

# **Praktikum Automatisierungstechnik**

## **Wintersemester 2016/2017**

Protokoll zum

### **Versuch 1: Inverses Pendel**

der Gruppe 5

Xiaoyu	Xie
Shaochen	Qian
Jun	Lou

Tag der Versuchsdurchführung: 22 November 2016  
29 November 2016

Hiermit versichern wir, dass wir dieses Protokoll selbstständig angefertigt haben.  
Karlsruhe,

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung und Versuchsaufbau .....</b>	<b>1</b>
<b>2 Theoretische Grundlage .....</b>	<b>2</b>
2.1 Lagrange-Formalismus .....	2
2.2 Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme .....	2
2.3 Aufschwingregelung .....	3
2.4 LQR .....	3
<b>3 Aufgaben .....</b>	<b>4</b>
Aufgabe 1 .....	4
Aufgabe 2 .....	7
Aufgabe 3 .....	19
Aufgabe 4 .....	21
Aufgabe 5 .....	26
Aufgabe 6 .....	26
Aufgabe 7 .....	32
<b>4 Auftretende Probleme und Diskussion .....</b>	<b>32</b>
<b>5 Literatur .....</b>	<b>34</b>

# 1. Einleitung und Versuchsaufbau

Das inverse Pendel auf einem Schlitten (inverted pendulum on a cart, IPC) dient als Benchmarksystem zum Test neuer regelungstechnischer Methoden. Das IPC ist ein typisches Beispiel für ein nichtlineares System, das unteraktuiert (weniger Antriebs Elemente als Freiheitsgrade hat) ist und stellt ein gutes Beispiel für eine nichtlineare Strecke mit instabiler Ruhelage dar.

Die Verfahren des Versuchs besteht aus insgesamt 4 Schritten.

1. Modellierung des IPCs; 2. Entwurf eines Beobachter für die nicht messbaren Zustände;
3. komplette Synthese für eine Aufschwingregelung; 4. Synthese für einen stabilisierenden Regler.

Der Versuchsaufbau setzt sich aus dem realen IPC einschließlich des Linearmotors, dem Antriebsverstärker, dem PXI-Echtzeitsystem und einem PC zur Programmierung und Visualisierung zusammen.

Bei der Schiene und dem Schlitten handelt es sich um ein Linearachsenmodul FTH35B, welches aus einem Synchron-Linearmotor mit einem inkrementellen Wegmesssystem. Ein austauschbares Modul mit dem Pendel ist auf dem Schlitten befestigt. Die Leistung für den Motor stellt ein Servoverstärker S706. Auf beiden Enden der Linearmotorachse befinden sich Endschalter, die als Referenzpunkte für das inkrementelle Wegmesssystem, das lediglich eine relative Position liefern kann, dient.

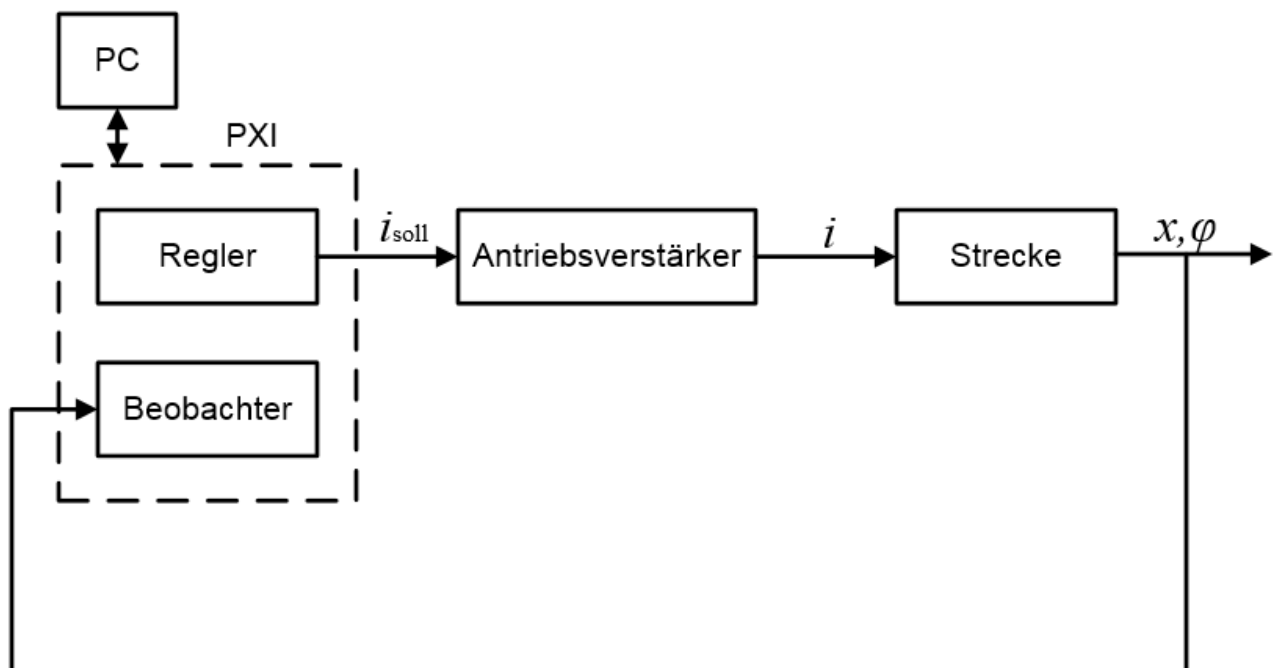


Abbildung 1.1 Schaubild des Gesamtaufbau

## 2. Theoretische Grundlagen

### 2.1 Lagrange-Formalismus

Die analytische Methode nach Lagrange ist ein verbreitetes Verfahren zur Gewinnung der Bewegungsgleichung eines Systems. Dieses Verfahren basiert auf der Erhaltung der Energie eines Systems. Hierbei wird das System mit generalisierten Koordinaten  $q_i$  beschrieben. Die allgemeine Gleichung geht von der Fähigkeit eines Systems aus, Energie zu speichern:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.1)$$

Für ein mechanisches System sind

$$L = T - V \quad (2.2)$$

$$Q_i = f_{qi} - f_{di} \quad (2.3)$$

definiert. Hierbei  $T$  die kinetische Co-Energie,  $V$  die potentielle Energie,  $f_{qi}$  die Quellflüsse und  $f_{di}$  die dissipativen Flüsse. Der Formalismus besteht aus vier Schritten. Setzen wir diese in (2.1), um die Bewegungsgleichung zu erhalten.

### 2.2 Zustandsbeobachter für nichtlineare Systeme

#### Nicht linearer Luenberger-Beobachter

Erweitern wir jetzt den Luenberger-Beobachter. Der Gedanke ist einen nichtlinearen Beobachter mittels Linearisierung zu entwerfen. Es wird ein allgemeine System

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = c(x)$$

mit  $p$  Eingangs- und  $q$  Ausgangsgrößen betrachtet. Hierbei werden zunächst, analog zum linearen Fall, die Beobachtergleichungen folgendermaßen angesetzt:

$$\dot{\hat{x}} = \underline{F}(\hat{x}, u) + \underline{L}(\hat{x}, u) \cdot (y - \hat{y})$$

$$\hat{y} = \underline{c}(\hat{x})$$

Hierbei bezeichnet  $\hat{x}$  den Schätzwert von  $x$ . Im Gegensatz zum linearen Fall kann die Korrekturmatrix  $\underline{L}$  von dem Schätzwert und der Eingangsgröße abhängig sein. Dabei wird  $\underline{L}$  so gewählt, dass der Schätzfehler für  $t \rightarrow \infty$  gegen null geht. Die Schätzfehlerdifferentialgleichung ist hierbei als

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} \\ &= \underline{F}(x, u) - \underline{F}(\hat{x}, u) - \underline{L}(\hat{x}, u) \cdot (y - \hat{y}) \end{aligned}$$

definiert. Um nun auch im nichtlinearen Fall auf einfache Weise eine Aussage über die Schätzfehlerdynamik treffen zu können, werden  $\underline{F}$  und  $\underline{c}$  um den Schätzwert  $\hat{x}$  mit Hilfe der Taylorreihe linearisiert. Damit erreicht man eine homogene Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \left( \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{x}, u) - \underline{L}(\hat{x}, u) \cdot \frac{\partial c}{\partial x}(\hat{x}) \right) \tilde{x} \\ &= \underline{\hat{F}}(\hat{x}, u) \tilde{x}\end{aligned}$$

Nun kann, wie im linearen Fall eine Eigenwertvorgabe der Korrekturmatrix  $\underline{L}$  mit Hilfe von

$$\det(sI_n - \underline{\hat{F}}(\hat{x}, u)) = \prod (s - p_i)$$

durchgeführt werden.

## 2.3 Aufschwingregelung

Da die meisten Regler für eine Stabilisierung des inversen Pendels erst ab einem bestimmten Einzugsbereich gültig sind, muss das inverse Pendel mittels einer Aufschwingregelung erst aus seiner unteren Ruhelage in die Nähe der oberen Ruhelage gebracht werden. Eine Möglichkeit eine Aufschwingregelung zu entwerfen ist in [1] gegeben. Der Grundgedanke dabei ist, dem Pendel genug Energie zuzufügen, damit es in die aufrechte Position gebracht wird. In [1] werden weiterhin die Beschränkungen der Schiene und der maximalen Geschwindigkeit betrachtet. Dazu wird nach der Idee des Potentialstopfs (potential well) eine Funktion konstruiert, welche den Schlitten innerhalb der Grenzen hält.

## 2.4 LQR

Nachdem das Pendel mithilfe der Aufschwingregelung in die Nähe der oberen Ruhelage gebracht wurde, wird nun ein Regler benötigt, der das Pendel in der Ruhelage stabilisiert. Ein Regler, der diese Aufgabe bewerkstelligen kann, ist der linear-quadratische Regler (LQR), auch Riccati-Regler genannt.

Dieser Regler ist ein Zustandregler, dessen Rückführungsmatrix über die Minimierung der quadratischen Kostenfunktion

$$J = \frac{1}{2} \int (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{S} \underline{u}) dt$$

ermittelt wird.  $\underline{Q}$  und  $\underline{S}$  sind sogenannte Gewichtungsmatrizen, um die Zustandsgrößen und die Stellgrößen zu gewichten.

Die Aufgabe, eine Stellgröße  $\underline{u}(t)$  zu finden, die das Gütemaß aus Gleichung (4.12) mit der Bedingung

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t)$$

minimiert, löst das Regelgesetz:

$$\underline{u}(t) = \underline{K}\underline{x}(t)$$

mit

$$\underline{K} = -\underline{S}^{-1} \underline{B} \underline{P} \underline{x}(t)$$

Hier ist  $\underline{P}$  die numerische Lösung der algebraischen Riccati Gleichung

$$PB S^{-1} B^T P - PA - A^T P - Q = 0$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe eines Transformationsansatzes gelöst werden. Da  $\underline{K}$  aber mithilfe von *LabVIEW* 2014 berechnet werden. Muss in diesem Fall  $\underline{P}$  nicht explizit ausgerechnet werden.

### 3. Aufgaben

#### Aufgabe 1

(a) Modellieren Sie das IPC mit Hilfe des Lagrange-Formalismus

1. unter Vernachlässigung des Trägheitsmoments des Pendelstabs;
2. unter Berücksichtigung des Trägheitsmoments des Pendelstabs;

(b) Implementieren Sie die beiden Modelle des IPCs in MATLAB/SIMULINK.

(c) Vergleichen Sie beide Modelle und wählen Sie hierzu geeignete Eingangssignale.

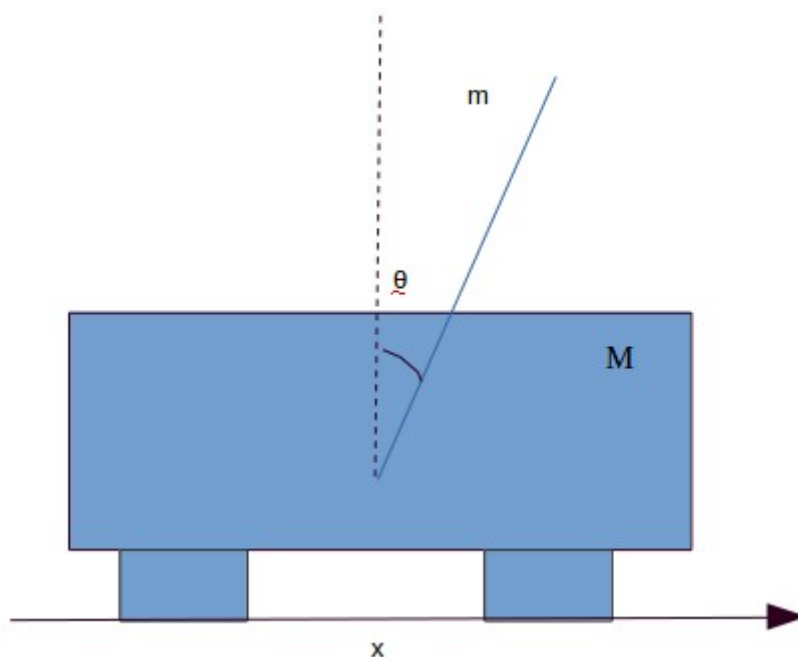


Abbildung 3.1 Modell des Inversen Pendels

	Variablenname	Größe
Mass des Schlittens	$M$	18.2 kg
Mass des Stabes	$m$	0.3 kg
Länge des Stabes	$2l$	0.6 m
Trägheitsmoment des Stabes bei Drehung um die	$J_p$	$0.036 \text{ kg m}^2$

zweizählige Symmetrieachse		
----------------------------	--	--

Tabelle 3.1 Parametern des Inversen Pendels

**Antwort:**

(a) Verallgemeinerte Koordinaten:  $q_1 = x, q_2 = \theta$

Koordinaten des Massenpunkt des Stabes:  $x_p = x + l \sin \theta$  ,  $y_p = l \cos \theta$

Koodinate des Schlittens:  $x$

Geschwindigkeit des Massenpunkt des Stabes:  $\dot{x}_p = \dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta$  ,  $\dot{y}_p = -l \dot{\theta} \sin \theta$

Geschwindigkeit des Schlittens:  $\dot{x}$

Kinetische Energie des gesamten Systems:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] \text{ ohne Trägheitsmoment}$$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 \text{ mit Trägheitsmoment}$$

Potentielle Energie des gesamten Systems:

$$V = mgl \cos \theta$$

Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left[ (\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta)^2 + (l \dot{\theta} \sin \theta)^2 \right] + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 - mgl \cos \theta$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = F \quad (x \text{ Richtung})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \quad (\theta \text{ Richtung})$$

Durch Auslösen der Gleichungen erhalten wir die Bewegungsgleichung des Systems:

ohne Trägheitsmoment  $\ddot{x} = \frac{m \dot{\theta}^2 l^2 \sin \theta - mgl \sin \theta \cos \theta + Fl}{(m+M)l - ml \cos^2 \theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{g \sin \theta - \ddot{x} \cos \theta}{l}$$

mit Trägheitsmoment  $\ddot{x} = \frac{J_p m \dot{\theta}^2 l \sin \theta - m^2 gl^2 \sin \theta \cos \theta + FJ_p}{(m+M)J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{(m+M) m g l \sin \theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta - m l \cos \theta F}{(m+M) J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta}$$

(b) das System wird wie in Abbildung 3.1 im SIMULINK aufgebaut.

