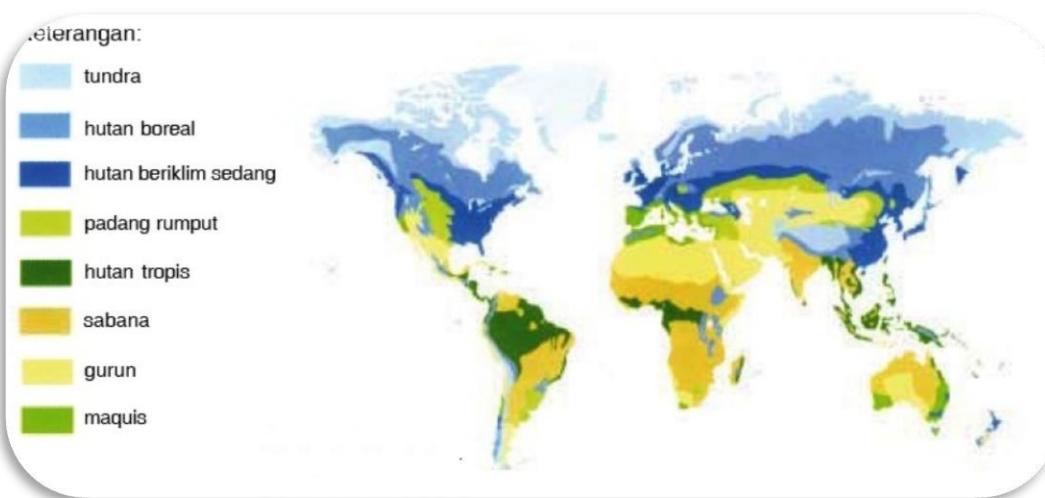
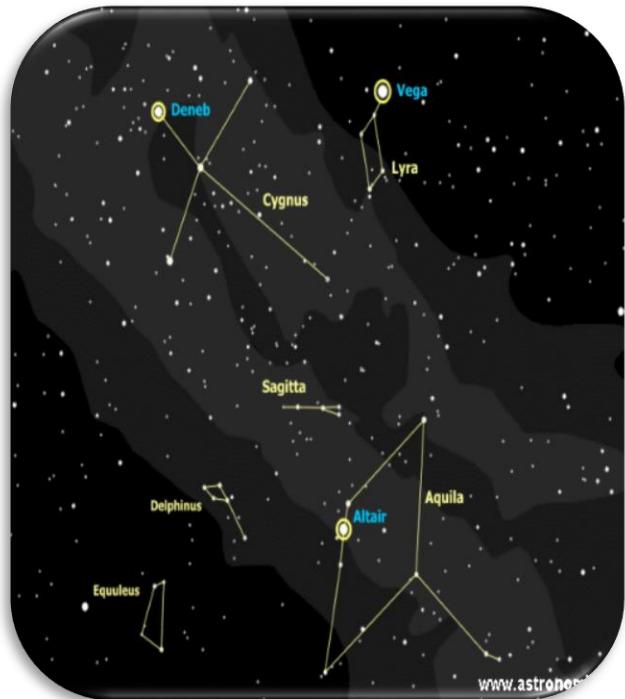
3

Membangun variogram eksperimental

4

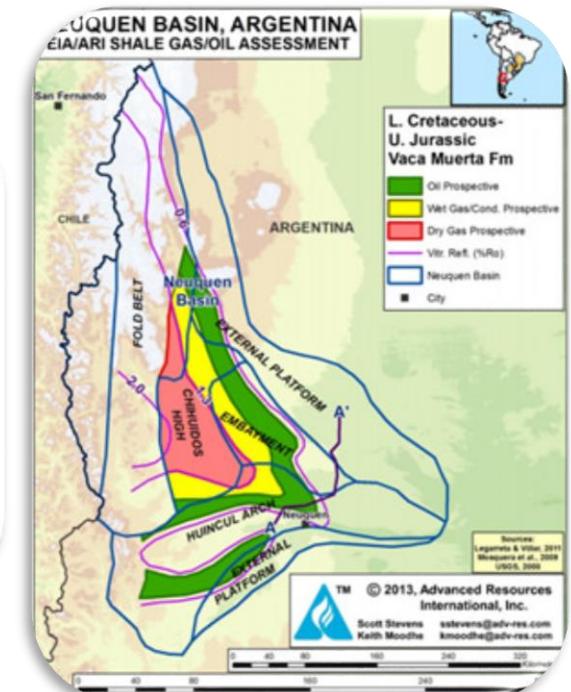
Membuat peta kontur hasil estimasi kriging

# Aplikasi



Posisi Bintang

Penyebaran Vegetasi Alam



Lokasi Kandungan Mineral dan Sumber Daya



# Data Spasial

Data Spasial dapat dipandang sebagai koleksi peubah acak. Koleksi peubah acak  $\{Z(s), s \in D\}$

1

Ekspektasi dari selisih dua buah peubah acak yang berjarak  $h$  nilainya sama dengan nol,

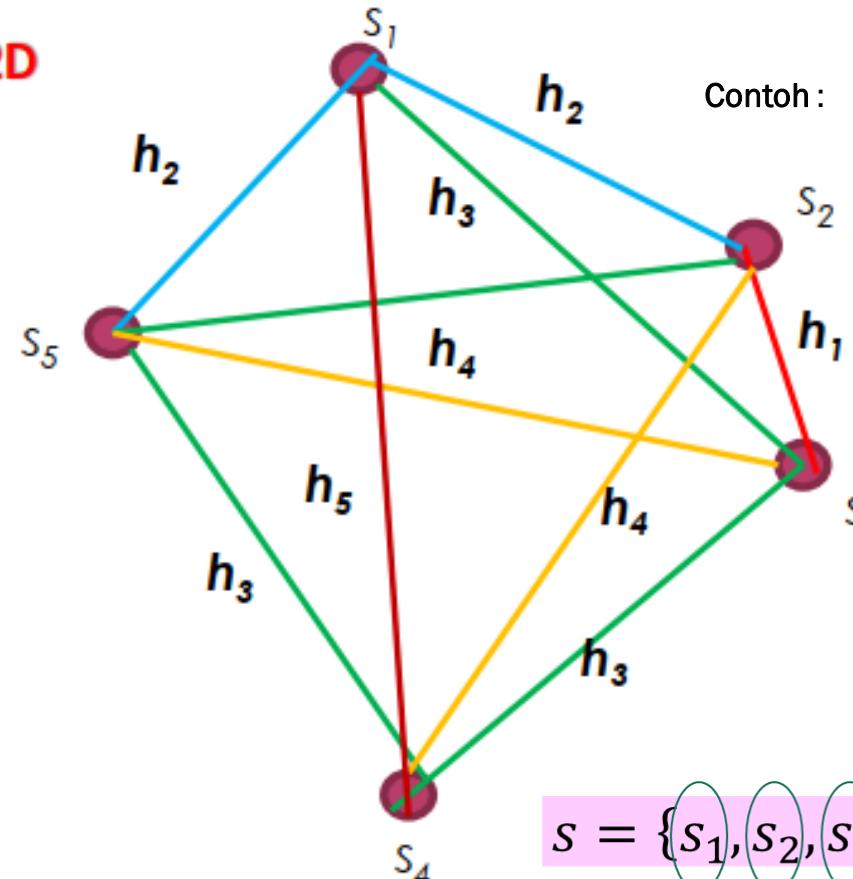
$$E[Z(s) - Z(s + h)] = 0, \quad \forall s \in D$$

2

Variansi dari selisih dua buah peubah acak hanya bergantung pada jarak peubah acak tersebut, tidak bergantung pada lokasi,

$$\text{Var}[Z(s) - Z(s + h)] = 2\gamma(h)$$

2D



Contoh :

Data kandungan minyak bumi di Prov. Kalimantan Timur

$$s = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$$

$$Z(s) = \{z(s_1), z(s_2), z(s_3), z(s_4), z(s_5)\}$$

dengan

$s_i$

: lokasi  $i$ , berupa koordinat  $(x_i, y_i)$

$h_k$

: jarak antar pasangan lokasi dihitung melalui pasangan koordinat lokasi.

