:: Praktikum Statistika menggunakan R ::

03. Distribusi Peluang

Distribusi Peluang Diskrit

MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar / MA2082 Biostatistika

Kelompok Keilmuan Statistika

Laboratorium Statistika dan Komputasi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

TUJUAN PRAKTIKUM

1. Memperkenalkan Distribusi Peluang Diskrit dan Kontinu
2. Menghitung nilai peluang dari peubah acak yang berdistribusi Binomial dan Poisson (Diskrit)
3. Menghitung nilai peluang dari peubah acak yang berdistribusi Normal dan Eksponensial (Kontinu)

Distribusi Peluang Diskrit

Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu **fungsi peluang** dari peubah acak diskrit X jika untuk setiap kemungkinan hasil x memenuhi:

a. $f(x) \geq 0$,

b. $\sum_x f(x) = 1$,

c. $P(X = x) = f(x)$

Fungsi distribusi kumulatif, $F(x)$, suatu peubah acak diskrit X didefinisikan sebagai:

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t).$$

untuk setiap $-\infty < t < \infty$.

Contoh D. P. Diskrit

- Distribusi seragam diskrit
- Distribusi Binomial
- Distribusi Poisson
- Distribusi Hipergeometrik.

Akan dibahas selanjutnya

Distribusi Binomial (1)

Suatu percobaan seringkali terdiri dari beberapa usaha ($n > 1$), dengan setiap usaha memiliki dua kemungkinan hasil yaitu **sukses** dan **gagal**.

Jika $\boldsymbol{X \sim Binom(n,p)}$, peluang sukses sebanyak $\boldsymbol{k}$ dari $\boldsymbol{n}$ usaha dengan peluang sukses $\boldsymbol{p}$ adalah :

$$B(k;n,p) = P(X = k)$$
$$= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

dengan $k = 0,1,2,\ldots$

$\mathrm{E}[X] = np$ dan $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

```
# DISTRIBUSI BINOMIAL
# X~Bin(n,p), n:banyaknya percobaan, p:peluang sukses
# x : nilai titik yang akan dihitung peluangnya

#Fungsi Distribusi Kumulatif P(X<=x)
Fx = pbinom(x,n,p)

#Fungsi Kepadatan Peluang P(X=x)
Px = dbinom(x,n,p)

#Fungsi Invers P(X<=x)=I
Qx = qbinom(I,n,p)

#Pembangkitan nilai acak
#s : banyaknya bilangan yang akan dibangkitkan
pa = rbinom(s,n,p)
```

Distribusi Binomial (2)

Contoh 1 : Suatu suku cadang dapat menahan uji goncangan tertentu dengan peluang 0,75. Misalkan, terdapat 4 buah suku cadang yang diuji. Tentukan peluang:

a. antara 1 sampai 3 suku cadang yang diuji tidak mengalami kerusakan (dapat menahan goncangan)
b. tepat 2 suku cadang tidak rusak

```
#contoh 1
# x : p.a. banyaknya suku cadang dapat
menahan goncangan
#diketahui n=4, p=0.75

#a. P(1<X<=3) = P(X<=3)-P(X<=1)
pbinom(3,4,0.75)-pbinom(1,4,0.75)
0.6328125

#b. P(X=2)
dbinom(2,4,0.75)
0.2109375
```

Jawab :

Peubah acak X menyatakan banyaknya suku cadang dapat menahan goncangan. Diketahui X berdistribusi Binomial dengan $n = 4$ dan $p = 0{,}75$. Maka :

a. Peluang antara 1 sampai 3 suku cadang yang diuji dapat menahan goncangan

$$P(1 < X \leq 3) = P(X \leq 3) - P(X \leq 1)$$
$$= 0{,}6328125$$

b. Peluang tepat 2 suku cadang tidak rusak

$$P(X = 2) = 0{,}21094$$

Distribusi Poisson (1)

Percobaan Poisson biasanya digunakan untuk merepresentasikan banyaknya kejadian pada selang waktu atau luas daerah tertentu.

