Praktikum Automatisierungstechnik
Wintersemester 2016/2017

Protokoll zum

Versuch 2: Hinterachsprüfstand

der Gruppe 5

Xiaoyu Xie
Shaochen Qian
Jun Lou

Tag der Versuchsdurchführung: 10. Januar 2017
17. Januar 2017

Hiermit versichern wir, dass wir dieses Protokoll selbstständig angefertigt haben.
Karlsruhe,

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Versuchsaufbau 1

1.1 Einleitung des Versuchs 1

2 Theoretische Grundlagen 2

2.1 Modellbildung 2

2.2 Reglerentwurfsverfahren 3

2.2.1 Reglerentwurf im Frequenzbereich 3

2.2.2 Entkopplungsregelung nach Falb-Wolovich 4

2.2.3 Der PI-Zustandsregler 5

3 Aufgaben 7

3.1 Modellbildung des Hinterachsprüfstandes 7

3.2 Reglerentwurf und Ergebnisse 16

3.2.1 PID-Regelung 16

3.2.2 Entkopplungsregelung 20

3.2.3 Entkopplung mit überlagerter PID-Regelung 28

3.2.4 PI-Zustandsregelung 33

4 Auftretende Probleme und Diskussion 46

5 Literatur 46

1 Einleitung und Versuchsaufbau

1.1 Einleitung des Versuchs

Der Hinterachsprüfstand hier wird dafür verwendet, das Verhalten von Hinterachsen insbesondere ihre Beanspruchbarkeit unter praxisnahen Bedingungen zu untersuchen. In diesem Versuch werden verschiedene Reglerkonzepte auf einen Hinterachsprüfstand verwendent, indem die Momente und Winkelgeschwindigkeiten den in der Testfahrt gemessenen Verläufen gut nachführen kann sowie man den Entwurf und die Eigenschaften der jeweiligen Regler eingehend erfassen. Vor allem muss der zu regelnde Prozess Hinterachsprüfstand modelliert werden. Der Aufbau des Hinterachsprüfstandes ist in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt. In Tabelle 1.1 werden die entsprechenden Parameter zusammengefasst.

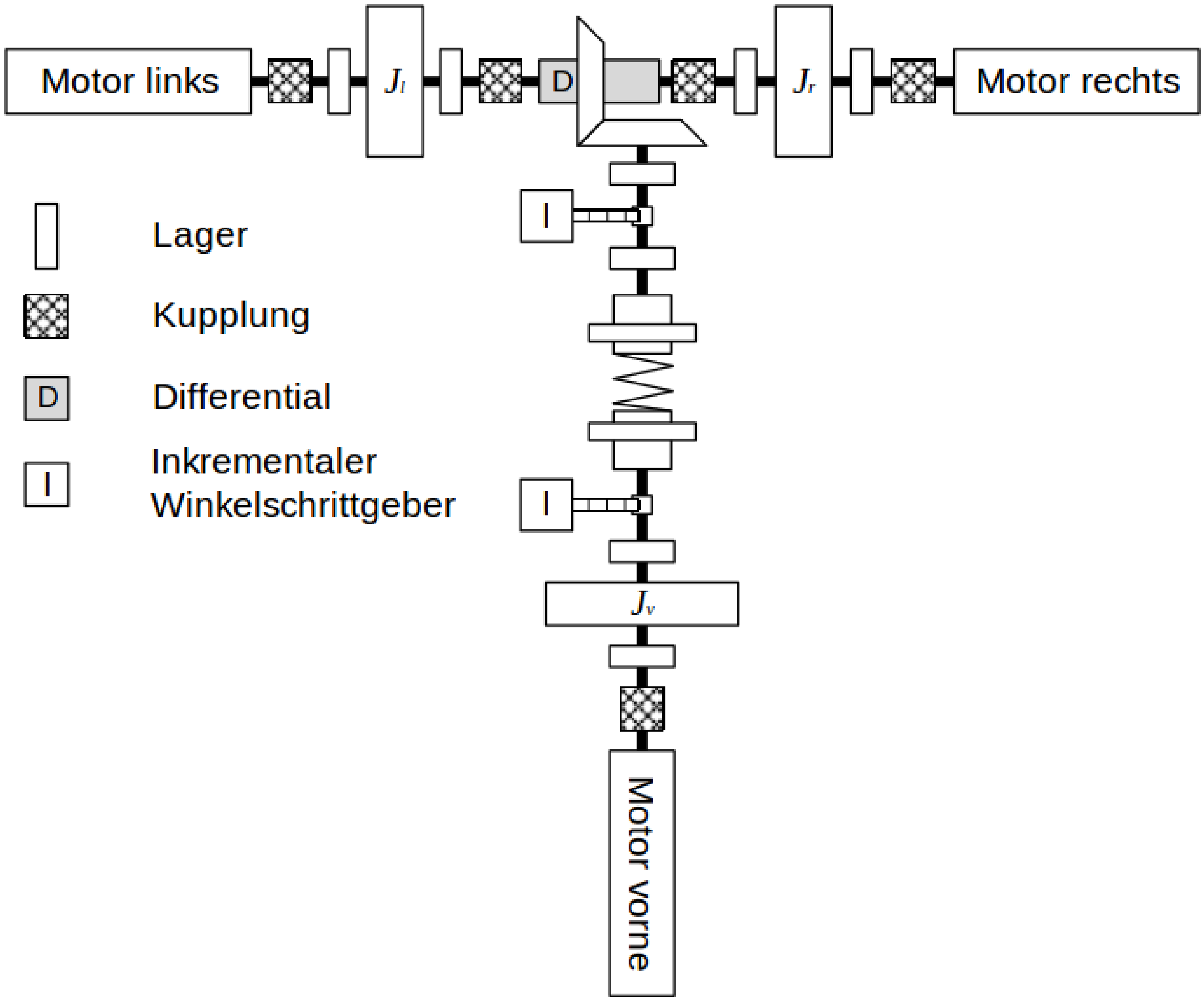

Abbildung 1.1 Der mechanische Aufbau

Parameter	**Bedeutung**	**Zahlenwert**
$J_{v\|r\|l}$	Summe der Trägheitsmoment von Schwungmass und Rotor (jeweils vorne, rechts, links)	3e-3 kgm^2 (vorne) 11e-3 kgm^2 (rechts)

		11e-3 kgm^2 (links)
c	Federkonstante	0.2447
$M_{v\|r\|l}$	Antriebselemente der Motoren (jeweils vorne, rechts, links)	
M_{cw}	Kardanmoment	
$M_{cwr\|l}$	Drehmoment an der rechten bzw. Linken Antriebswelle	
$k_{v\|r\|l}$	Dynamische Reibkonstante (jeweils vorne, rechts, links)	
$\Omega_{v\|d\|r\|l}$	Winkelgeschwindigkeiten (am Motor vorne, am Differentialgetriebe und an den Motoren rechts und links)	
k_{r1}	vereinfachte Bezeichnung dynamischer Reibkonstante an der rechten Antriebswelle für Parameter Ω_r	2.4655e-3 $\frac{Nms}{rad}$
k_{r2}	vereinfachte Bezeichnung dynamischer Reibkonstante an der rechten Antriebswelle für Parameter Ω_l	-1.1534-3 $\frac{Nms}{rad}$
k_{l1}	vereinfachte Bezeichnung dynamischer Reibkonstante an der rechten Antriebswelle für Parameter Ω_l	5.5386e-3 $\frac{Nms}{rad}$
k_{r2}	vereinfachte Bezeichnung dynamischer Reibkonstante an der rechten Antriebswelle für Parameter Ω_r	-8.9816e-3 $\frac{Nms}{rad}$
k_v		2.8981e-3 $\frac{Nms}{rad}$
Ω_N	Normierungswert der Winkelgeschwindigkeiten	104.72 rad/s
M_N	Normierungswert der Drehmomente	0.35Nm
c_N	Normierungswert der Federkonstante	$M_N/(\Omega_N t_N)$
t_N	Normierungswert der Zeit	1s

Tabelle 1.1 Modellparameter und Bezeichnungen

2. Theoretische Grundlagen

2.1 Modellbildung

Ziel der Modellbildung ist eine Beschreibung des Prozesses in einer Form, die auf die jeweilige Aufgabenstellung zugeschnitten ist. In diesem Versuch kommen parametrische Mehrgrößenmodelle zum Einsatz, die durch Zustandsgleichungen, bestehend aus Zustandsdifferentialgleichung und Ausgangsgleichung, gegeben sind.

Bei komplexen Systemen wird die Modellbildung durch Untergliederung des Systems in Teilsysteme (Dekomposition) erleichtert. Der Vorteil der modularen Zerlegung liget darain, dass die Modellierung jedes einzeln Teilsystems überschaubar bleibt und der Aufbau des Gesamtsystems damit sehr transparent ist. Zudem wird auch die durch eventuelle Prozessveränderungen bedingte Modellanpassung erleichtert.

Ein mathematisches Modell eines Prozesses lässt sich aus den physikalischen Zusammenhängen herleiten, wobei im wesentlichen folgende physikalische Gesetze eine Rolle spielen:

Bilanzgleichungen: Die Änderung einer Erhaltungsgröße in einem offenen System entspricht der

Differenz ihres Zu- und Abflusses.

Erhaltungssätze: In einem geschlossen System bleibt eine Erhaltungsgröße konstant.

Phänomenologische Gesetze: Es handelt sich um experimentell nachgewiesene Gesetze, welche bei der Modellbildung zusätzlich zu den Bilanzgleichungen Verwendung finden.

Aus den ermittelten Zustandsgleichungen der Teilsysteme kann nun das qualitative Gesamtmodell erstellt werden. Um für die einzelnen Zustände Werte in vergleichbaren Größenordnungen zu erhalten, ist Normierung der Ein- Ausgangs- und Zustandsgrößen sinnvoll. Als Normierungsfaktoren können Nominal- oder auch Maximalwerte gewählt werden.

2.2 Reglerentwurfsverfahren

2.2.1 Reglerentwurf im Frequenzbereich

Ausgangspunkt des Reglerentwurfs im Frequenzbereich ist die Übertragungsmatrix $\underline{G}(s)$ des Systems, die sich aus den Matrizen der Zustandsdarstellung berechnen lässt[1].

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}$$

Für technische Systeme gilt im Allgemeinen, dass kein direkter Durchgriff der Eingangsgrößen auf den Ausgang möglich ist, ihre Übertragungsmatrix vereinfacht sich zu

$$\underline{G}(s) = \underline{C}(s\underline{I} - \underline{A})^{-1}\underline{B}$$

Die Dimension der Zustandsgrößen wird mit n,die der Eingangsgrößen mit p und die der Ausgangsgrößen mit q bezeichnet. Im Folgenden soll $p = q$ gelten. $\underline{G}(s)$ ist dann eine (p,p) Matrix, deren Element $G_{kv}(s)$ diejenige Übertragungsfunktion darstellt, die die v-te Eingangsgröße mit der k-ten Ausgangsgröße verknüpft. Die Übertragungsfunktionen auf der Hauptdiagonalen werden als *Hauptstrecken* bezeichnet, die übrigen Übertragungs-funktionen beschreiben die *Koppelstrecken.* Für den Einsatz klassicher Eingrößen-regelungen werden nur die Hauptstrecken berücksichtigt und somit die Verkopplungen innerhalb des Modells vernachlässigt. Dann kann mit Hilfe der klassischen Verfahren im Frequenzbereich für jede Hauptstrecke jewieils ein Regler entworfen werden.

In unserem Versuch soll das Verfahren der Polstellenkompensation verwendet werden.

Polstellenkompensation mit einen PI/PID-Regler

Die Polstellenkompensation ist eine rechnerisch sehr einfache Synthesemaßnahme. Liegt die Übertragungsfunktion des offenen Kreises als reines Verzögerungssystem in der Form

$$F_O(s) = \frac{k_s}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)\cdots(1 + T_n s)}$$

vor, so wird man einen Regler mit I-Anteil(PI- oder PID-Regler) wählen, um stationäre Genauigkeit zu erzielen.

Aus der Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises kann anschließend die einzustellende Regelverstärkung bestimmt werden, indem man weitere Anforderungen an das Verhalten des geregelten Systems berücksichtigt. So wünscht man eine bestimmte Dämpfung oder will eine bestimmte Übergangszeit der Regelung realisieren.

Liegt die Übertragungsfunktion des geregelten offenen Kreises beispielsweise in der Form

$$F_O(s) = \frac{k_R}{s}$$

vor, ergibt sich der geschlossene Kreis zu

$$G(s) = \frac{k_R}{k_R + s}$$

Bei vorgegebener Übergangszeit $t_u \approx 3/k_R$ kann dann die Reglerverstärkung direkt berechnet werden.

2.2.2 Entkopplungsregelung nach Falb-Wolovich

Bei stark verkoppelten Strecken führt das im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Entwurfsverfahren im Frequenzbereich im Allgemeinen nicht zum gewünschten Ergebnis, weil die solche Vorgehensweise die internen Verknüpfungen im System nicht berücksichtigt. Abhilfe schaffen hier leistungsfähige Verfahren zum Entwurf von Mehrgrößenregelungen im Zustandsraum.

Zu diesen Verfahren zählt die Entkopplung nach Falb-Wolovich[1], die dann angewendet werden kann, wenn die Anzahl der Steuergrößen p mit der Anzahl der Ausgangsgrößen q übereinstimmt. Das Ziel dieser Reglermethodik besteht darin, die Strecke vollständig zu entkoppeln. Somit kann nun für jedes der p Eingrößensysteme eine entsprechende Wunschübertragungsfunktion vorgegeben werden, ein Verhalten, was sich z.B. mit den bekannten Reglermethoden im Frequenzbereich erzielen lässt.

Der durch die Gleichung $\underline{u} = -\underline{R}\underline{x} + \underline{S}\underline{w}$ beschriebene Entkopplungsansatz besteht aus der Zustandsrückführung $\underline{R}$ und dem Vorfilter $\underline{S}$. Vorfilter $\underline{S}$ und Zustandsregler $\underline{R}$ sind so zu wählen, dass jede Regelgröße y_i nur noch von der ihr zugeordneten Führungsgröße w_i beeinflusst wird, nicht jedoch von den anderen Führungsgrößen. Hier spielt die Differenzordnung einer Ausgangsgröße y eine grundlegende Rolle. Die Differenzordnung δ_i gibt die niedrigste Ableitung der Ausgangsgröße y_i an, auf die der Steuervektor $\underline{u}$ direkt zugreift. Die Differenzordnung δ_i ist somit die Ordnung des Nenners der Übertragungsfunktion des i-ten Eingrößensystems, die bei der Berechnung des Entkopplungsreglers als Erstes bestimmt wrid, dabei ergibt δ_i sich gemäß folgendem Schema aus dem ersten nicht verschwindenden Produkt $\underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{B}$:

$$\underline{c}_i^T \underline{B} = \underline{0}^T,$$

$$\underline{c}_i^T \underline{AB} = \underline{0}^T,$$

$$\vdots$$

$$\underline{c}_i^T \underline{A}^{\delta_i - 1} \underline{B} \neq \underline{0}^T,$$

wobei der Vektor $\underline{c}_i^T$ die i-te Zeile der Matrix $\underline{C}$ ist.

Im zweiten Schritt wird für jedes der p=q Eingrößensysteme durch Polvorgabe eine Wunschübertragungsfunktion

$$G_i(s) = \frac{M_{i0}}{s^{\delta_i} + M_{i\delta_i-1}s^{\delta_i-1} + \ldots + M_{i1}s + M_{i0}}, i = 1,\ldots,p$$

mit den Koeffizienten $M_{ij}, i = 1,\ldots,p, j = 0,\ldots,\delta_i - 1$,vorgegeben.

Im dritten Schritt können anschließend die zur Entkoplung notwendigen Matrizen $\underline{R}$ und $\underline{S}$ berechnet werden. Dazu berechnet man eine Matrix $\underline{D}^*$:

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1-1}\underline{B} \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_p-1}\underline{B} \end{bmatrix}.$$

Das Vorfilter $\underline{S}$, welches die stationäre Genauigkeit garantiert, ergibt sich dann nämlich zu $\underline{S} = \left(\underline{D}^*\right)^{-1}\underline{K}$ mit

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} M_{10} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_{20} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & M_{p0} \end{bmatrix}.$$

Die Parameter $\underline{S}$ sind also die Zählerkoeffizienten der $\underline{S}$.

Die Bestimmungsgleichung für die Zustandsrückführung $\underline{R}$ lautet:

$$\underline{R} = \left(\underline{D}^*\right)^{-1} \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T \underline{A}^{\delta_1} + \sum_{v=0}^{\delta_1-1} M_{1v}\underline{c}_1^T \underline{A}^v \\ \vdots \\ \underline{c}_p^T \underline{A}^{\delta_p} + \sum_{v=0}^{\delta_p-1} M_{pv}\underline{c}_p^T \underline{A}^v \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Der PI-Zustandsregler

Ein Zustandsreglerkonzept, das Störungen explizit mit einbezieht und zudem zur Erzielung der stationären Genauigkeit ohne Vorfilter auskommt, ist die PI-Zustandsregelung.[1]

In PI-Zustandsregelung wird zusätzlich zu der gewohnten Zustandsrückführung $\underline{R_X}$ der Ausgangsgrößenvektor $\underline{y}$ zurückgeführt und mit dem Führungsvektor $\underline{w}$ verglichen. Der so ermittelte Differenzvektor $\underline{\dot{e}}$ ist dann Eingangsgröße einer klassischen Struktur eines PI-Reglers.

Wenn das Gesamtsystem stabil ist, sind im stationären Zustand die Eingangsgrößen $\underline{\dot{e}} \equiv \underline{0}$. Daraus folgt $\underline{y_S} \equiv \underline{w_S}$, damit die Störgrößezim stationären Zustand beseitigt ist und die Führungsgröße $\underline{w}$ identisch mit der Regelgröße $\underline{y}$ ist.

Zur Durchführung des eigentlichen Entwurfs lassen sich folgende Gleichungen für diese PI-Zustandsregelung aufstellen:

$$\begin{gathered} \underline{\dot{x}} = \underline{Ax} + \underline{Bu} + \underline{Ez} \\ \underline{\dot{e}} = \underline{w} - \underline{y} \\ \underline{y} = \underline{Cx} \\ \underline{u} = -\underline{R_X}\underline{x} + \underline{R_I}\underline{e} + \underline{R_P}\underline{\dot{e}} \end{gathered} .$$

Zur Bestimmung der unbekannten Matrizen $\underline{R_X}, \underline{R_I}, \underline{R_P}$ wird zunächst $\underline{w} = \underline{0}, \underline{z} = \underline{0}$ angenommen.

Dann werden die folgenden Zustandsgleichungen einer erweiterten Strecke mit einer entsprechend erweiterten Zustandsrückführung von den obigen Beziehungen ausgerehnet:

$$\begin{bmatrix}\dot{\underline{x}}\\ \underline{e}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{A} & \underline{0}\\ -\underline{C} & \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{A}^*} \begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{e}\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}\underline{B}\\ \underline{0}\end{bmatrix}}_{\underline{B}^*} \underline{u},$$

$$\underline{u} = -\underbrace{[\underline{R}_X + \underline{R}_P \underline{C}, -\underline{R}_J]}_{\underline{\mathrm{R}}} \begin{bmatrix}\underline{x}\\ \underline{e}\end{bmatrix}.$$

Die erweiterte Zustandsrückführung $\underline{R}$ kann nun mittels Polvorgabe oder als Riccati-Regler berechnet werden. $\underline{R}$ ist jetzt in der Form $\underline{R} = [\hat{\underline{R}}, -\underline{R}_J]$ mit $\hat{\underline{R}} = \underline{R}_X + \underline{R}_P \underline{C}$.

Polvorgabe und optimale Regelung

Eine Schwierigkeit beim Reglerentwurf ist die Wahl geeigneter Pole, da die Pole wesentlichen Einfluss auf die Dynamik des Systems haben. Die Polauswahl ist naturgemäß eine Trial-and-error-Methodik. Deshalb hat der Modellbildung und der Simulation des Systems auf dem Computer eine hervorragende Bedeutung. Auf der Basis einiger grundsätzlichen Regeln kann man noch mit Hilfe der Erfahrungen die Pole festlegen. 3 grundsätzliche Regeln sind folgenderweise aufgelistet:

(1) Je weiter die Pole nach links verschoben werden, desto schneller wird das System.

(2) Je weiter die Pole nach links verschoben werden, desto größer sind die benötigen Stellgrößen.

(3) Die Eigenfrequenz einer Schwingung, die ein komplexes Polpaar verursacht, entspricht dem Imaginärteil dieses Polpaars.

In der Regel sind die Pole des geregelten Systems in der komplexen Ebene links von den Streckenpolen gewählt, damit die dynamischen Vorgänge bei der Regelung schneller abgeklungen sind. Jedoch dürfen die Streckenpole auch nicht zu weit nach links verschoben werden, um zu hohe Stellgrößen oder gar Stellanschläge zu vermeiden. Außerdem werden die Pole möglichst auf der reellen Achse platziert, um eventuelle Schwingungen durch die Regelung zu dämpfen.

Es gibt eine alternative Möglichkeit, um einen Regler ohne explizite Vorgabe der Pole zu erhalten. Die besteht im Entwurf einer optimalen Regelung[1].