$z(s_i)$

: nilai observasi pada lokasi  $i$ . Contoh : kandungan minyak bumi



# Informasi Data

No	No Sumur Jatibarang	Koordinat lokasi		DZ	Variabel	
		x (km)	y (km)		K-Fracture	Pormatrik
8	52	0.6309	-1.3109	213	35.445	12.16
18	62	0.9241	-1.2761	291	26.645	13.53
28	72	0.5677	-1.0127	291	51.72	15.13
38	86	1.0561	-0.8133	388	14.331	10.62
48	95	0.129	-0.5951	138	13.333	8.43
58	107	0.9848	-0.3901	108	4.683	5.57
68	119	1.2489	-0.4034	168	49.754	15.32
78	134	1.22	-0.6375	256	35.832	10.48
88	145	0.351	-0.9461	239	177.021	19.24
98	154	0.5042	-1.5291	238	30.467	12.67
108	164	0.5174	-1.2708	326	26.741	12.33
118	175	0.4646	-0.6614	181	16.776	14.08
128	186	0.4884	-0.9009	359	40.154	14.16

Sebagai contoh untuk mengolah data dan melakukan pemodelan variogram, berikut terdapat data pada sumur minyak di Jatibarang. Data yang akan digunakan adalah data **k-fracture** yang menunjukkan permeabilitas dalam satuan mili D'arcy (mD)

```
> data <- read_xlsx("DATA VARIOGRAM.xlsx",
sheet="Sumur Jatibarang")
> datasumurjtb <- data.frame(data)
```

# Persiapan Data (1)

## Package

```
> library(sp)
> library(gstat)
> library(dplyr)
> library(ggplot2)
> library(maptools)
```

Mengubah “data frame” menjadi “spatial point data frame”

```
> coordinates(datasumurjtb) = ~x+y      x dan y adalah nama
                                         kolom yang menyatakan
                                         koordinat data
> glimpse(datasumurjtb)

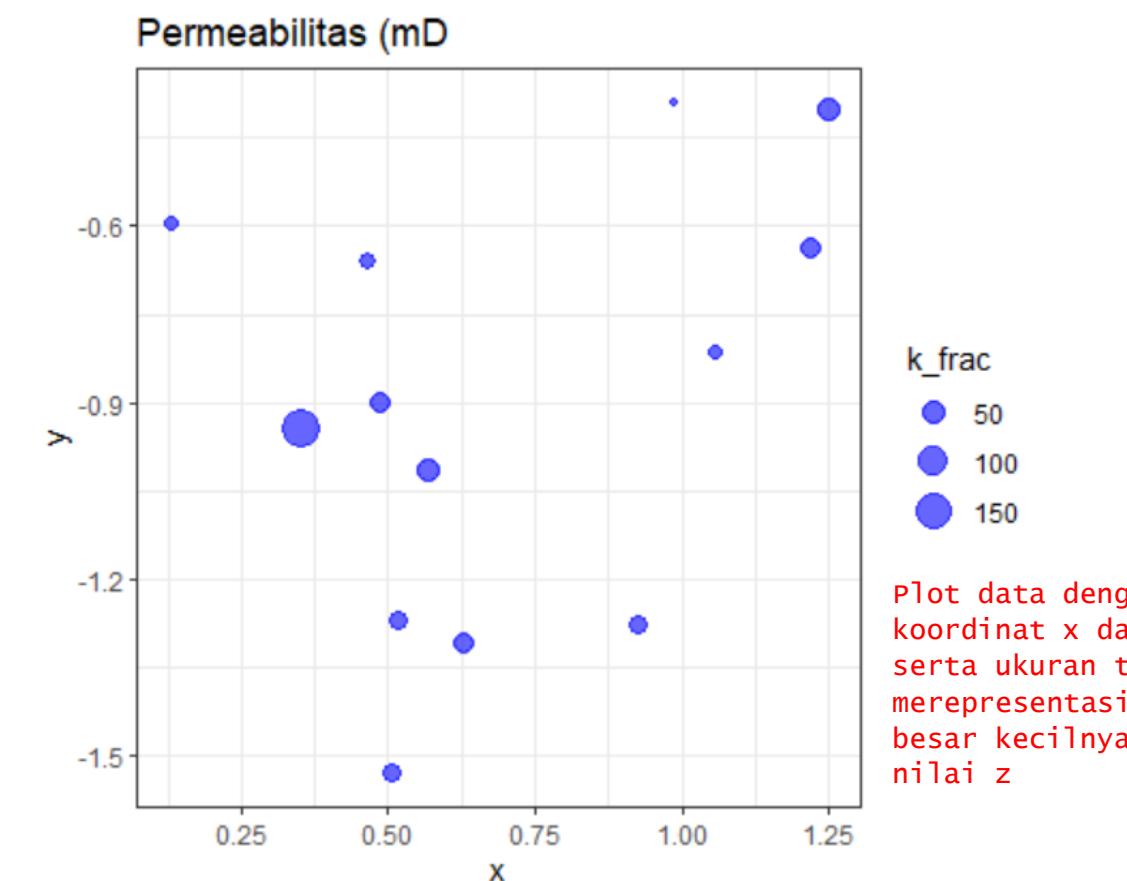
Formal class 'SpatialPointsDataFrame' [package "sp"] with 5 slots
  ..@ data       : 'data.frame':   13 obs. of  3 variables:
  ... .`$` dz     : int [1:13] 213 291 291 388 138 108 168 256 239 238 ...
  ... .`$` k_frac  : num [1:13] 35.4 26.6 51.7 14.3 13.3 ...
  ... .`$` Pormatrik: num [1:13] 12.16 13.53 15.13 10.62 8.43 ...
  ..@ coords.nrs : int [1:2] 1 2
  ..@ coords     : num [1:13, 1:2] 0.631 0.924 0.568 1.056 0.129 ...
  ... .`- attr(*, "dimnames")=List of 2
  ..@ bbox        : num [1:2, 1:2] 0.129 -1.529 1.249 -0.39
  ... .`- attr(*, "dimnames")=List of 2
  ..@ proj4string:Formal class 'CRS' [package "sp"] with 1 slot
```



# Persiapan Data (2)

Buat plot diagram pencar yang ukuran setiap titiknya merepresentasikan besar kecil nya nilai pada lokasi titik tersebut.

```
> ggplot(data = as.data.frame(datasumurjtb),
aes(x,y)) + geom_point(aes(size = k.fracture),
col = "blue", alpha = 0.6) +
ggttitle("Permeabilitas (mD") + coord_equal() +
theme_bw()
```



Plot data dengan koordinat x dan y serta ukuran titik merepresentasikan besar kecilnya nilai z



# Pengukuran Variabilitas Melalui Semivariogram

## Semivariogram :

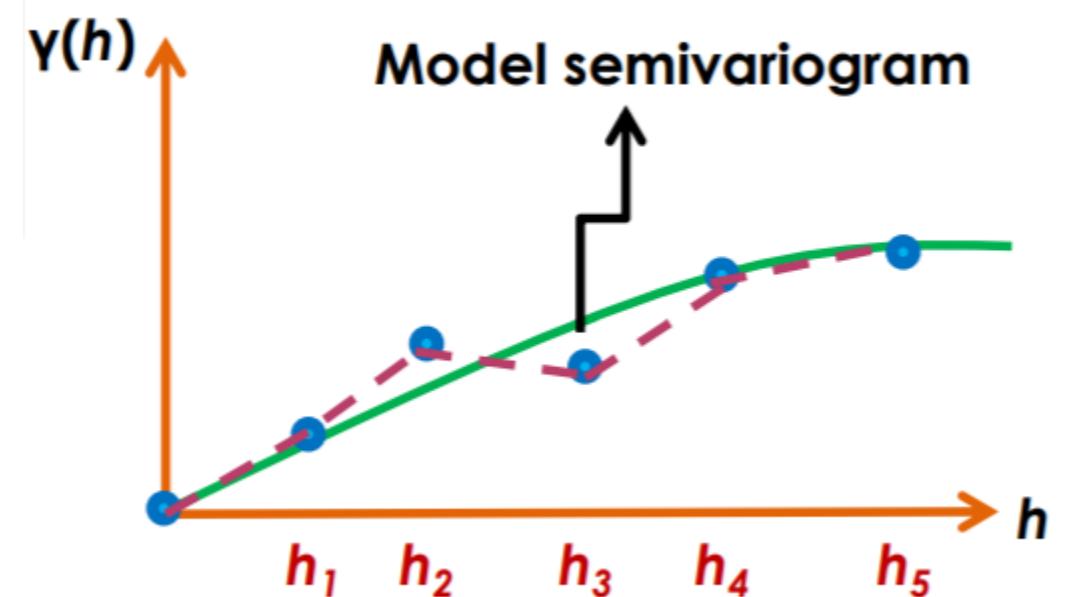
Alat ukur kebergantungan antara observasi yang didasarkan pada **jarak ( $h$ )** antar pasangan lokasi.

