Métodos Numéricos e Computacionais MTM224

Lista 4: Método Ponto Fixo

1. Através de manipulação algébrica mostre que o ponto fixo x^* das funções $g(x)$ abaixo é solução da equação $f(x) = 0$, onde $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

   a. $g_1(x) = (3 + x - 2x^2)^{\frac{1}{4}}$.

   b. $g_2(x) = \sqrt{\frac{x+3-x^4}{2}}$.

   c. $g_3(x) = \left(\frac{x+3}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

   d. $g_4(x) = \frac{3x^4+2x^2+3}{4x^3+4x-1}$.

2. a. Utilize o método de ponto fixo para determinar a solução de $x^3 - x - 1 = 0$, com uma precisão de $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}$.(Obs.:i) Isole a solução em um intervalo de comprimento igual a 1.)

   b. Estime o número de iterações teóricas necessárias, a partir da expressão $|x_n - x^*| \leq k^n \max\{x_0 - a, b - x_0\}$, para atingir uma precisão de 10^{-2}. Compare o número de iterações teóricas com as obtidas no item anterior. (Obs.: k é a constante positiva limitante da derivada da função iteração do método.)

3. a. Verifique que a função recursiva $x_{n+1} = g(x_n)$, com $g(x) = 2^{-x}$ converge para um único ponto fixo no intervalo $[1/3, 1]$.

   b. Encontre o ponto fixo da $g(x)$ no intervalo $[1/3, 1]$ com uma precisão de $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$.

   c. Compare o número de iterações teóricas com o número de iterações do item (b.).

4. Para cada uma das seguintes equações, determine um intervalo no qual o método de ponto fixo convirja.Justifique sua resposta. Estime o

número de iterações teóricas necessárias para atingir uma aproximação de 10^{-5}.(Obs.: Verifique sua resposta com um graficador de funções!)

a.) $x = \left({}^{e^x}/{}_3\right)^{1/2}$, b.) $x = 5^{-x}$, c.) $x = \frac{5}{x^2} + 2$,

d.) $x = \cos(x)$.