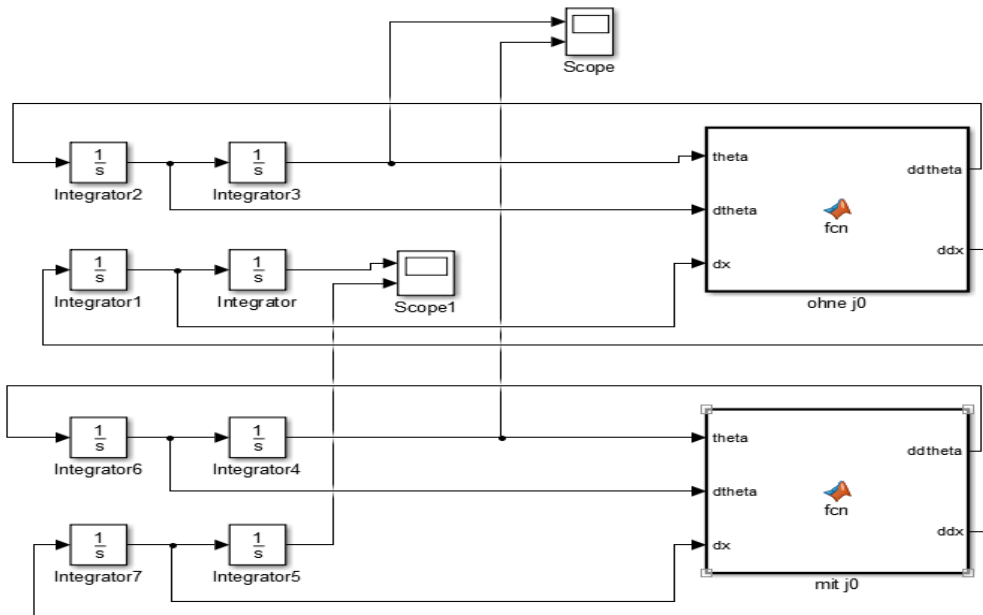


Abbildung 3.2 Diagram des Systems

In den Matlab-function Blocken **ohne j0** und **mit j0** stehen die Bewegungsgleichungen.

Zum Simulieren haben wir  $x$  mit dem Anfangswert 0,  $\theta$  mit dem Anfangswert 1 gesetzt und  $F$  als 0 gesetzt.

Ergebnis: **gelbe (ohne Trägheitsmoment) blau (mit Trägheitsmoment)**

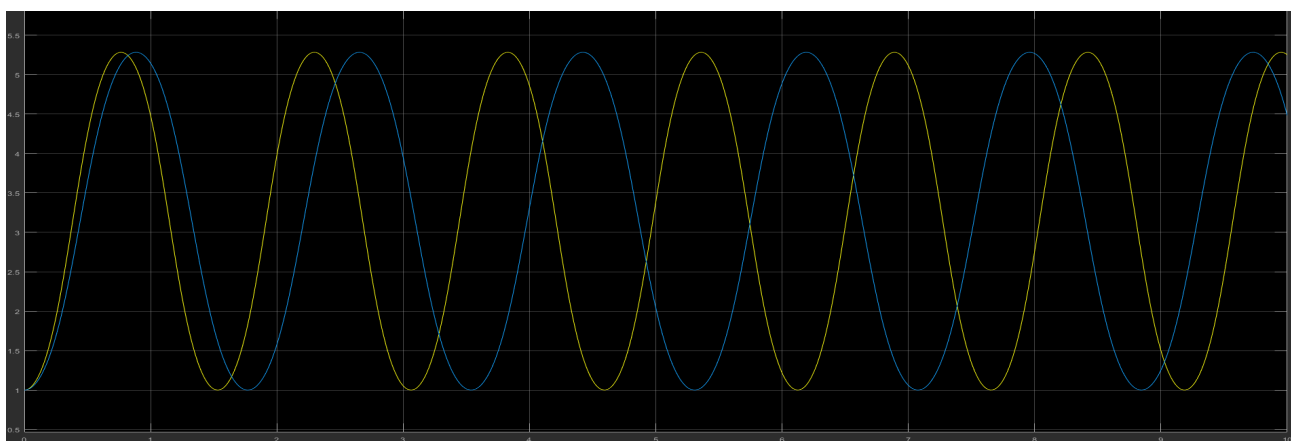


Abbildung 3.3 Kurven des  $\theta$  von beiden Fällen



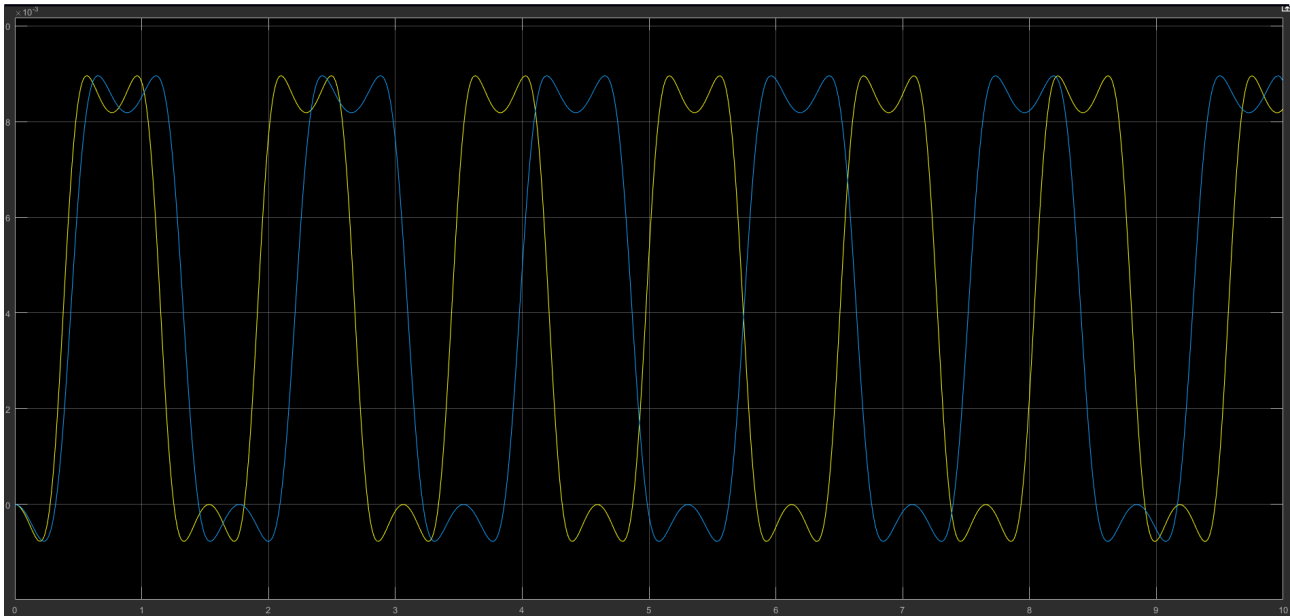


Abbildung 3.4 Kurven des  $x$  von beiden Fällen

(3) Aus der zwei Bildungen können wir festlegen, dass die Frequenz des Zyklus größer ist, wenn das Trägheitsmoment vernachlässigt ist.

## Aufgabe 2: Schätzung

(a) Berechnen Sie den im Grundlagenkapitel vorgestellten Beobachter für das IPC mit Hilfe von MATHEMATICA. Achten Sie hierbei darauf, dass Sie für alle  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\varphi$  und  $\dot{\varphi}$  nicht durch Null teilen.

(b) Implementieren und simulieren Sie den Beobachter in MATLAB/SIMULINK mit verschiedenen Polplatzierungen und wählen Sie geeignete Eingangssignale. Testen Sie den Beobachter mit verrauschten Messgrößen.

(c) Vergleichen Sie die verschiedenen parametrisierten Beobachter und wählen Sie den besten aus.

### Antwort:

(a) Das Modell des IPCs unter Berücksichtigung des Trägheitsmoments des Pendelstabs:

$$\ddot{x} = \frac{J_p m \dot{\theta}^2 l \sin\theta - m^2 g l^2 \sin\theta \cos\theta}{(m+M)J_p - m^2 l^2 \cos^2\theta} + \frac{J_p}{(m+M)J_p - m^2 l^2 \cos^2\theta} F$$

$$\ddot{\theta} = \frac{(m+M) m g l \sin\theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos\theta \sin\theta}{(m+M)J_p - m^2 l^2 \cos^2\theta} + \frac{-m l \cos\theta}{(m+M)J_p - m^2 l^2 \cos^2\theta} F$$

Hierbei werden die obigen Zustandsgleichungen in der folgenden Form geschrieben:

$$\ddot{x} = f_2 + g_2 u$$

$$\ddot{\theta} = f_4 + g_4 u$$

mit

$$u = F$$

$$f_2 = \frac{J_p m \dot{\theta}^2 l \sin \theta - m^2 g l^2 \sin \theta \cos \theta}{(m+M) J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta} ,$$

$$g_2 = \frac{J_p}{(m+M) J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta} ,$$

$$f_4 = \frac{(m+M) m g l \sin \theta - m^2 l^2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \sin \theta}{(m+M) J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta} ,$$

$$g_4 = \frac{-m l \cos \theta}{(m+M) J_p - m^2 l^2 \cos^2 \theta} .$$

Die Zustandsvariablen sind die Position des Schlittens  $x_1 = x$ , die Geschwindigkeit  $x_2 = \dot{x}$ , der Winkel des Pendelstabes  $x_3 = \theta$  und die Winkelgeschwindigkeit des Pendelstabes  $x_4 = \dot{\theta}$ . Die Ausgangsvariablen sind die Position des Schlittens  $y_1 = x$  und der Winkel des Pendelstabes  $y_2 = \theta$ . Im Bezug der obigen Definitionen und Ersetzungen, werden die Zustandsgleichungen und die Ausgangsgleichungen des Systems folgendermaßen angesetzt:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_2 + g_2 u \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_4 + g_4 u\end{aligned}$$

Aus der üblichen Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{c}(\mathbf{x})\end{aligned}$$

folgt dann:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u) = \begin{bmatrix} x_2 \\ f_2 + g_2 u \\ x_4 \\ f_4 + g_4 u \end{bmatrix} , \quad \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} .$$

Hierbei werden die Gleichungen des Luenberger-Beobachters folgendermaßen angesetzt:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}}, u) \cdot (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}}) .\end{aligned}$$

Dabei kann man die Fehlerdifferentialgleichung erhalten:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{x}}, u) \tilde{\mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{L}(\hat{\mathbf{x}}, u) \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}) \right) \tilde{\mathbf{x}} ,$$

wobei  $\mathbf{L} = \mathbf{c}(\hat{\mathbf{x}})$  so zu bestimmen ist, dass  $\hat{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{x}}, u)$  eine konstante Matrix wird, dann

strebt der Schätzfehler für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null. Hierbei lassen sich die Elemente von  $\underline{L}$  mit Hilfe der Eigenwertvorgabe bestimmen, die zu der Gleichung

$$\det(s \underline{I}_n - \hat{\underline{E}}(\hat{x}, u)) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) \quad \text{führt. Um diese Gleichung aufzulösen, lässt sich zunächst}$$

das Polynom der Determinante berechnen.

Zuerst werden  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}, \underline{L}$  in MATHEMATICA mit Name F, cx und L definiert, wobei sind  $lij$  ( $i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2$ ) die unbekannten Elemente von  $\underline{L}$ . Hier steht der entsprechende Screenshot:

```
F =
  0 1 0 0
  0 0 f23 f24
  0 0 0 1
  0 0 f43 f44

{{0, 1, 0, 0}, {0, 0, f23, f24}, {0, 0, 0, 1}, {0, 0, f43, f44}}

cx =
  1 0 0 0
  0 0 1 0

{{1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}}

L =
  l11 l12
  l21 l22
  l31 l32
  l41 l42

{{l11, l12}, {l21, l22}, {l31, l32}, {l41, l42}}
```

Dann rechnet man  $\hat{\underline{E}}(\hat{x}, u) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u) - \underline{L}(\hat{x}, u) \cdot \frac{\partial c}{\partial x}(\hat{x})$  und die Determinante von  $\hat{\underline{E}}$  aus:

```
Fdach = (F - L.cx)

{{-l11, 1, -l12, 0}, {-l21, 0, f23 - l22, f24}, {-l31, 0, -l32, 1}, {-l41, 0, f43 - l42, f44}}

Fdelta = Det[s *
  1 0 0 0
  0 1 0 0
  0 0 1 0
  0 0 0 1
- Fdach]

-f43 l21 + f24 f43 l31 - f23 f44 l31 + f44 l22 l31 - f44 l21 l32 + f23 l41 - l22 l41 +
f24 l32 l41 + l21 l42 - f24 l31 l42 - f43 l11 s - f44 l21 s + f23 l31 s + f44 l12 l31 s -
l22 l31 s - f44 l11 l32 s + l21 l32 s + f24 l41 s - l12 l41 s + l11 l42 s - f43 s^2 -
f44 l11 s^2 + l21 s^2 - l12 l31 s^2 - f44 l32 s^2 + l11 l32 s^2 + l42 s^2 - f44 s^3 + l11 s^3 + l32 s^3 + s^4
```

Mit Hilfe des Commands Coefficient L erhält man die Koeffizienten des Polynoms der Determinante. Diese Koeffizienten werden hierbei als s0, s1, s2, s3, s4 definiert:

```
{s0, s1, s2, s3, s4} = Simplify[CoefficientList[Fdelta, s]]

{-f43 l21 + f24 f43 l31 - f23 f44 l31 - f44 l21 l32 + f23 l41 + f24 l32 l41 + l21 l42 - f24 l31 l42,
-f43 l11 + f23 l31 + l21 l32 - f44 (l21 + l11 l32) + f24 l41 + l11 l42,
-f43 + l21 + l11 l32 - f44 (l11 + l32) + l42, -f44 + l11 + l32, 1}
```

Danach wird das charakteristische Polynom zu  $\hat{\underline{E}}$  mit Nullstellen -p gebildet, welche die

Eigenwerte von  $\hat{F}$  sind. Die entsprechenden Koeffizienten werden als s10, s11, s12, s13, s14 definiert:

```
pole = Expand[(s + p) ^ 4]
p^4 + 4 p^3 s + 6 p^2 s^2 + 4 p s^3 + s^4

{s10, s11, s12, s13, s14} = Simplify[CoefficientList[pole, s]]
{p^4, 4 p^3, 6 p^2, 4 p, 1}
```

Weil f23, f24, f43, f44 bekannt sind und -p eine feste Zahl erteilt wird, können die Elemente von  $\underline{L}$  durch Koeffizientenvergleich

$$s_0 = s_{10}, s_1 = s_{11}, s_2 = s_{12}, s_3 = s_{13}, s_4 = s_{14}$$

bestimmt werden. s4 und s14 sind gleich 1, demgemäß fängt man von der Gleichung s3 = s13 an. Weil es 8 unbekannte Variablen  $l_{ij}$  aber nur 4 Gleichungen gibt, werden hier l12 und l22 auf Null gesetzt:

```
l12 = 0
l22 = 0

L11sollwert = l11 /. Solve[s3 == s13, l11]
{f44 - 132 + 4 p}

l11 = L11sollwert
{f44 - 132 + 4 p}

l32 = f44 + 2 p
f44 + 2 p
```

Hier ist l32 einfach auf f44 + 2p gesetzt.