$$2\gamma(h) = \text{Var}[Z(s) - Z(s + h)]$$

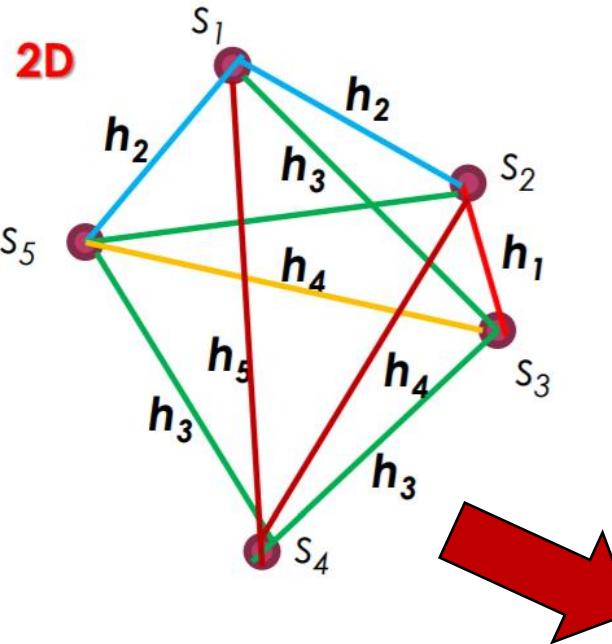
Jika realisasi  $Z(s_i)$  diketahui, maka dapat dihitung **semivariogram eksperimental**, yakni :

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [Z(s_i) - Z(s_i + h)]^2$$

dengan  $h$  adalah jarak antar pasangan lokasi, dan  $N(h)$  adalah banyaknya pasangan lokasi yang berjarak  $h$ .

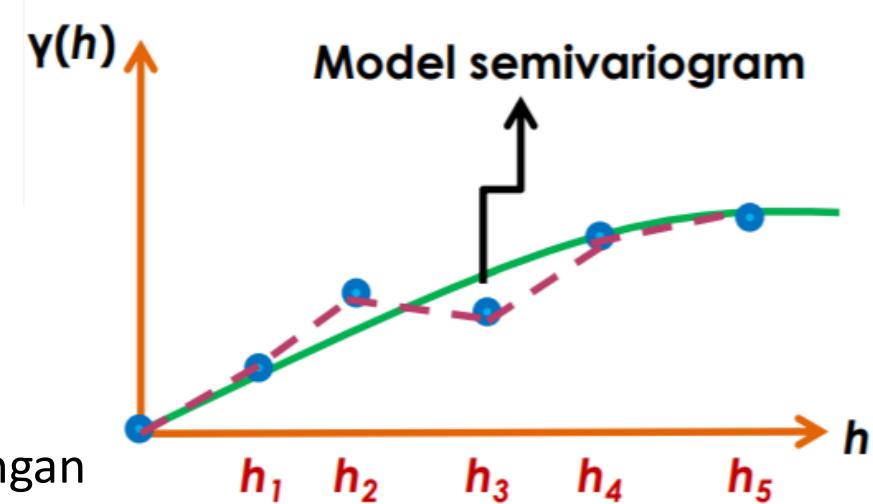


# Semivariogram Eksperimental



Tabel untuk mempermudah perhitungan semivariogram eksperimental:

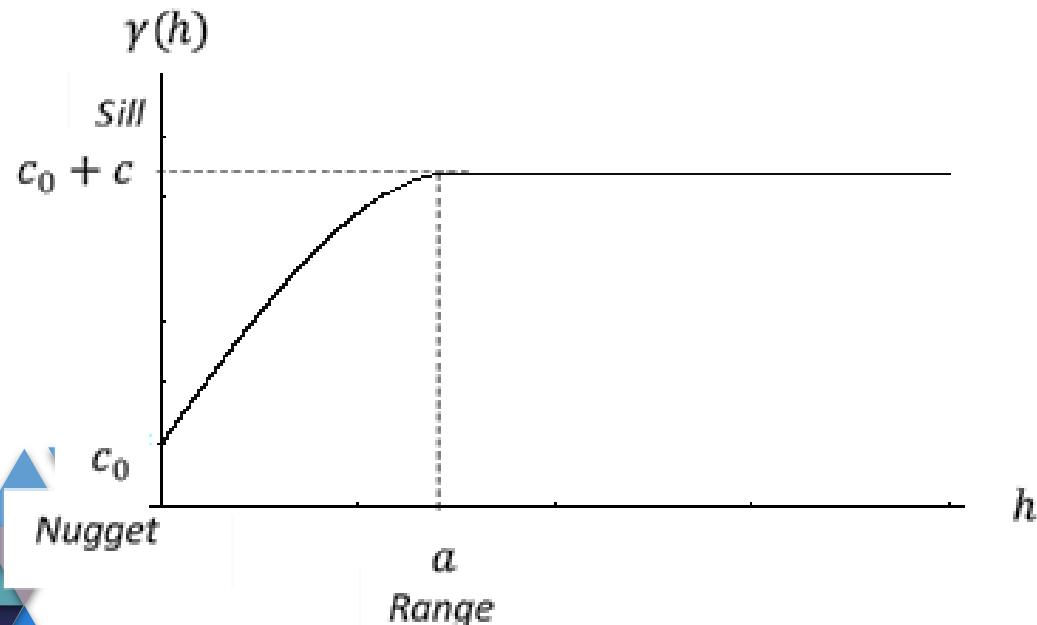
$h$	$N(h)$	$\sum [Z(s_i) - Z(s_i + h)]^2$	$\hat{\gamma}(h)$
$h_1$	1		$\hat{\gamma}(h_1)$
$h_2$	2		$\hat{\gamma}(h_2)$
...	...		...
$h_5$	1		$\hat{\gamma}(h_5)$



# Grafik Model Semivariogram

Berikut sifat-sifat grafik variogram berdasarkan parameternya:

1. Variansi selalu monoton naik terhadap satuan jarak antar bagian.
2. Terdapat **range** dan **sill**.
3. Terdapat Nugget Variance



## Range ( $a$ )

Jarak lag hingga nilai semivariogram konstan (jarak maksimum antara lokasi yang masih memiliki korelasi spasial).

## Sill ( $C_0 + C$ )

Nilai semivariogram yang konstan untuk  $h$  yang tidak terbatas. Umumnya, nilai sill mendekati variansi data.

## Nugget efect ( $C_0$ )

Kesalahan pengukuran dimana nilai semivariogram pada lag jarak nol nilainya tidak nol. Efek nugget akan hilang dengan memperkecil jarak antara titik-titik sampel.