Ziel eines solchen Optimal-Reglers z.B. Riccati-Reglers ist es, den Zustand $\underline{x}$ des Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u}$ aus einem beliebigen Anfangspunkt $\underline{x}_0$ optimal in den Arbeitspunkt $\underline{x} = \underline{0}$zu überführen. Ein Gütemaß

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\underline{x}^T \underline{Q}\underline{x} + \underline{u}^T \underline{S}\underline{u}\right) dt$$

soll minimiert werden, dabei sind die Matrizen $\underline{Q}, \underline{S}$ diagonal und positiv definit, mit denen Zustände bzw. Stellgrößen gewichtet und somit deren Verlauf beeinflusst werden kann. Mit dem Ansatz $\underline{u} = -\underline{R}\underline{x}$ bekommt man durch Minimierung des Gütmaßes die Bestimmungsgleichung $\underline{R} = \underline{S}^{-1}\underline{B}^T\underline{P}$, wobei die Matrix $\underline{P}$ die Lösung der Matrix-Riccati-Gleichung

$$\underline{P}\underline{B}\underline{S}^{-1}\underline{B}^T\underline{P} - \underline{P}\underline{A} - \underline{A}^T\underline{P} - \underline{Q} = \underline{0}$$

darstellt. Die Eigenwerte des geregelten Systems bilden die im Sinne des Gütemaßes optimale Polkonfiguration des Systems.

3. Aufgaben

3.1 Modellbildung des Hinterachsprüfstandes

(a) Ermitteln Sie das mathematisches Zustandsraummodell des Hinterachsprüfstands aus dem mechanischen Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der Reibmomente des Differentialgetriebes.

(b) Bestimmen Sie das quantitative normierte mathematische Modell.

(c) Transformieren Sie das System mit Hilfe von MATLAB in den Frequenzbereich und plotten Sie die (invertierte) Übertragungsfunktion des dritten Eingangs auf den dritten Ausgang. Approximieren Sie die Übertragungsfunktion durch ein PT1-Glied, mittels geeigneter Wahl der Parameter K und T.

Antwort:

(a) **Ermittelung des Zustandsraummodells**

Das Modell ist in folgender Form angegeben:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{Ax} + \underline{Bu}\ ,\ \underline{y} = \underline{Cx}$$

Als Zustandsgrößen sind die Winkelgeschwindigkeit Ω_v , Ω_r und Ω_l der Achsen und das Kardanwellenmoment M_{cw} zu wählen. Von ihnen sind das Kardanwellenmoment sowie die Winkelgeschwindigkeiten der linken und rechten Achsen Ausgangsgrößen, als Eingangsgrößen liegen die Momente M_v , M_r und M_l an den Achsen vor.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \Omega_v \\ M_{cw} \\ \Omega_r \\ \Omega_l \end{bmatrix}, \underline{u} = \begin{bmatrix} M_v \\ M_r \\ M_l \end{bmatrix}, \underline{y} = \begin{bmatrix} M_{cw} \\ \Omega_r \\ \Omega_l \end{bmatrix}$$

Zuerst wird das System in die eingezeichneten Teilsysteme (gestrichelte Linien) zerlegen.

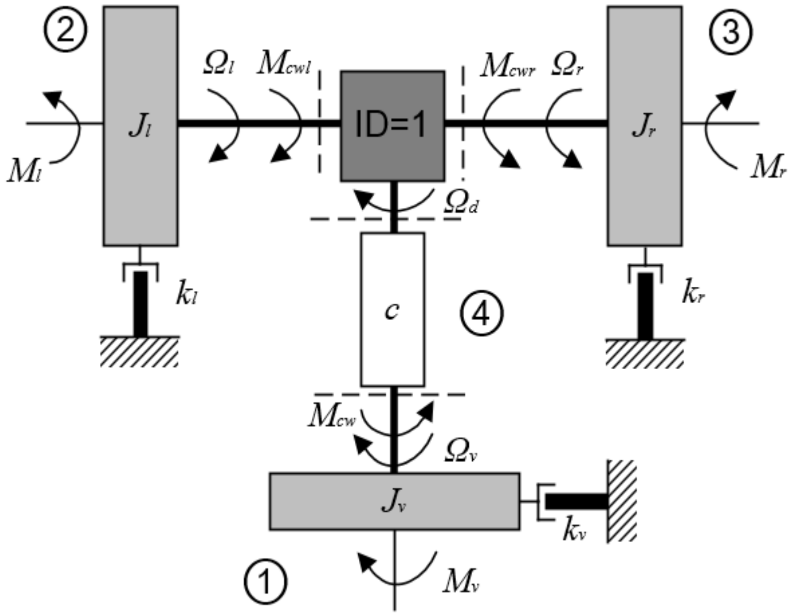

Abbildung 3.1 Das mechanische Ersatzschaltbild der Strecke

Für die ersten drei Teilsysteme ist der Drehimpuls die Erhaltungsgröße:

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dJ\vec{\omega}}{dt} = J\dot{\vec{\omega}}$$

Die vierte Zustandsdifferentialgleichung lässt sich mit dem linearen Federgesetz

$$M_{cw} = c\varphi_{cw}$$

ermitteln.

Für die Torsion der Kardanwelle gilt der Zusammenhang:

$$\dot{\varphi}_{cw} = \Omega_v - \Omega_d$$

Das in Abbildung 3.2 dargestellte ideale Differentialgetriebe teilt das von der Kardanwelle übertragene Moment gemäß

$$M_{cwr} = M_{cwl} = \frac{1}{2} IDM_{cw}$$

auf. Für das vorliegende Differential gilt ID=1. Deshalb gilt

$$M_{cwr} = M_{cwl} = \frac{1}{2} M_{cw}.$$

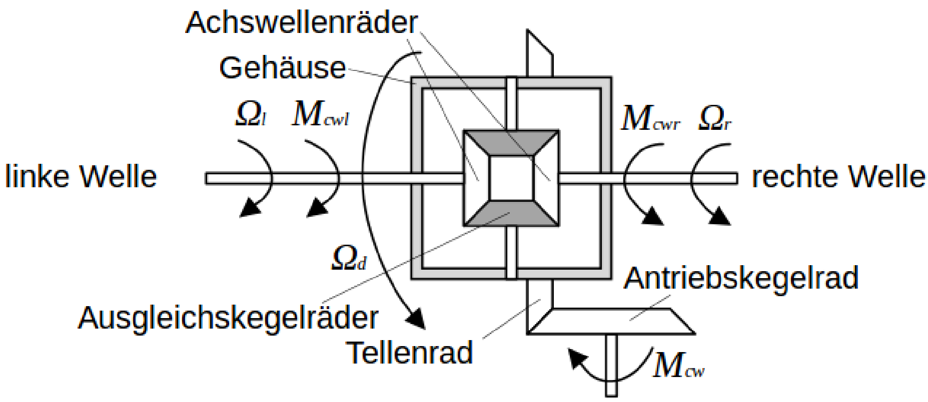

Abbildung 3.2 Aufbau des Differentialgetriebes

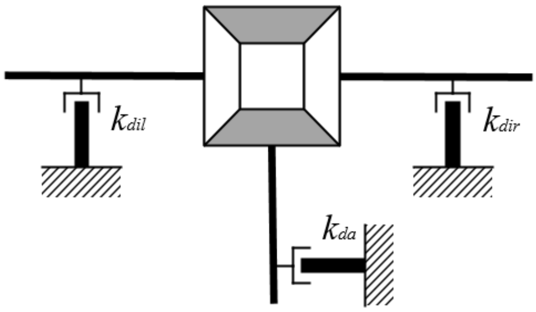

Abbildung 3.3 Ersatzschaltbild des Differentialgetriebes

Das über das Antriebskegelgrad angetriebene Tellerad dreht sich mithilfe

$$\Omega_d = \frac{\Omega_r + \Omega_l}{2}$$

und ist mit dem Gehäuse des Differentialgetriebes fest verbunden. Die Reibmomente eines realen Differentialgetriebes können in zwei Anteile aufgeteilt werden:

Der äußere Teil der Reibung ist abhängig von der Winkelgeschwindigkeit Ω_d, während der innere Anteil von der Differenz der Windelgeschwindigkeiten Ω_r und Ω_l abhängt. Das äußere Reibmoment $M_{ar|l}$, das jeweils auf die rechte bzw. linke Achse wirkt, berechnet sich zu

$$M_{ar} = \frac{1}{2} ID k_{dar} \Omega_d = \frac{1}{4} k_{dar} (\Omega_r + \Omega_l) \ ,$$

$$M_{al} = \frac{1}{2} ID k_{dal} \Omega_d = \frac{1}{4} k_{dal} (\Omega_r + \Omega_l) \ .$$

Die inneren Reibmomente$M_{ir|l}$ wirken ebenfalls jeweils ausschließlich auf die rechte bzw. linke Achse. Es gilt

$$M_{ir} = k_{dir} (\Omega_r - \Omega_l) \ ,$$

$$M_{il} = k_{dil} (\Omega_l - \Omega_r) \ .$$

k_{da} und k_{di} stellen dabei die dynamischen Reibkoeffizienten außen und innen am Differential-getriebe dar.

Zur Vereinfachung werden die folgende Bezeichnungen bei der Aufstellung der Zustands-differentialgleichungen benutzt:

Teilsystem rechter Motor: $k_{r1} = k_r + k_{dir} + \frac{1}{4}k_{dar}$,

$$k_{r2} = k_{dir} - \frac{1}{4}k_{dar},$$

Teilsystem linker Motor: $k_{l1} = k_l + k_{dil} + \frac{1}{4}k_{dal}$,

$$k_{l2} = k_{dil} - \frac{1}{4}k_{dal}.$$

Zuerst wird die vorne Antriebswelle betrachtet. Nach der Erhaltungssätze der Drehimpuls gilt:

$$J_v\dot{\Omega}_v = M_v - k_v\Omega_v - M_{cw}.$$

Für die rechte Antriebswelle gilt:

$$J_r\dot{\Omega}_r = M_{cwr} - k_r\Omega_r - M_r - M_{ar} - M_{ir},$$

Dabei ist M_{cwr} das Drehmoment an der rechten Antriebswelle, M_r das Antriebs-moment der rechten Motoren, M_{ar} und M_{ir} das äußere und innere Reibmoment.

$$M_{cwr} = \frac{1}{2}M_{cw},$$

$$M_{ar} = \frac{1}{4}k_{dar}(\Omega_r + \Omega_l),$$

$$M_{ir} = k_{dir}(\Omega_r - \Omega_l).$$

Dann erhält man die Zustandsdifferentialgleichung der rechten Well:

$$J_r\dot{\Omega}_r = \frac{1}{2}M_{cw} - (k_r + k_{dir} + \frac{1}{4}k_{dar})\Omega_r + (k_{dir} - \frac{1}{4}k_{dar})\Omega_l - M_r = \frac{1}{2}M_{cw} - k_{r1}\Omega_r + k_{r2}\Omega_l - M_r.$$

Für die linke Antriebswelle gelten:

$$J_l\dot{\Omega}_l = M_{cwl} - k_l\Omega_l - M_l - M_{al} - M_{il},$$

$$J_l\dot{\Omega}_l = \frac{1}{2}M_{cw} - k_{l2}\Omega_l + k_{l1}\Omega_l - M_l.$$

Aus dem Zusammenhang der Torsion der Kardanwelle erhält man:

$$\dot{M}_{cw} = c\dot{\varphi}_{cw} = c(\Omega_v - \Omega_d) = c\Omega_v - \frac{c\Omega_v}{2} - \frac{c\Omega_v}{2}$$

Dann werden alle Zustandsdifferentialgleichungen zusammengesetzt:

$$\dot{\Omega}_v = \frac{M_v}{J_v} - \frac{k_v}{J_v}\Omega_v - \frac{M_{cw}}{J_v},$$

$$\dot{M}_{cw} = c\Omega_v - \frac{c}{2}\Omega_v - \frac{c}{2}\Omega_v,$$

$$\dot{\Omega}_r = \frac{1}{2J_r}M_{cw} - \frac{k_{r1}}{J_r}\Omega_r + \frac{k_{r2}}{J_r}\Omega_l - \frac{M_r}{J_r},$$

$$\dot{\Omega}_l = \frac{1}{2J_l}M_{cw} - \frac{k_{l2}}{J_l}\Omega_l + \frac{k_{l1}}{J_l}\Omega_l - \frac{M_l}{J_l}.$$

Wird die Ein-/ Ausgangs- und Zustandsgrößen darin eingesetzt, erhält man:

$$\dot{x}_1 = -\frac{k_v}{J_v}x_1 - \frac{1}{J_v}x_2 + \frac{1}{J_v}u_1,$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 - \frac{c}{2}x_3 - \frac{c}{2}x_4,$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{2J_r}x_2 - \frac{k_{r1}}{J_r}x_3 + \frac{k_{r2}}{J_r}x_4 - \frac{1}{J_r}u_2,$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{2J_l}x_2 + \frac{k_{l2}}{J_l}x_3 - \frac{k_{l1}}{J_l}x_4 - \frac{1}{J_l}u_3.$$

Im Zustandsraummodell gilt:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{Ax} + \underline{Bu}\ ,\ \underline{y} = \underline{Cx}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{k_v}{J_v} & -\frac{1}{J_v} & 0 & 0 \\ c & 0 & -\frac{c}{2} & -\frac{c}{2} \\ 0 & \frac{1}{2J_r} & -\frac{k_{r1}}{J_r} & \frac{k_{r2}}{J_r} \\ 0 & \frac{1}{2J_r} & \frac{k_{l2}}{J_l} & -\frac{k_{l1}}{J_l} \end{bmatrix},\ \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_r} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{J_l} \end{bmatrix},\ \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) **Normierung**

Zur Vergleichbarkeit der Werte der einzelnen Zustände ist Normierung nötig. Als normierte Größen erhält man:

$$\widetilde{\Omega_i} = \frac{\Omega_i}{\Omega_N}\ ,\ \widetilde{M_i} = \frac{M_i}{M_N}\ ,\ \tilde{c} = \frac{c}{c_N}\ ,\ \dot{\tilde{\Omega}}_i = \frac{d\widetilde{\Omega_i}}{d\tilde{t}} = \frac{d\Omega_i/\Omega_N}{dt/t_N} = \frac{t_N}{\Omega_N}\dot{\Omega}_i\ ,\ \dot{\tilde{M}}_i = \frac{t_N}{M_N}\dot{M}_i$$

Dann erhält man die normierten Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\dot{\tilde{\Omega}}_v = -\frac{k_v t_N}{J_v}\tilde{\Omega}_v - \frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N}\widetilde{M}_{cw} + \frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N}\widetilde{M}_v,$$

$$\dot{\tilde{M}}_{cw} = \frac{c}{c_N}\tilde{\Omega}_v - \frac{c}{2}c_N\tilde{\Omega}_r - \frac{c}{2}c_N\tilde{\Omega}_l,$$

$$\dot{\tilde{\Omega}}_r = \frac{M_N t_N}{2J_r \Omega_N}\widetilde{M}_{cw} - \frac{k_{r1} t_N}{J_r}\tilde{\Omega}_r + \frac{k_{r2} t_N}{J_r}\tilde{\Omega}_l - \frac{M_N t_N}{J_r \Omega_N}\widetilde{M}_r,$$

$$\dot{\tilde{\Omega}}_l = \frac{M_N t_N}{2J_l \Omega_N}\widetilde{M}_{cw} + \frac{k_{l2} t_N}{J_l}\tilde{\Omega}_r - \frac{k_{l1} t_N}{J_l}\tilde{\Omega}_l - \frac{M_N t_N}{J_l \Omega_N}\widetilde{M}_l.$$

Werden die Ein-/ Ausgangs- und Zustandsgrößen darin eingesetzt, erhält man:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -\frac{k_v t_N}{J_v}\tilde{x}_1 - \frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N}\tilde{x}_2 + \frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N}\tilde{u}_1,$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = \frac{c}{c_N}\tilde{x}_1 - \frac{c}{2}c_N\tilde{x}_3 - \frac{c}{2}c_N\tilde{x}_4,$$

$$\dot{\tilde{x}}_3 = \frac{M_N t_N}{2J_r \Omega_N}\tilde{x}_2 - \frac{k_{r1} t_N}{J_r}\tilde{x}_3 + \frac{k_{r2} t_N}{J_r}\tilde{x}_4 - \frac{M_N t_N}{J_r \Omega_N}\tilde{u}_2,$$

$$\dot{\tilde{x}}_4 = \frac{M_N t_N}{2J_l \Omega_N}\tilde{x}_2 + \frac{k_{l2} t_N}{J_l}\tilde{x}_3 - \frac{k_{l1} t_N}{J_l}\tilde{x}_4 - \frac{M_N t_N}{J_l \Omega_N}\tilde{u}_3.$$

Im Zustandsraummodell gilt: $\underline{\dot{\tilde{x}}} = \underline{A\tilde{x}} + \underline{B\tilde{u}}\ ,\ \underline{\tilde{y}} = \underline{C\tilde{x}}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -\frac{k_v t_N}{J_v} & -\frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N} & 0 & 0 \\ \frac{c}{c_N} & 0 & -\frac{c}{2c_N} & -\frac{c}{2c_N} \\ 0 & \frac{M_N t_N}{2J_r \Omega_N} & -\frac{k_{r1} t_N}{J_r} & \frac{k_{r2} t_N}{J_r} \\ 0 & \frac{M_N t_N}{2J_r \Omega_N} & \frac{k_{l2} t_N}{J_l} & -\frac{k_{l1} t_N}{J_l} \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{M_N t_N}{J_v \Omega_N} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{M_N t_N}{J_r \Omega_N} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{M_N t_N}{J_l \Omega_N} \end{bmatrix}, \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mit MATLAB erhält man:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.996 & -1.1141 & 0 & 0 \\ 73.2142 & 0 & -36.6071 & -36.6071 \\ 0 & 0.1519 & -0.2241 & -0.1049 \\ 0 & 0.1519 & -0.0817 & -0.5035 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1.1141 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3038 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3038 \end{bmatrix}.$$

c) **Transformation des Systems in den Frequenzbereich und Plotten der Übertragungsfunktion. Approximation der Übertragungsfunktion durch ein PT1-Glied.**

Der Code im MATLAB ist wie folgt geschrieben. Damit erhält man die Matrizen der Zustandsraumdarstellung. Danach wird die Übertragungsfunktion des dritten Eingangs auf den dritten Ausgang mit der Funktion „ss2tf“ berechnet.

$$G_{33} = \frac{-0.3038s^3 - 0.3616s^2 - 26.54s - 7.187}{s^4 + 1.694s^3 + 93.5s^2 + 73.12s + 11.41}$$

```
% Initialierung
clear
close all
clc

% Parameter
j_v=3e-3;
j_r=11e-3;
j_l=11e-3;
k_r1=2.4655e-3;
k_r2=-1.1534e-3;
k_l1=5.5386e-3;
k_l2=-8.9816e-4;
k_v=2.8981e-3;
c=0.2447;
omega_n=104.72;
m_n=0.35;
t_n=1;
c_n=m_n/(omega_n*t_n);

% Matrizen des Modells
A=[-k_v/j_v          -m_n/(j_v*omega_n)         0                      0 ;
   c*omega_n/m_n          0             -c*omega_n/(2*m_n)  -c*omega_n/(2*m_n) ;
   0                  m_n/(2*j_r*omega_n)     -k_r1/j_r              k_r2/j_r ;
   0                  m_n/(2*j_l*omega_n)      k_l2/j_l              -k_l1/j_l    ]
B=[m_n/(j_v*omega_n)    0                 0;
          0             0                 0;
          0      -m_n/(j_r*omega_n)       0 ;
          0             0        -m_n/(j_l*omega_n)]
C=[0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1]
D=zeros(3,3);

% Übertragungsfunktion berechnen
[M,N]=ss2tf(A,B,C,D,3)
G=tf(M(3,:),N)

% Übertragungsfunktion plotten
nyquist(G)   % Nyquist-Diagramm
figure;
pzmap(G)   % Pole und Nullstellen plotten
figure;
bode(G)    % Boden-Diagramm
figure;
step(-G)    %Sprungantwort
```