Dann folgt s2 = s12.

```
s2vereinfacht = Simplify[s2]
{-f43 - f44^2 + 121 + 142 - 2 f44 p + 4 p^2}

L42sollwert = l42 /. NSolve[s2 == s12, l42]
{1. f43 - 121 + 6. p^2 - 2. p (f44 + 2. p) + 1. f44 (f44 + 4. p)}

l42 = f43 - 121 + 6 p^2 - 2 p (f44 + 2 p) + f44 (f44 + 4 p)
f43 - 121 + 6 p^2 - 2 p (f44 + 2 p) + f44 (f44 + 4 p)
```

Danach wird s1=s11 aufgelöst. Dabei ist l41 auf f23 gesetzt.

```

s1vereinfacht = Simplify[s1]
{f23 131 + f24 141 + 4 p^3}

L31sollwert = 131 /. NSolve[s1vereinfacht == s11, 131]

{- (f24 141 / f23)}
141 = f23

{- (f24 141 / f23)}

f23

131 = L31sollwert
{- f24}

```

Zuletzt wird der Koeffizientenvergleich  $s_0 = s_{10}$  durchgeführt.

```

s0vereinfacht = Simplify[s0]
{f23^2 + 2 f23 f24 (f44 + p) - 121 (121 - 2 p^2) + f24^2 (f44^2 - 121 + 2 f44 p + 2 p^2)}

{f23^2 + 2 f23 f24 (f44 + p) - 121 (121 - 2 p^2) + f24^2 (f44^2 - 121 + 2 f44 p + 2 p^2)}

L21sollwert = 121 /. NSolve[s0vereinfacht == s10, 121]

{0.5 (-1. f24^2 + 2. p^2 -
  1. Sqrt[4. f23^2 + 1. f24^4 + 8. f23 f24 f44 + 4. f24^2 f44^2 + 8. f23 f24 p + 8. f24^2 f44 p + 4. f24^2 p^2]),
  0.5 (-1. f24^2 + 2. p^2 +
  1. Sqrt[4. f23^2 + 1. f24^4 + 8. f23 f24 f44 + 4. f24^2 f44^2 + 8. f23 f24 p + 8. f24^2 f44 p + 4. f24^2 p^2])}

121 =
Simplify[
  0.5
  (-f24^2 + 2 p^2 + 1 Sqrt[4 f23^2 + f24^4 + 8 f23 f24 f44 + 4 f24^2 f44^2 + 8 f23 f24 p + 8 f24^2 f44 p + 4 f24^2 p^2])
  0.5 (-f24^2 + 2 p^2 + Sqrt[4 f23^2 + 8 f23 f24 (f44 + p) + f24^2 (f24^2 + 4 (f44 + p)^2])

```

Nach der obigen Berechnung erhält man das folgende endgültige Ergebnis der Matrix  $\underline{L}$  mit bekannten f23, f24, f43, f44:

111

{2 p}

112

0

121

$$0.5 \left( -f_{24}^2 + 2 p^2 + \sqrt{4 f_{23}^2 + 8 f_{23} f_{24} (f_{44} + p) + f_{24}^2 (f_{24}^2 + 4 (f_{44} + p)^2)} \right)$$

122

0

131

{-f24}

132

f44 + 2 p

141

f23

142

$$f_{43} + 6 p^2 - 2 p (f_{44} + 2 p) + f_{44} (f_{44} + 4 p) - \\ 0.5 \left( -f_{24}^2 + 2 p^2 + \sqrt{4 f_{23}^2 + 8 f_{23} f_{24} (f_{44} + p) + f_{24}^2 (f_{24}^2 + 4 (f_{44} + p)^2)} \right)$$

$$f_2 = (J * m * l * x_4^2 * \sin[x_3]) / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) - \\ (m^2 * l^2 * g * \cos[x_3] * \sin[x_3]) / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) + \\ J / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) * u$$

$$\frac{J u}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2} + \frac{J l m x_4^2 \sin[x_3]}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2} - \frac{g l^2 m^2 \cos[x_3] \sin[x_3]}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2}$$

$$f_4 = ((M + m) * m * g * l * \sin[x_3]) / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) - \\ (m^2 * l^2 * x_4^2 \cos[x_3] * \sin[x_3]) / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) - \\ (m * l * \cos[x_3]) / ((M + m) * J - m^2 * l^2 \cos[x_3]^2) * u$$

$$- \frac{l m u \cos[x_3]}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2} + \frac{g l m (m + M) \sin[x_3]}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2} - \frac{l^2 m^2 x_4^2 \cos[x_3] \sin[x_3]}{J (m + M) - l^2 m^2 \cos[x_3]^2}$$

```

f23 = Simplify[D[f2, x3]]

(1 m
  (J (-5 l^2 m^2 + 4 J (m + M)) x4^2 Cos[x3] +
    1 m (2 g l^2 m^2 - 2 g (-l^2 m^2 + 2 J (m + M)) Cos[2 x3] + J l m x4^2 Cos[3 x3] - 4 J u Sin[2 x3])))) /
  (l^2 m^2 - 2 J (m + M) + l^2 m^2 Cos[2 x3])^2
f24 = Simplify[D[f2, x4]]

(1 m (J (-5 l^2 m^2 + 4 J (m + M)) x4^2 Cos[x3] +
  1 m (2 g l^2 m^2 - 2 g (-l^2 m^2 + 2 J (m + M)) Cos[2 x3] + J l m x4^2 Cos[3 x3] - 4 J u Sin[2 x3])))) /
  (l^2 m^2 - 2 J (m + M) + l^2 m^2 Cos[2 x3])^2

  2 J l m x4 Sin[x3]
J (m + M) - l^2 m^2 Cos[x3]^2

f43 = Simplify[D[f4, x3]]

(1 m (2 l^3 m^3 x4^2 + g (m + M) (-5 l^2 m^2 + 4 J (m + M)) Cos[x3] + 2 l m (l^2 m^2 - 2 J (m + M)) x4^2 Cos[2 x3] +
  g l^2 m^3 Cos[3 x3] + g l^2 m^2 M Cos[3 x3] + 4 J m u Sin[x3] + l^2 m^2 u Sin[x3] +
  4 J M u Sin[x3] + l^2 m^2 u Sin[3 x3])) / (l^2 m^2 - 2 J (m + M) + l^2 m^2 Cos[2 x3])^2

f23 = Simplify[D[f2, x3]]

(1 m (J (-5 l^2 m^2 + 4 J (m + M)) x4^2 Cos[x3] +
  1 m (2 g l^2 m^2 - 2 g (-l^2 m^2 + 2 J (m + M)) Cos[2 x3] + J l m x4^2 Cos[3 x3] - 4 J u Sin[2 x3])))) /
  (l^2 m^2 - 2 J (m + M) + l^2 m^2 Cos[2 x3])^2

```

$$f_{44} = \frac{-2l^2 m^2 x 4 \cos(x 3) \sin(x 3)}{J(m+M) - l^2 m^2 \cos^2(x 3)}$$

(b) Die fehlenden Blöcke in MATLAB/SIMULINK werden den oben berechneten Ergebnisse gemäß ergänzt.

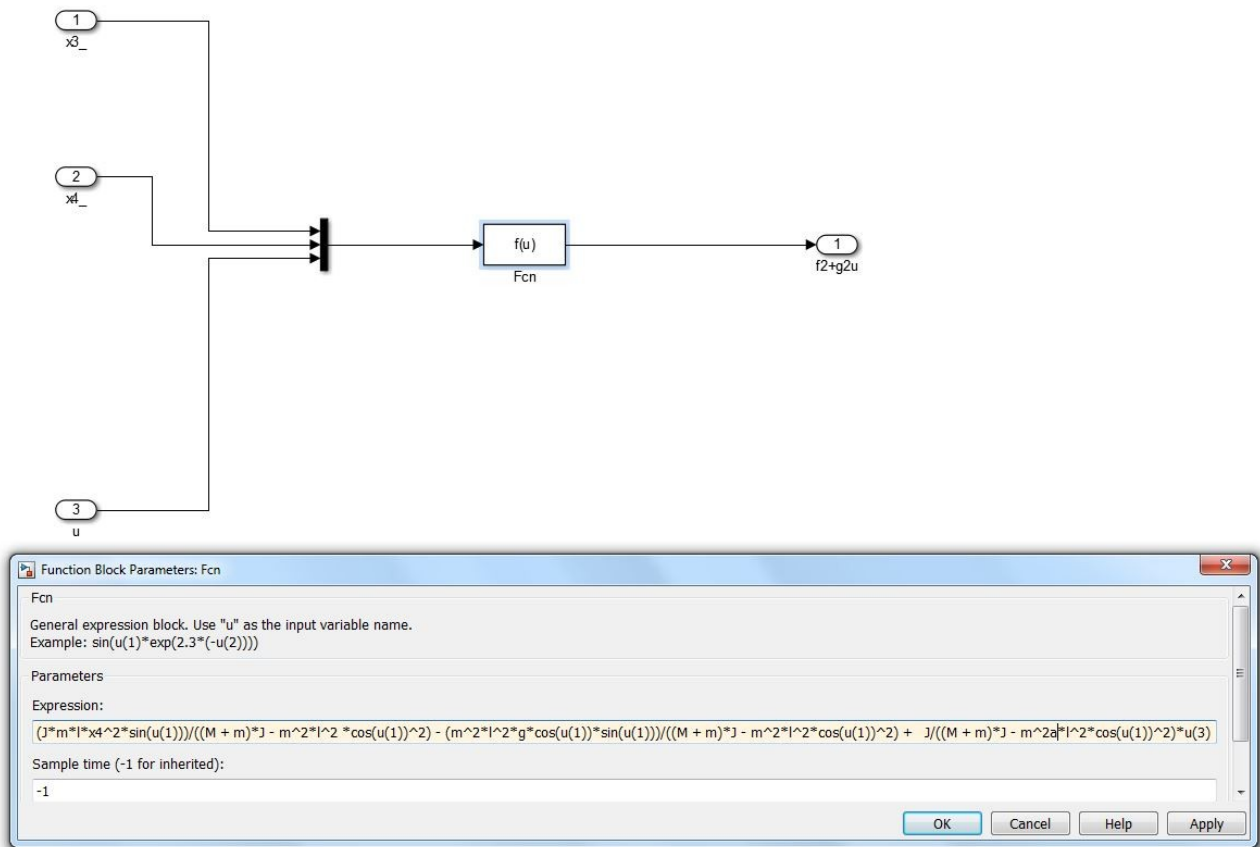


Abbildung 3.5 Ergänzung der Ableitung von x2

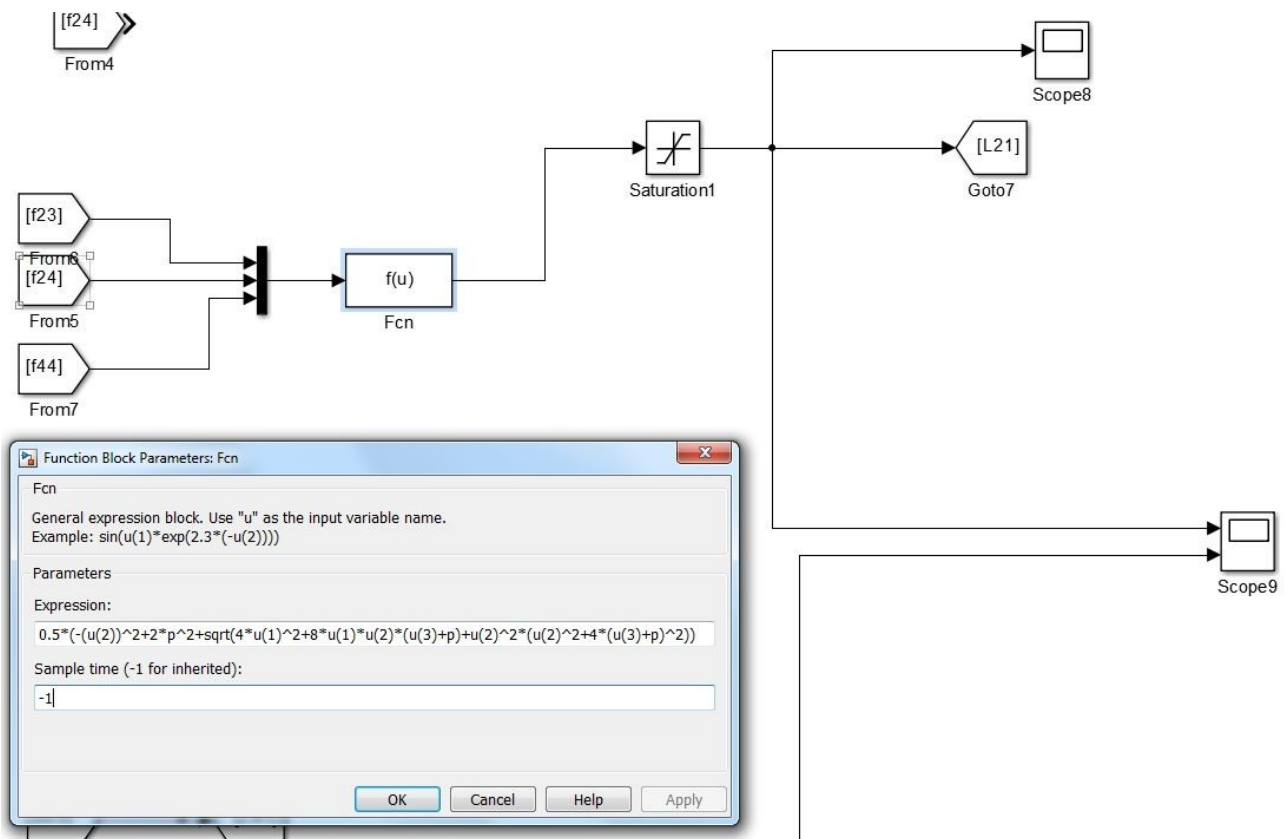


Abbildung 3.6 Ergänzung von l23

Hier lässt man das Eingangssignal gleich Null sein. Stattdessen man dem Schlitten eine



Kraft gibt, wird ein Anfangszustand vorgegeben, nämlich  $x_1=0,7; x_2=0; x_3=0,7; x_4=0$  . Die alle anderen Parameter des Pendels werden direkt in Matlab gegeben.

Zuerst wird das Modell ohne Rauschen mit  $p = 1$  simuliert. Die vier folgenden Bilder entsprechen jeweils  $x_1, x_2, x_3, x_4$  . Die gelbe Kurve ist die Zustandsgröße des Systems, während die violette Kurve das Ergebnis vom Beobachter.