# Semivariogram Eksperimental

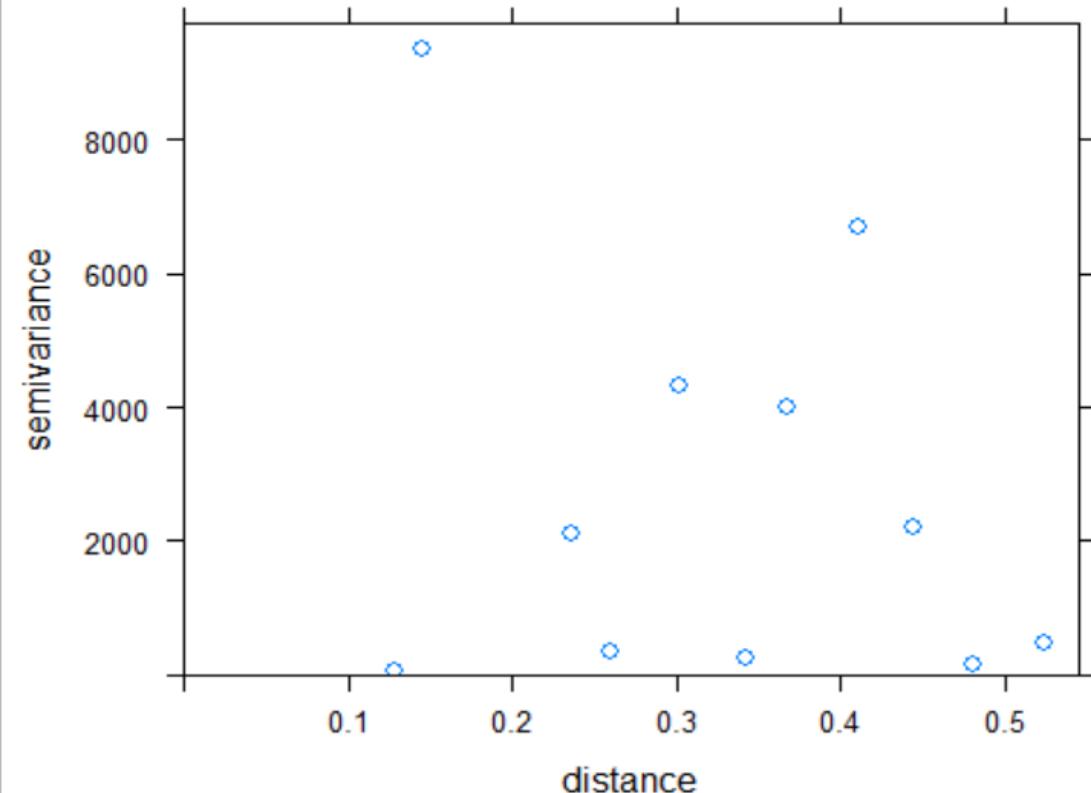
Menghitung variogram eksperimental

```
> (vgm1 <- variogram(k.fracture ~ 1,
  data=umurjtb))
```

	np	dist	gamma	dir.hor	dir.ver	id
1	2	0.1287219	52.38299	0	0	var1
2	1	0.1446437	9366.28784	0	0	var1
3	4	0.2359029	2112.87332	0	0	var1
4	4	0.2595862	336.75113	0	0	var1
5	3	0.3022030	4336.79594	0	0	var1
6	2	0.3417225	245.52861	0	0	var1
7	3	0.3673355	3997.51168	0	0	var1
8	2	0.4110238	6698.44264	0	0	var1
9	5	0.4438359	2204.25669	0	0	var1
10	3	0.4811260	147.60139	0	0	var1
11	2	0.5239131	462.40683	0	0	var1

Plot variogram untuk menentukan nilai parameter-parameter variogram yang kemudian dijadikan nilai taksiran awal dalam pencocokan variogram eksperimental dengan model teoritis.

```
> plot(vgm1, cex = 1)
```



# Semivariogram Eksperimental

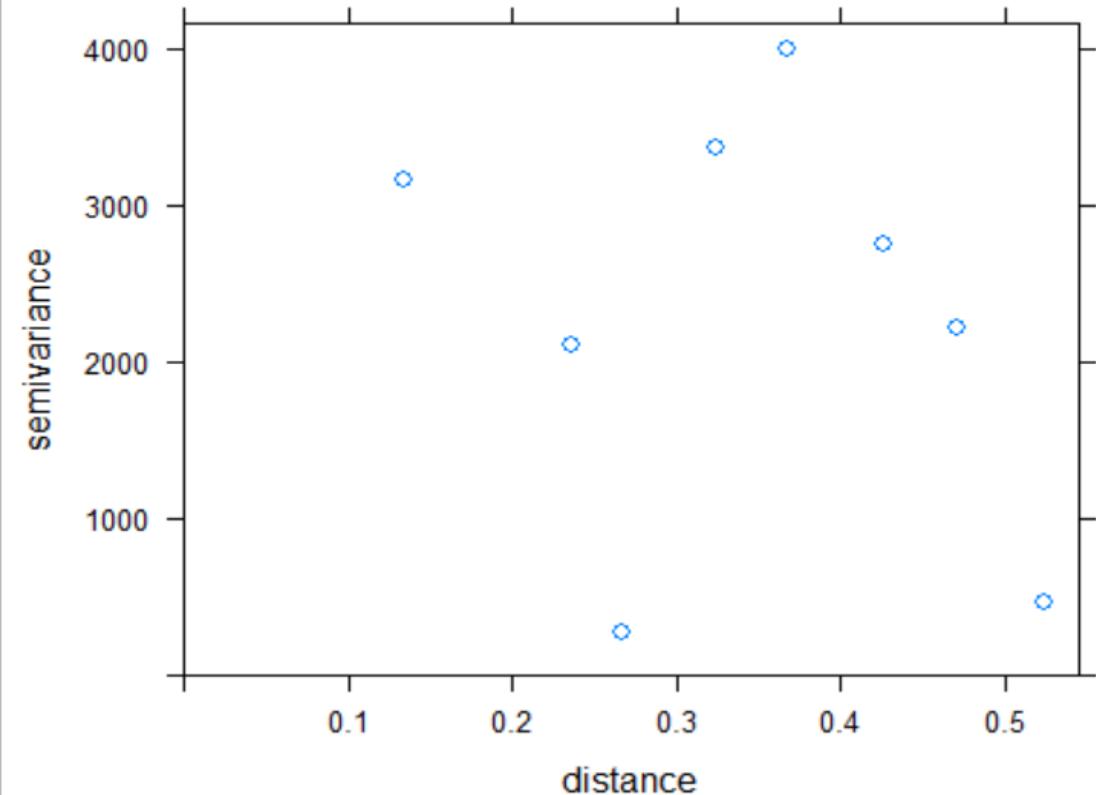
Memodifikasi interval jarak dengan menambahkan *width* pada fungsi variogram untuk memperlebar interval kelas agar pasangan data di setiap kelas jarak  $h$  lebih banyak.

```
> (vgm2 <- variogram(k.fracture ~ 1, datasumurjtb,
width = 0.05))
```

	np	dist	gamma	dir.hor	dir.ver	id
1	3	0.1340292	3157.0179	0	0	var1
2	4	0.2359029	2112.8733	0	0	var1
3	5	0.2667206	277.1449	0	0	var1
4	4	0.3236990	3365.6813	0	0	var1
5	3	0.3673355	3997.5117	0	0	var1
6	5	0.4256882	2753.7785	0	0	var1
7	5	0.4712329	2218.4161	0	0	var1
8	2	0.5239131	462.4068	0	0	var1

Plot variogram untuk menentukan nilai parameter-parameter variogram yang kemudian dijadikan nilai taksiran awal dalam pencocokan variogram eksperimental dengan model teoritis.

```
> plot(vgm2, cex = 1)
```