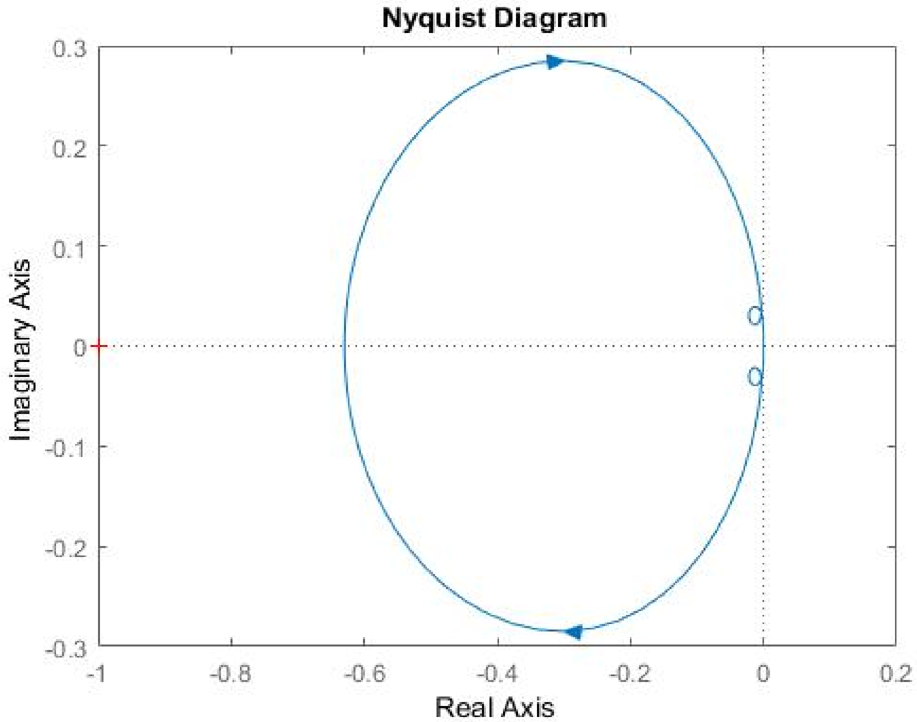

Abbildung 3.4 Nyquist-Diagramm

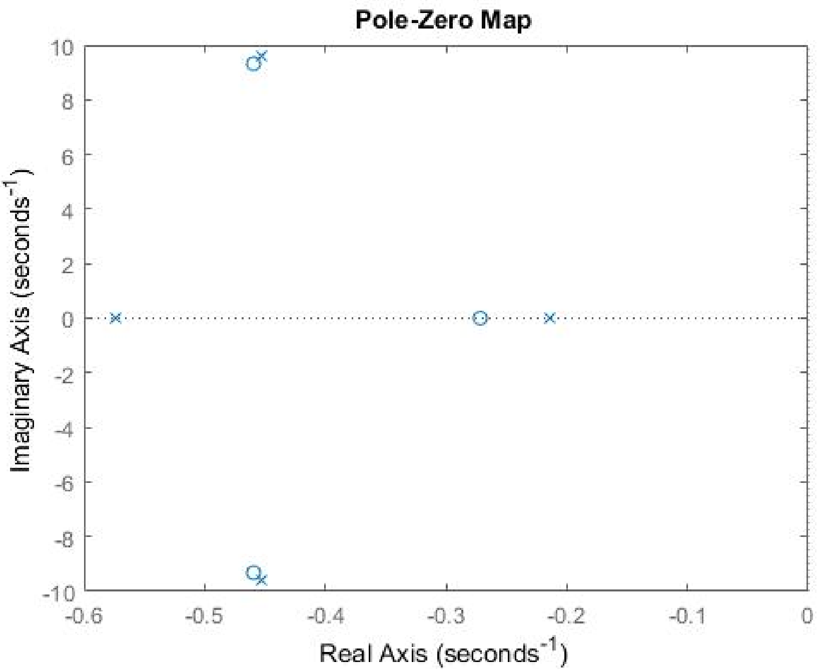

Abbildung 3.5 Pole und Nullstellen

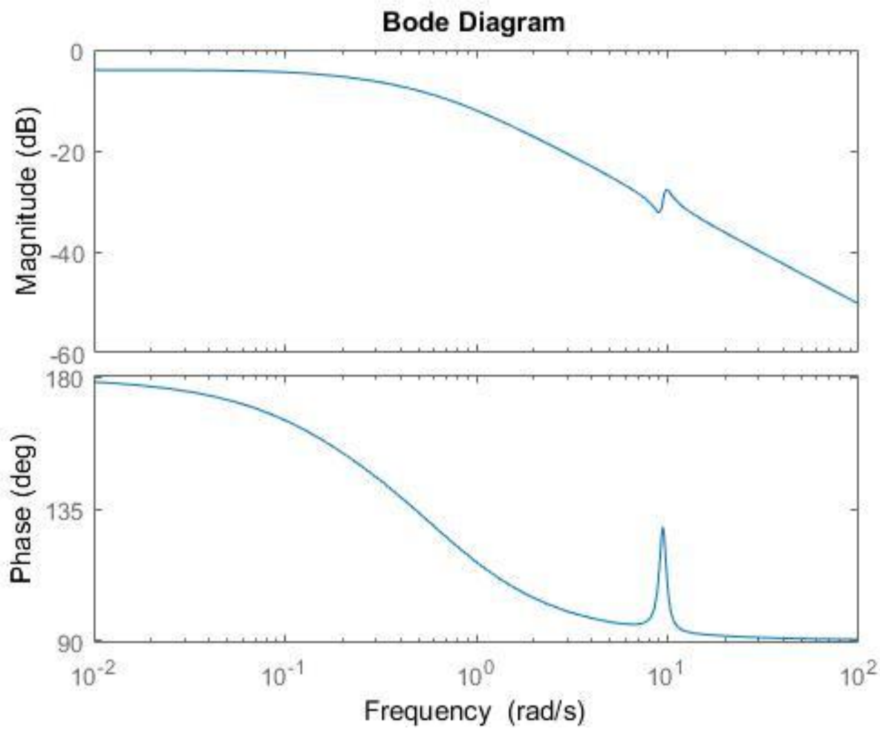

Abbildung 3.6 Boden-Diagramm

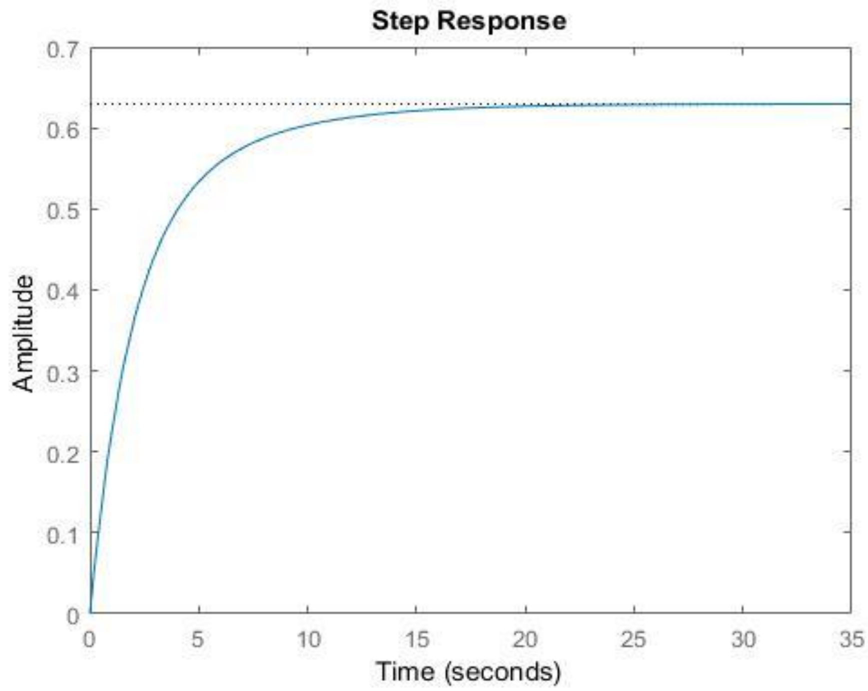

Abbildung 3.7 Sprungsantwort

Aus dem Boden-Diagramm kann man den Verstärkungsfaktor K bekommen.

$$20\log K = -4.018 \Rightarrow K = 0.6279$$

Aus dem Plotten der Polen kann man die Kompensation der Pole und Nullstellen schauen, dass der bleibende Pol -0.574 ist. Dann kann man die Zeitkonstante berechnen:

$$T = \frac{-\frac{1}{-0.574}}{0.6297} = 2.766.$$

Die approximierte Funktion ist:

$$G = \frac{0.6297}{2.766s + 1}$$

Man kann die Sprungantwort der 2 Funktionen vergleichen. Die Approximation ist ziemlich gut.

```
K=0.6297;
T=2.766;
m=[0 K];
n=[T 1];
G1=tf(m,n)
figure;
step(-G)
hold on
step(G1,'r')
```

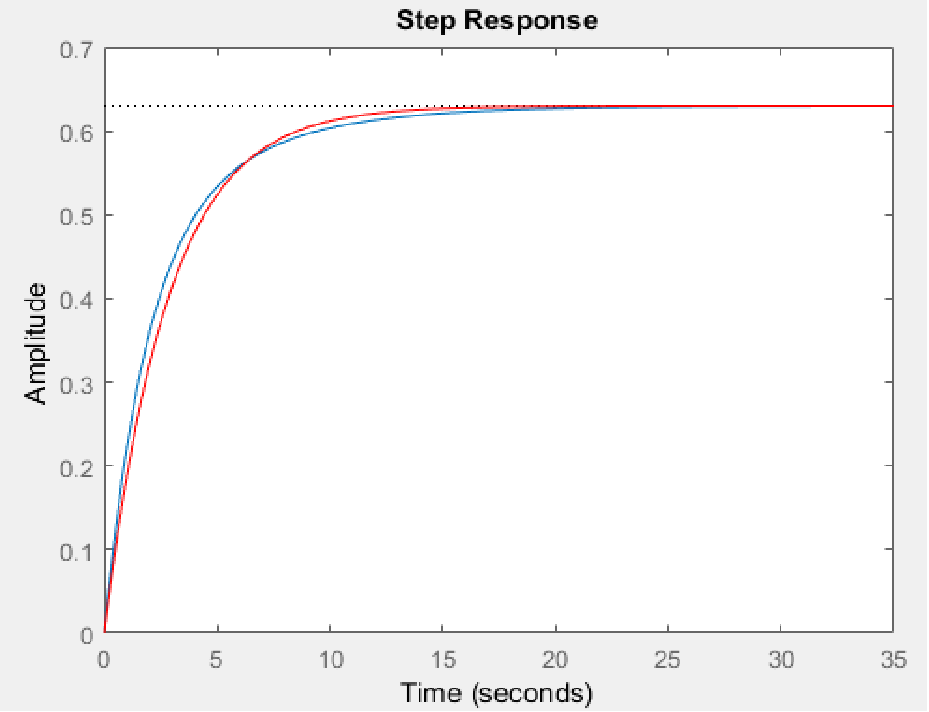

Abbildung 3.8 Sprungantwort der originalen Funktion (blau) und der approximierten Funktion (rot)

3.2 Reglerentwurf und Ergebnisse

3.2.1 PID-Regelung

Antwort:

Im Folgenden werden die Hauptstrecken des Hinterachsprüfstandes näherungsweise durch folgende Übertragungsfunktionen wiedergegeben.

$$G_{11}(s) = \frac{81.5606}{s^2 + 0.966s + 81.5606}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-0.3038}{s + 0.2241}$$

$$G_{22}(s) = \frac{-0.3038}{s + 0.5035}$$

Entwerfen wir jetzt jeweils einen PID-Regler für die Strecken. Mit Berücksichtigung der Übergangszeit sollen die Übertragungsfunktionen der Strecken die Form

$$G(s) = \frac{k_r}{s + k_r}, k_r > 1$$

haben. Erstens wählen wir die Übergangszeit ungefähr als 3s, dann ist k_r ungefähr 1.

Für $G_{11}(s) = \frac{81.5606}{s^2+0.966s+81.5606}$, der PID-Regler R_1 hat die Form wie folgt,

$$R_1 = k_1 \frac{D_1 s^2+P_1 s+I_1}{s},$$

dann bekommen wir die geregelte Strecke,

$$G_1(s) = G_{11} * R_1 = \frac{81.5606}{s^2 + 0.966s + 81.5606} * k_1 \frac{D_1 s^2 + P_1 \mathrm{s} + I_1}{s}$$

nach der Polstellenkompensation bekommen wir,

$$D_1 = 1, P_1 = 0.966, I_1 = 81.5606,$$

$$G_1(s) = 81.5606 \frac{k_1}{s},$$

und die Übertragungsfunktion des geschlossenen Kreises

$$G(s) \frac{81.5606 k_1}{s+81.5606 k_1},$$

dann bekommen wir

$$k_1 = 1/81.5606 \approx 0.0123$$

dann bekommen wir die PID-Koeffiziente von R_1

$$D_1 = 0.0123, P_1 = 0.0119, I_1 = 1 .$$

Ähnlicherweise kann man die PID-Koeffiziente von R_2und R_3ausrechnen,

$$D_2 = 0, P_2 = -3.2916, I_2 = -0.7376,$$

$$D_3 = 0, P_3 = -3.2916, I_3 = -1.6573 .$$

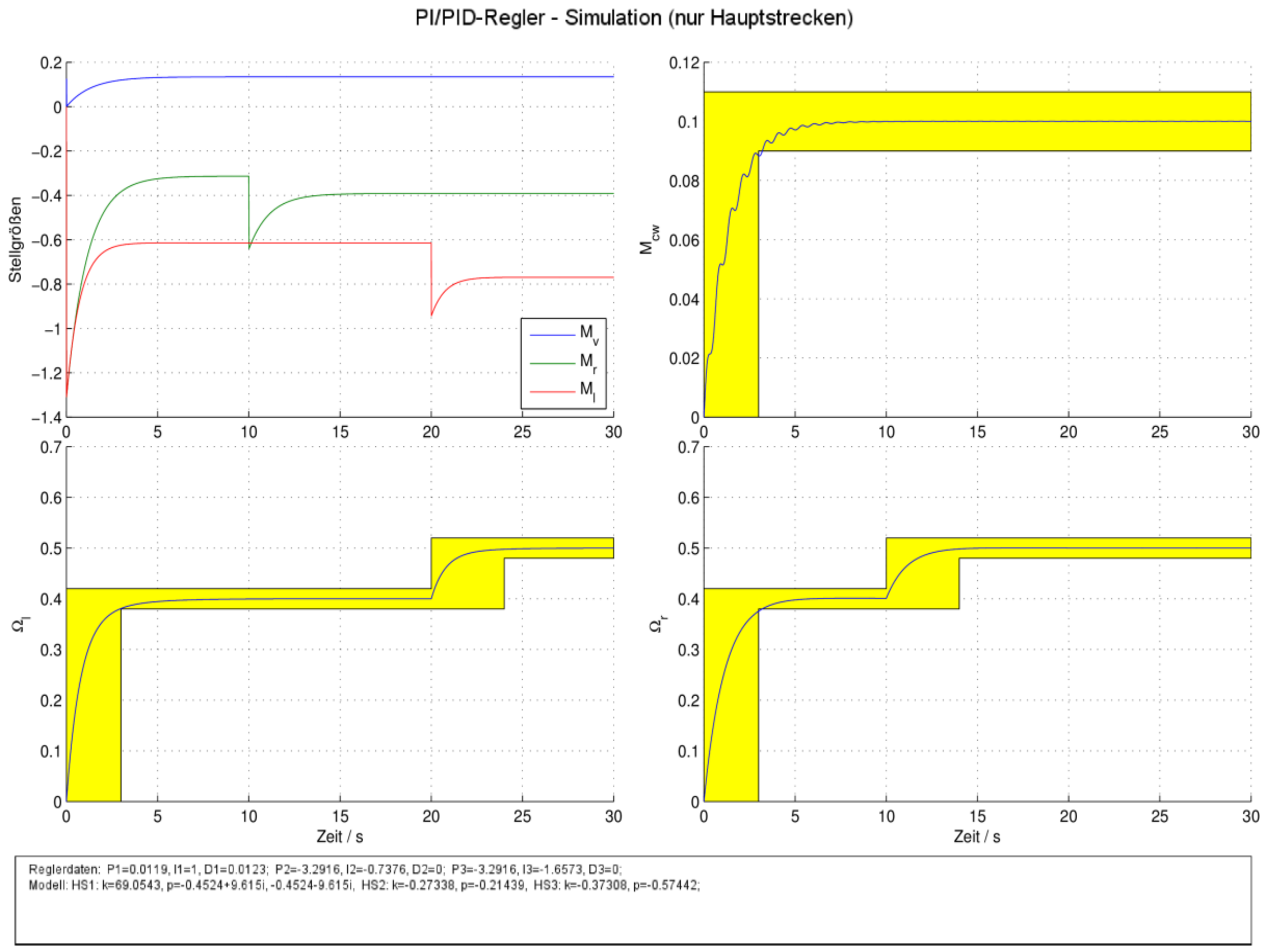

Abbildung 3.9 Simulationsergebnis der PID-Regelung(1)

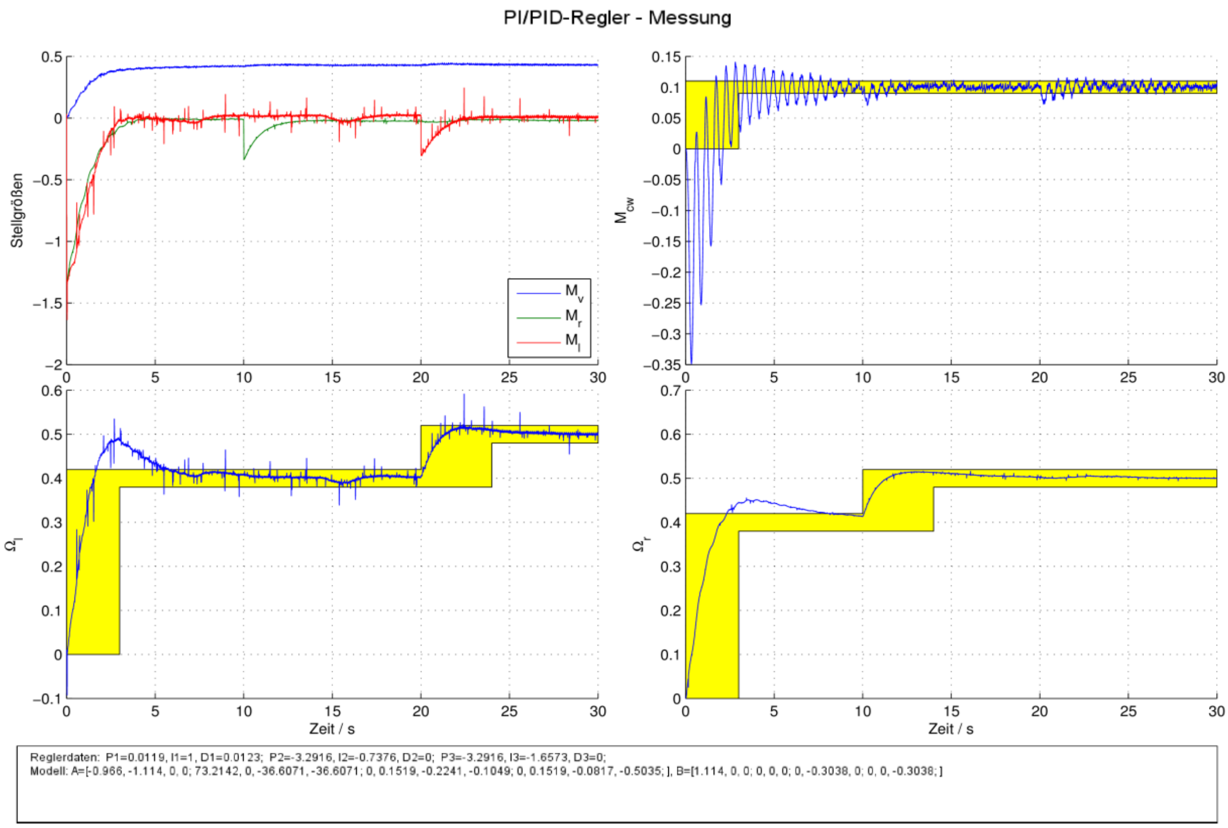

Abbildung 3.10 Testergebnis der PID-Regelung(1)

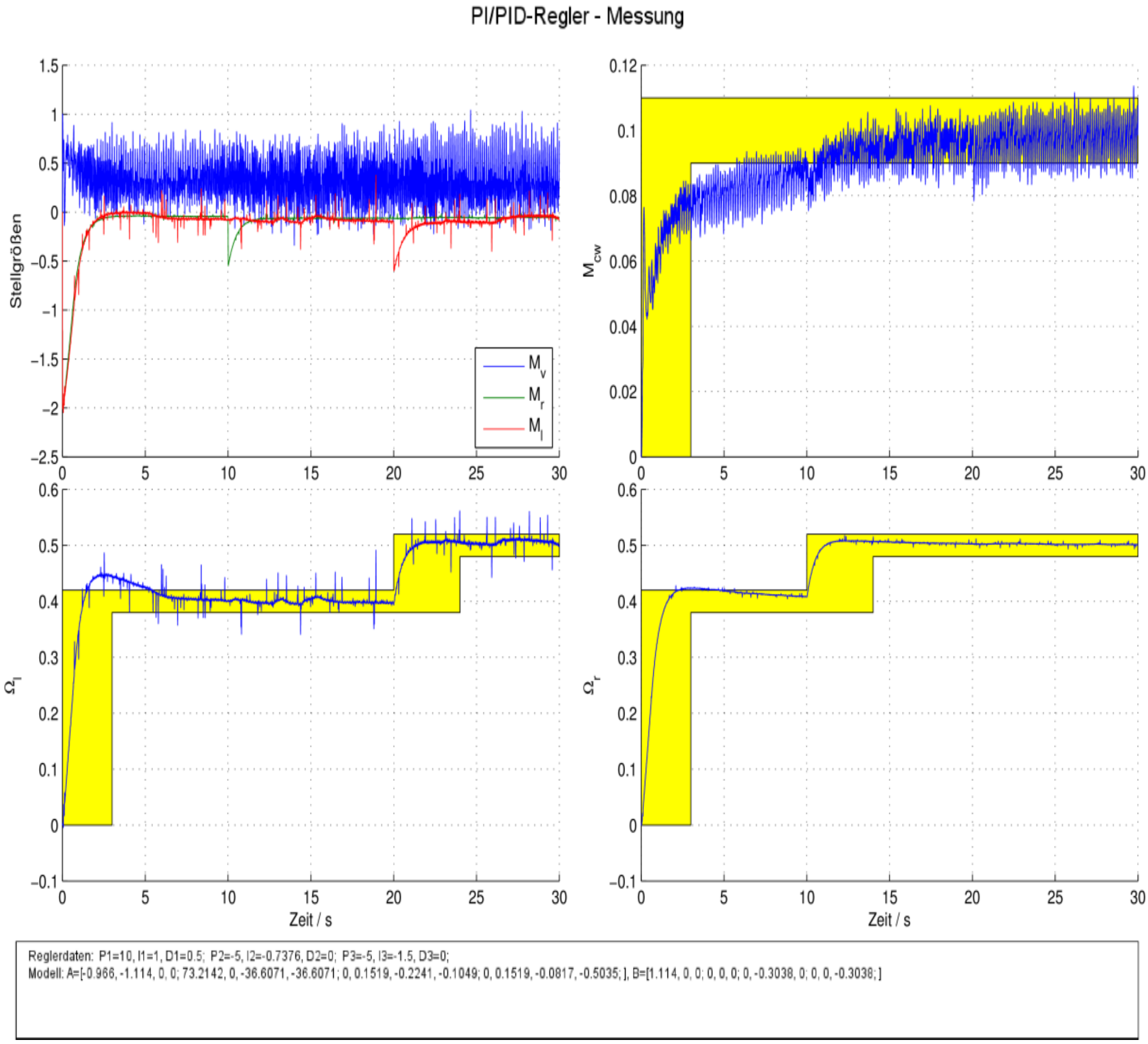

Abbildung 3.11 Testergebnis der PID-Regelung(2)

In Abbildung 3.10 gibt es Schwankung im M_{cw} und Überschwingen in beiden Winkelgeschwindigkeiten. Deswegen erhöhen wir den D-Teil vom Regler 1 und das Verhältnis von P und I teil der Winkelgeschwindigkeiten.