Jika $\boldsymbol{X \sim Poisson(\lambda = \beta t)}$ banyaknya kejadian (sukses) yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu dinyatakan dengan $\boldsymbol{t}$, maka fungsi peluangnya adalah sebagai berikut :

$$p(x, \beta t) = P(X = x) = \frac{e^{-\beta t}(\beta t)^x}{x!},$$

dengan $\mathrm{x} = 0,1,2, \ldots$

$\mathrm{E}[X] = \lambda$ dan $\mathrm{Var}[X] = \lambda.$

```
# DISTRIBUSI POISSON
# X~Poi(lambda), lambda:rata-rata banyaknya
#       kejadian pada suatu selang waktu atau
#       daerah tertentu
# x : nilai titik yang akan dihitung peluangnya

#Fungsi Distribusi Kumulatif P(X<=x)
Fx = ppois(x,lambda)

#Fungsi Kepadatan Peluang P(X=x)
Px = dpois(x,lambda)

#Fungsi Invers P(X<=x)=I
Qx = qpois(I,lambda)

#Pembangkitan nilai acak
#s : banyaknya bilangan yang akan dibangkitkan
pa = rpois(s,lambda)
```

Distribusi Poisson (2)

Contoh 2 : 4. Di suatu simpang jalan rata-rata terjadi 3 kecelakaan seminggu. Berapakah peluang pada suatu minggu tertentu

a. Tepat 5 kecelakaan akan terjadi?
b. Kurang dari 3 kecelakaan akan terjadi?
c. Paling sedikit 2 kecelakaan akan terjadi?

```
#contoh 2
# x : p.a. banyaknya kecelakaan dalam
seminggu, diketahui lambda = 3

#a. P(X=5)
dpois(5,3)
0.1008188
#b. P(X<3)= P(X<=2)
ppois(2,3)
0.4231901
#c. P(X>=2) = 1-P(X<=1)
1-ppois (1,3)
0.8008517
```

Jawab :

Peubah acak X menyatakan . banyaknya kecelakaan dalam seminggu. Diketahui X berdistribusi Poisson dengan $\lambda = 3$. Maka :

a. Peluang tepat terjadi 5 kecelakaan
$$P(X = 5) = 0.1008188$$
b. Peluang terjadi kurang dari 3 kecelakaan
$$P(X < 3) = P(X \leq 2) = 0.4231901$$
c. Peluang terjadi paling sedikit 2 kecelakaan
$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 0.8008517$$

Hampiran Distribusi Poisson Terhadap Distribusi Binomial

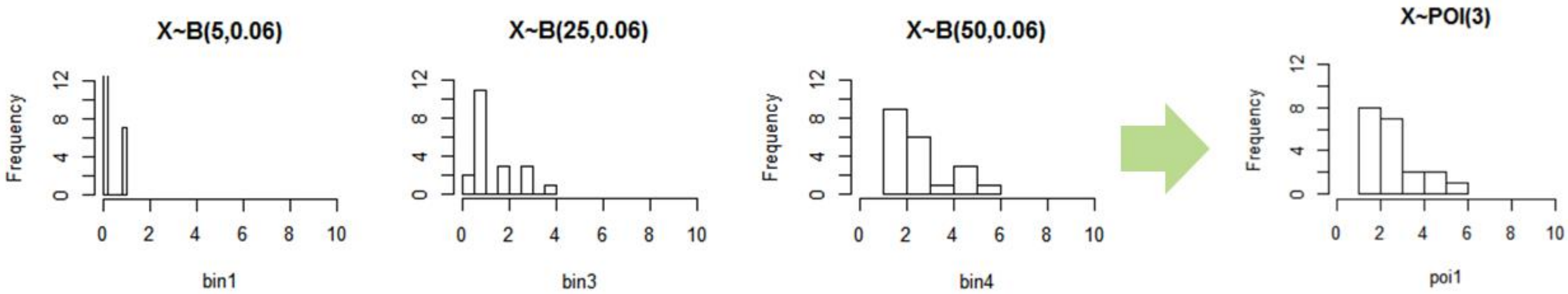
Binomial dengan usaha percobaan n dan nilai peluang 'sukses' p

$\boldsymbol{n \to \infty}$

$\boldsymbol{p \to 0}$

Poisson dengan

$\lambda = np$.



Histogram bangkitan data berukuran 20 yang mengikuti distribusi Binomial dengan p yang sangat kecil ($p = 0{,}06$). Untuk $n = 50$ (cukup besar), distribusi binomial mendekati Poisson dengan $\lambda = 0.06 * 50 = 3$

Distribusi Peluang Kontinu

MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar / MA2082 Biostatistika

Kelompok Keilmuan Statistika

Laboratorium Statistika dan Komputasi Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Distribusi Peluang Kontinu

Fungsi $f(x)$ disebut **fungsi kepadatan peluang** dari peubah acak kontinu X, yang didefinisikan ke himpunan semua bilangan riil jika memenuhi:

a. $f(x) \geq 0$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = 1$

c. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\ dx$

Fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak kontinu X :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Contoh D. P. Kontinu

- Distibusi Seragam
- Distribusi Normal
- Distribusi Eksponensial
- Distribusi Gamma
- Distribusi t-Student
- Distribusi Khi Kuadrat
- Distribusi Fisher

Akan dibahas selanjutnya

Distribusi Normal (1)

Distribusi normal adalah distribusi peluang kontinu yang paling penting dalam statistika. Kurva normal menggambarkan berbagai kumpulan data berdistribusi normal yang muncul di alam, industri, dan penelitian.