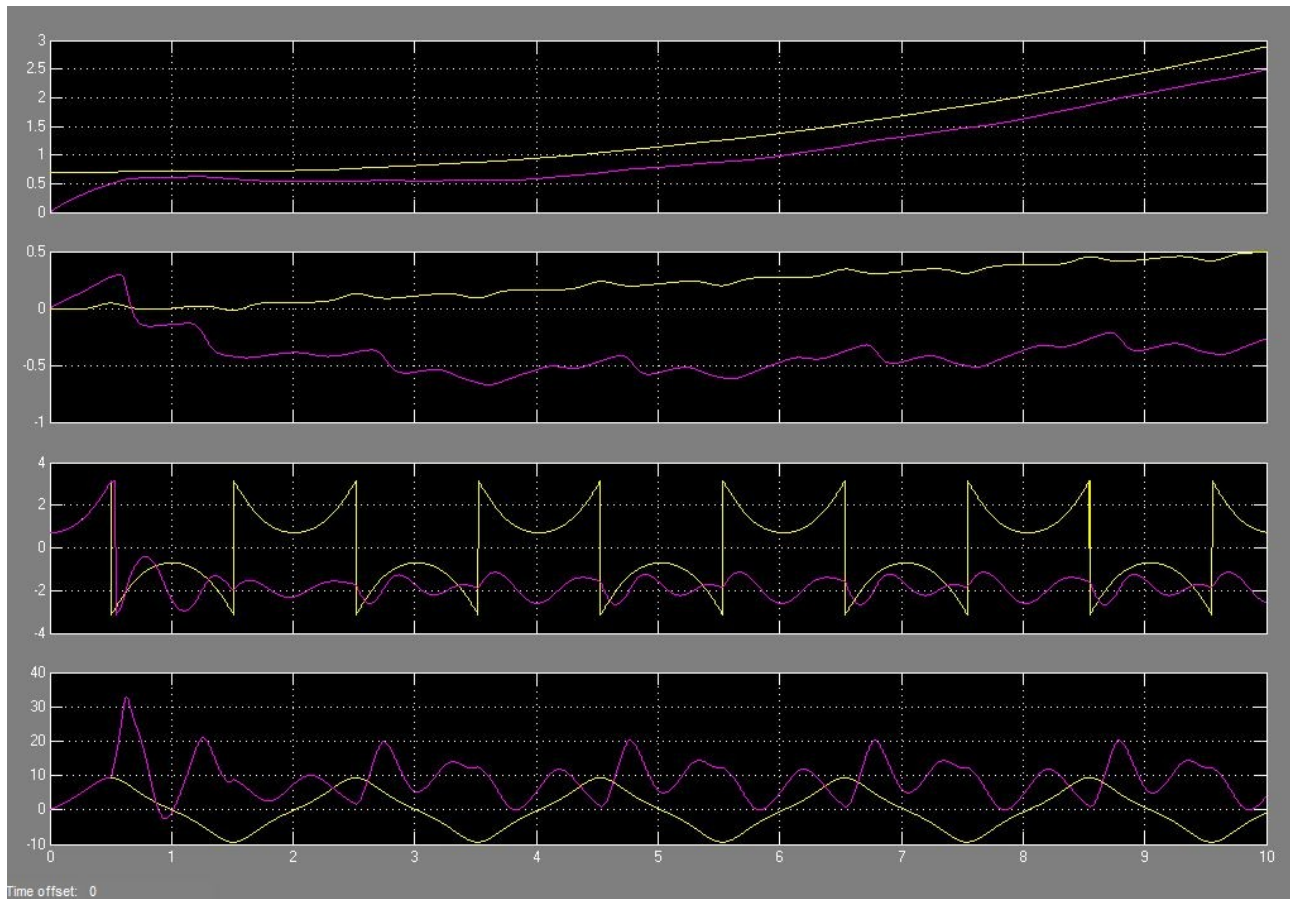


Abbildung 3.7 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 1$

Dann wird der Wert von  $p$  auf 5 erhöht:

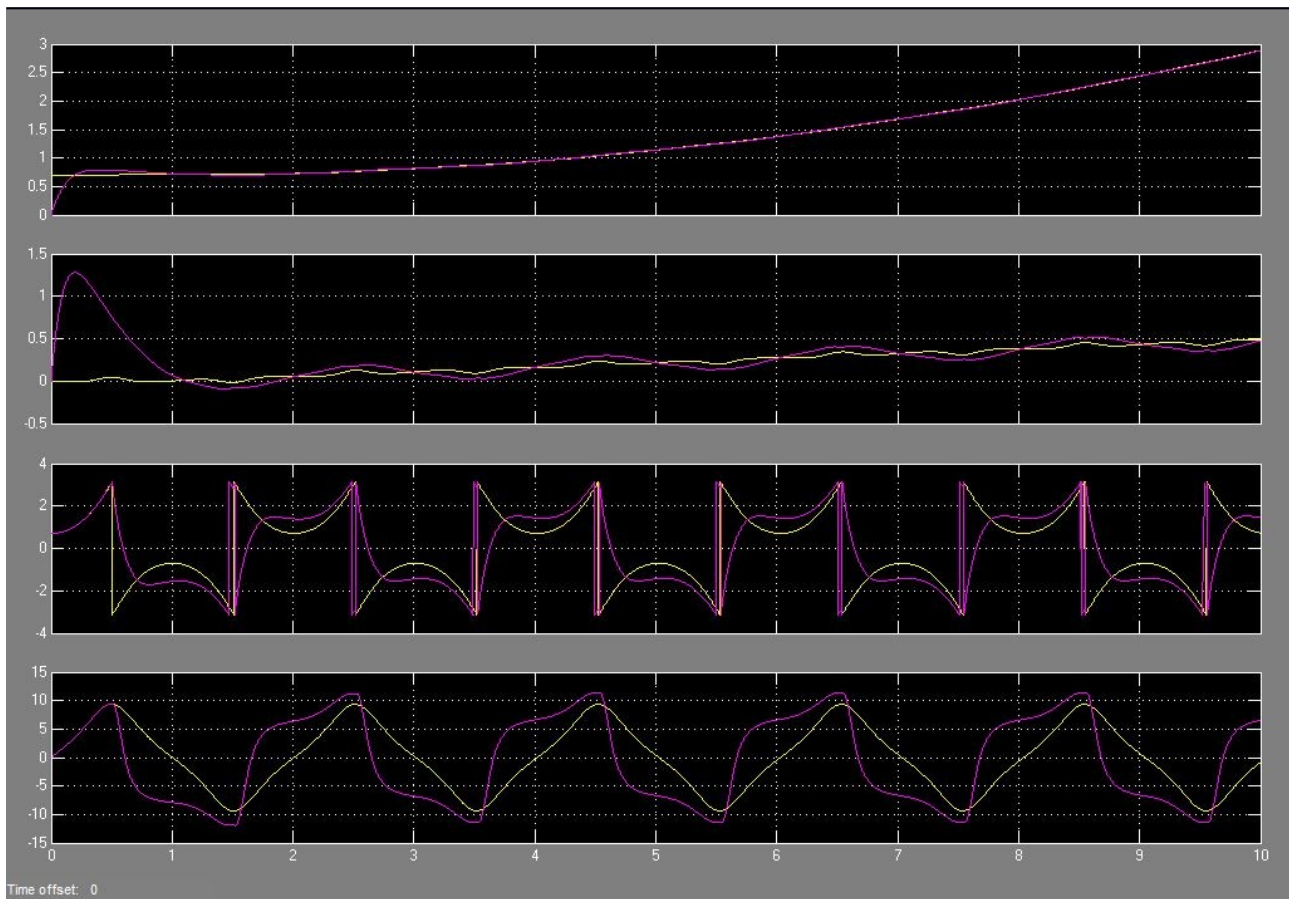


Abbildung 3.8 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 5$

Im Vergleich zu der Abbildung 3.7 kann man wissen, dass der Beobachter mit  $p = 5$  den Zustand der Strecke besser verfolgen kann. Deswegen wird ein größerer  $p$  gewählt und weiter getestet.

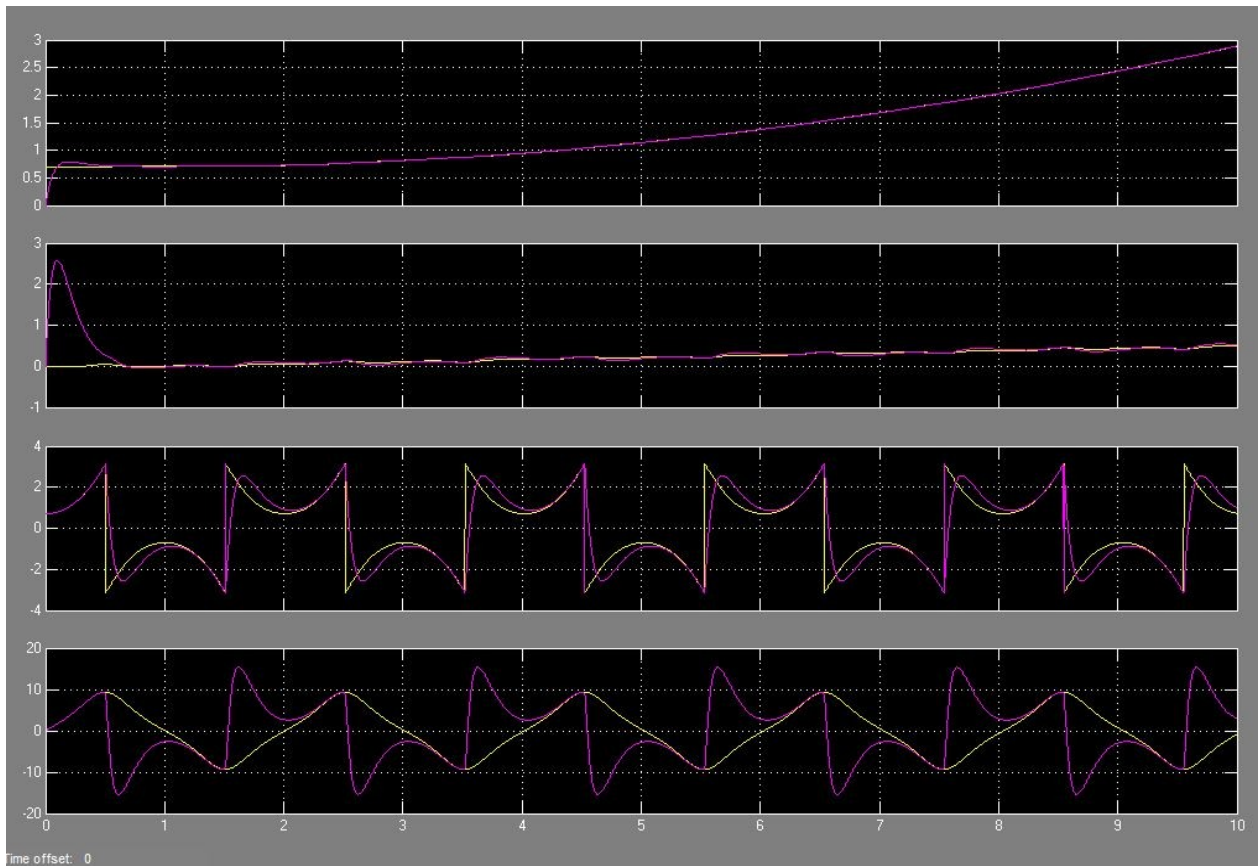


Abbildung 3.9 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 10$

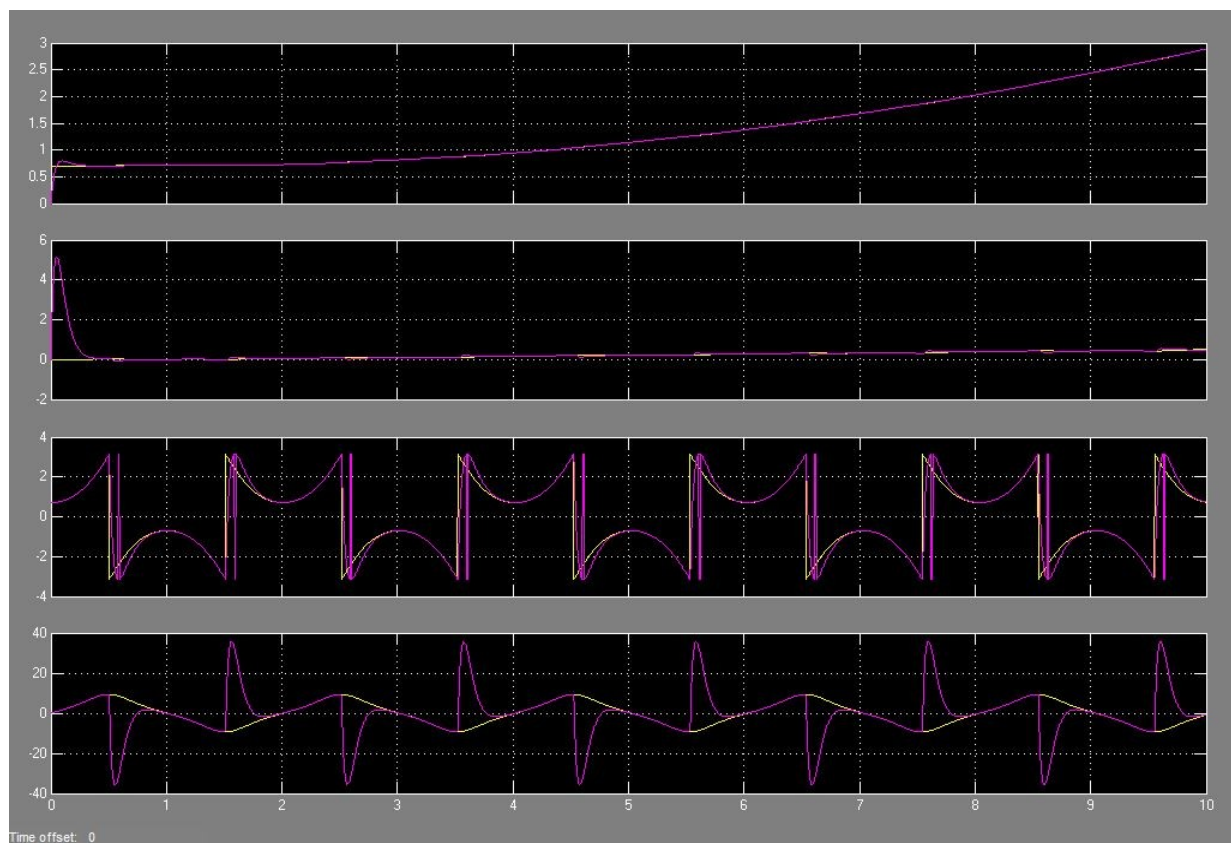


Abbildung 3.10 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 20$

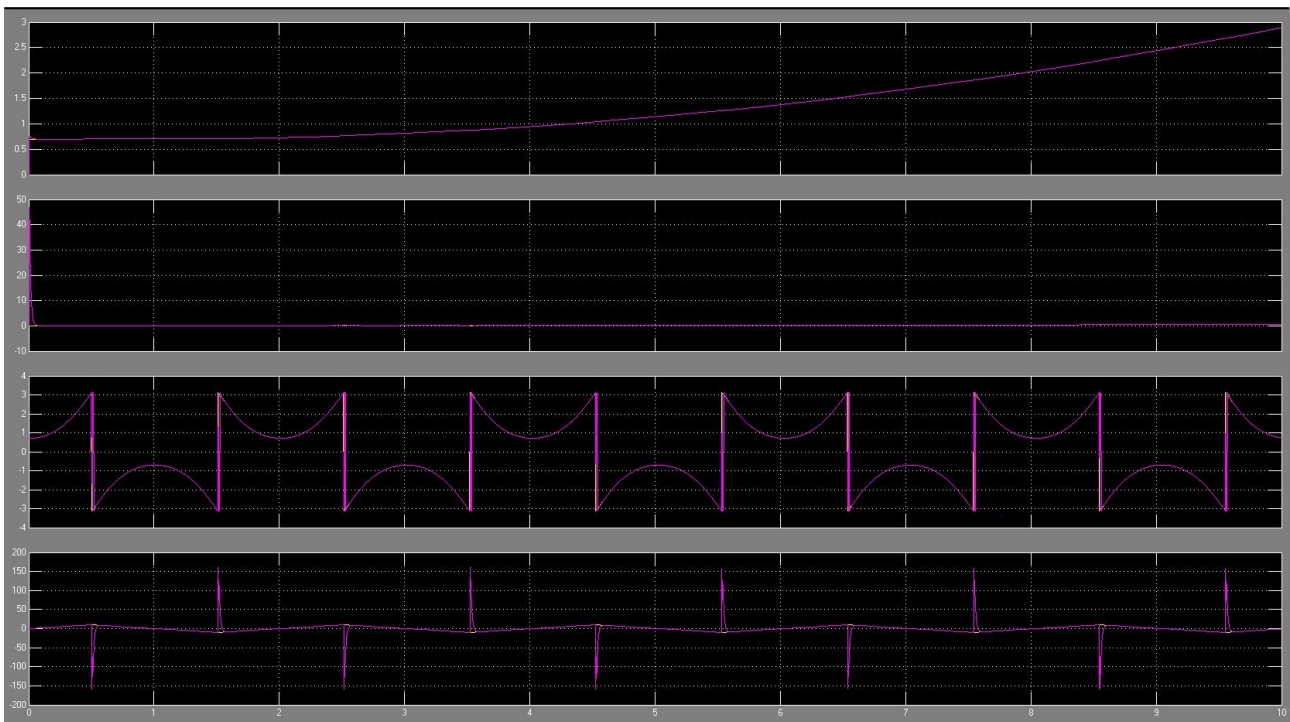


Abbildung 3.11 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 300$

Die obigen Abbildungen zeigen, dass je größer der Wert von  $p$  ist, das heißt, je weiter entfernt links der  $j$ -Achse die Eigenwerte der Matrix  $\hat{E}(\hat{x}, \underline{u})$  liegt, desto besser verfolgt der Beobachter. Wenn  $p$  gleich 300 ist, verhält sich der Beobachter schon sehr gut.