Von Abbildung 3.11 kann man sehen, dass die Überschwingen verkleinert werden und die Schwankung im M_{cw} verschinwindet (neue Schwankung ist vom Rausch verursacht). Aber die Übergangszeit vom M_{cw} ist zu lang. Um das Ergebnis noch besser zu machen, haben wir noch ein paar Parameter ausprobiert. Endlich bekommen wir,

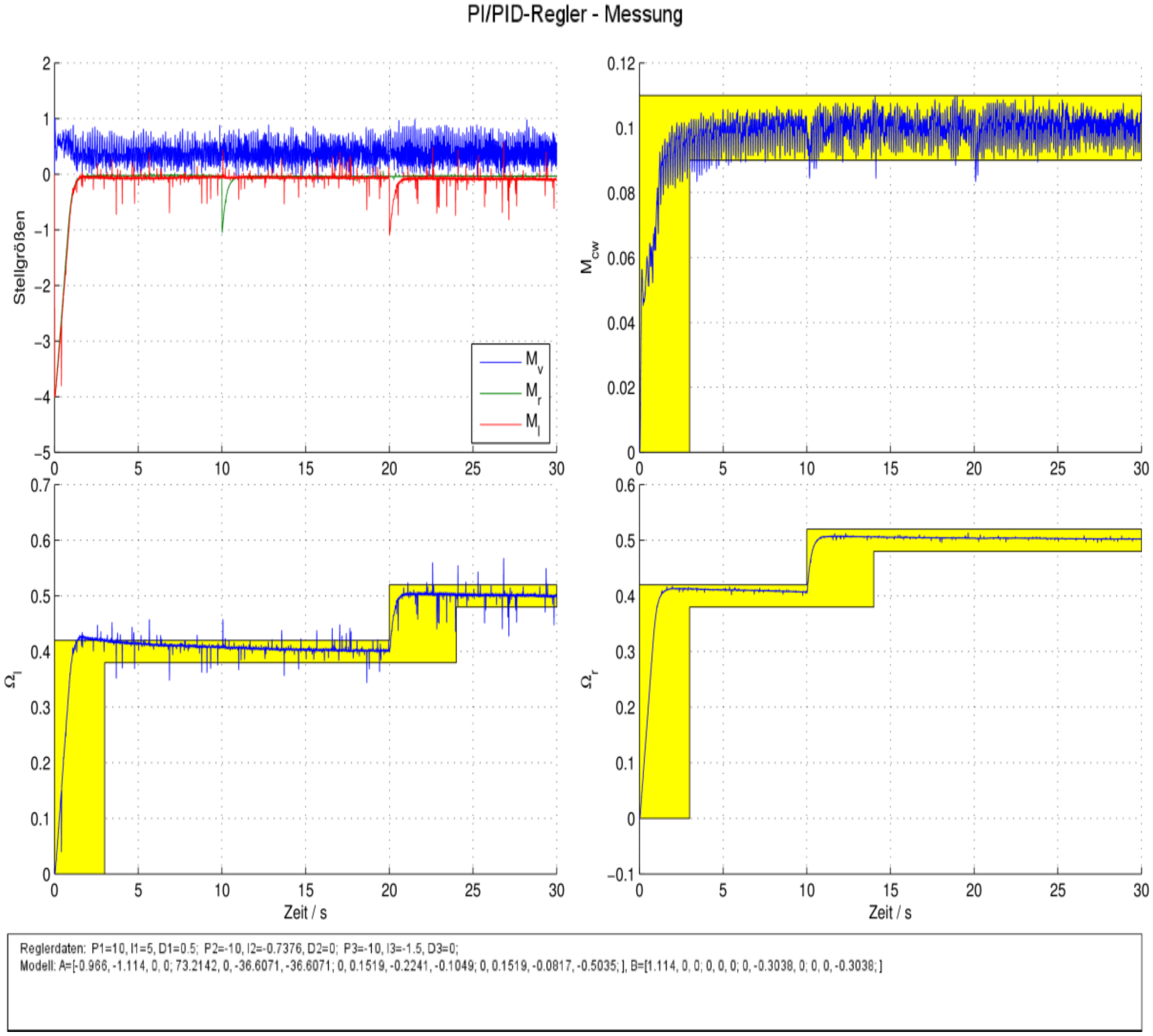

Abbildung 3.12 Testergebnis der PID-Regelung(3)

Man kann sehen, dass die Kurven im Toleranz bleiben können. Außerdem kann das Ergebnis noch verbessert werden.

Die Polstellenkompensation mit PID-Regler ist rechnerisch sehr einfach. Aber es ist vorausgesetzt, dass die Polen der Regelstecke stabil sein sollten. Ansonsten führt die Polstellenkompensation zu einem instabilen System. Außerdem muss die Regelstrecke aus dem gleichen Grund minimalphasig sein. Der Nachteil dieser Methode ist, dass die Koppelstrecken vernachlässigt werden. Deshalb muss man beim Reglerentwurf viele Parameter Sätze ausprobieren. Bei Parameterschwankungen wird das Ergebnis dieser Methode schlechter.

3.2.2 Entkopplungsregelung

Implementieren Sie einen Entkopplungsregler nach Falb-Wolovich.

(a) Prüfen Sie hierzu zunächst ob die Voraussetzung für die Entkopplung erfüllt sind.

(b) Dimensionieren Sie die Wunschübertragungsfunktionen für den Entwurf nach Falb-Wolovich so, dass die Spezifikation von Abschnitt 3.1 erfüllt wird. Bestimmen Sie daraus die Pole des geregelten

Systems.

(c) Simulieren Sie die Entkopplung Ihres entworfenen Reglers mit Hilfe der Simulinkdatei „Entkopplungsregler.mdl" und prüfen Sie die Auswirkungen von Modellfehlern, indem Sie die Werte der Dynamikmatrix $\underline{A}$ variieren.

(d) Versuchen Sie eine geeignete Polkonfiguration zur Regelung des Systems zu finden.

Antwort:

Die Voraussetzung der Entkopplung nach Falb-Wolovich ist, dass die Anzahl der Steuergrößen p mit der Anzahl der Ausgangsgrößen q übereinstimmt. Dazu muss die Entkoppelbarkeitsbedingung erfüllt werden, nämlich $\det \underline{D}^* \neq 0$.

Der Vorteil der Entkopplungsregelung ist nämlich die Entkopplungbarkeit der Ausgangsgröße. Die Dynamik jeder einzelnen Ausgangsgröße wird dadurch unabhängig von der Dynamik der übrigen Ausgangsgrößen. Damit kann für jedes der Eingrößensysteme eine entsprechende Wunsch-übertragungsfunktion vorgegeben werden.

Der Nachteil liegt in der Empfindlichkeit der Regelung bei Parameterschwankungen oder Störungen. Bei Störungen ist die stationäre Genauigkeit trotz des eingesetzten Vorfilters im Allgemeinen nicht mehr sichergestellt. Abhilfe kann in diesem Fall durch den Einsatz einer zusätzlichen Störgrößenaufschaltung geschaffen werden.

(a) Die Steuergrößen und die Ausgangsgrößen lauten:

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} M_v \\ M_r \\ M_l \end{bmatrix},\ \underline{y} = \begin{bmatrix} M_{cw} \\ \Omega_r \\ \Omega_l \end{bmatrix}$$

Hier gilt $p = q = 3$.

Dann wird zuerst die für jede Ausgangs- oder Regelgröße y_i zugehörige Differenzordnung δ_i berechnet. Die System-, Eingangs- und Ausgangsmatrix lauten:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.996 & -1.1141 & 0 & 0 \\ 73.2142 & 0 & -36.6071 & -36.6071 \\ 0 & 0.1519 & -0.2241 & -0.1049 \\ 0 & 0.1519 & -0.0817 & -0.5035 \end{bmatrix}, \underline{B} = \begin{bmatrix} 1.1141 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3038 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3038 \end{bmatrix},$$

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daraus erhält man $\vec{c}_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$, $\vec{c}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$, $\vec{c}_3 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$.

$$\underline{\vec{c}_1}\underline{B} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1.1141 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3038 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3038 \end{bmatrix} = \underline{0}^T$$

$$\vec{c}_1\underline{A}\underline{B} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.996 & -1.1141 & 0 & 0\\ 73.2142 & 0 & -36.6071 & -36.6071\\ 0 & 0.1519 & -0.2241 & -0.1049\\ 0 & 0.1519 & -0.0817 & -0.5035\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.1141 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.3038 & 0\\ 0 & 0 & -0.3038\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}81.5667 & 11.1227 & 11.1227\end{bmatrix} \neq \underline{0}^T \quad \Rightarrow \delta_1 = 2$$

$$\vec{c}_2\underline{B} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.1141 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.3038 & 0\\ 0 & 0 & -0.3038\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -0.3038 & 0\end{bmatrix} \neq \underline{0}^T \Rightarrow \delta_2 = 1$$

$$\vec{c}_3\underline{B} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.1141 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -0.3038 & 0\\ 0 & 0 & -0.3038\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -0.3038\end{bmatrix} \neq \underline{0}^T \Rightarrow \delta_3 = 1$$

Die Differenzordnung des Systems lautet $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 4$ (volle Differenzordnung).

Dann erhält man die Matrix

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix}\underline{c}_1^T\underline{A}^{\delta_1-1}\underline{B}\\ \underline{c}_2^T\underline{A}^{\delta_2-1}\underline{B}\\ \underline{c}_3^T\underline{A}^{\delta_3-1}\underline{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}81.5667 & 11.1227 & 11.1227\\ 0 & -0.3038 & 0\\ 0 & 0 & -0.3038\end{bmatrix}$$

det$|\underline{D}^*| = 7.5302 \neq 0 \Rightarrow$ Etkoppelbarkeitsbedingung erfüllt

Deshalb ist die Voraussetzung erfüllt.

(b) In (a) sind die Differenzordnungen schon berechnet. Daraus erhält man die Wunschübertragungsfunktionen:

$$G_1(s) = \frac{M_{10}}{s^2+M_{11}s+M_{10}}, G_2(s) = \frac{M_{20}}{s+M_{20}}, G_3(s) = \frac{M_{30}}{s+M_{30}}.$$

Damit kann man mit den Koeffizienten die Pole vorgeben.

$$G_1(s) = \frac{16}{s^2+8s+16}, G_2(s) = \frac{1}{s+1}, G_3(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Die vorgegebene Pole sind: $s_1 = s_2 = -4, s_3 = s_4 = -1$.

(c) Die Simulinkdatei „Entkopplungregler.mdl“ ist schon gegeben. Zuerst wird das System mit der originalen Systemmatrix $\underline{A}$ simuliert. Der entworfene Regler funktioniert gut.

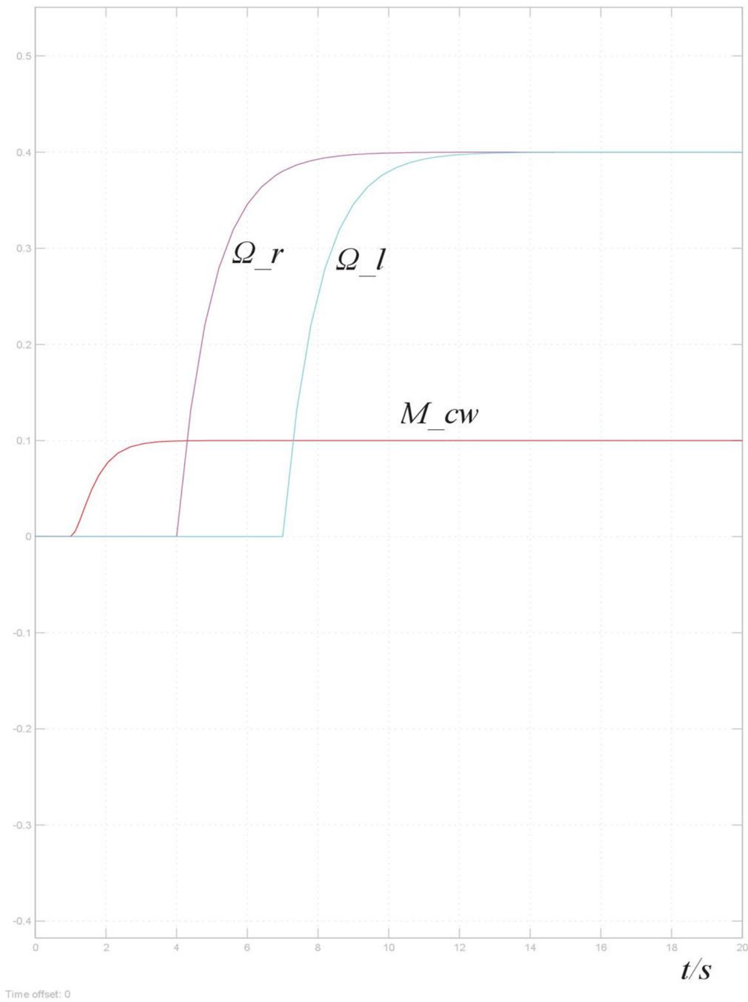

Abbildung 3.13 Simulation mit der originalen Systemmatrix $\underline{A}$

Danach werden einige Elemente der Systemmatrix $\underline{A}'$ verändert.

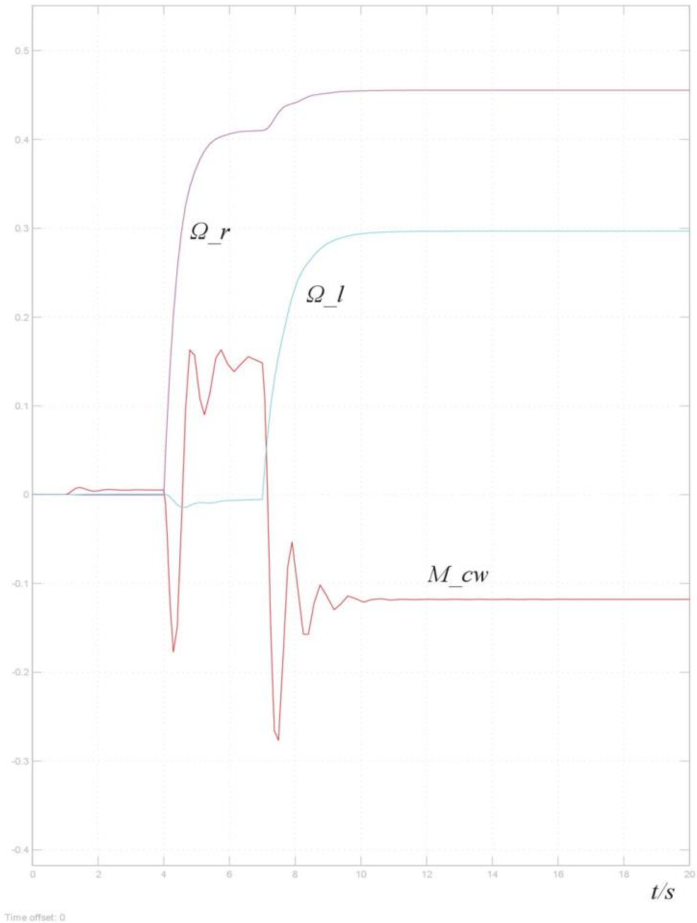

Abbildung 3.14 Simulation mit einer anderen Systemmatrix $\underline{A}'$

Es ist zu sehen, dass die Ergebnisse der Simulation stark schwanken. D.h. der für das System mit $\underline{A}$ entworfene Regler für das System mit $\underline{A}'$ funktioniert sehr schlecht. Dadurch ist der Nachteil der Entkopplungsregelung, nämlich die Empfindlichkeit der Regelung bei Parameterschwankungen oder Störungen, gezeigt. In diesem Fall wird der Einsatz einer zusätzlichen Störgrößenaufschaltung gebraucht.

(d) Bevor der Messung wird die Simulation ausgeführt, damit die ungeeigneten Einstellparameter vermieden werden.

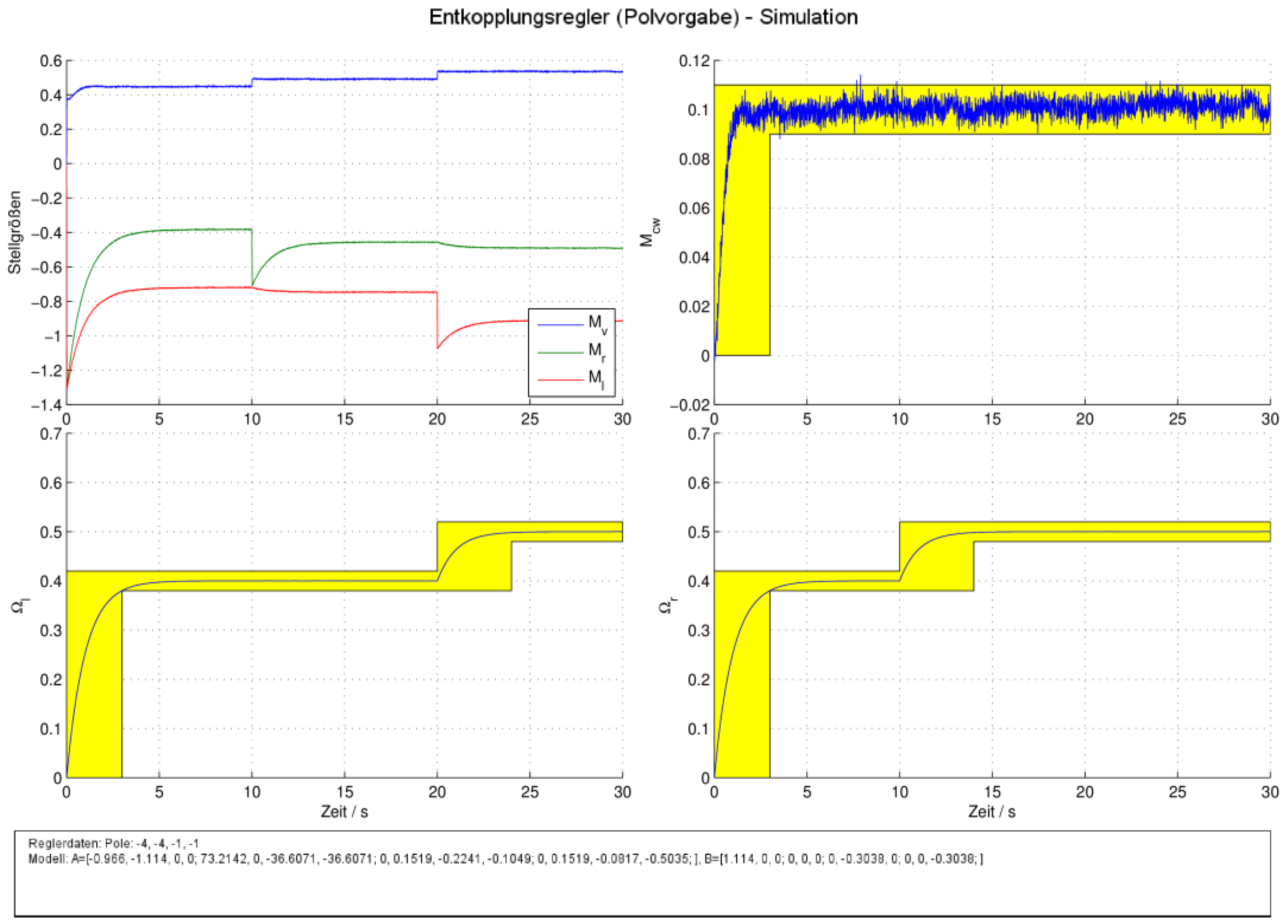

Abbildung 3.15 Simulationsergebnis mit Pole -4/-4/-1/-1

Alle Simulationsergebnisse sehen gut aus, aber bei der Messung gibt es offensichtliche Schwankung und Überschwingen. Bei dem Ergebnis Ω_l gibt es stabile Abweichung, deshalb die vorgegebene Pole noch linker von Imaginärachse verschoben werden. Die Absolute Werte wird von 4/4/1/1 bis 10/10/5/5 und noch bis 15/15/8/8 eingestellt.