# Semivariogram Eksperimental

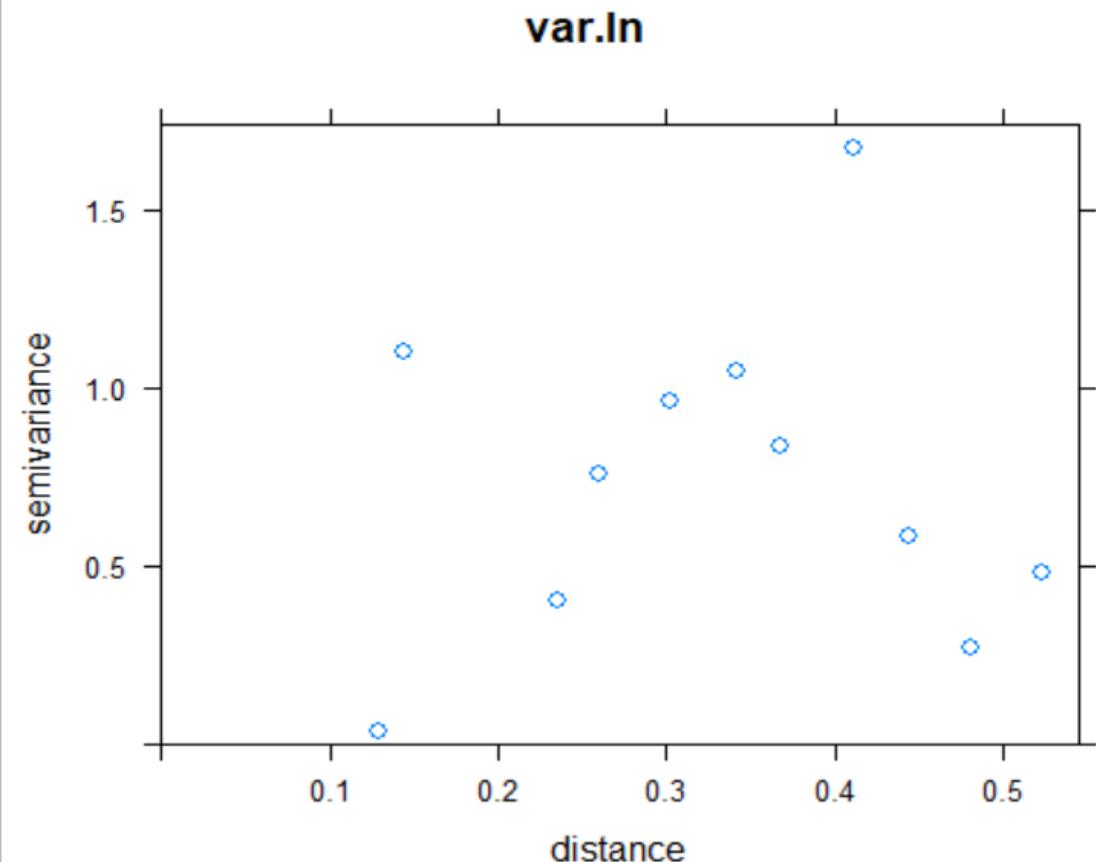
Memodifikasi dengan transformasi (misalkan dengan logaritma natural).

```
> (vgm.ln.1 <- variogram(log(k.fracture) ~ 1,
  data.sumurjtb))
```

	np	dist	gamma	dir.hor	dir.ver	id
1	2	0.1287219	0.03586834	0	0	var1
2	1	0.1446437	1.10045482	0	0	var1
3	4	0.2359029	0.40290521	0	0	var1
4	4	0.2595862	0.75744251	0	0	var1
5	3	0.3022030	0.96274361	0	0	var1
6	2	0.3417225	1.04839830	0	0	var1
7	3	0.3673355	0.83421135	0	0	var1
8	2	0.4110238	1.67188612	0	0	var1
9	5	0.4438359	0.58422400	0	0	var1
10	3	0.4811260	0.26967470	0	0	var1
11	2	0.5239131	0.48180470	0	0	var1

Plot variogram untuk menentukan nilai parameter-parameter variogram yang kemudian dijadikan nilai taksiran awal dalam pencocokan variogram eksperimental dengan model teoritis.

```
> plot(vgm.ln.1, main = "var.ln", cex = 1)
```



# Semivariogram Eksperimental

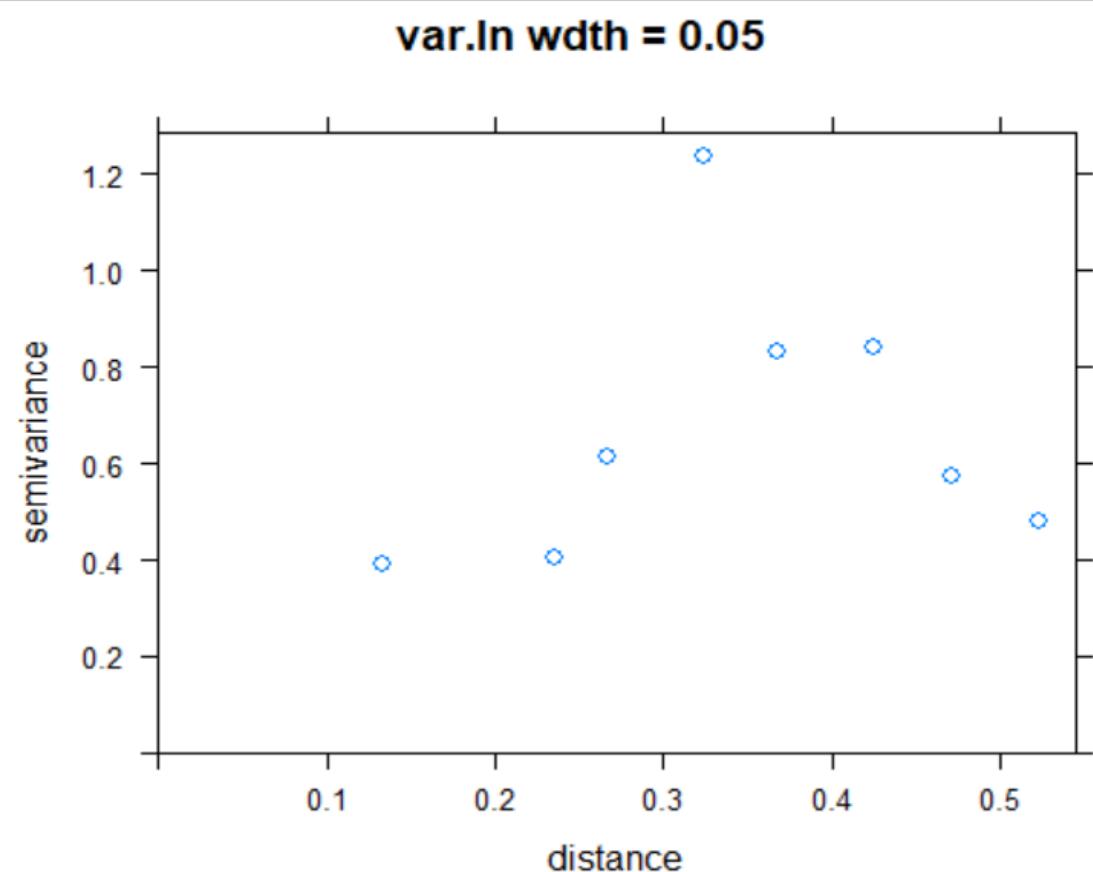
Memodifikasi dengan transformasi (misalkan dengan logaritma natural) dan memperlebar interval kelas agar pasangan data di setiap kelas jarak  $h$  lebih banyak.

```
> (vgm.ln.2 <- variogram(log(k.fracture) ~ 1,
  datasumurjtb, width = 0.05))
```

	np	dist	gamma	dir.hor	dir.ver	id
1	3	0.1340292	0.3907305	0	0	var1
2	4	0.2359029	0.4029052	0	0	var1
3	5	0.2667206	0.6140982	0	0	var1
4	4	0.3236990	1.2360766	0	0	var1
5	3	0.3673355	0.8342113	0	0	var1
6	5	0.4256882	0.8394007	0	0	var1
7	5	0.4712329	0.5753826	0	0	var1
8	2	0.5239131	0.4818047	0	0	var1

Plot variogram untuk menentukan nilai parameter-parameter variogram yang kemudian dijadikan nilai taksiran awal dalam pencocokan variogram eksperimental dengan model teoritis.