Danach wird der Beobachter unter Berücksichtigung des Rauschens getestet.

Anfangs testet man den Beobachter mit  $p = 300$ .

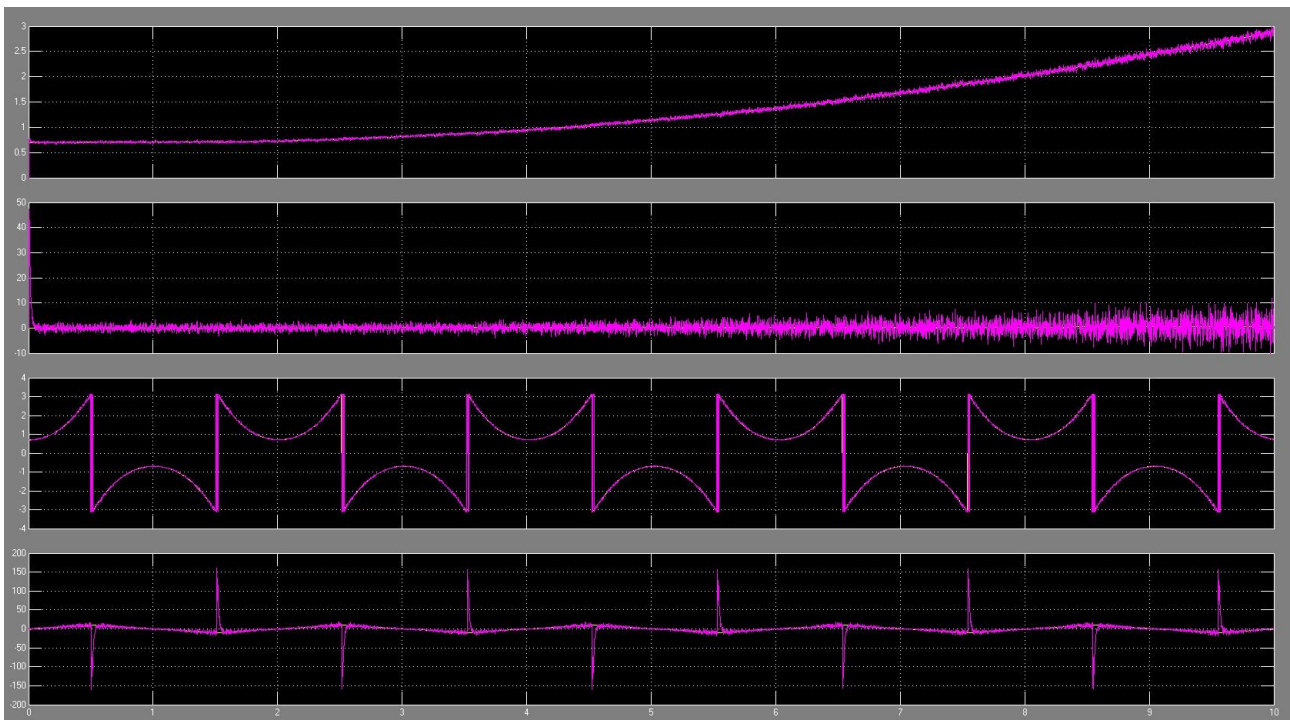


Abbildung 3.12 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 300$  (mit Rauschen)



Als gesehen in der Abbildung 3.12, ist das Rauschen für wachsende Zeit immer größer geworden. Deswegen testet man mit einer kleineren  $p$ :

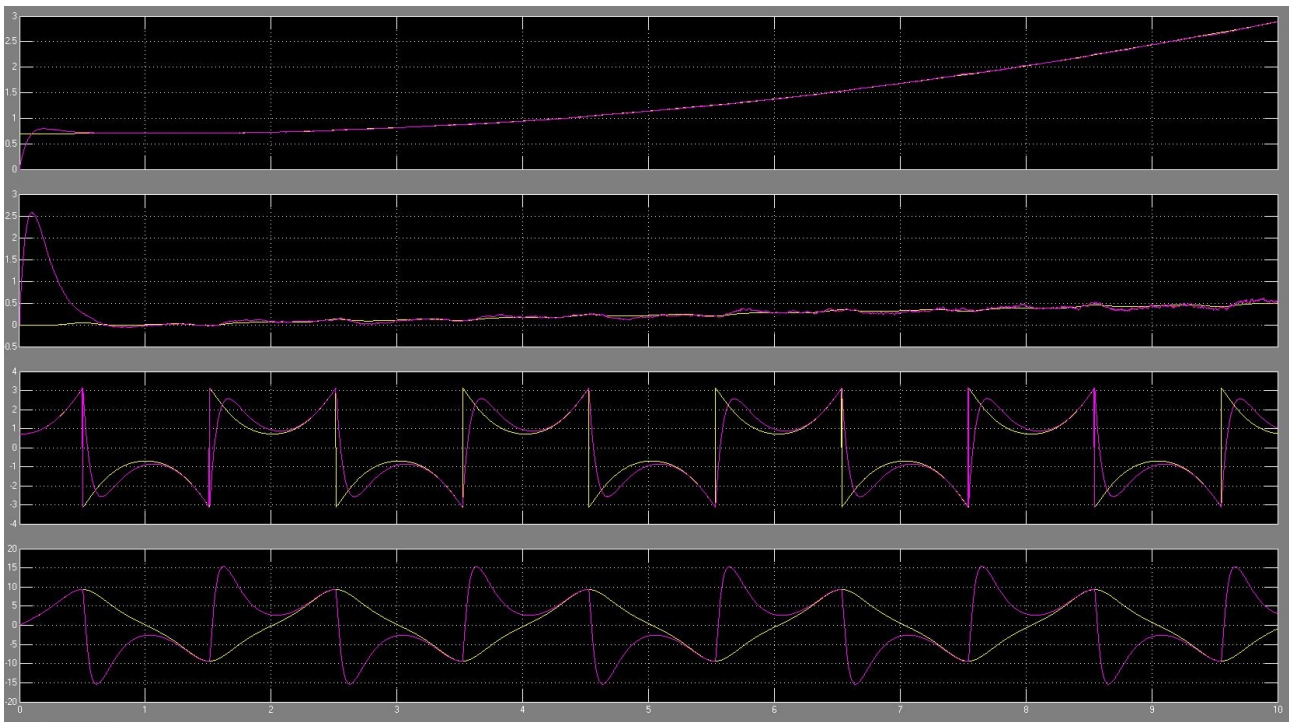


Abbildung 3.13 Zustandsgrößen in SIMULINK mit  $p = 10$  (mit Rauschen)

Das Ergebnis, das die Abbildung 3.13 zeigt, ist besser. Das Rauschen ist kleiner als das im Ergebnis aus  $p = 300$ .

(c) Der Beobachter mit  $p = 10$  ist der beste Beobachter. Einerseits kann dieser Beobachter das Rauschen wirksam vermindern. Andererseits ist es möglich, mittels des Beobachters den gesamten Zustandsvektor näherungsweise zu rekonstruieren.

### Aufgabe 3: Vergleich der Simulation

Übertragen Sie das Modell des IPCs und den Beobachter in LabVIEW2014 und vergleichen Sie die Simulation mit der aus MATLAB/Simulink.

#### Antwort:

Im Versuch werden die Modelle der Systeme und des Beobachter schon in LabVIEW2014 gegeben. Die fehlenden Blöcke darin werden den aus MATHEMATICA berechneten Ergebnisse gemäß ergänzt. Im Gegensatz zu Simulink muss der Datentyp der Parameter zuerst definiert werden.

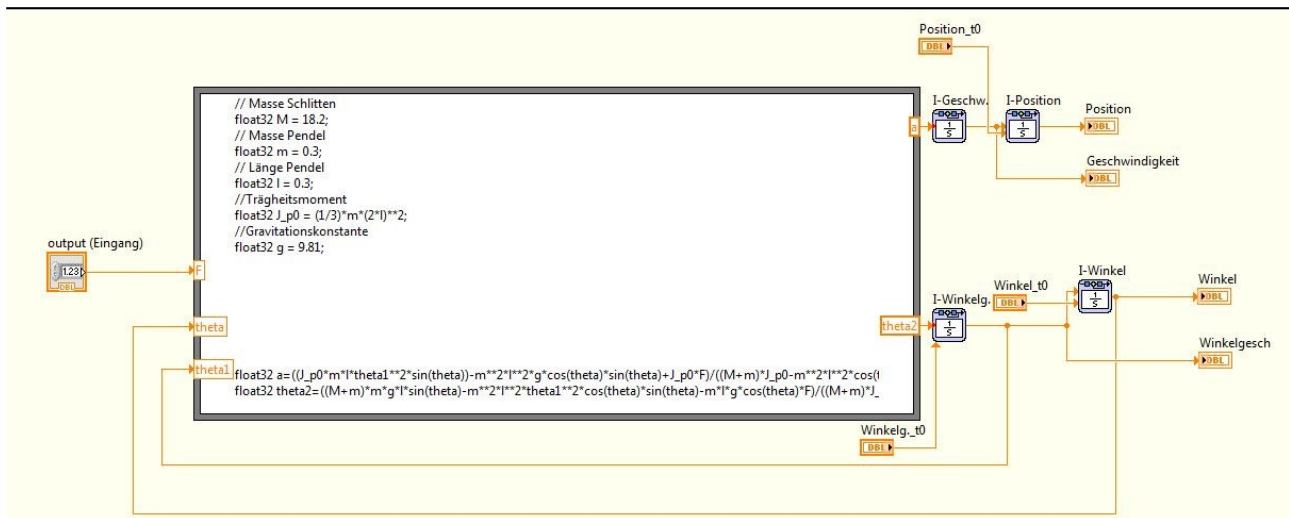


Abbildung 3.14 Ergänzung vom Beobachter in LabVIEW2014

Dann bekommen wir das Ergebnis vom Beobachter in LabVIEW2014 wie folgende. Die gezeigte Kurve soll mit der violette Kurve im Simulink verglichen werden. Der Fazit ist, dass das Ergebnis aus LabVIEW2014 idealisiert als das aus Simulink, denn die Kurven aus LabVIEW2014 deutlich glatter sind.

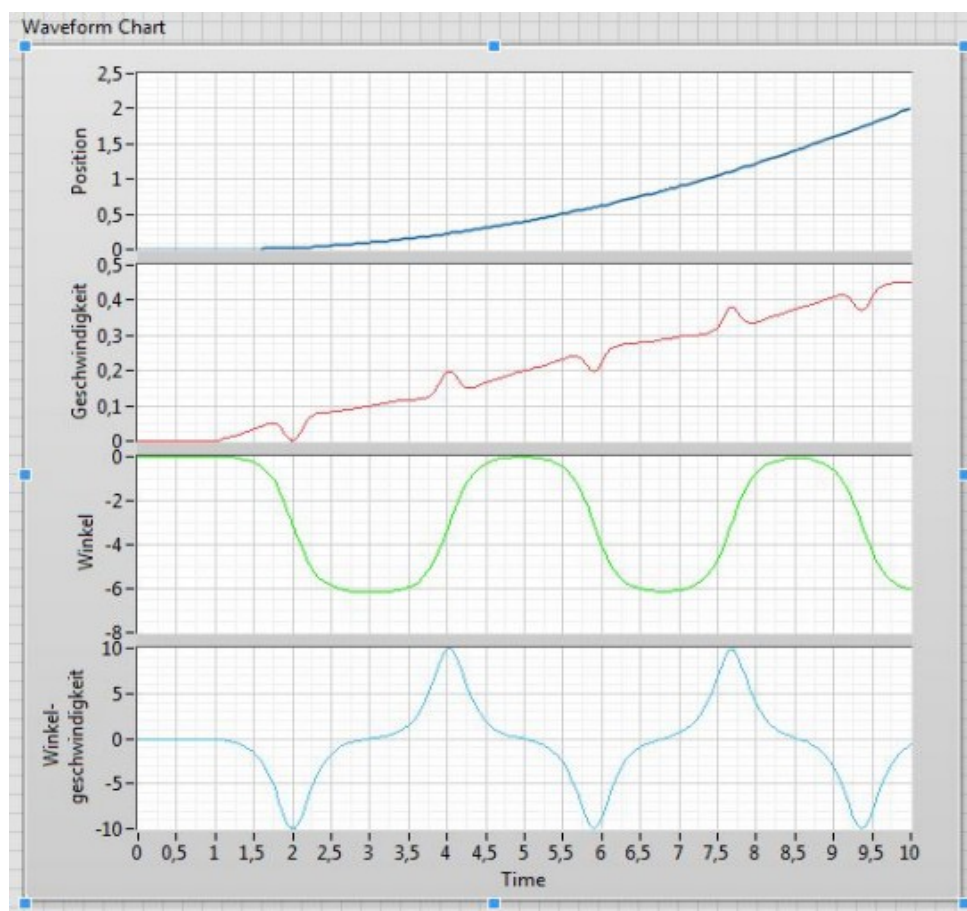


Abbildung 3.15 Simulation des Beobachter in LabVIEW2014

## Aufgabe 4: Aufschwingregelung

Unsere Regelung besteht aus 3 Schritten.

1. Swing-up
2. Cruise mode
3. Stabilisierung

Im Swing-up fügen wir Energie in das System zu, um den Pendel in der Nähe von der Ruhelage zu bringen. Wenn die mechanische Energie des Pendels größer als einen bestimmten Wert ist, tritt das Cruise mode ein, um die Energie zu halten. Wenn sowohl der Pendel als auch das Schlitten sich in der Nähe von Ruhelage befinden, tritt der LQR-Regler ein, um den Pendel zu der Ruhelage bringen. Um die Eingangskraft zu erhalten, berechnen wir zum erstens die Beschleunigung des Schlittens, dann rechnen wir die Kraft aus.

### Swing-up

Mechanische Energie des Pendels:  $E_{rp} = 0.5 J_p \dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$

Diese Energie soll zunehmen, um den Pendel in der Nähe von Ruhelage zu bringen. Erhalten wir sofort

$$\frac{d E_{rp}}{d t} = -m \ddot{x} l \theta \cos \theta \geq 0$$

Eine Regelung können wir so entwerfen,

$$\ddot{x} = k_{su} (E_{rp} - E_{up}) \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta)$$

Aber hat dieser Entwurf einen Nachteil, wenn die mechanische Energie des Pendels sich die Energie von oben Ruhelage nähert, wird der Term  $E_{rp} - E_{up}$  sehr klein. Dann dauert es ewig, den Pendel in der Nähe der Ruhelage zu bringen. Deshalb machen wir hier eine Modifikation,

$$\ddot{x} = k_{su} \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta)$$

In dem Labor ist die Schiene nur 1,5 meter lang. Das bedeutet eine Position-Beschränkung für das Schlitten. Deshalb brauchen wir hier eine Strafe für die Beschleunigung wenn das Schlitten sich in der Nähe der Grenze befindet.

$$u_{cart} = k_{cw} \operatorname{sgn}(x) \log \left( 1 - \frac{|x|}{L} \right)$$

Insgesamte Regelung:  $\ddot{x} = k_{su} \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \cos \theta) + k_{cw} \operatorname{sgn}(x) \log \left( 1 - \frac{|x|}{L} \right)$

### Cruise mode

Wenn die Mechanische Energie des Pendels größer als einen Wert ist, schaltet das Swing-up ab und tritt das Cruise mode ein. Das ziel des Cruise mode ist die Energie des

Pendels um die Ruhelage-Energie zu halten vor dem Eintritt des LQR-Reglers. Außerdem ist es gewünscht, die Position und die Geschwindigkeit des Schlittens sich in der Nähe von 0 befinden wenn der LQR-Regler tritt ein.