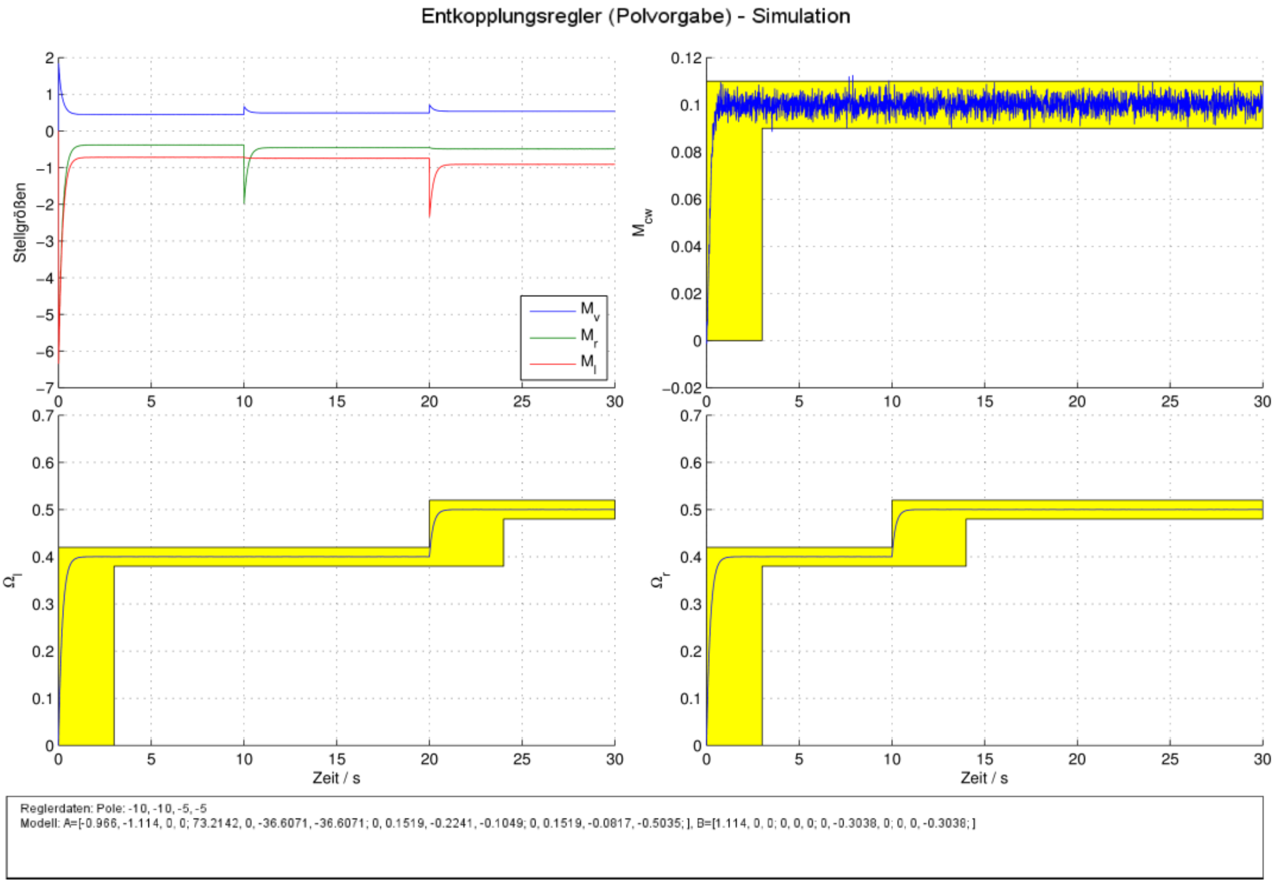

Abbildung 3.16 Simulationsergebnis mit Pole -10/-10/-5/-5

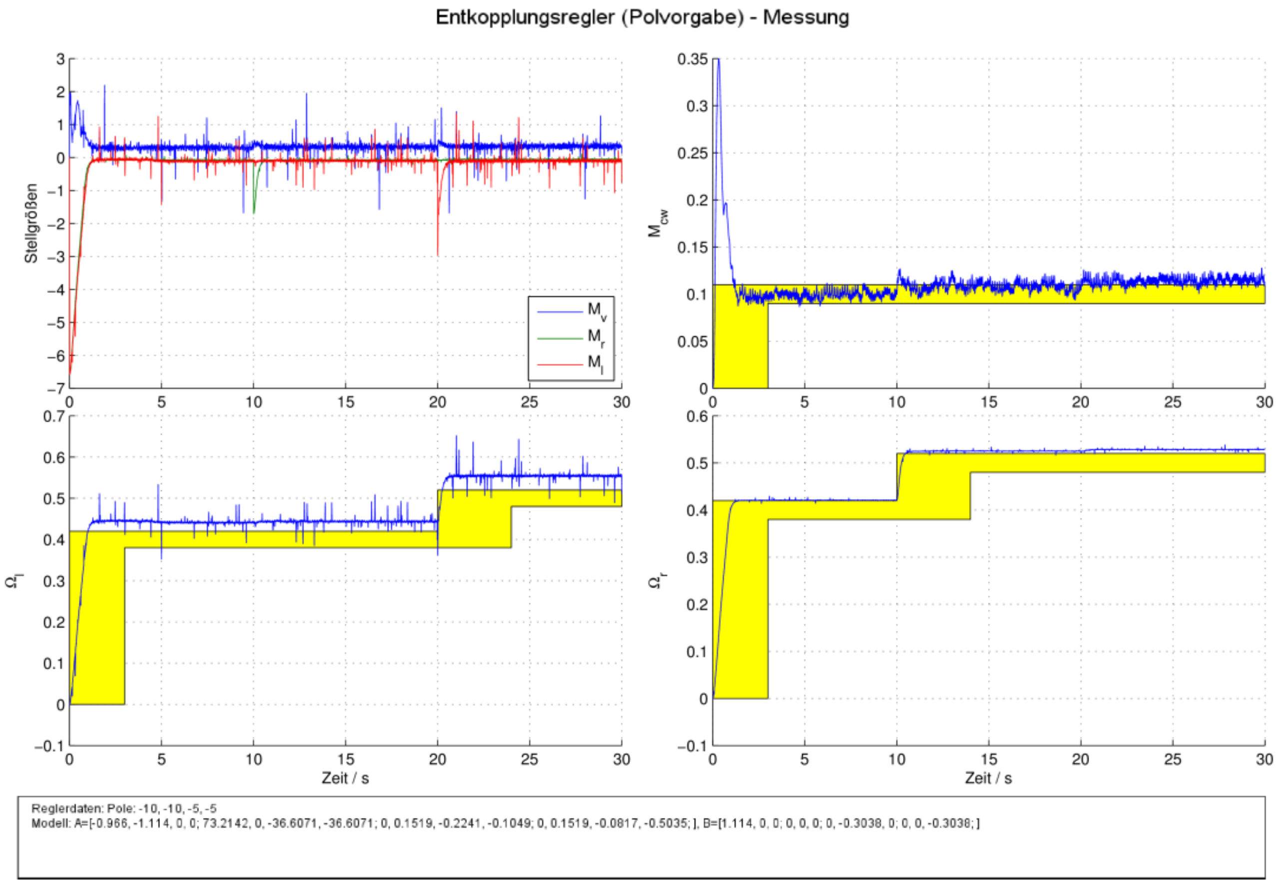

Abbildung 3.17 Testergebnis mit Pole -10/-10/-5/-5

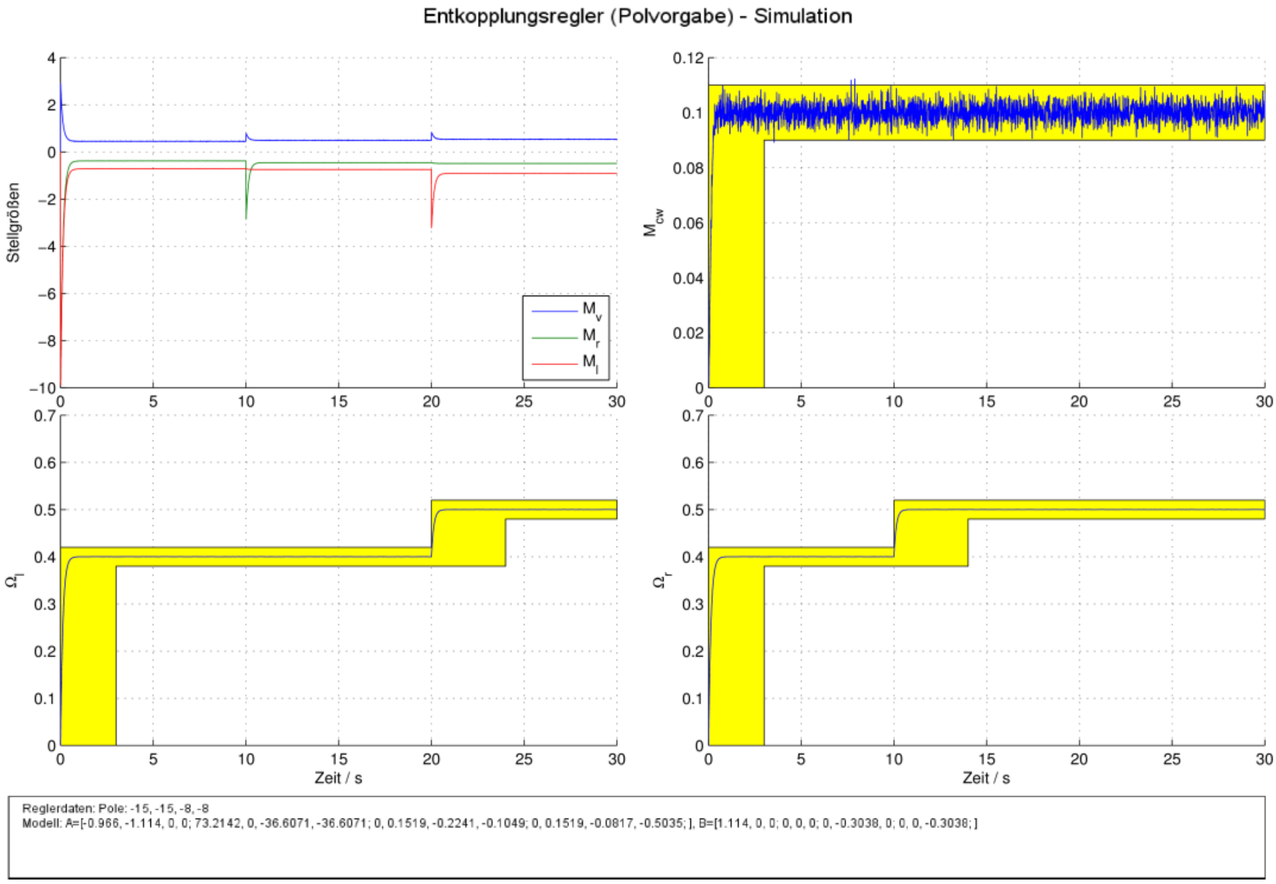

Abbildung 3.18 Simulationsergebnis mit Pole -15/-15/-8/-8

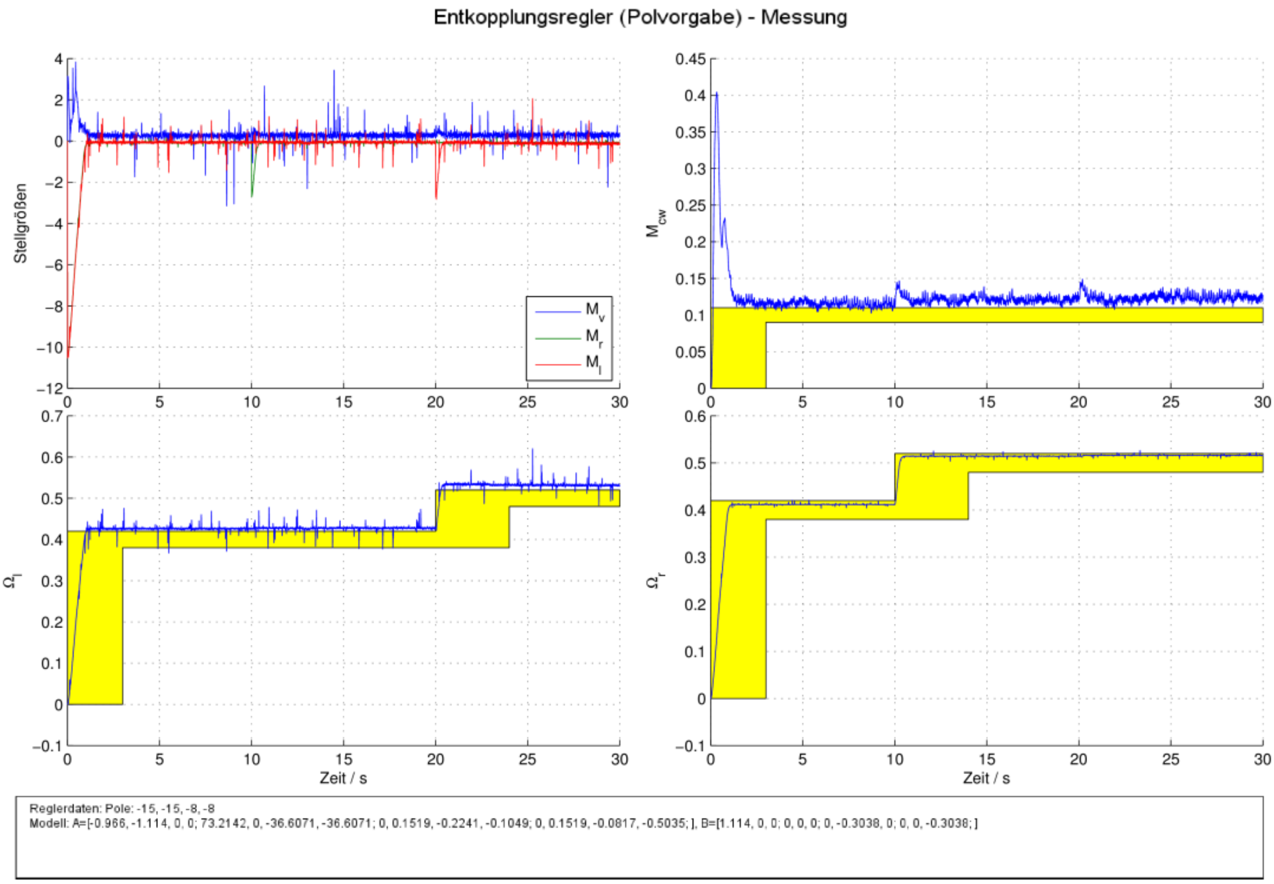

Abbildung 3.19 Testergebnis mit Pole -15/-15/-8/-8

3.2.3 Entkopplung mit überlagerter PID-Regelung

Um die reine Entkopplungsregelung robuster gegenüber äußeren Störungen und Modellungenauigkeiten zu gestalten, wird nun den drei entkoppelten Strecken jeweils ein PID-Regler vorgeschaltet.

(a) Zeichnen Sie die Struktur des so geregelten Systems.

(b) Entwerfen Sie für jedes der drei Teilsysteme einen PI/PID-Regler, der die Einhaltung der Spezifikation auch bei Störungen und Parameterschwankungen sichert. Bestimmen Sie die PI/PID-Regler in der Form (3.1).

Antwort:

(a) Die Struktur des so geregelten Systems ist in folgendem Bild 3-20 dargestellt.

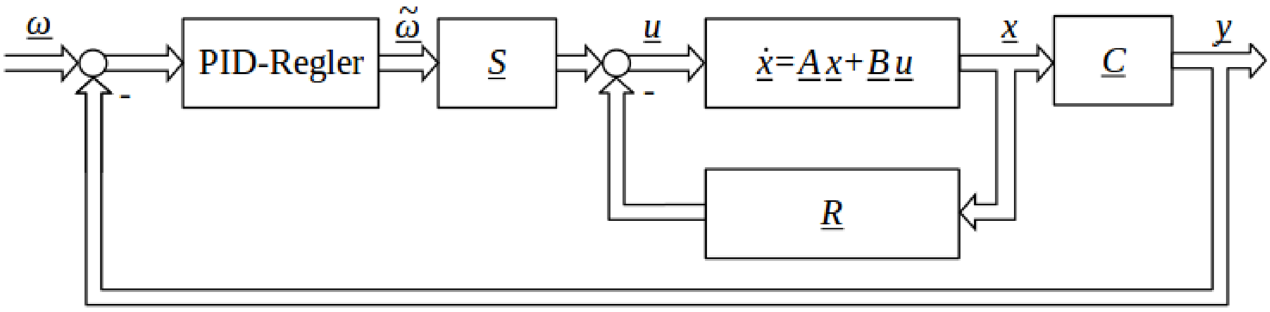

Abbildung 3.20 Struktur des entkoppelten Systems mit PID-Regler

(b) Jeder PI/PID-Regler wird in der Form

$$G_R(S) = \frac{Ds^2 + Ps + I}{s}$$

entworfen. Für jedes der drei Teilsysteme mit PI/PID-Regler ist die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regerkreises wie folgende Form dargestellt:

$$G(s) = \frac{k_r}{s+k_r} = \frac{\frac{k_r}{s}}{1+\frac{k_r}{s}}, k_r > 1 ,$$

wobei die Übertragungsfunktion des geregelten offenen Kreises in der Form ist:

$$F_0(s) = \frac{k_R}{s} .$$

Nach der Anforderung dieser Praktikumsaufgaben sollen die Übergangszeiten kleiner als 3s sein. Zur Bestimmung der Parameter wird zunächst das angenommen, dass die Übergangszeit gleich 3s ist. Dann ist k_r nach die Gleichung gleich 1.

Für den ersten Teilsystem ist die Übertragungsfunktion so berechnet, dass die Gleichung folgenderweise steht:

$$F_0(s) = F_{E1}G_{R1}(S) = \frac{1}{s} = \frac{16}{s^2+8s+16}\frac{D_1s^2+P_1s+I_1}{s},$$

davon kann man bekommen das Ergebnis des PI/PID-Reglers:

$$D_1 = \frac{1}{16} = 0{,}0625, P_1 = 0{,}5, I_1 = 1.$$

Für den zweiten Teilsystem erhält man nach dem gleichen Grund die folgende Gleichung:

$$F_0(s) = F_{E2}G_{R2}(S) = \frac{1}{s} = \frac{1}{s+1}\frac{D_2s^2+P_2s+I_2}{s},$$

dann können die Parameter ausgerechnet werden:

$$D_2 = 0, P_2 = 1, I_2 = 1.$$

Man kann auch gleicherweise die Parameter des dritten Teilsystems bekommen:

$$D_3 = 0, P_3 = 1, I_3 = 1.$$

Verwendet man die obigen entworfenen PI/PID-Regler im Programm Hiachs 2008 und damit nicht nur das Ergebnis der Simulation (Abbildung 3.21) sondern auch der praktischen Messung (Abbildung 3.22) von der Entkopplung mit überlagerter PID-Regelung bekommt.