Jika $\boldsymbol{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$ dengan μ mean dan σ^2 variansi populasi, maka fungsi kepadatan peluangnya adalah sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

dengan $-\infty < x < \infty, \infty < \mu < \infty, \sigma^2 \geq 0$

$\mathrm{E}[X] = \mu$ dan $\mathrm{Var}[X] = \sigma^2$.

```
# DISTRIBUSI NORMAL
# X~N(mu,sigma2), mu:mean, sigma2:variansi, sd:st
andar deviasi
# x : nilai titik yang akan dihitung peluangnya

#Fungsi Distribusi Kumulatif P(X<=x)
Fx = pnorm(x,mu,sd)

#Fungsi Kepadatan Peluang P(X=x)
Px = dnorm(x,mu,sd)

#Fungsi Invers P(X<=x)=I
Qx = qnorm(I,mu,sd)

#Pembangkitan nilai acak
#s : banyaknya bilangan yang akan dibangkitkan
pa = rnorm(s,mu,sd)
```

Distribusi Normal (2)

Contoh 3 (Latihan no 5) : Pemuaian suatu batang baja bila diberi beban tertentu diketahui berdistribusi normal dengan rataan 0.05 cm dan simpangan baku 0.01. Tentukan peluang bahwa pemuaian

a. Lebih dari 0.1 cm
b. Antara 0.025 dan 0.065
c. Kurang dari 0.04

```
#contoh 3
# x : p.a. panjang pemuaian batang baja,
#       diketahui mu = 0.05 dan sd = 0.01

#a. P(X>0.1) = 1- P(X<=0.1)
1-pnorm(0.1,0.05,0.01)
2.866516e-07
#b. P(0.025<X<0.065)= P(X<=0.065)-P(X<=0.025)
pnorm(0.065,0.05,0.01)-pnorm(0.025,0.05,0.01)
0.9269831
#c. P(X<0.04)
pnorm(0.04,0.05,0.01)
0.1586553
```

Jawab :

Peubah acak X menyatakan . panjang pemuaian batang baja. Diketahui X berdistribusi Normal dengan $\mu = 0.05$ dan $\sigma = 0.01$. Maka :

a. Peluang pemuaian lebih dari 0.1 cm

$$P(X > 0.1) = 1 - P(X \leq 0.1)$$
$$= 2.866516 * 10^{-7}$$

b. Peluang pemuaian antara 0.025 dan 0.065

$$P(0.025 < X < 0.065)$$
$$= P(X \leq 0.065) - P(X \leq 0.025) = 0.9269831$$

c. Peluang pemuaian kurang dari 0.04

$$P(X < 0.04) = 0.1586553$$

Distribusi Eksponensial (1)

Distribusi Eksponensial mempunyai terapan yang luas, misalnya dalam teori antrian dan teori keandalan (reliabilitas). Jarak antara waktu tiba di fasilitas pelayanan dan lamanya waktu sampai rusaknya suku cadang dan alat listrik, sering menyangkut fungsi eksponensial. Distribusi eksponensial adalah hal khusus dari distribusi Gamma parameter $\alpha = 1$ dan λ.

Jika $\boldsymbol{X \sim Exp(\lambda)}$ dengan λ laju menghasilkan suatu kejadian, maka fungsi kepadatan peluangnya adalah sebagai berikut :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

dengan $x > 0,\ \lambda > 0$

$\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$ dan $\mathrm{Var}[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.

```
# DISTRIBUSI EKSPONENSIAL
# X~exp(rate), rate:laju menghasilkan suatu
    kejadian
# x : nilai titik yang akan dihitung peluangnya

#Fungsi Distribusi Kumulatif P(X<=x)
Fx = pexp(x,rate)

#Fungsi Kepadatan Peluang P(X=x)
Px = dexp(x, rate)

#Fungsi Invers P(X<=x)=I
Qx = qexp(I, rate)

#Pembangkitan nilai acak
#s : banyaknya bilangan yang akan dibangkitkan
pa = rexp(s, rate)
```

Distribusi Eksponensial (2)