Regelgesetz:  $\ddot{x} = u_{cart} + u_{velocity} + u_{energymain}$

mit

$$u_{cart} = k_{cw} \operatorname{sgn}(x) \log\left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$$

$$u_{velocity} = k_{vw} \operatorname{sgn}(\dot{x}) \log\left(1 - \frac{|\dot{x}|}{\dot{x}_{max}}\right)$$

$$u_{energymain} = k_{em} (\exp|E_{rp} - k E_{up}| - 1) \operatorname{sgn}(E_{rp} - E_{up}) \operatorname{sgn}(\dot{\theta} \cos\theta) \quad (k > 1)$$

## LQR-Regler

Wenn die Systemzustände sich in der Nähe der Ruhelage befinden, tritt der LQR-Regler ein. Der Entwurf des LQR-Regler wird in nächster Aufgabe geschafft.

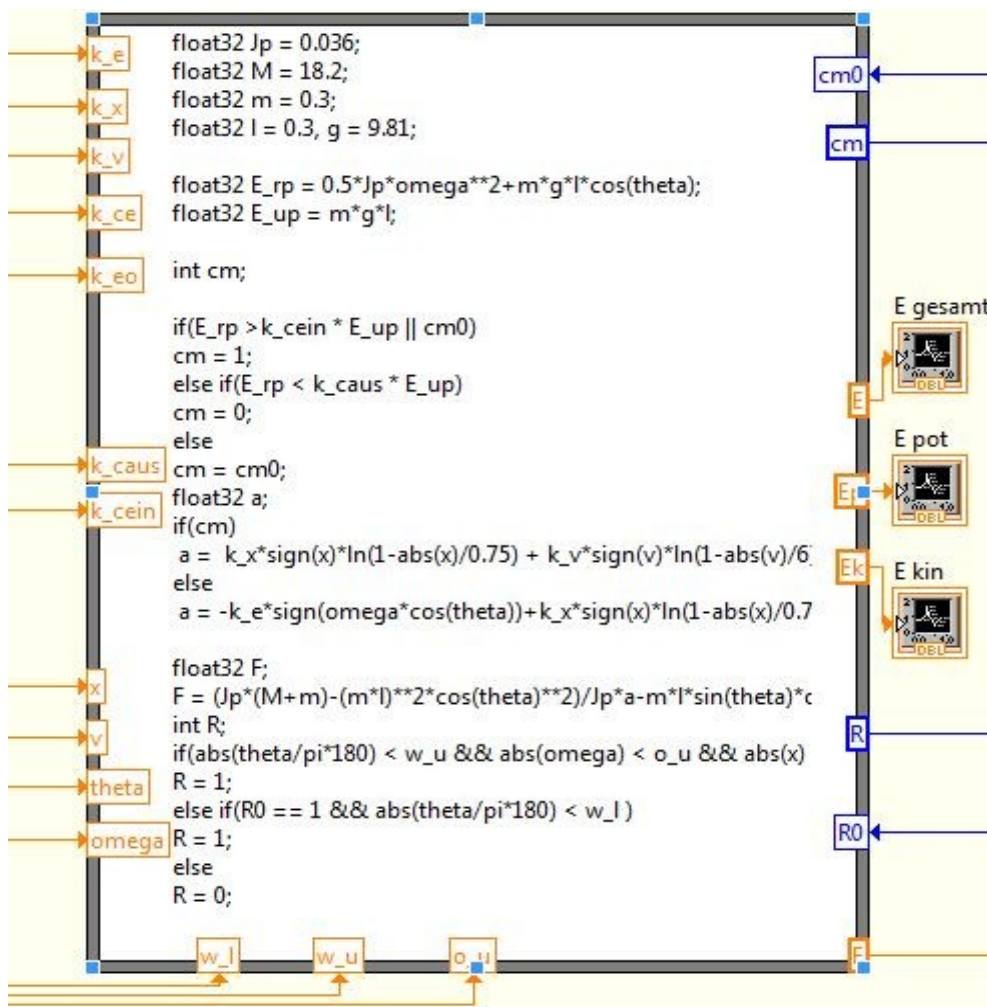


Abbildung 3.16 Algorithm des Aufschwingregler

$E_{rp}$  : die mechanische Energie des Pendel



---

$E_{up}$  : die Energie des Pendels wenn Pendel stabilisiert ist

$a$  : die Beschleunigung des Schlittens

$F$  : Eingangskraft

$cm$  : Regelungszeichen für Cruise mode

$R$  : Regelungszeichen für LQR-Regler

$k_e$  : Koeffizient für Energie Einfügen

$k_x$  : Koeffizient für Strafskraft für Position

$k_v$  : Koeffizient für Strafskraft für Geschwindigkeit

### Stabilität Analyse

Zum erstens werden einige Punkten festgelegt.

1. Das Subsystem von  $[\theta, \dot{\theta}]$  hängt nicht von dem Subsystem  $[x, \dot{x}]$  ab.
2. Die Existenz des Systems im Swing-up hängt von Energie, die zum Subsystem eingefügt wird, ab.
3. Die Stabilität des Systems wird gesichert, wenn das Subsystem  $[\theta, \dot{\theta}]$  genügend Energie in finiter Zeitspanne bekommt.

### Swing-up

Falls subsystem  $[\theta, \dot{\theta}]$  asymptotisch stabil ist, gibt es eine Lyapunov Funktion

$$V_{swingup} > 0 \quad \forall [\theta, \dot{\theta}] \neq 0$$

$$V_{swingup}(0) = 0$$

$$\dot{V}_{swingup} < 0 \quad \forall [\theta, \dot{\theta}] \neq 0$$

Wählen wir hier  $V_{swingup} = E_{up} - E_{rp}$ , weil es nicht negative im Swing-up ist.

$$\dot{V}_{swingup} = m \ddot{x} l \dot{\theta} \cos \theta$$

Dann brauchen wir hier

$$k_{su} + k_{cw} \ln\left(1 - \frac{|x|}{L}\right) \geq 0$$

um  $\dot{V}_{swingup} \leq 0 \quad \forall [\theta, \dot{\theta}]$  zu garantieren. Die obene Ungleichung ist eine genügende Bedingung für die Stabilität des Systems

Das bedeutet, dass das Energie Einfügen dominant im Swing-up ist. Und die Energie des Pendels nimmt immer zu im Swing-up.

### Cruise mode

Wir wählen eine Lyapunov Funktion für Cruise Mode.

$$V_{cruise} = \frac{1}{2} (E_{rp} - E_{up})^2$$

$$\dot{V}_{cruise} = (E_{rp} - E_{up}) (-m \ddot{x} l \dot{\theta} \cos \theta)$$

Wir brauchen hier,

$$k_{em} |\exp|E_{rp} - k E_{up}| - 1| \geq |k_{cw} \ln(1 - \frac{|\dot{x}|}{L}) + k_{vwln}(1 - \frac{|\dot{x}|}{|\dot{x}_{max}|})|$$

um die Stabilität des Subsystems  $[\theta, \dot{\theta}]$  zu garantieren. Die Ungleichung bedeutet, dass der Teil Energy Maintenance ist dominant im Cruise mode.

### Vorgehen aufgrund der Lyapunov Funktion

Im [2] wird ein anderes Vorgehen entwickelt. Die obene Ruhelage wird als den Nullpunkt für Potentielle Energie festgelegt. Dann ist die mechanische Energie des Pendels:

$$E = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgl (\cos \theta - 1)$$

Lyapunov Funktion:

$$V = \frac{1}{2} E^2 + (1 - \cos \theta)$$

Diese Funktion ist immer positiv.

Die Ableitung der Funktion:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{E} E + \dot{\theta} \sin \theta \\ &= -E \dot{\theta} m l \ddot{x} \cos \theta + \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned}$$

Die Ableitung soll negative sein (außer der Ruhelage).

Regelgesetz:

$$\ddot{x} = \begin{cases} U & (E \dot{\theta} \cos \theta > 0) \\ -U & (E \dot{\theta} \cos \theta < 0) \end{cases}$$

Wir haben das im Matlab/Simulink implementiert.

```
function [ddtheta, ddx] = fcn( theta, dtheta, dx)

%#codegen
M=18.2;
m=0.3;
l=0.3;
g=9.81;
j=0.036;
alpha =1 ;
E=0.5*j*dtheta^2 + m*g*l*(cos(theta)-1);

if(E*dtheta*cos(theta)>0)
    ddx=4;
else
    ddx=-4
end

ddtheta=(g*sin(theta)/j-ddx*cos(theta)/j)*m*l;
```

Abbildung 3.17 Matlab Code

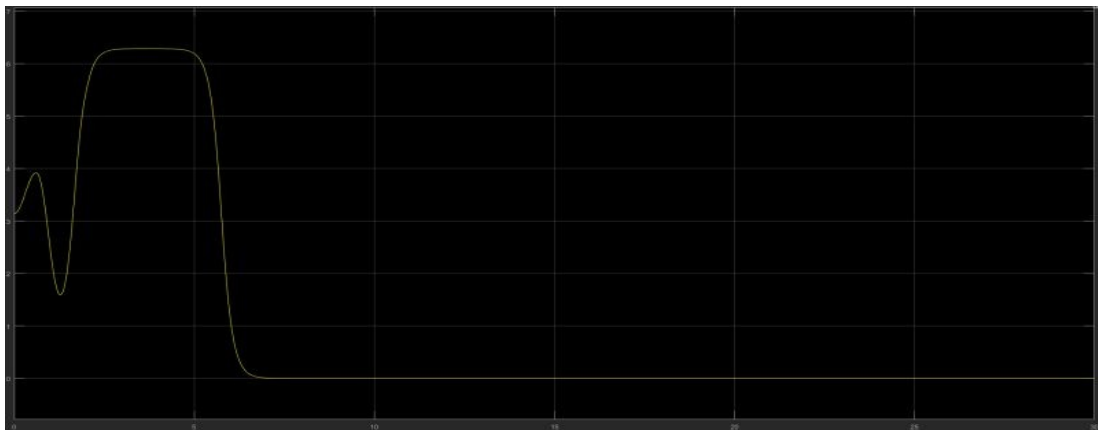


Abbildung 3.18 Winkel

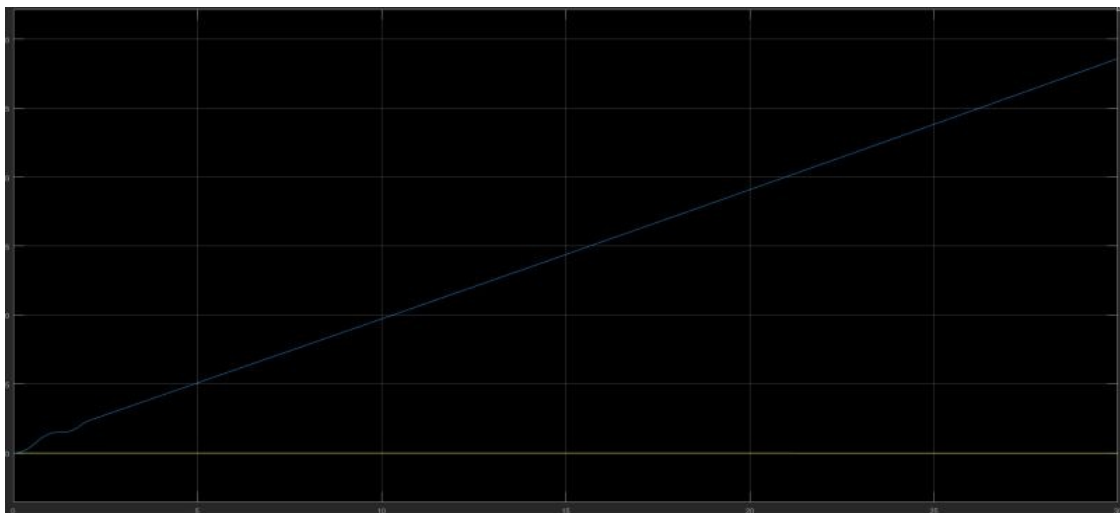


Abbildung 3.19 Position des Schlittens

In diesem Vorgehn wird die Grenze der Schlittenposition nicht berücksichtigt. Deswegen ist das Vorgehen im [1] besser.

## Aufgabe 5& 6: Berechnung und Implementierung des LQR

- (a) Linearisieren Sie das Modell des IPCs.
- (b) Entwerfen Sie den LQR.
- (c) Implementieren Sie den LQR in LabVIEW 2014.
- (d) Vergleichen Sie verschiedene Parametrisierungen des LQR
- Unter der Annahme, dass alle Zustandsgrößen messbar sind;
  - Im Zusammenspiel mit dem Beobachter.

### Antwort:

(a) Die Ruhelage des Modells des IPC ist  $x_1=0; x_2=0; x_3=0; x_4=0$ . Das Modell des IPCs wird in der Umgebung von der Ruhelage linearisiert. Die Zustandsgleichung und Ausgangsgleichung sind:

$$\dot{x} = \underline{A}x + \underline{B}u$$

$$y = \underline{C}x + \underline{D}u$$

$$\text{mit } \underline{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(\underline{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,12078 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 24,8269 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{B} = \frac{\partial g}{\partial x}(\underline{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,05471 \\ 0 \\ -0,136799 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \frac{\partial c}{\partial x}(\underline{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{D} = \frac{\partial c}{\partial x}(\underline{x}_R, u_R) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

(b) Nach dem Regelgesetz soll das Gütemaß  $J = \frac{1}{2} \int (\underline{x}^T \underline{Q} \underline{x} + \underline{u}^T \underline{S} \underline{u}) dt$  durch geeignete

Wahl von  $\underline{K}$  zum Minimum gemacht werden. Man soll einen Regler vom Typ

$u(t) = -\underline{S}^{-1} \underline{B}^T \underline{P} x(t) = \underline{K} x(t)$  entwerfen.  $\underline{B}$  ist schon bekannt.  $\underline{Q}, \underline{S}$  sind positiv definit und frei wählbar. Normalerweise wählt man für das Erste als Einheitsmatrizen:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \underline{S} = [1].$$

Außerdem wird  $\underline{K}$  mit Hilfe von LabVIEW2014 berechnet.