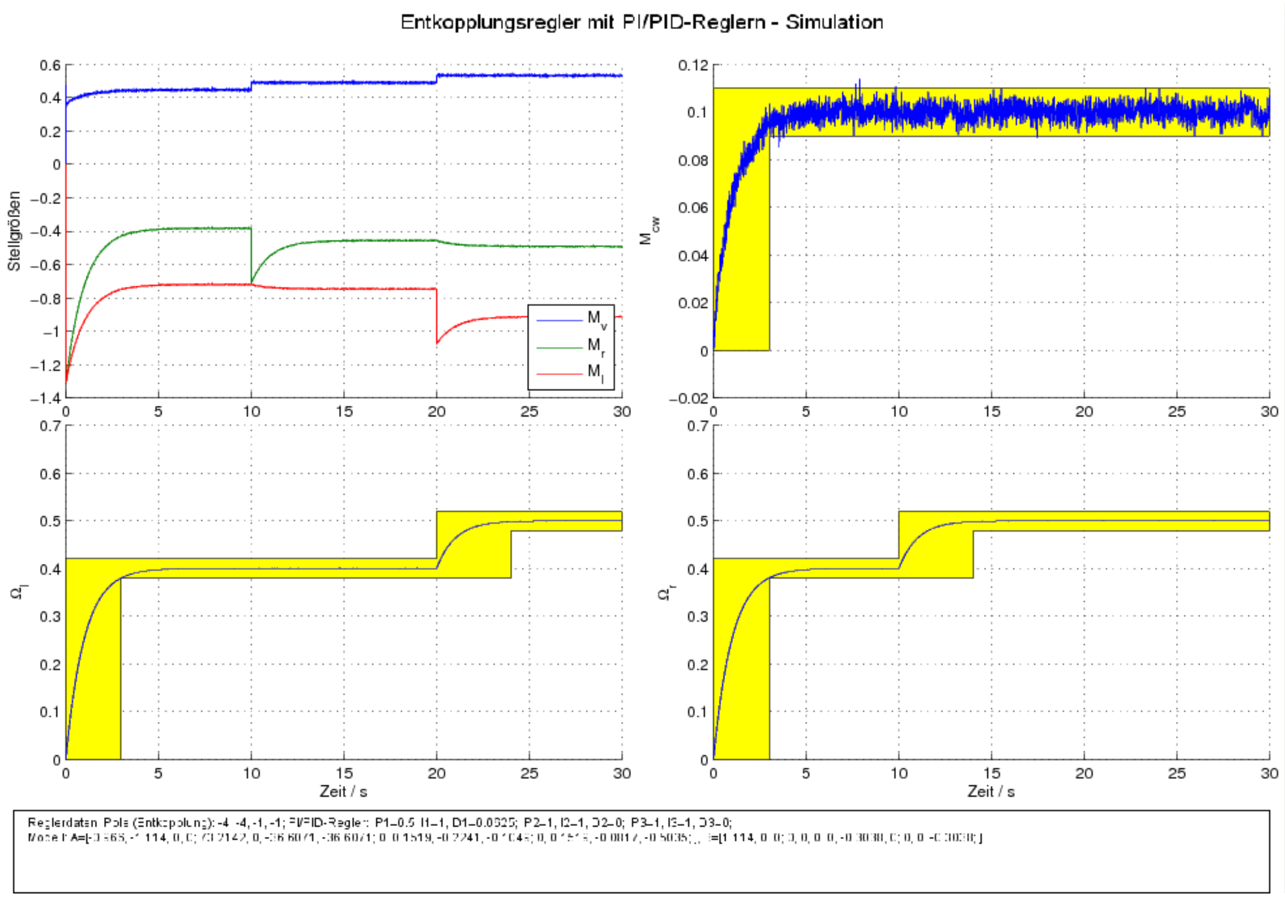

Abbildung 3.21 Simulationsergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (1)

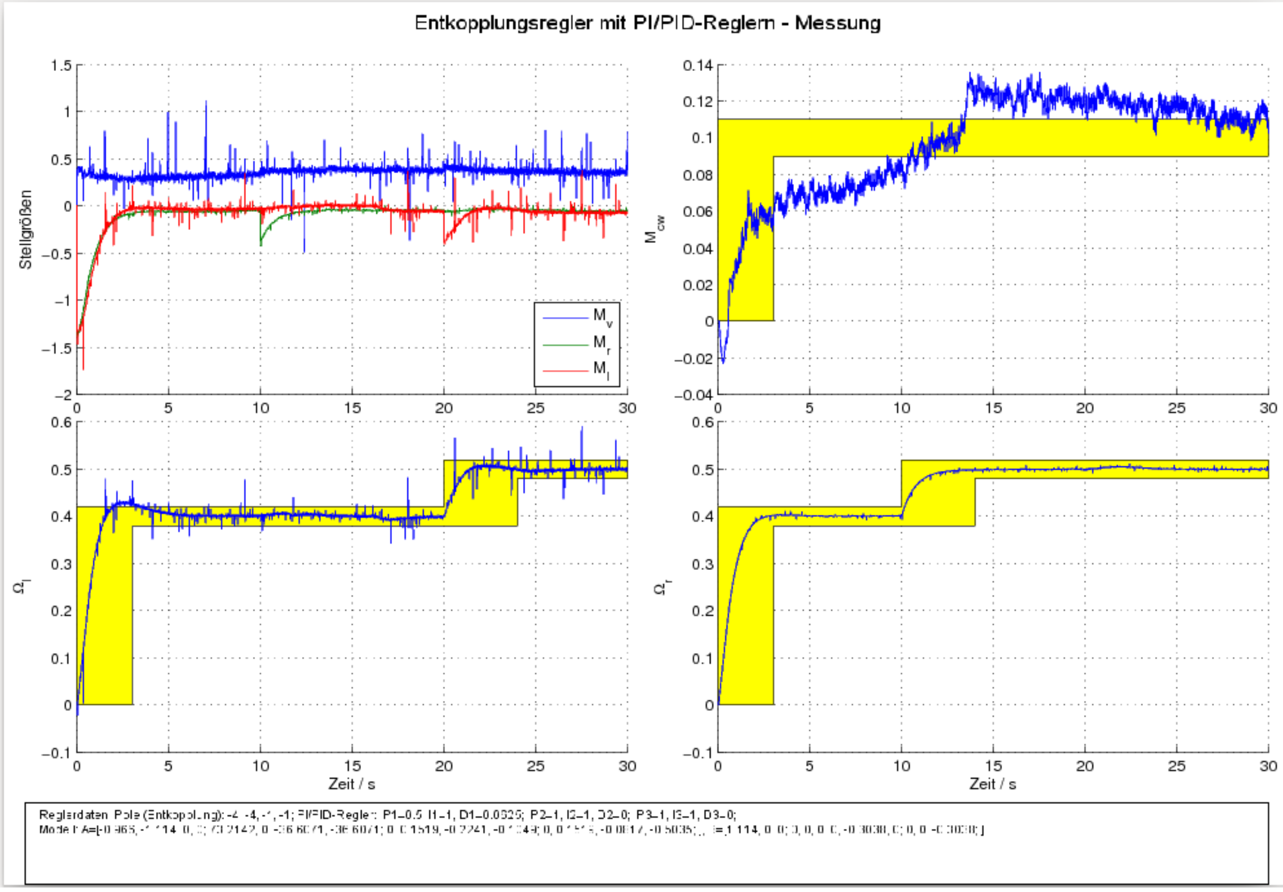

Abbildung 3.22 Testergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (1)

Das Simulations-ergebnis ist schon sehr gut und die Abweichungen von den Sollwerten sind in Grenzen der Toleranz. Allerdings reichen diese Regler für eine praktische Anwendung nicht. Die Abweichungen von M_{cw} überschreiten die Grenzen des Erlaubten sowie die Übergangszeit dieses Ausgangs ist nicht kurzer als 3s. Weil der protionale Koeffizient vom PID-Regler die Übergangszeit beeinflusst und der integrale Teil vom PID-Regler den stationäre Fehler überwinden kann, erhöht man die Werte von P_1, I_1 auf $P_1 = 1, I_1 = 2$ aber ändert gleichzeitig ihre Verhältnis nicht. Beide das Simulationsergebnis und das Testergebnis sind in Abbildung 3.23 und 3.24 gezeigt. Davon kann man sehen, dass das Ergeb-nis insbesondere das Testergebnis besser geworden ist. Erhöht man weiter die Koeffizienten auf $P_1 = 2, I_1 = 4$, dann kann man ein zufriedenstellendes Ergebnis bekommen (das Simulationsergebnis in Abbildung 3.25, das Testergebnis in Abbildung 3.26).

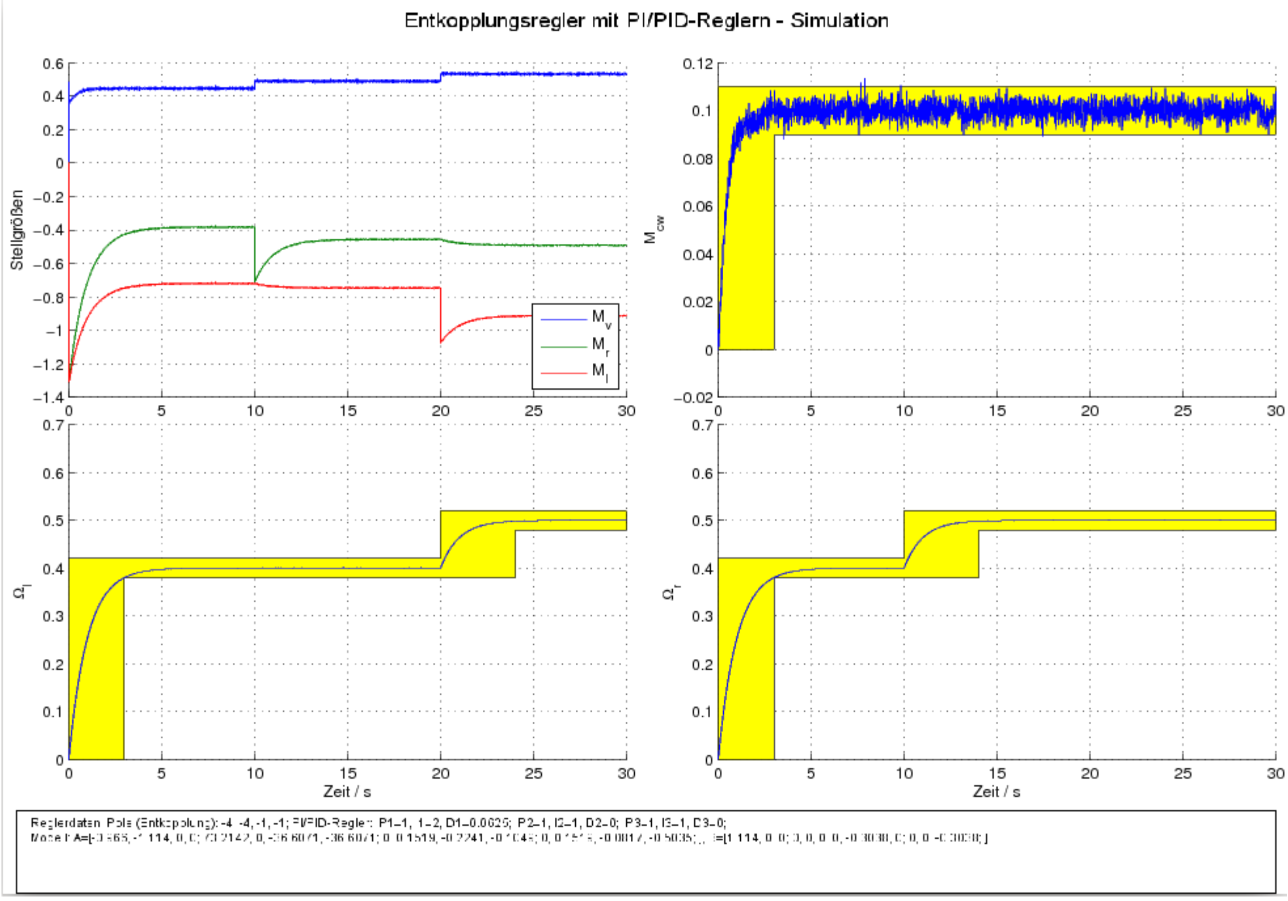

Abbildung 3.23 Simulationsergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (2)

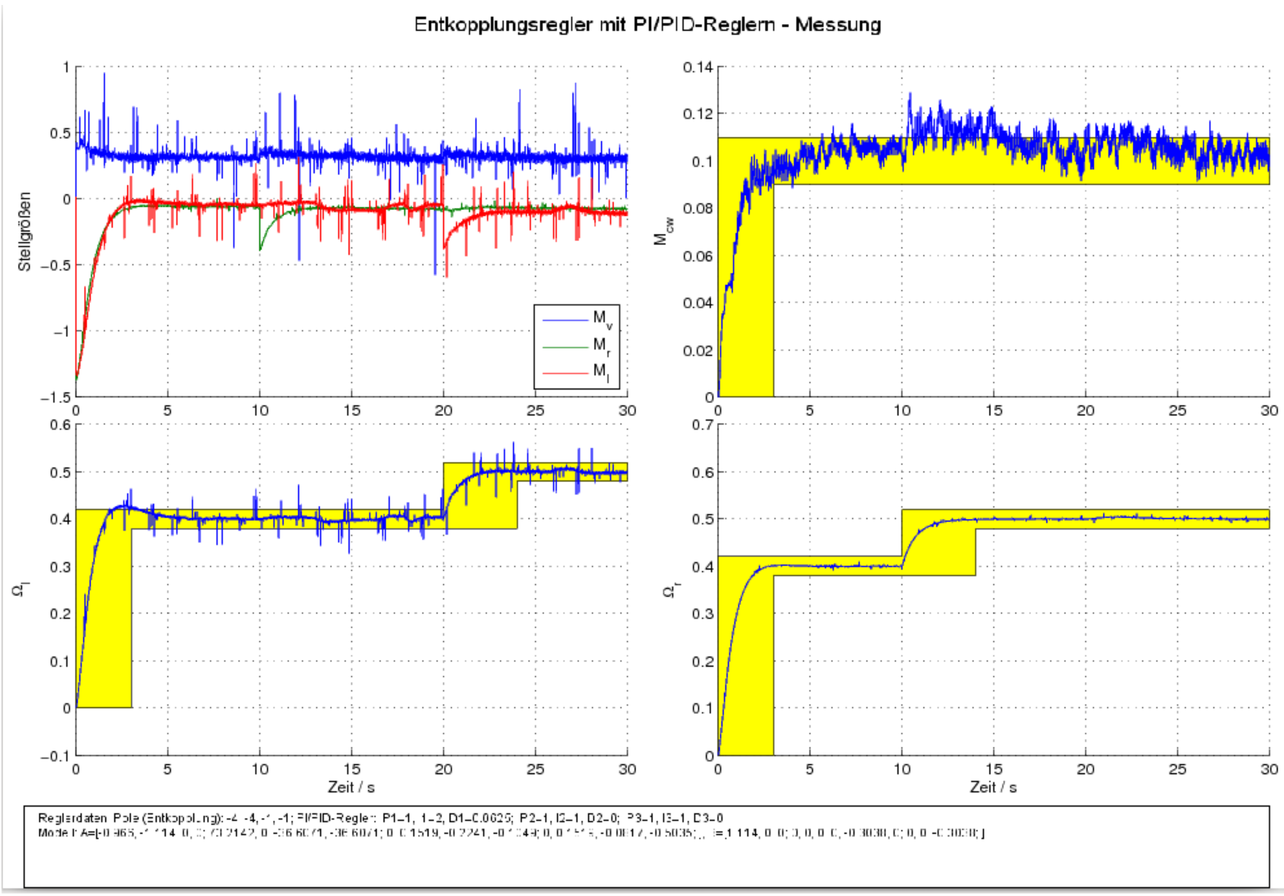

Abbildung 3.24 Testergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (2)

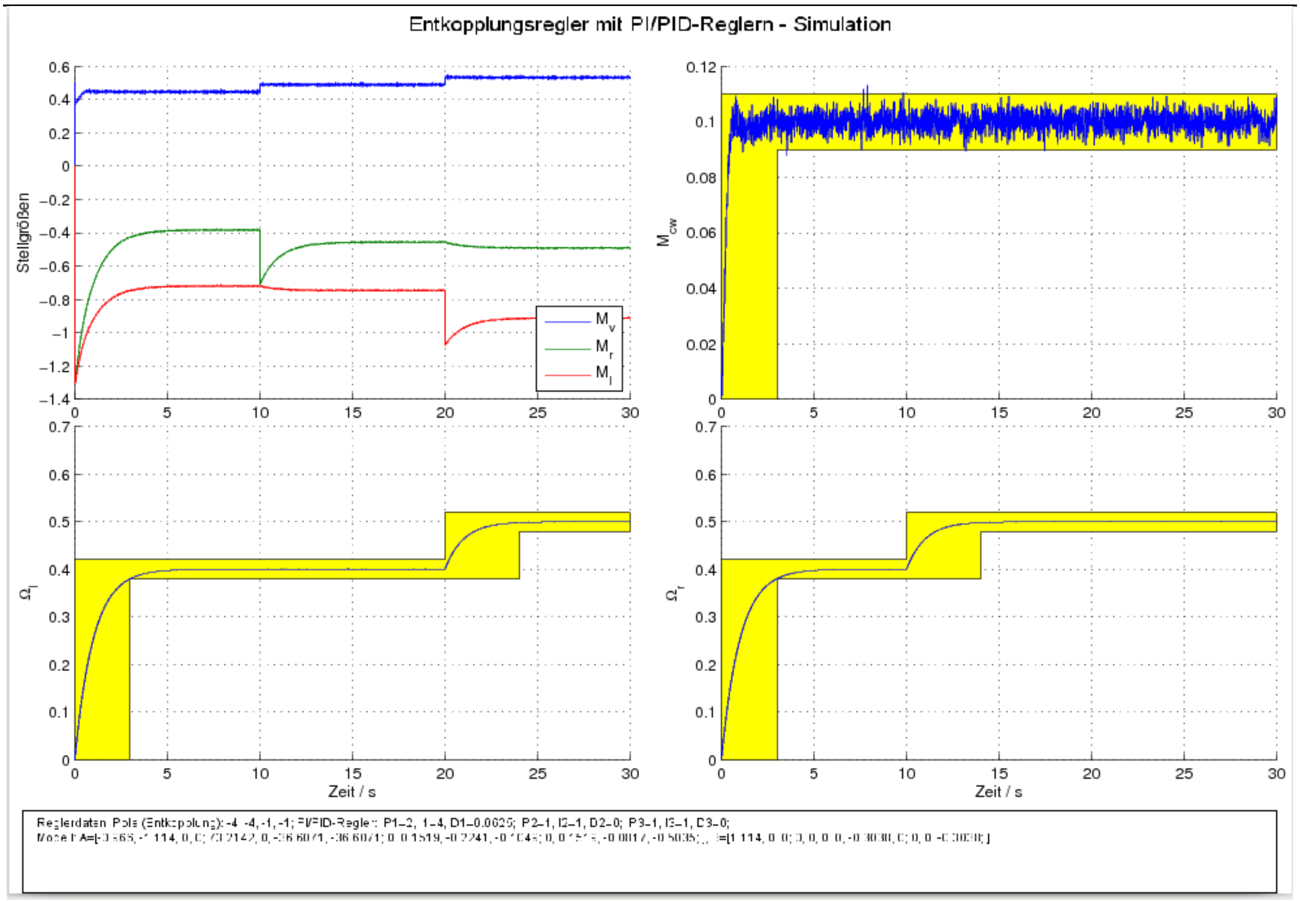

Abbildung 3.25 Simulationsergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (3)

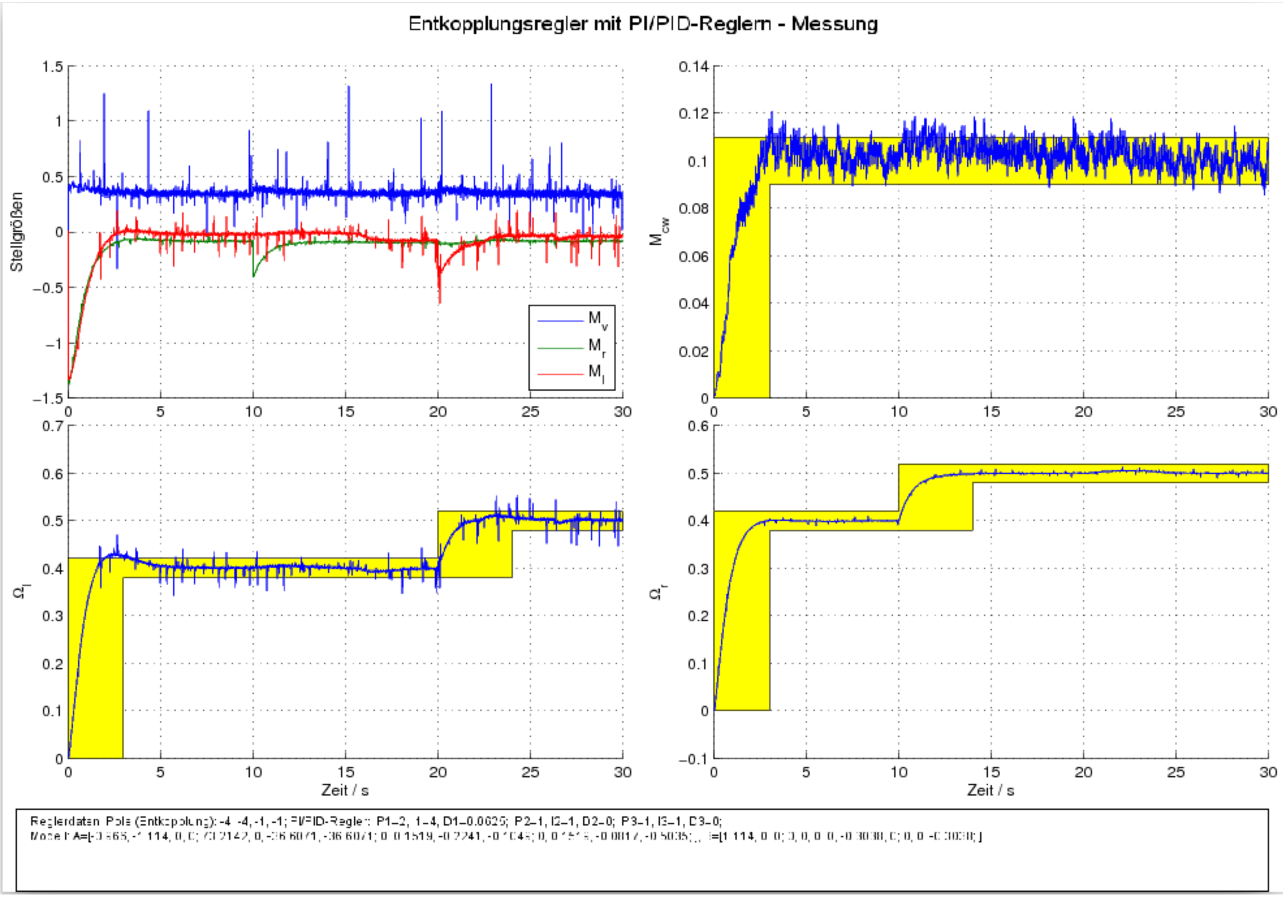

Abbildung 3.26 Testergebnis des Entkopplungsreglers mit PI/PID-Regelung (3)

3.2.4 PI-Zustandsregelung

Eine weitere Möglichkeit das System gemäß den Spezifikationen zu regeln, besteht im Entwurf eines PI-Zustandsreglers. Dieser ist im Programm Hiachs 2008 bereits implementiert. Als Entwurfsparameter dient Ihnen die Vorgabe einer geeigneten Polkonfiguration.

(a) Berechnen Sie die Streckenpole des Modells.

(b) Machen Sie sich klar wie viele Pole vorgegeben werden müssen. Beachten Sie hierbei, dass sich die Ordnung des Systems durch die erweiterte Zustandsrückführung verändert hat. Geben Sie eine geeignete Polkonfiguration vor, unter Beachtung der berechneten Streckenpole.

(c) Berechnen Sie nun die theoretisch optimale Polkonfiguration mit Hilfe der Matrix-Riccati-Gleichung. Hinweis: In MATLAB mit der Funktion lqr() zu lösen.

(d) Vergleichen Sie die beiden Möglichkeiten zur Bestimmung der Pole (Polvorgabe und Riccati-Regler) und beschreiben Sie Ihr Vorgehen bei der Wahl der Parameter.