Contoh 4 : Sebuah toko buku besar di Bali mempunyai rata-rata kedatangan pengunjung yang berdistribusi eksponensial sebesar 5,8 setiap 50 menit. Berapa peluang kedatangan pengunjung memiliki:

a. selang waktu 15 menit atau kurang
b. selang waktu diantara 20 sampai 30 menit

```
#contoh 4
# x : p.a. waktu kedatangan pengunjung,
#       diketahui rate = 5.8

#a. P(X<=15/50)=P(X<=0.3)
pexp(0.3,5.8)
0.8244796

#b. P(20/50<X<30/50)= P(X<=0.6)-P(X<=0.4)
pexp(0.6,5.8)-pexp(0.4,5.8)
0.06746617
```

Jawab :

Peubah acak X menyatakan waktu kedatangan pengunjung. Diketahui X berdistribusi eksponensial dengan $\lambda = 5.8$. Maka :

a. Peluang selang waktu 15 menit atau kurang

$$P\left(X \leq \frac{15}{50}\right) = P(X \leq 0.3) = 0.8244796$$

b. Peluang selang waktu diantara 20 sampai 30 menit

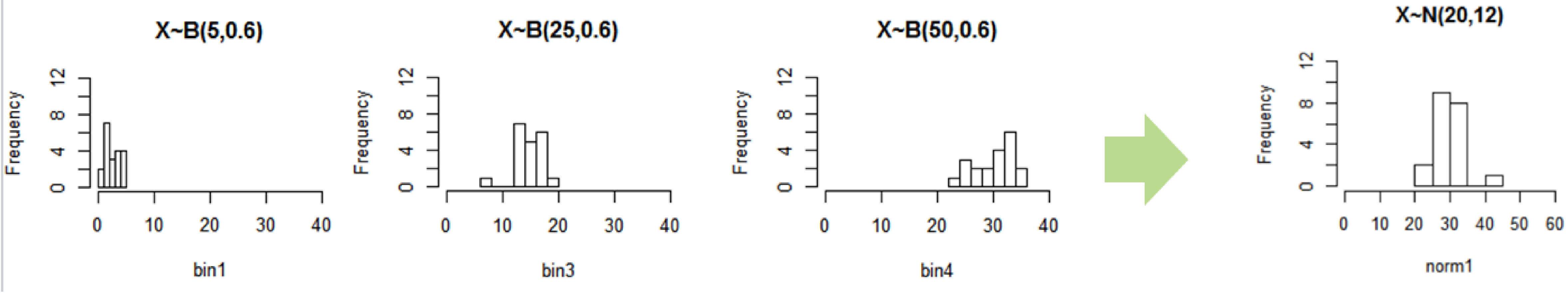
$$P\left(\frac{20}{50} < X < \frac{30}{50}\right) = P(X \leq 0.6) - P(X \leq 0.4)$$
$$= 0.06746617$$

Hampiran Distribusi Noral Terhadap Distribusi Binomial

Binomial dengan banyaknya pengamatan n dan nilai peluang 'sukses' p

$n \to \infty$

Berdistribusi normal dengan mean np dan variansi $np(1-p)$



Histogram bangkitan data berukuran 20 yang mengikuti distribusi Binomial dengan $p = 0{,}6$. Untuk $n = 50$ (cukup besar), distribusi binomial mendekati distribusi Normal dengan $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np(1-p)$

Tim Penyusun

Dr. Utriweni Mukhaiyar
Dosen KK Statistika
Kepala Laboratorium Statistika dan Komputasi Statistika

Fatia Amalia, S.Si
Asisten KK Statistika

Pengajar Semester I – 2020/2021

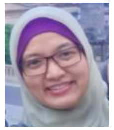
Dr. Udjianna S. Pasaribu
Dosen KK Statistika, MA2181 Analisis Data

Dr. Rr. Kurnia Novita Sari
Dosen KK Statistika, MA2181 Analisis Data

Dr. Sandy Vantika
Dosen KK Statistika,
MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar

Dr. Sapto Wahyu Indratno
Dosen KK Statistika, MA2082 Biostatistika

Yuli Sri Afrianti, S.Si., MT, MBA.
Dosen KK Statistika,
MA2181 Analisis Data / MA2081 Statistika Dasar



Dr. Utriweni Mukhaiyar
Dosen KK Statistika, MA2082 Biostatistika

Referensi

- Walpole, Ronald E., et.al. (2012): *Probability and Statistics for Engineers & Scientists*, *Ninth Edition*, USA: Pearson Education Inc.
- Kelompok Keahlian Statistika (2019): *Modul Praktikum Statistika Dasar, Edisi Semester I Tahun 2019/2020*, Bandung: Institut Teknologi Bandung.

Selamat Praktikum!