Métodos Numéricos e Computacionais

Lista 11: Mínimos Quadrados: Funções ortogonais

1. Mostre que as funções: $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$, formam um conjunto ortogonal no intervalo $[-1, 1]$ com relação ao produto interno usal. Transforme esse conjunto para que seja ortogonal no intervalo $[0, 1]$.

2. O conjunto ortogonal $\{P_k\}_{k=0}^{3}$ do item anterior é ortogonoal no intervalo $[-1, 1]$. Transforme esse conjunto para que seja ortogonal no intervalo $[0, 1]$.

3. Considere a seguinte função

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + \frac{1}{3}\sin(2x).$$

   Use quadrados mínimos para aproximar a função por polinômios de até segundo grau no intervalo $[-1, 1]$.

4. O conjunto de funções $\{\phi_0(x) = 1, \phi_k(x) = \cos(kx), \varphi_k(x) = \sin(kx)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ é ortogonal no intervalo $[0, 2\pi]$ em relação ao produto interno usual. Transforme esse conjunto em um conjunto ortonormal para o intervalo $[0, L]$, onde $L > 0$.

5. O conjunto de funções trigonométricas $\{\phi_0(x) = 1, \phi_{2k-1}(x) = \cos(kx), \phi_{2k}(x) = \sin(kx)\}$, $k = 1, 2, \ldots$ são ortogonais no intervalo $[0, 2\pi]$. Transforme esse conjunto em um conjunto ortonormal para o intervalo $[0, L]$, onde $L > 0$.

6. A posição inicial de uma corda de violão de comprimento L é dada pela seguinte equação:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & , \quad x \in [0, \frac{L}{2}), \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}L & , \quad x \in [\frac{L}{2}, L]. \end{cases}$$

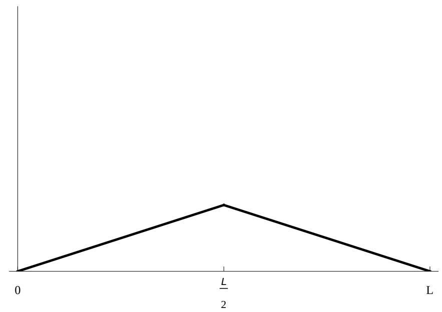

Figura 1: $f(x)$.

Use funções trigonométricas ortonormais no intervalo $[0, L]$ e encontre a série de Fourier da $f(x)$. Faça gráficos da função $f(x)$ e das somas parciais da série de Fourier para $n = 5, 10, 15, 20$ (Sugestão: use um software para graficar como Mathematica ou MatLab.) (Observação: a função $f(x)$ é simétrica em relação a linha vertical que passa por $x = \frac{L}{2}$).