(c) Lineares Modell wird in LabVIEW 2014 eingegeben:

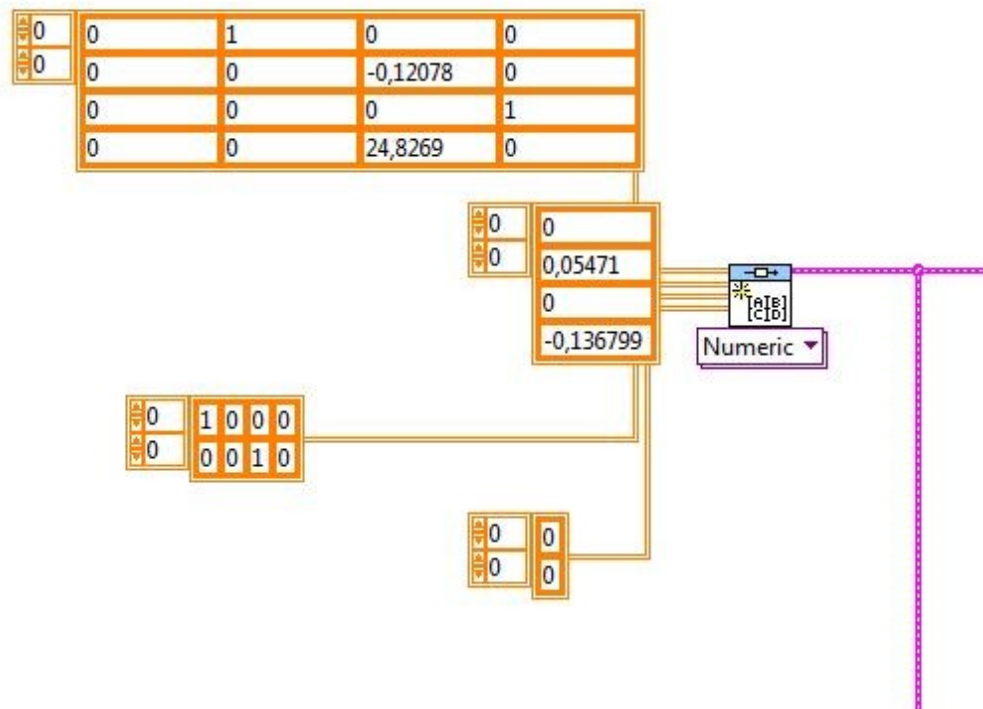


Abbildung 3.20 lineare Zustandsgleichung und Ausgangsgleichung in LabVIEW2014

Im Zusammenspiel mit dem Beobachter kann die Parameter des LQR einfach in der Software geändert werden. Das Ergebnis mit  $Q = I_4$ ,  $S = I_1$  (in LabVIEW wird  $S$  mit Name R definiert) ist:

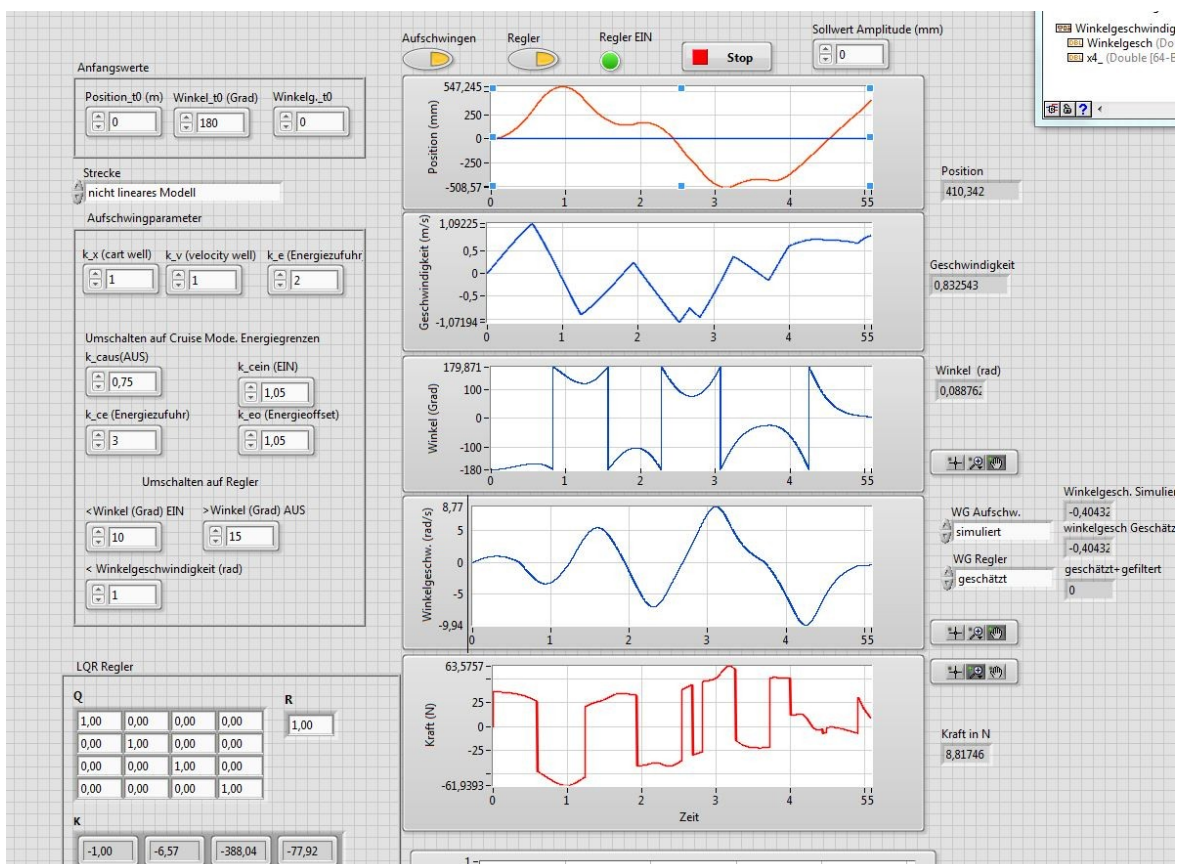
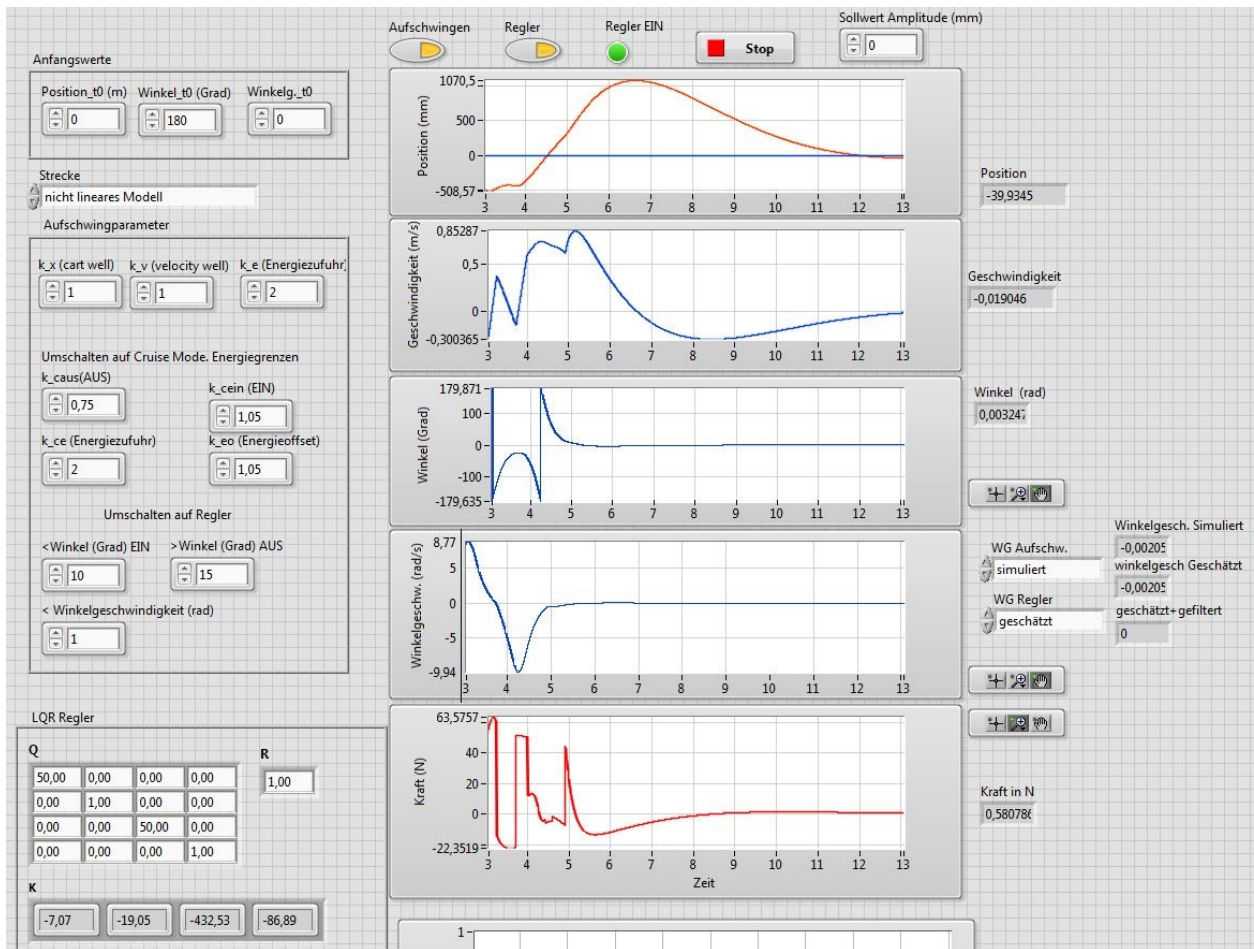


Abbildung 3.21 Zustand mit LQR ( $Q = I, R = I$ )

(d) Mit dem obigen LQR ist das Steuerungsergebnis nicht sehr gut. In der obigen Abbildung ist es übersichtlich, dass die Position einen sehr hohen Wert erreichen werden. Außerdem entstehen sehr starke und wiederholte Veränderungen bevor das

Pendel die Ruhelage erreicht. Deshalb wird  $Q$  auf  $\begin{bmatrix} 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  geändert:

Abbildung 3.22 Zustand mit LQR ( $Q = \text{diag}(50,1,50,1), R = 1$ )

Versuchen wir noch mal mit größer  $Q$  und  $R$ :

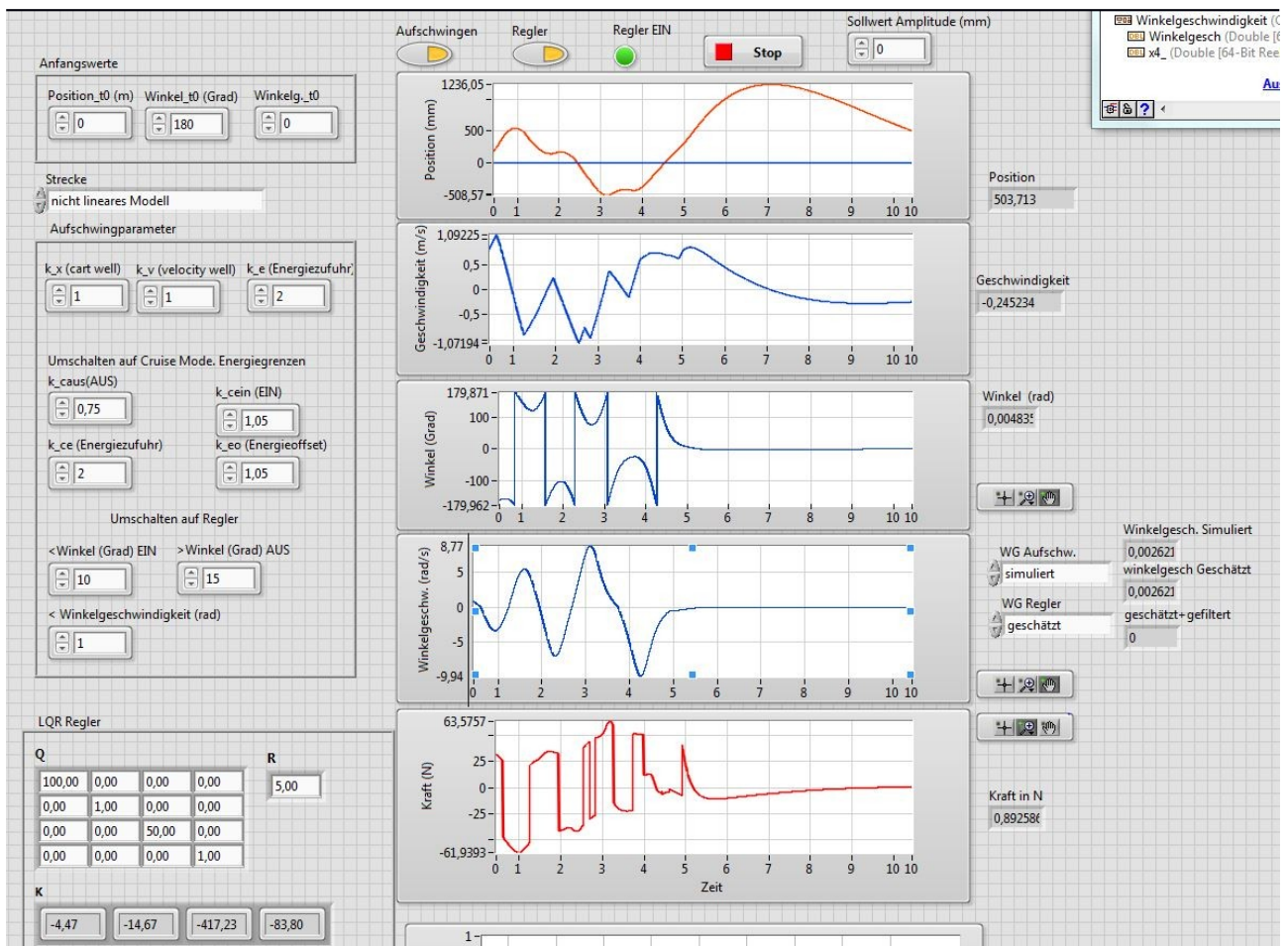


Abbildung 3.23 Zustand mit LQR ( $Q = \text{diag}(100, 1, 50, 1)$ ,  $R = 5$ )

Mit einer größeren  $R$  braucht der Regler kleinere Kraft. Aber es dauert mehr als 11s bevor das Pendel auf dem Schlitten den Stabilitätszustand in der aufrechten Pendelposition erreicht. Um den Übergang von  $x(0) = \underline{x}_0$  nach  $\underline{0}$  schneller zu schaffen wird der Wert von  $R$  vermindert:



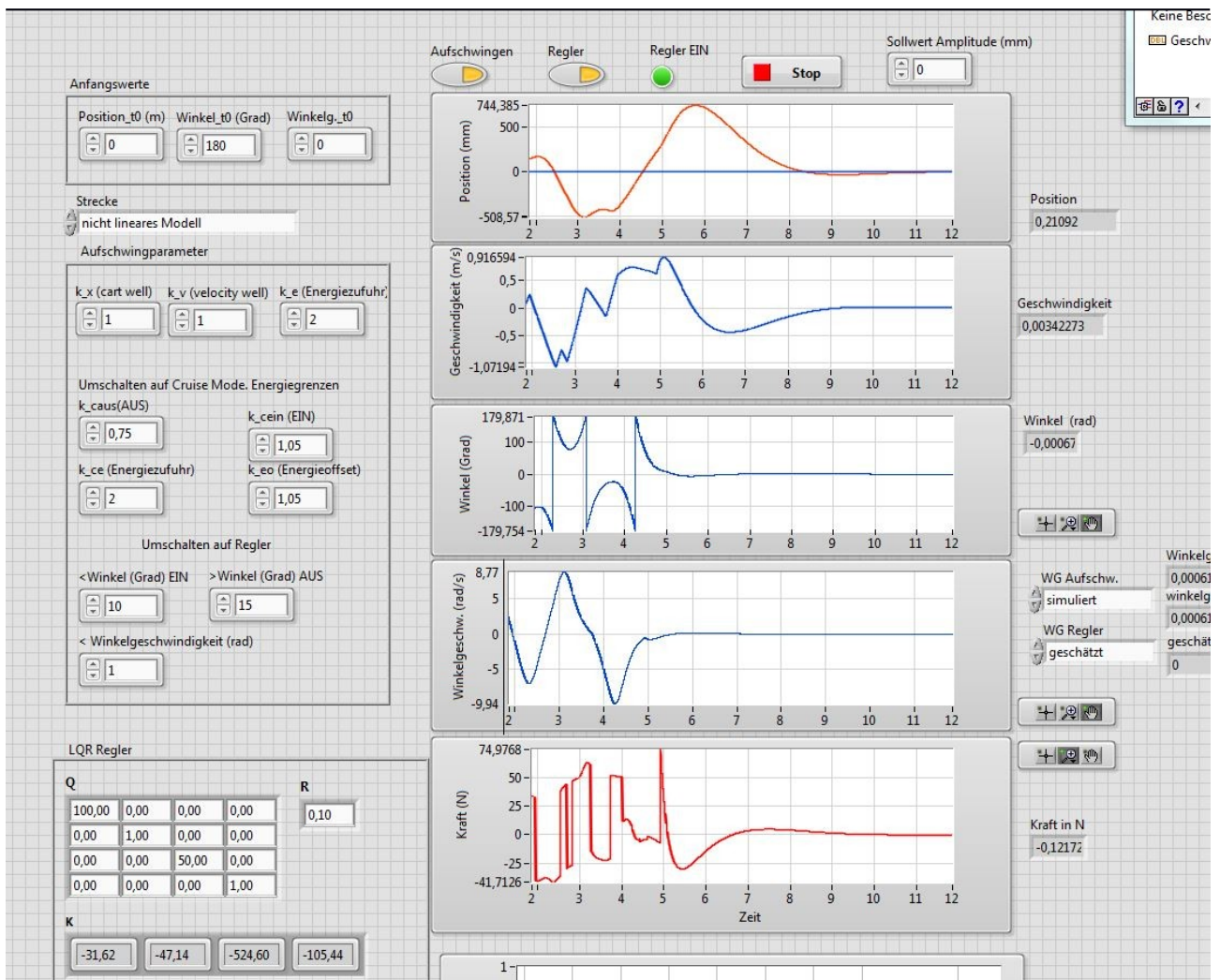


Abbildung 3.24 Zustand mit LQR ( $Q = \text{diag}(100, 1, 50, 1)$ ,  $R = 0,1$ )

Es ist sehr übersichtlich in der obigen Abbildung, dass der Übergang von  $x(0) = x_0$  nach  $Q$  schneller geworden ist. Versucht man mit kleinerer  $R$  und das Ergebnis ist in der folgenden Abbildung gezeigt. Die Zeitdauer des Übergangs verkürzt sich auf 9s.