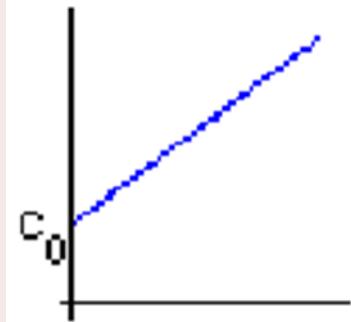
```
> plot(vgm.ln.2, main = "var.ln wdth = 0.05", cex = 1)
```



# Model Variogram

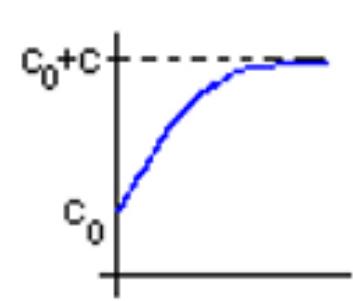
## Model Linier

$$v = c_0 + c_1 h$$



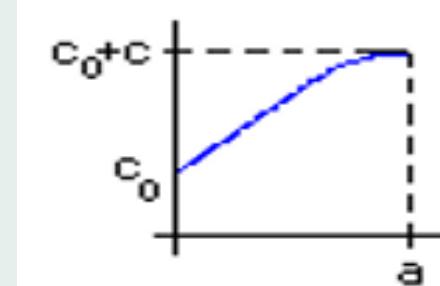
## Model Eksponensial

$$v = c_0 + c \left(1 - e^{-\frac{h}{a}}\right)$$



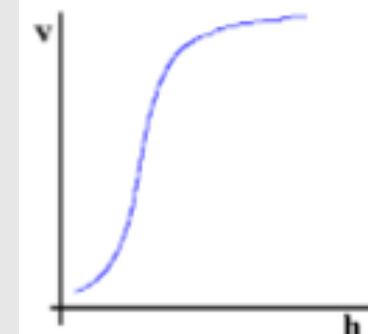
## Model Spherical

$$v = \begin{cases} c_0 + c \left[ \left( \frac{3h}{2a} \right) - \left( \frac{h^3}{2a^3} \right) \right], & h \leq a \\ c_0 + c, & h > a \end{cases}$$



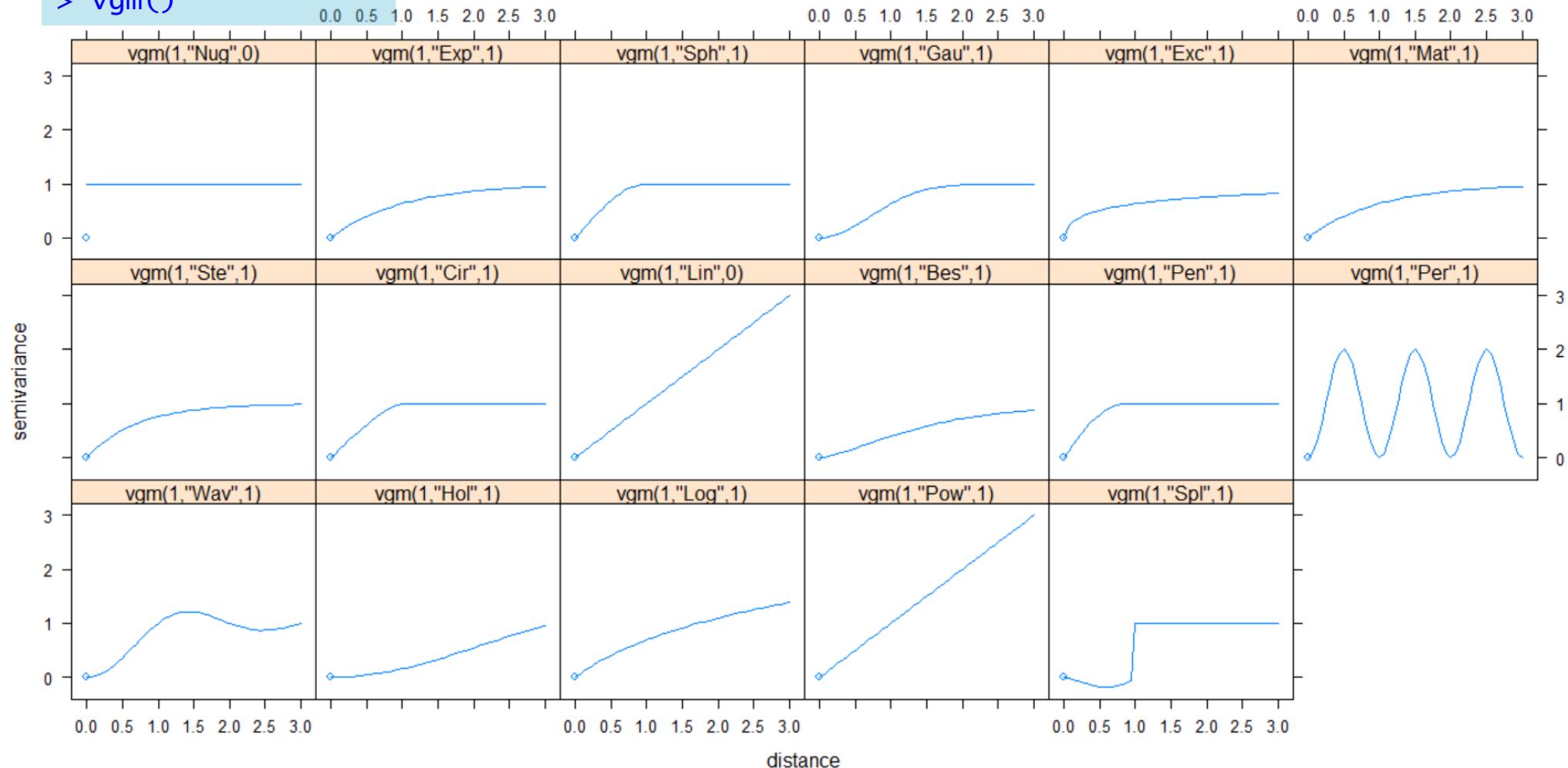
## Model Gauss

$$v = c_0 + c \left(1 - e^{-\frac{h^2}{a^2}}\right)$$



# Model Variogram Lainnya

```
> show.vgms()
> vgm()
```



# Fitting Model

Menampilkan model variogram terbaik antara Eksponensial, Sperikal, dan Gaussian

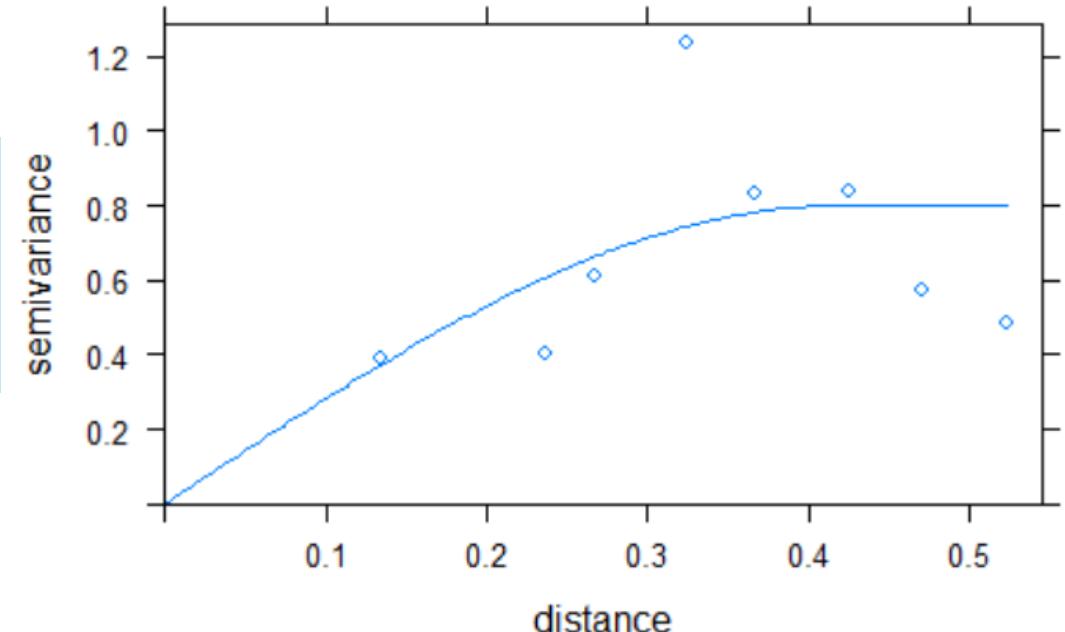
```
> (fit <- fit.variogram(vgm.ln.2, model =
  vgm(model = c("Exp", "Sph", "Gau"))))

model      psill      range
1   Sph  0.7998145  0.4178029
```

$$\gamma_{sph}(h) = \begin{cases} c_0 + c \left[ \left( \frac{3h}{2a} \right) - \left( \frac{h^3}{2a^3} \right) \right], & h \leq a \\ c_0 + c, & h > a \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0.8 \left[ \left( \frac{3h}{0.836} \right) - \left( \frac{h^3}{0.146} \right) \right], & h \leq 0.418 \\ 0.8, & h > 0.418 \end{cases}$$

```
> plot(vgm.ln.2, fit)
```