Antwort:

In PI-Zustandsregelung muss die Steuerbarkeit der erweiterten Strecke untersucht werden, um zu sichern, dass der erweiterten Regler durch Polvorgabe oder als Riccati-Regler entworfen werden kann. Die erweiterte Strecke ist genau dann steuerbar, wenn die ursprüngliche Strecke $(\underline{A}, \underline{B})$ steuerbar ist und übrigens $rg\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ -\underline{C} & \underline{0} \end{bmatrix} = n + q$.

Die Vorteile des PI-Zustandsreglers sind wie folgt genannt.

Erstens ist kein Vorfilter $\underline{S}$ für stationäre Genauigkeit erforderlich. Zweitens ist keine weitere Störgrößenaufschaltung erforderlich. $\underline{z}$ kann ohne genaue Kenntnis beseitigt werden. Drittens haltet der Regler stationäre Genauigkeit auch bei Parameterschwankungen des Systems.

Die Nachteile des PI-Zustansreglers sind hauptsächlich 2 Aspeckte. Vor allem werden die Stör-einflüsse nur stationär beseitigt. Außerdem wird die Streckenordnung um die Anzahl der I-Glieder erhöht, was den Entwurf insgesamt aufwändiger macht.

(a) Die Streckenpole des Modells sind die Eigenwerte des Systems (von der Matrix $\underline{A}$)[2], die durch $\det\left(s\,\underline{I} - \underline{A}\right) = 0$ berechnet werken können. Die Ergebnisse sind:

$$\begin{aligned} s_1 &= -0{,}4524 + 9{,}6151i \\ s_2 &= -0{,}4524 - 9{,}6151i \\ s_3 &= -0{,}5744 \\ s_4 &= -0{,}2144 \end{aligned}.$$

Darüber hinaus sind die Pole der um die Integratoren erweiterten Strecke die obigen berechneten Eigenwerte der Matrix $\underline{A}$ und drei zusätzliche Pole bei 0 aufgrund der Integratoren des PI-Reglers.

(b) Durch die Zusammenfassung der Ordnung der originalen Zustandsgrößen sowie der Ordnung der ermitelten Eingangsgrößen müssen 7 Pole vorgegeben werden.

Nach den gründsätzlichen Regeln sollen die Pole des geregelten Systems so gewählt werden, dass sie in der komplexen Ebene links von den Strekenpolen liegen, damit die dynamischen Vorgänge schneller geschwunden sind. Außerdem werden die Pole auf die reellen Achsen gesetzt um die Eingenschwingungen durch diese Regelung zu dämpfen. Zuerst setzen wir die Pole nahe von den Streckenpole. Aber das Simulationsergebnis ist schlecht. Nach einigen Versuche werden die Pole so weit nach links verschoben, dass das System in der Simulation schnell genug ist und die Spezifikationen eingehalten werden. Jetzt erhält man die Polkonfiguration (-15, -16, -15,5, -14, 0, 0, 0). Obwohl sieht das Ergebnis in Simulation gut aus, kommt es am realen System zu starken Schwingungen am Anfang der Messung. Deshalb wählen wir die drei Pole des Reglers in der Größenordnung von -1, um die Anfangsschwingungen zu verhindern. Das entsprechende Simulationsergebnis und Testergebnis mit der Polkonfiguration (-15, -16, -15,5, -14, -1, -1, -1) sind in Abbildung 3.27 und 3.28 gezeigt. Von der Abbildung 3.28 kann man sehen, dass es noch ein bisschen Überschwingungen. Deshalb lassen sich die Pole noch nach links verschieben, was ein deutlich besseres Ergebnis vom M_{cw} ohne Überschwingungen mit der Polkonfiguration (-19, -19, -19,5, -18, -1, -1, -1) bewirkt (Abbildung 3.29 und 3.30).

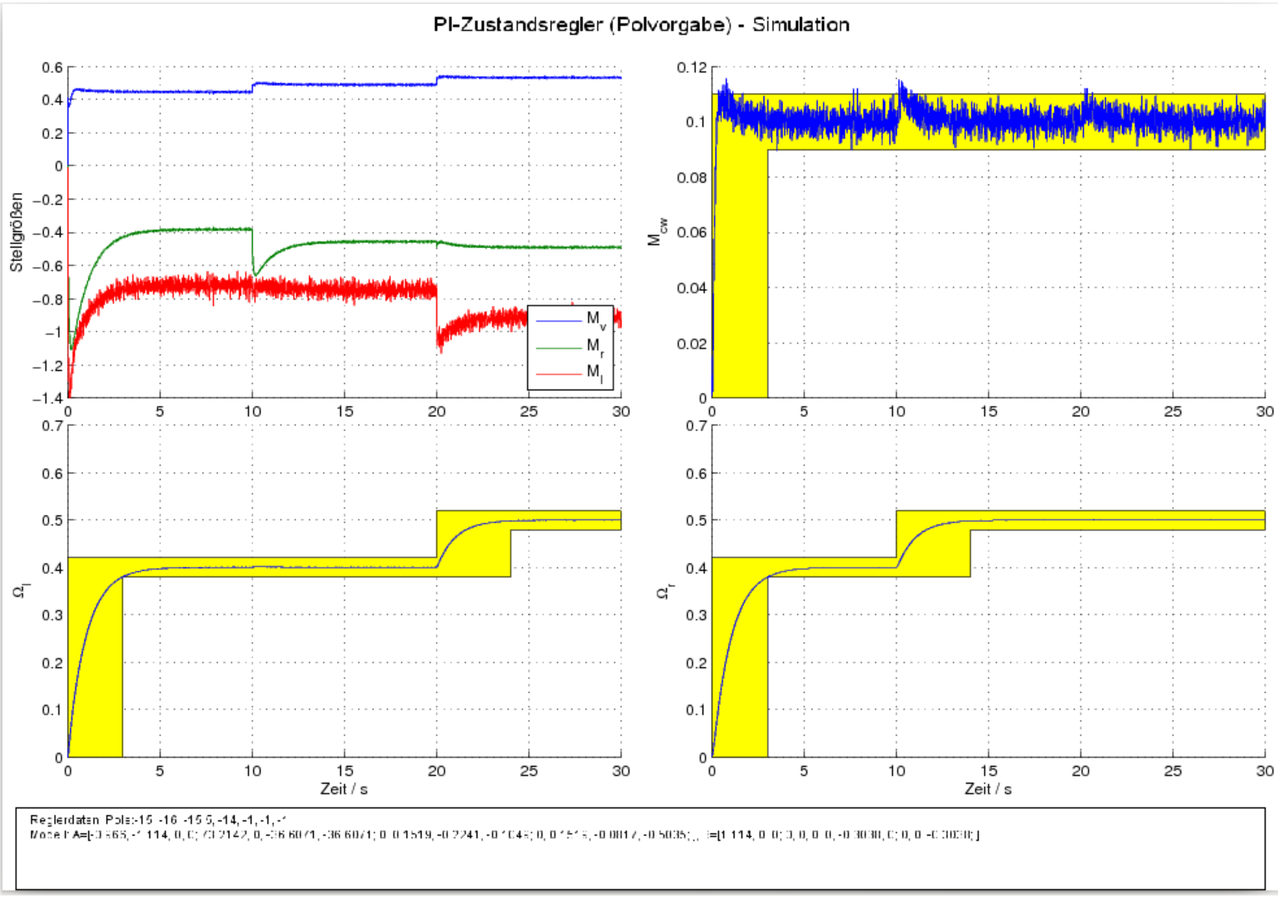

Abbildung 3.27 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers mit Polvorgabe

(Pole: -15, -16, -15,5, -14, -1, -1, -1)

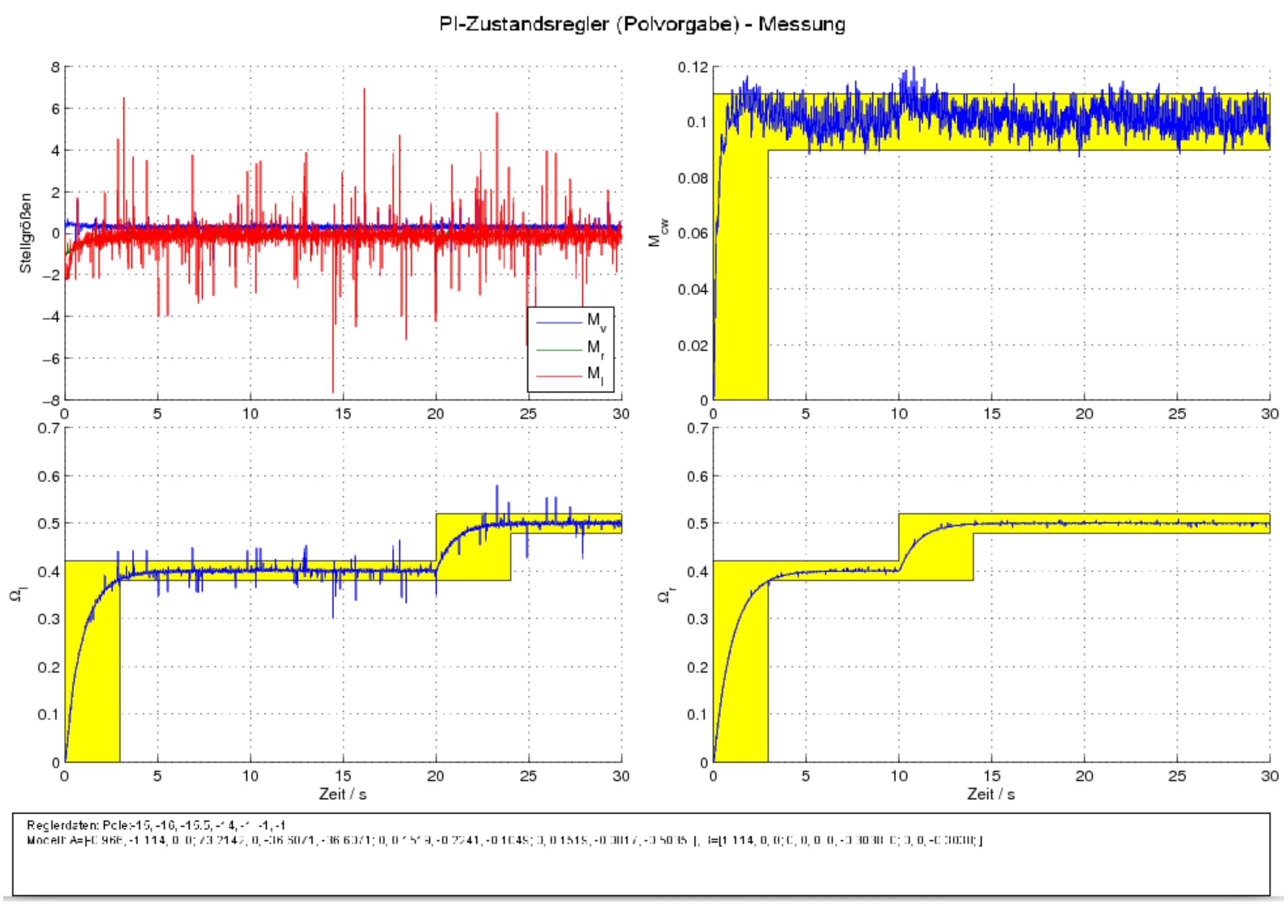

Abbildung 3.28 Testergebnis des PI-Zustandsreglers mit Polvorgabe

(Pole: -15, -16, -15,5, -14, -1, -1, -1)

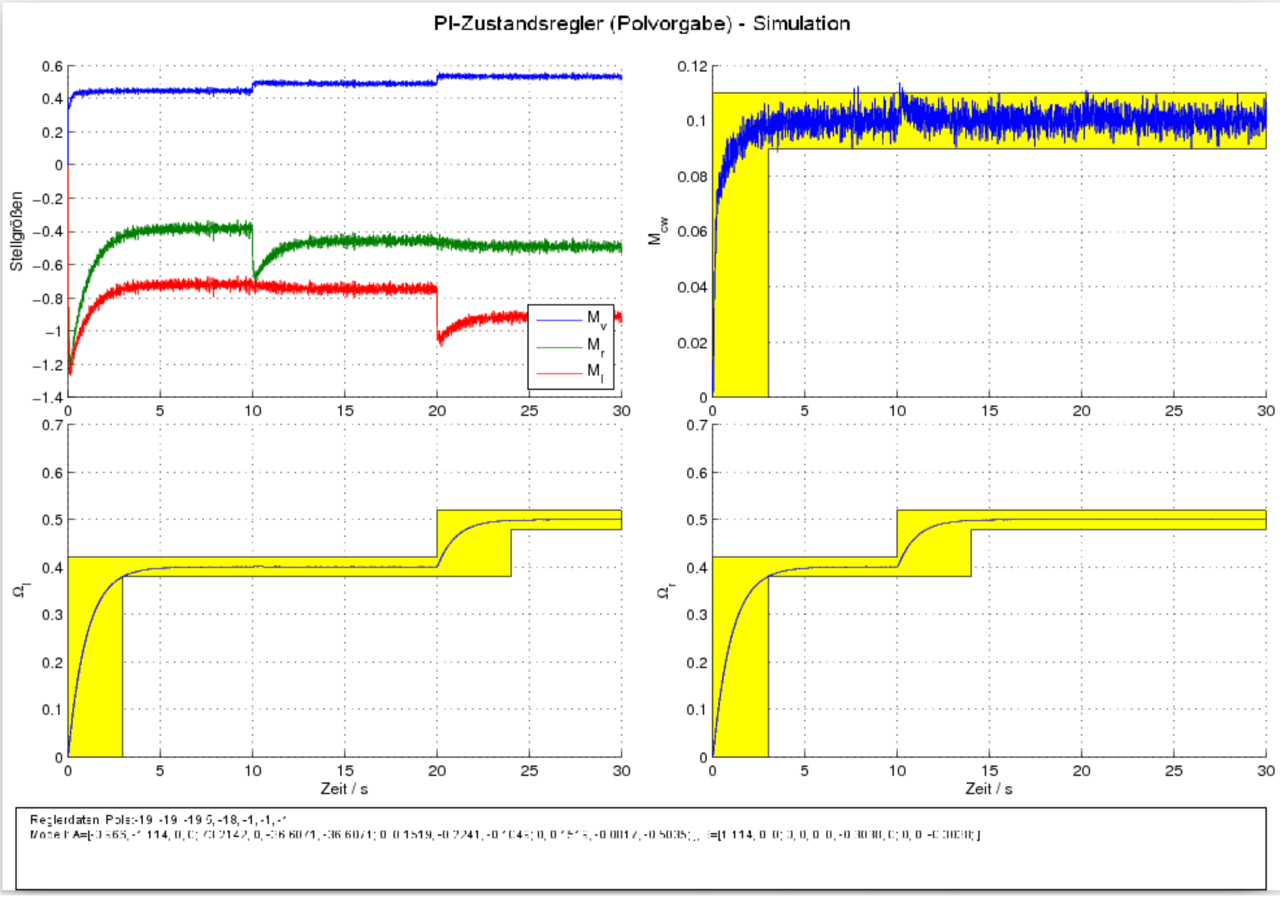

Abbildung 3.29 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers (Polvorgabe)

(Pole: -19, -19, -19,5, -18, -1, -1, -1)

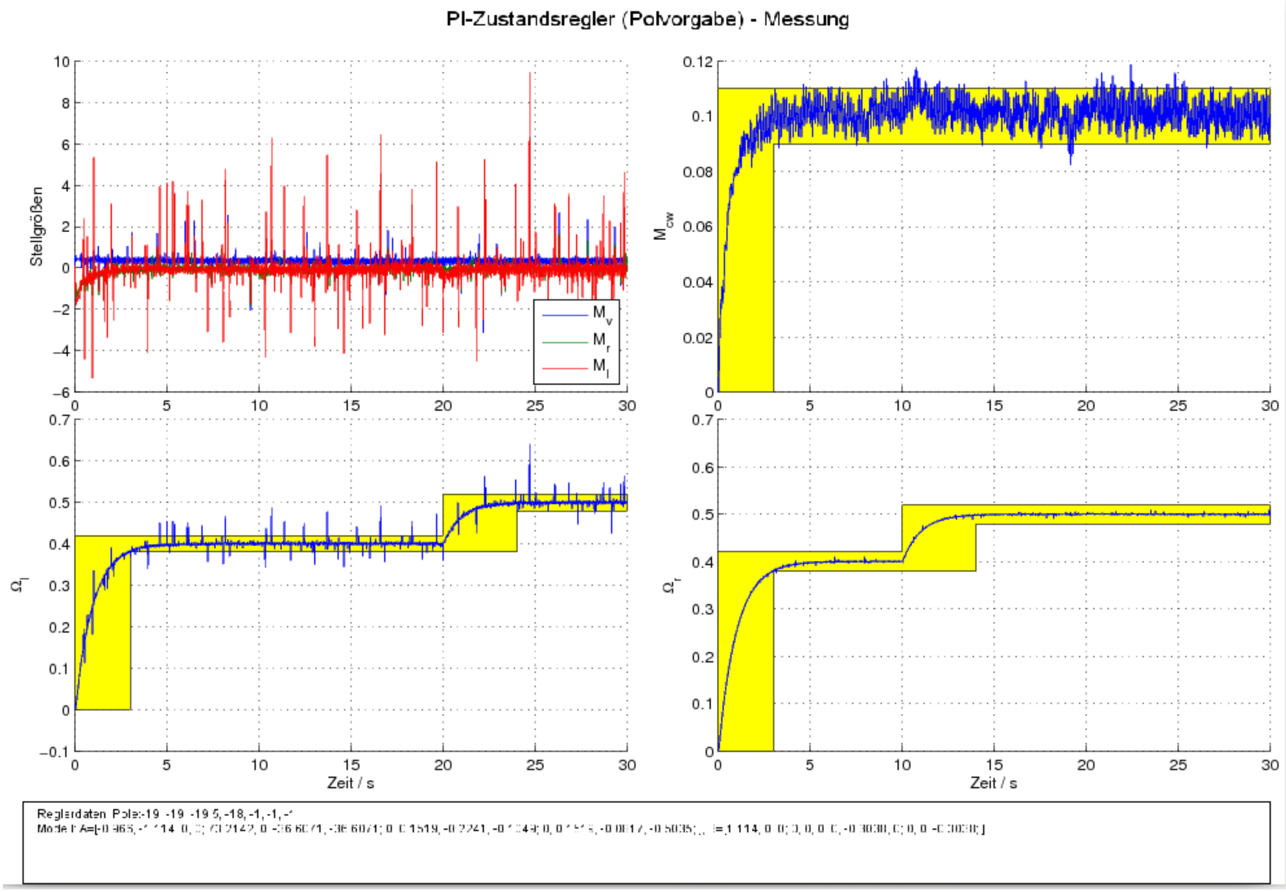

Abbildung 3.30 Testergebnis des PI-Zustandsreglers (Polvorgabe)

(Pole: -19, -19, -19,5, -18, -1, -1, -1)

(c) Mit Hilfe der Funktion lqr() in MATLAB kann man die theoretisch optimale Polkonfiguration berechnen.

(d) Unterschied von der Polvorgabe, in der man nur mit Hilfe der Erfahrungen und wiederholten Versuche die optimalen Pole bestimmen kann, können die Pole im Riccati-Regler durch ein Gütemaß optimales Prozessverhaltens ausgerechnet werden, dessen Ergebnis von der Wahl der Gewichte $\underline{Q}$, $\underline{S}$ beeinflusst wird. Das Simulationsergebnis mit der durch dem Riccati-Regler ausgerechneten Polkonfiguration ist in Abbildung 3.31 dargestellt, wobei sind

$$\underline{Q} = \mathrm{diag}(1,1,1,1,1,1,1)\ ,\ \underline{S} = diag(1,1,1)\ .$$

Nicht nur die Übergangszeit sehr lang ist, sondern die Schwankung auch deutlich ist. Indem der dynamische Vorgang schneller abgeklungen sein kann, erhöht man die Werte der Elemente von $\underline{Q}$. Man kann von der Abbildung 3.32 sehen, dass die Übergangszeiten von den Winkelgeschwindigkeiten aber noch nicht so kurz wie die Anforderung sind. Deshalb erhöht man die Werte der letzten 3 Elemente von $\underline{Q}$, welche die Gewichte von ermitteltem $\underline{e}$, d.h, der Einfluss vom integralen Glied wird beschränkt, damit das System die Endwerte schnell ohne große Schwankungen erreicht. Die Übergangszeit in Abbildung 3.33 und 3.34 lässt sich auffällig verkürzen. Aber es gibt noch Überschwingungen am Anfang. Lässt sich die Matrize $\underline{Q}$ vergrößen, damit die Schwankungen der Zustandsgrößen verhindern wie folgende Abbildung 3.35 und 3.36. Mit der größere Matrize $\underline{Q}$ kann man bessere Ergebnisse bekommen wie in Abbildung 3.37 und 3.38. Das Ergebnis in Abbildung 3.37 und 3.38 ist schon zufriedenstellend.

