

Métodos Numéricos e Computacionais

Lista 13: Sistemas de Equações Lineares

1. Considere o sistema de equações lineares dado por:

$$\begin{array}{rcccccccl} 4x_1 & + & x_2 & + & & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & & x_4 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & & 3x_4 & = & 2 \end{array} \quad (1)$$

- (a) Escreva o sistema linear (1) de forma matricial $Ax = b$.
- (b) Resolva o sistema linear utilizando o método de Eliminação Gaussiana.
- (c) Verifique a solução multiplicando a matriz de coeficientes A com o vetor solução x .
2. Considere o sistema linear dado no problema (1).
- (a) Verifique que a matriz A é diagonalmente dominante.
- (b) Considere a aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0, 0)^T \Rightarrow x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 0; x_4^{(0)} = 0$.
- Faça as primeiras 4 iterações do Método de Jacobi.
 - Faça as primeiras 4 iterações do Método de Gauss-Seidel
- (c) Calcule o erro da aproximação, isto é $E = \max |x_j^{(k)} - \bar{x}_j|$, $j = 1, 2, 3, 4$, para cada método. Utilze a solução obtida no problema anterior como a solução exata \bar{x} .
- (d) Compare e conclua sobre a taxa de convergência dos Métodos de Jacobi e Gauss-Seidel.
- (3) Os fatores L e U de uma matriz A estão dados por,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

- (a) Obtenha a matriz de coeficientes A .
- (b) Resolva o sistema linear $Ax = b$ por fatoração LU , onde o vetor b é dado por

$$b = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ \frac{45}{4} \\ \frac{165}{4} \\ 25 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

- (c) Verifique sua resposta fazendo a multiplicação Ax .

3. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 6 & -9 & 3 & 2 \\ -4 & 8 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -8 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

- a.) Faça a Fatoração $LU = A$ ou $LU = PA$ (qual for o caso). No caso de $LU = PA$, qual é a matriz P .
- b.) Resolva o sistema linear $Ax = b$, onde o vetor b é dado por $b = [0, -3, -4, -6]$
- c.) Verifique a se a solução do item anterior satisfaz $Ax = b$.

4. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Pode-se usar o método de Jacobi para resolver o sistema linear? (Sugestão: Aplique o teorema sobre a convergência dos métodos iterativos).