Jadi diperoleh model semivariogram untuk data sumur Jatibarang adalah Model Sperikal, dengan

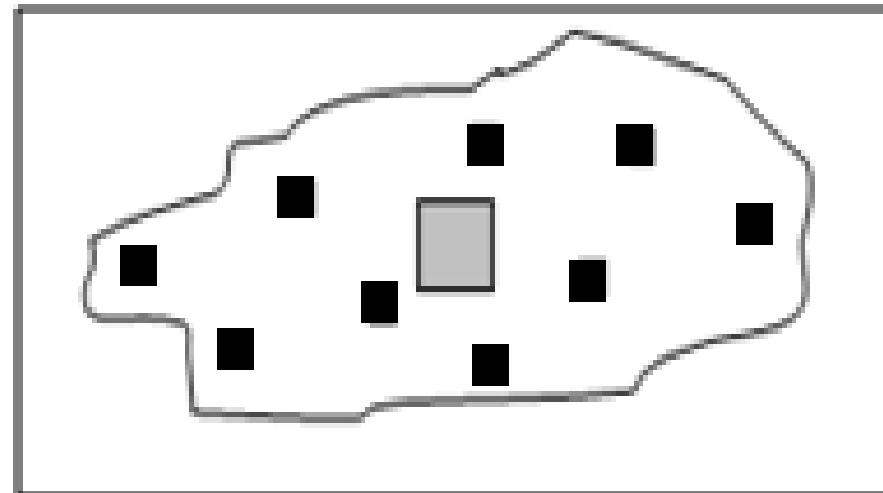
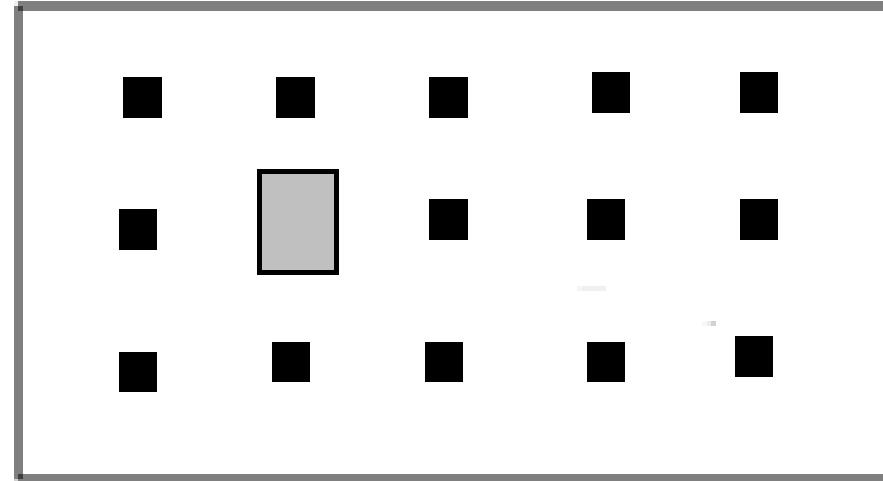
$$\gamma_{sph}(h) = \begin{cases} 0.8 \left[ \left( \frac{3h}{0.836} \right) - \left( \frac{h^3}{0.146} \right) \right], & h \leq 0.418 \\ 0.8, & h > 0.418 \end{cases}$$

# INTERPOLASI DENGAN KRIGING

**Kriging** adalah metode geostatistik yang digunakan untuk mengestimasi nilai dari sebuah titik

## Ilustrasi :

Kotak hitam menunjukkan lokasi-lokasi observasi sedangkan daerah abu-abu menunjukkan lokasi yang akan diinterpolasi





# Kriging

Berikut adalah persamaan umum untuk prediktor kriging biasa :

$$\hat{Z}(s_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(s_i)$$

dengan

$s_0$  : Lokasi tak terobservasi,

$s_i$  : lokasi-lokasi terobservasi,

$Z(s_i)$  : nilai peubah acak pada lokasi ke- $i$

$\lambda_i$  : bobot kriging untuk lokasi ke- $i$ .

Agar prediktor kriging bersifat **penaksir linier tak bias terbaik** atau **BLUE (Best Linear Unbiased Estimator)** maka :

1. Penjumlahan semua bobot kriging harus bernilai satu,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$$

2. Variansi galat taksiran,  $Var[Z(s_0) - \hat{Z}(s_0)]$ , minimum.

Masalah minimalisasi variansi galat taksiran dapat diselesaikan dengan **metode pengali Lagrange**, sehingga bobot kriging merupakan solusi dari persamaan :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma_{ij} + \varphi = \gamma_{i0} & , j = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \end{cases}$$

dengan

$\varphi$  : pengali Lagrange

$\gamma_{ij} = \gamma(s_i, s_j)$  : menyatakan variogram antara lokasi  $s_i$  dan lokasi  $s_j$ .

Nilai bobot kriging yang akan digunakan untuk menaksir nilai pada suatu lokasi tak terobservasi diperoleh dengan menyelesaikan persamaan di atas.



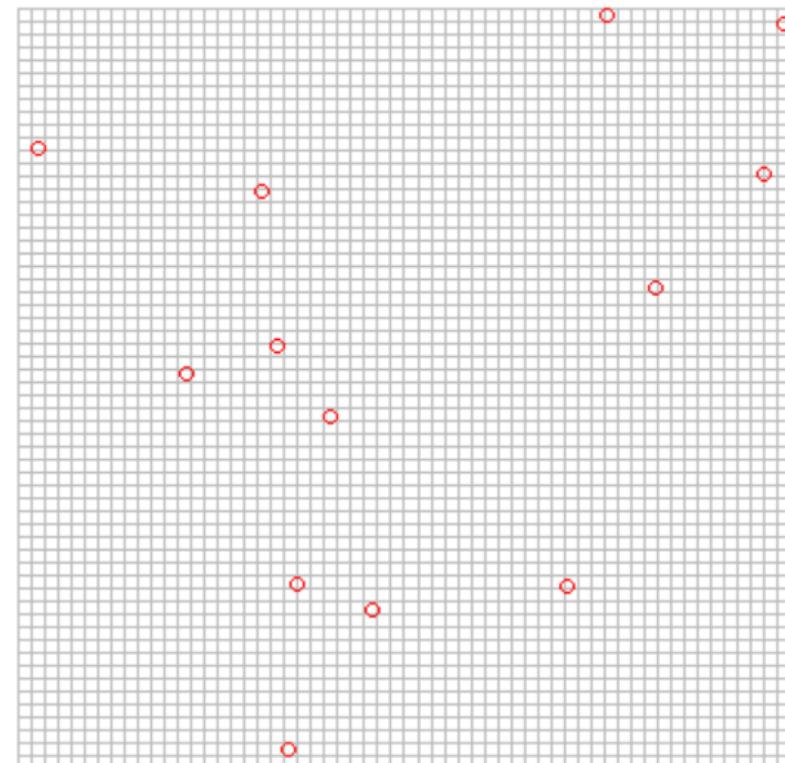
# Kriging (1)

Untuk menaksir nilai observasi menggunakan kriging, praktikan memerlukan titik-titik lokasi tak terobservasi. Titik-titik tersebut akan dibuat kedalam bentuk grid data.

```
> n <- 0.02
> kolom <- seq(datasumurjtb@bbox[1,1]-n,datasumurjtb@bbox[1,2]+n,by = n)
> baris <- seq(datasumurjtb@bbox[2,1]-n,datasumurjtb@bbox[2,2]+n,by = n)
> the.grid <- expand.grid(x = kolom, y = baris)
> coordinates(the.grid) <- ~x+y
> gridded(the.grid) <- T
```

## Plot grid dan titik observasi

```
> par(mar=c(1,1,1,1))
> plot(the.grid, cex=0.5, col="grey")
> points(datasumurjtb, pch=1, col='red', cex=1)
```



Setiap “kotak” (pixel) pada grid (sebelumnya) ditaksir nilainya dengan metode *Ordinary Kriging*.