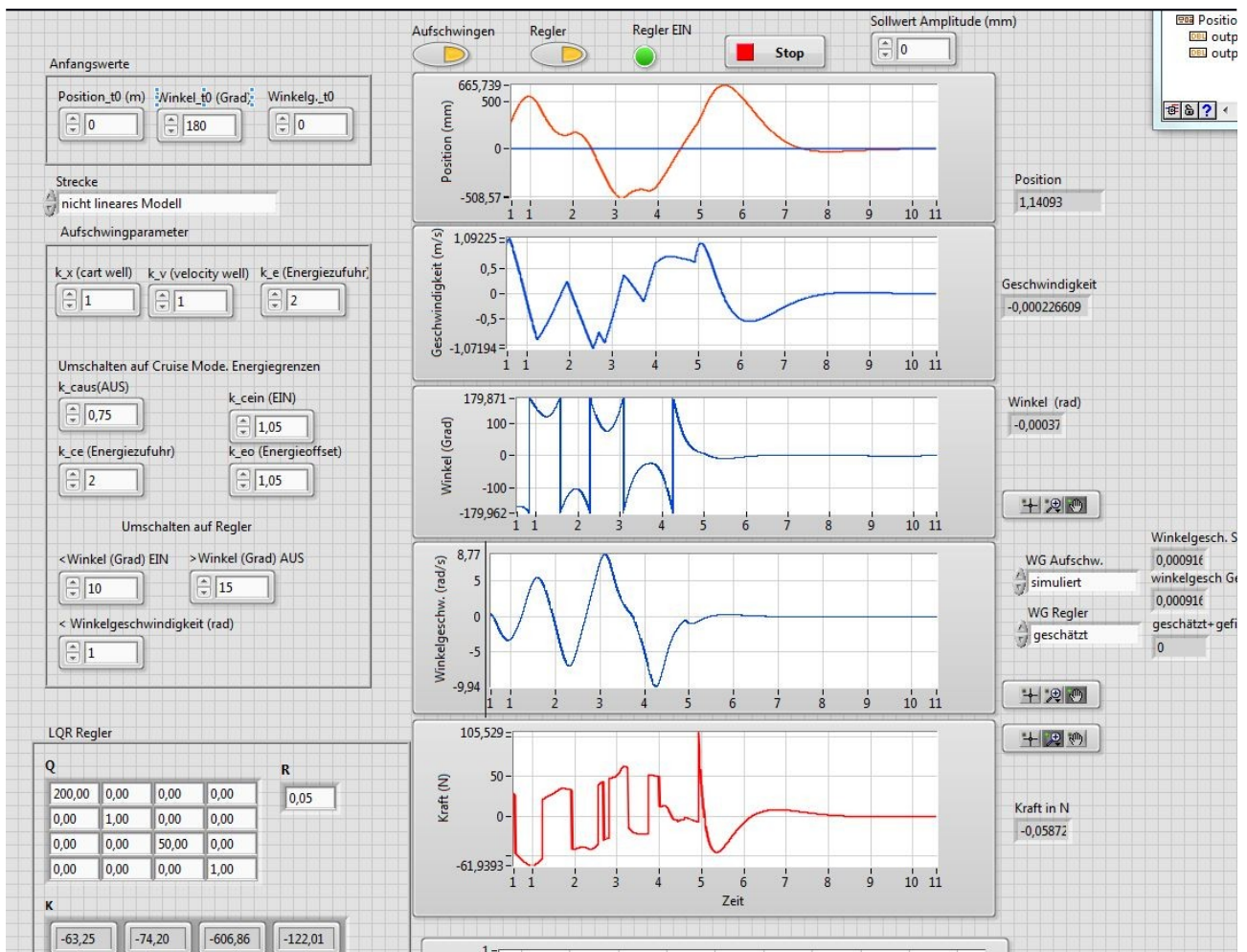


Abbildung 3.25 Zustand mit LQR ( $Q = \text{diag}(200, 1, 50, 1)$ ,  $R = 0,05$ )

Je kleiner  $R$  ist, desto größere Kraft braucht der Regler. Das bedeutet, mehr Energie wird zugefügt. Deshalb kann der Übergang schneller verlaufen. Der Wert von  $R$  ist jetzt schon sehr klein. Um eine besser Regelung noch zu erreichen, vergrößern wir weiterhin das erste Element von  $Q$ :

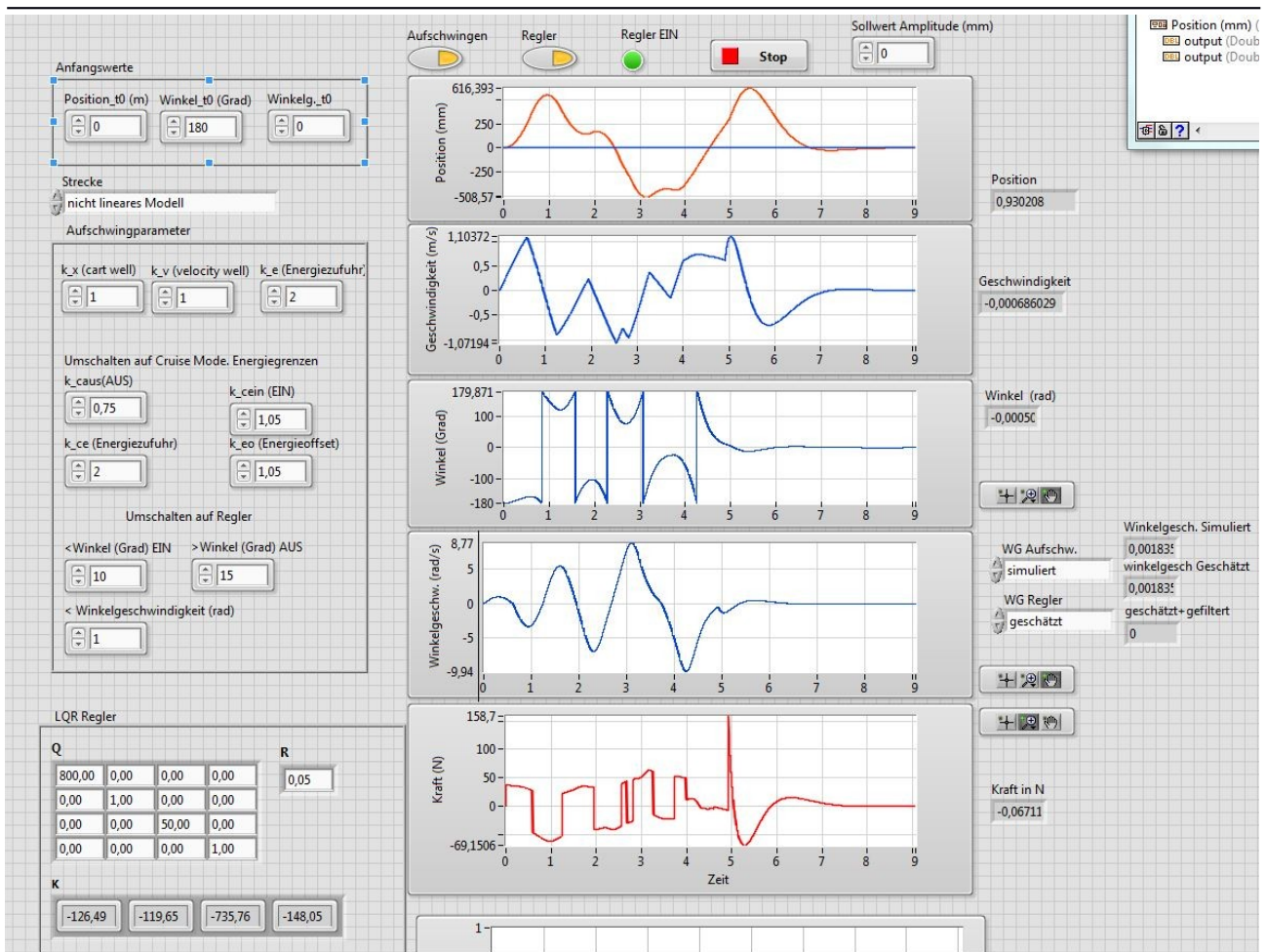


Abbildung 3.26 Zustand mit LQR ( $Q = \text{diag}(800, 1, 50, 1)$ ,  $R = 0,05$ )

Als in Abbildung 3.24 vorgezeigt, weniger Zeit ist zur Stabilität erforderlich. Ein erheblicher Impuls der Kraft tritt vor dem Stabilitätszustand auf. Jetzt ist das Ergebnis schon zufriedenstellend.

## Aufgabe 7: Testen

Testen Sie die Regelung am realen Aufbau.

sehen 4. Auftretende Probleme beim Test und Diskussion

## 4. Auftretende Probleme beim Test und Diskussion

Im Versuch werden die Parameterberechnung sowie Programmierung glatt aufgeführt. Allerdings funktioniert das Programm bei dem erste Test nicht so gut. Die Ergebniskurve wird wie folgende gezeigt. Nachdem das IPCs aus dem Motor getrieben, pendelt der Pendel um die instabile Ruhelage mehrmals. Aber zuletzt stabilisiert der Pendel nicht, sondern zu die stabile Ruhelage fällt.

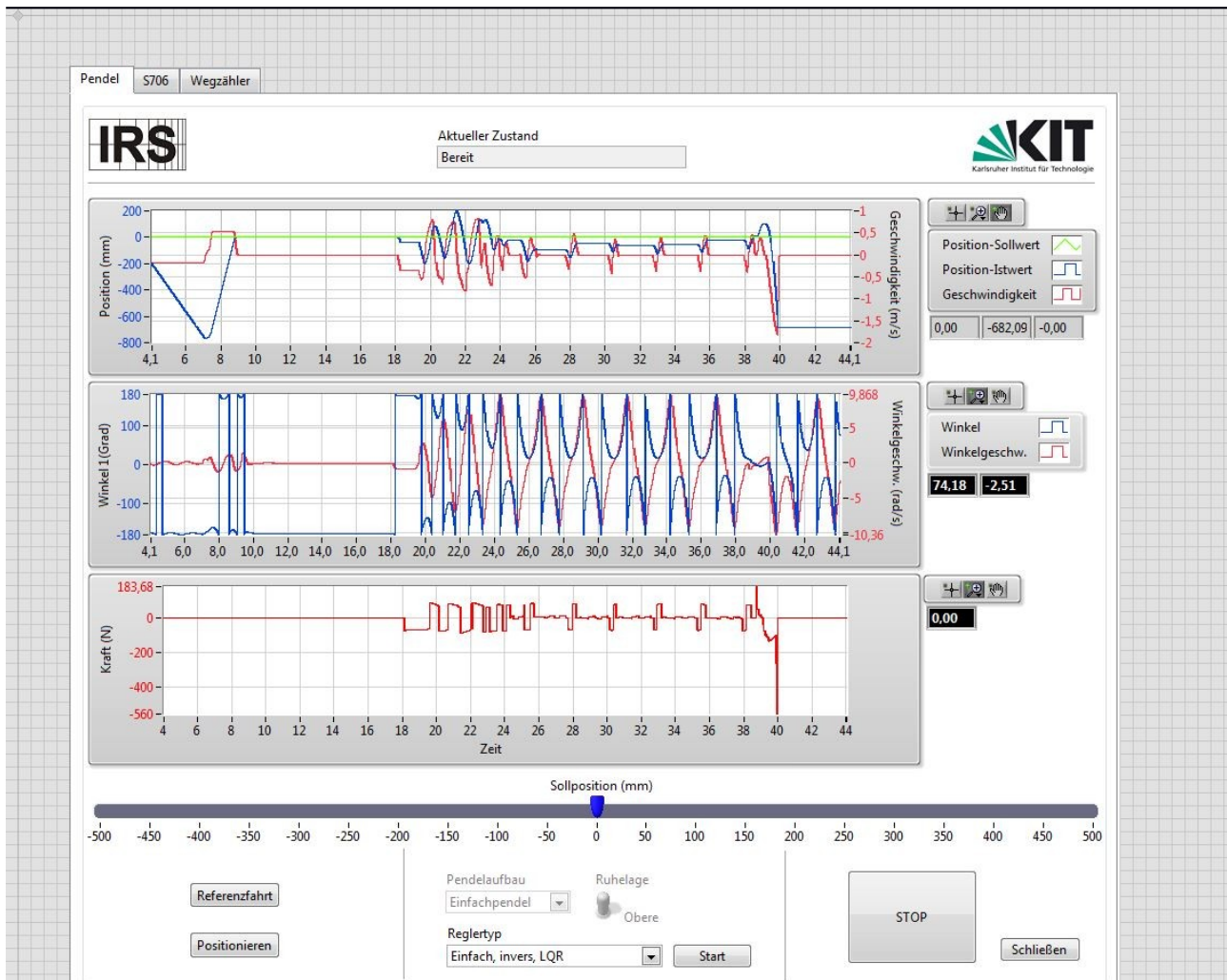


Abbildung 4.1 Ergebnis beim 1. Test

Aufgrund dieser Situation wird die Ursache diskutiert. Wir kommen zu dem Konsens, dass die Energie, die zum Pendel getrieben wird, nicht genug ist. Denn die Gewichtung  $R$  zu groß während die Gewichtung  $Q$ -Matrix nicht genug ist. Dann verändern wir die Werte der  $Q$ -Matrix und  $R$ . Der 2. Test funktioniert gut wie folgende.



Abbildung 4.2 Ergebnis beim 2. Test

## 5. Literatur

[1] D.Chatterjee, A.Patra, and H.K.Joglekar. Swing-up and stabilization of a cart pendulum sytem under restricted cart track length. *Systems & Control Letters*, 47(4):355- 364, 2002.