Melakukan penaksiran untuk membentuk peta kontur dengan ordinary kriging

```
> kriging <- krige(k.fracture~1, datasumurjtb,
the.grid, model=fit)
[using ordinary kriging]
```

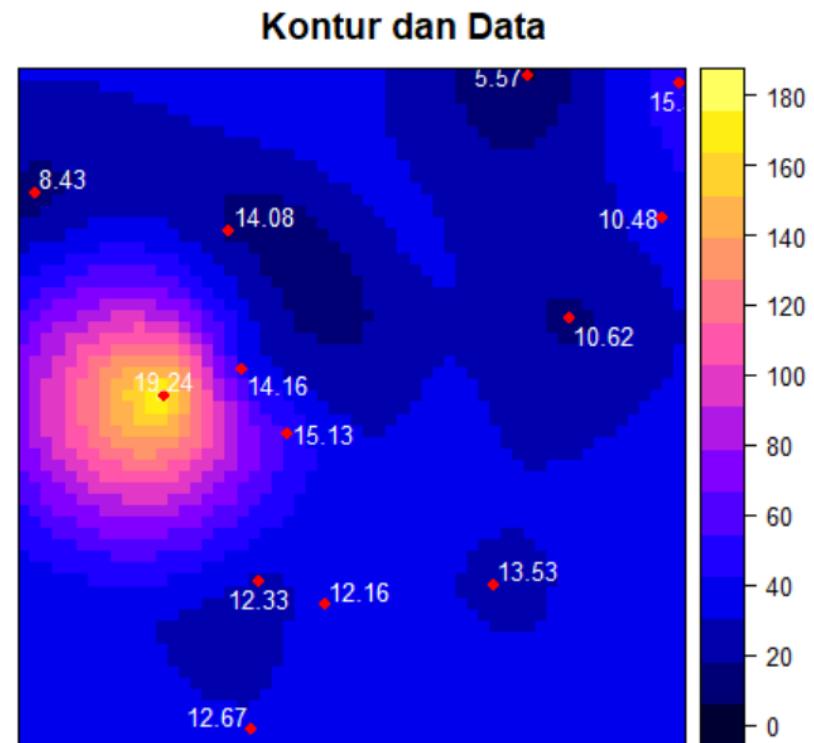
Plot kontur sebagai hasil taksiran oleh kriging

```
> titik <- SpatialPoints(datasumurjtb@coords)
> LayoutPoints <- list('sp.points', titik, pch =
19, cex = 0.8, col = 'red')
```

Sesuaikan kolom data yang digunakan pada DataSumurJTB[[n]]

```
> LayoutLabels <- list('sp.pointLabel', titik,
label = as.character(datasumurjtb[[4]]), cex =
0.8, col = 'white')
> spplot(kriging["var1.pred"], main = "Kontur dan
Data", sp.layout=list(LayoutPoints,LayoutLabels))
```

Kemudian seluruh taksiran tersebut dapat diplot dan menghasilkan peta kontur yang menunjukkan taksiran nilai-nilai observasi pada setiap titik di wilayah tersebut.

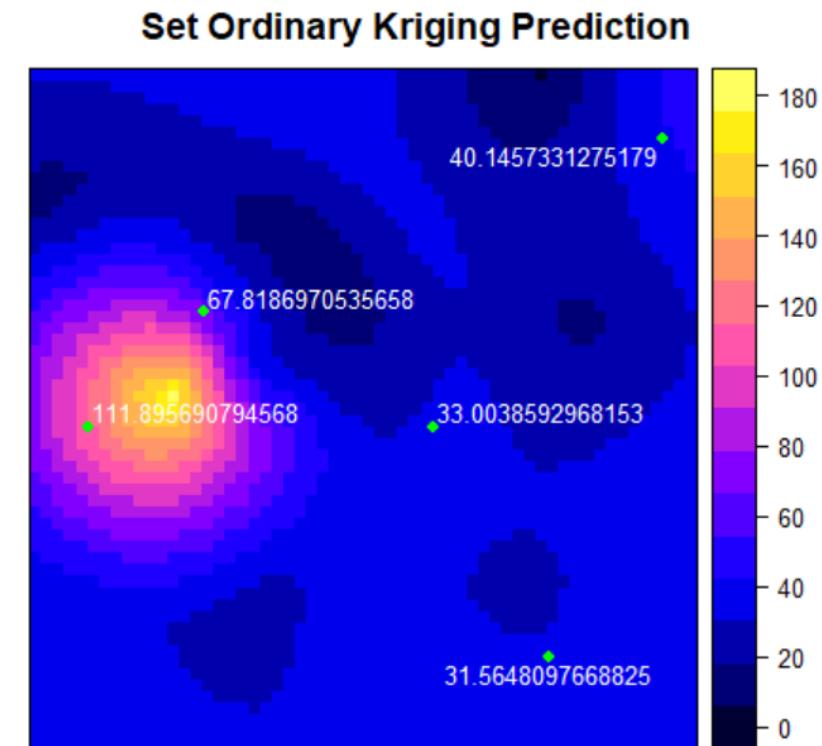


# Taksiran nilai di titik-titik tak terobservasi

Menentukan koordinat;

contoh 5 lokasi  $(0.2, -1), (0.4, -0.8), (0.8, -1.0), (1, -1.4)$ , dan  $(1.2, -0.5)$

```
> titik2 <-  
SpatialPoints(cbind(c(0.2,0.4,0.8,1,1.2),c(-1,-  
0.8,-1,-1.4,-0.5)))  
  
> taksiran <- krige(k.fracture~1, datasumurjtb,  
titik2, model=fit)[[1]]  
  
[using ordinary kriging]  
  
> LayoutPoints.T <- list('sp.points', titik2,  
pch=19, cex=0.8, col='green')  
  
> LayoutLabels.T <- list('sp.pointLabel', titik2,  
label = as.character(taksiran), cex = 0.8, col =  
'white')  
  
> spplot(kriging["var1.pred"], main = "Set  
Ordinary Kriging Prediction",  
sp.layout=list(LayoutPoints.T,LayoutLabels.T))
```



# Tim Penyusun



**Dr. Utriweni Mukhaiyar**

Dosen KK Statistika

Kepala Laboratorium Statistika dan Komputasi Statistika



**Nur'ainul Miftahul Huda, M.Si**

Asisten KK Statistika

## Pengajar Semester I – 2020/2021



**Dr. Udjianna S. Pasaribu**

Dosen KK Statistika, MA2181 Analisis Data



**Dr. Sapto Wahyu Indratno**

Dosen KK Statistika, MA2082 Biostatistika



**Dr. Rr. Kurnia Novita Sari**

Dosen KK Statistika, MA2181 Analisis Data



**Yuli Sri Afrianti, S.Si., MT, MBA.**

Dosen KK Statistika,  
MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar



**Dr. Sandy Vantika**

Dosen KK Statistika,  
MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar



**Dr. Utriweni Mukhaiyar**

Dosen KK Statistika, MA2082 Biostatistika



# Referensi





# Selamat Praktikum!