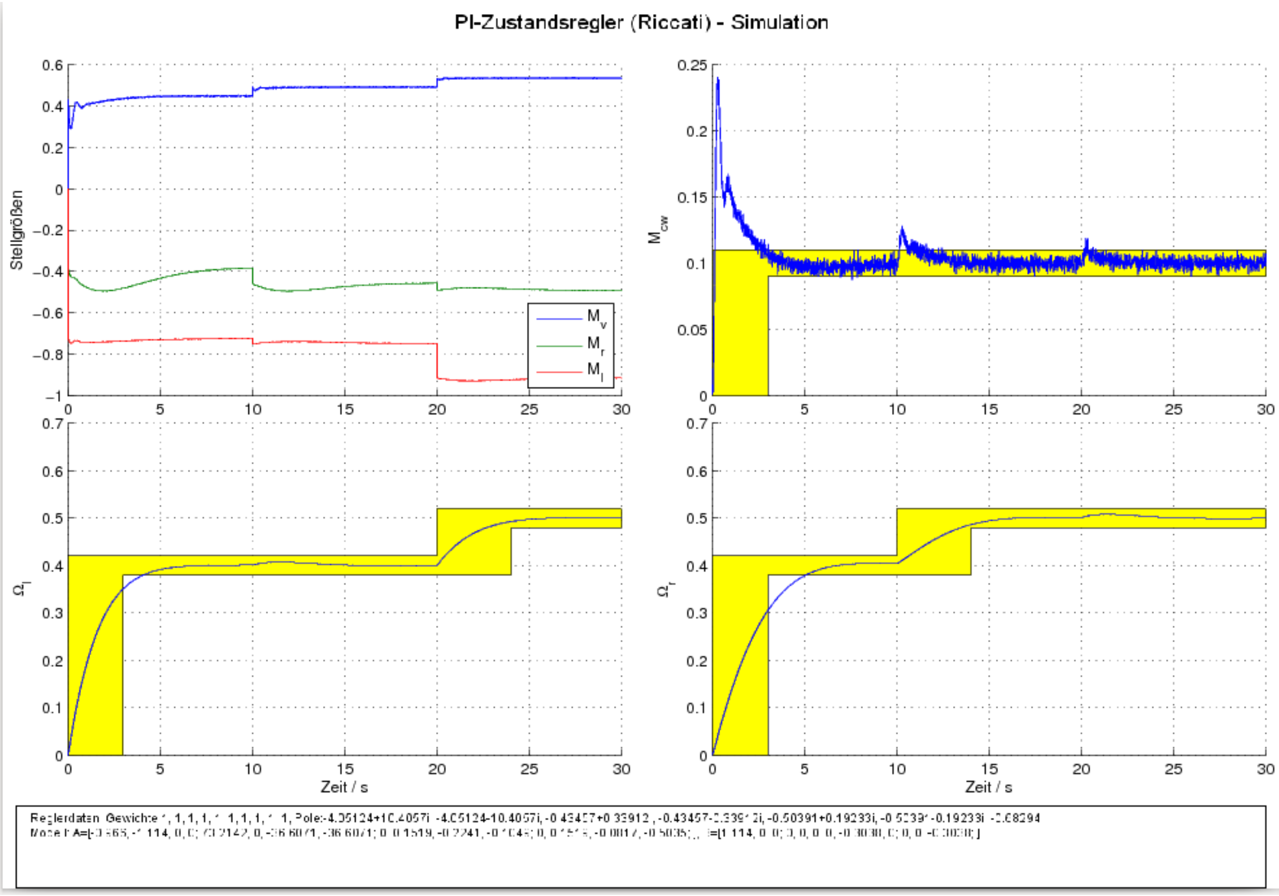

Abbildung 3.31 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(1,1,1,1,1,1,1),S = diag(1,1,1))

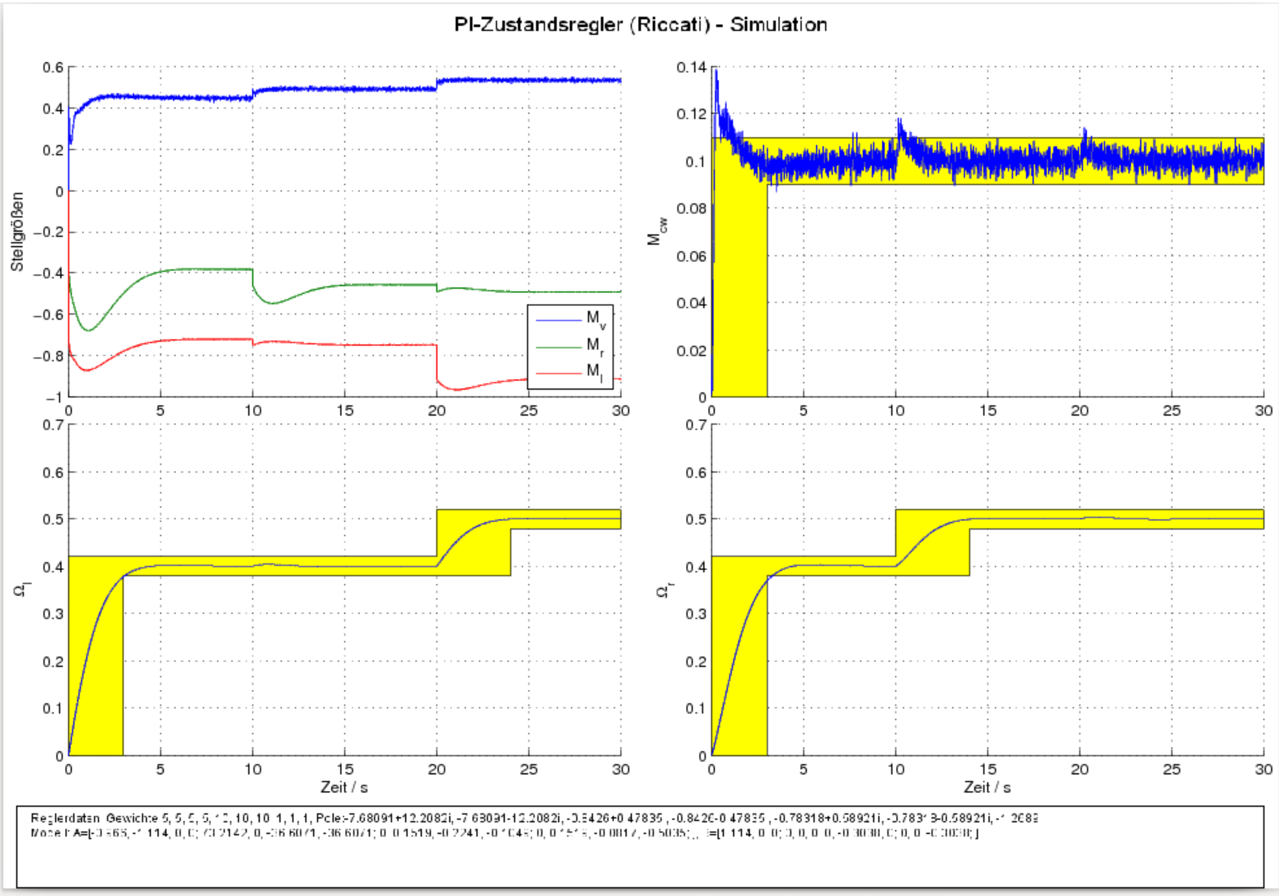

Abbildung 3.32 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(5,5,5,5,10,10,10),S = diag(1,1,1))

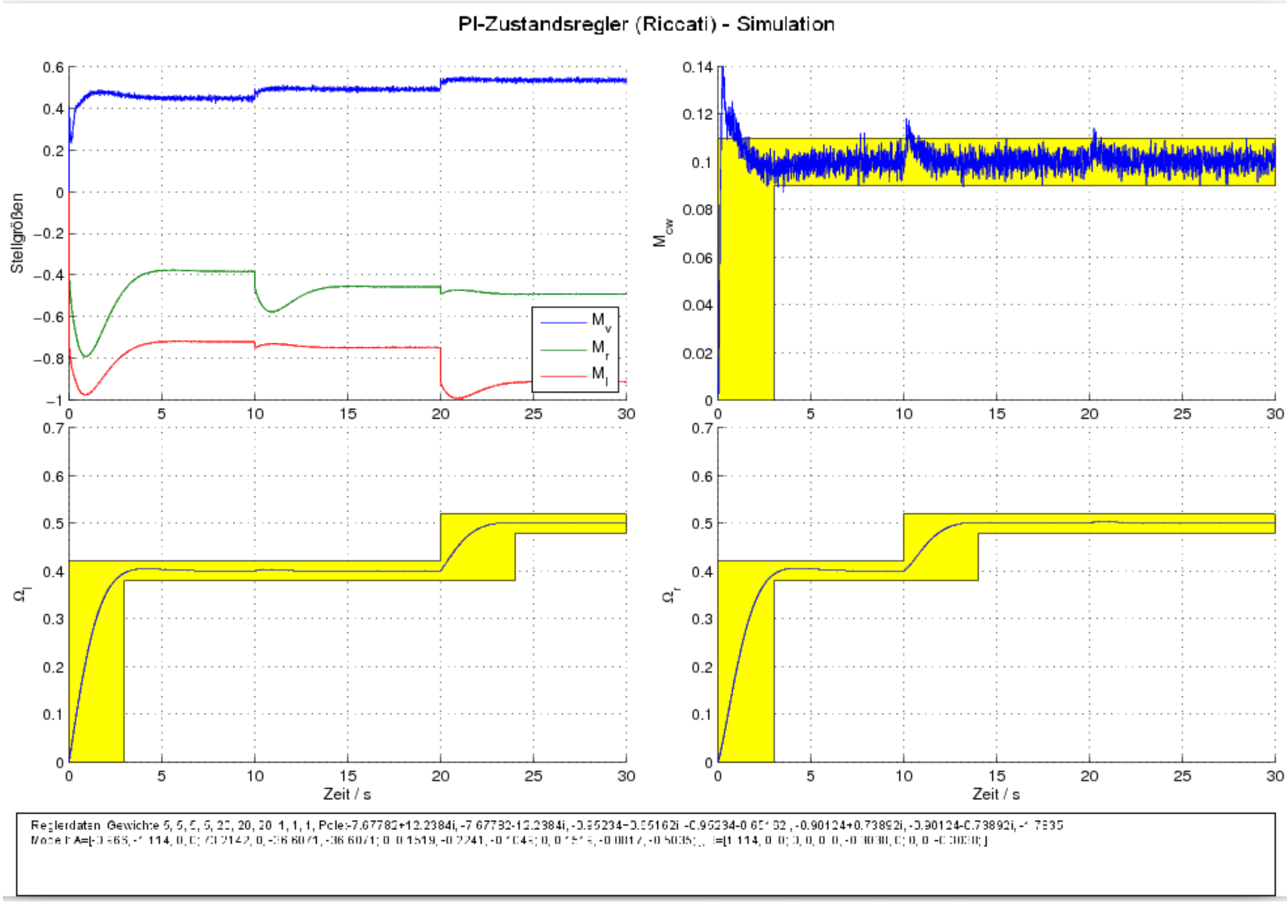

Abbildung 3.33 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(5,5,5,5,20,20,20),S = diag(1,1,1))

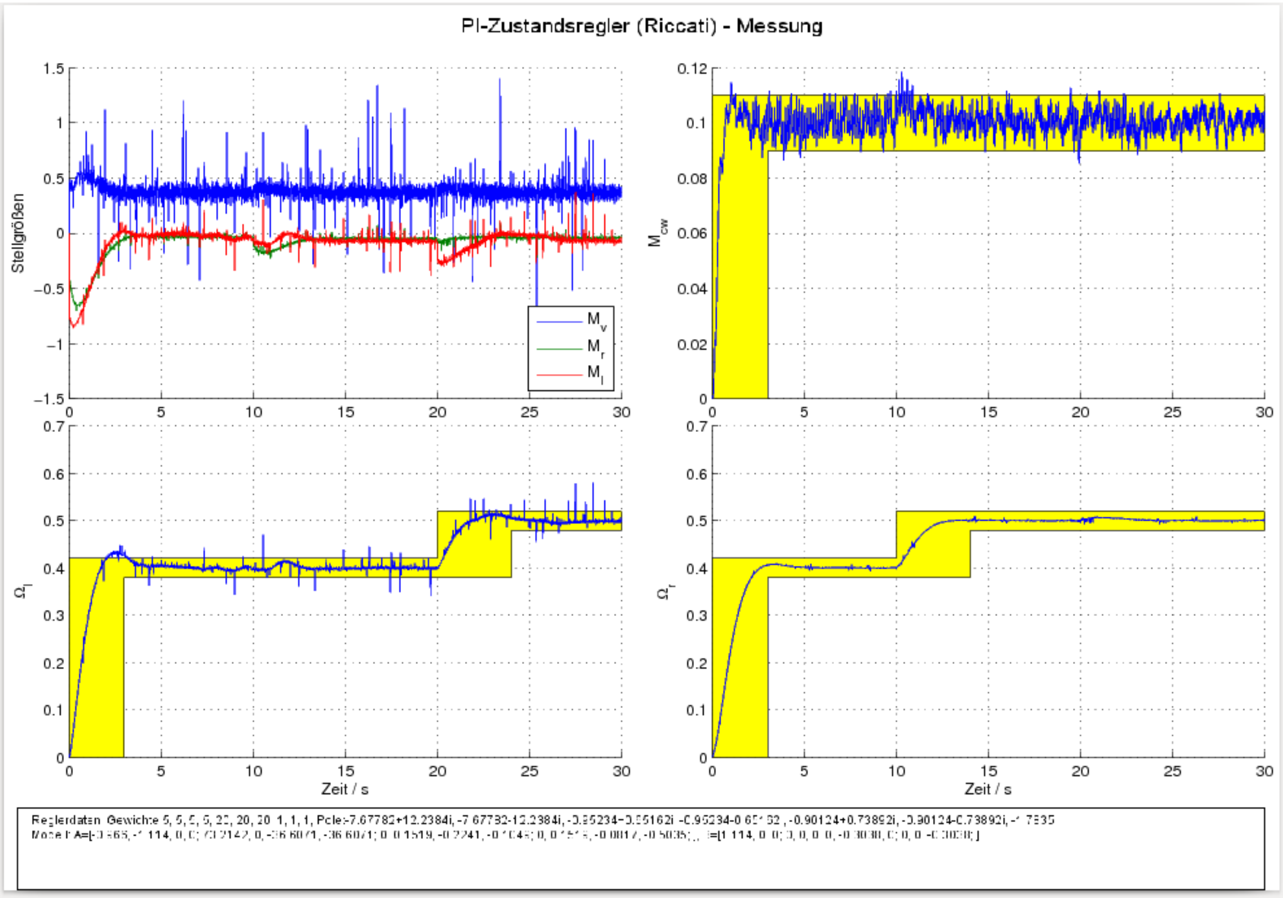

Abbildung 3.34 Testergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(5,5,5,5,20,20,20),S = diag(1,1,1))

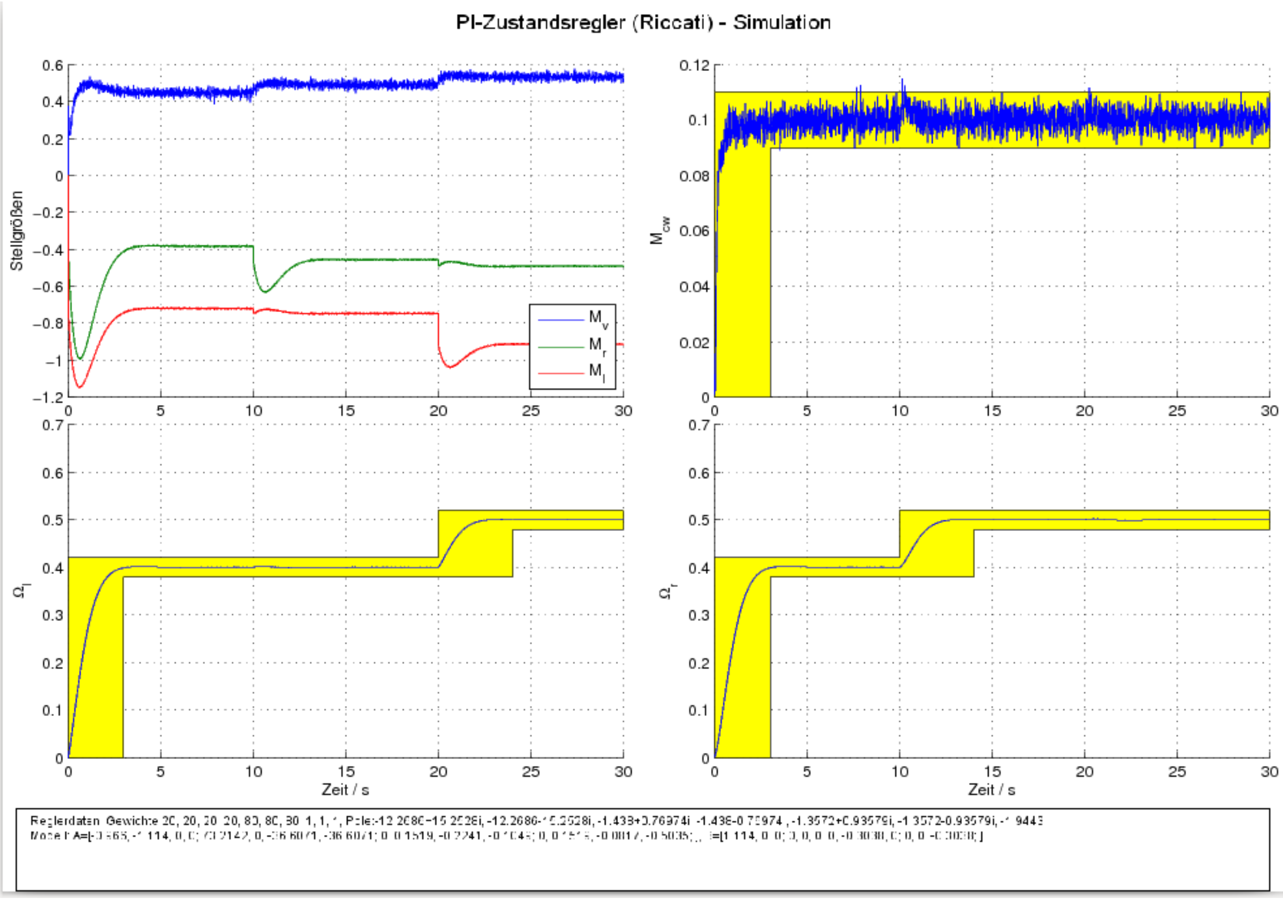

Abbildung 3.35 Simulationsergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(20,20,20,20,80,80,80),S = diag(1,1,1))

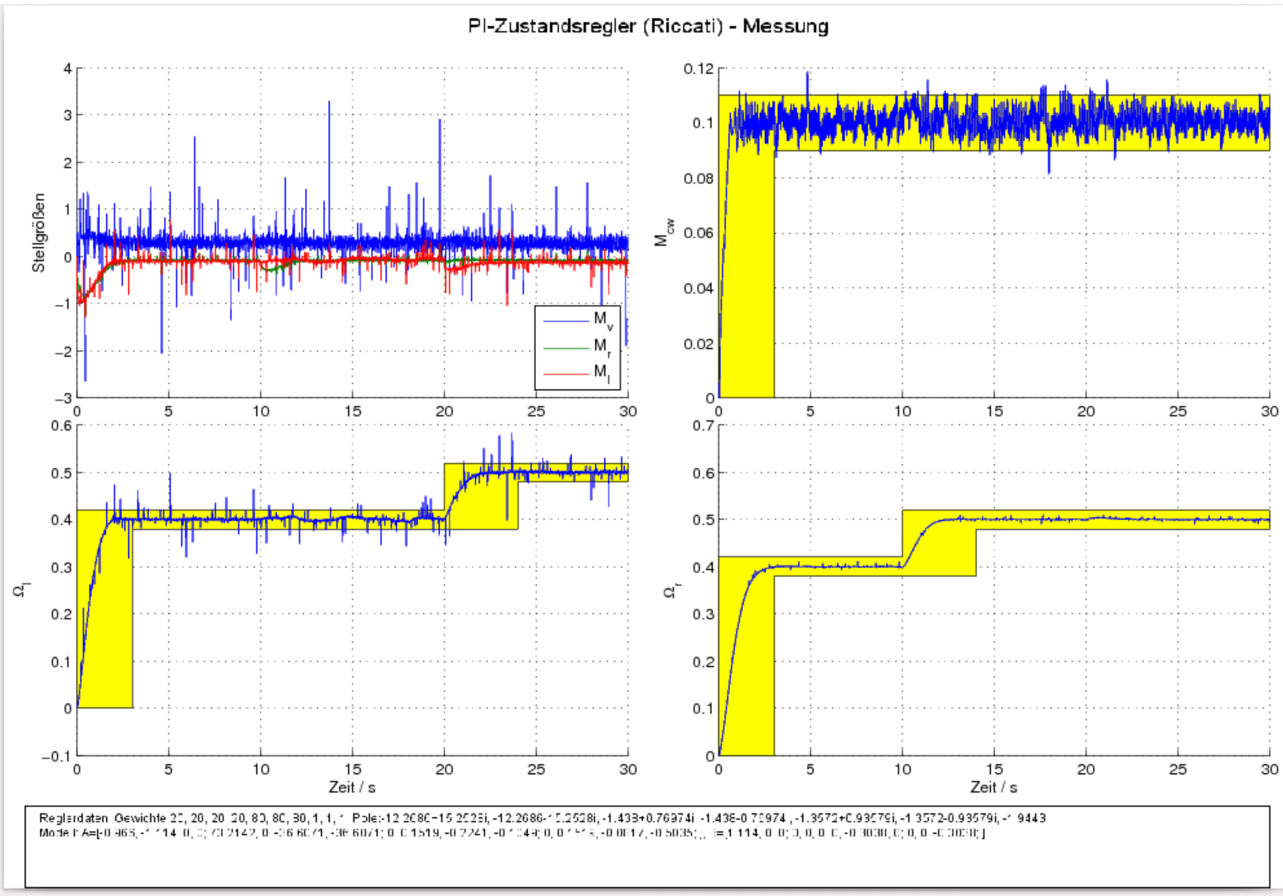

Abbildung 3.36 Testergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(20,20,20,20,80,80,80),S = diag(1,1,1))

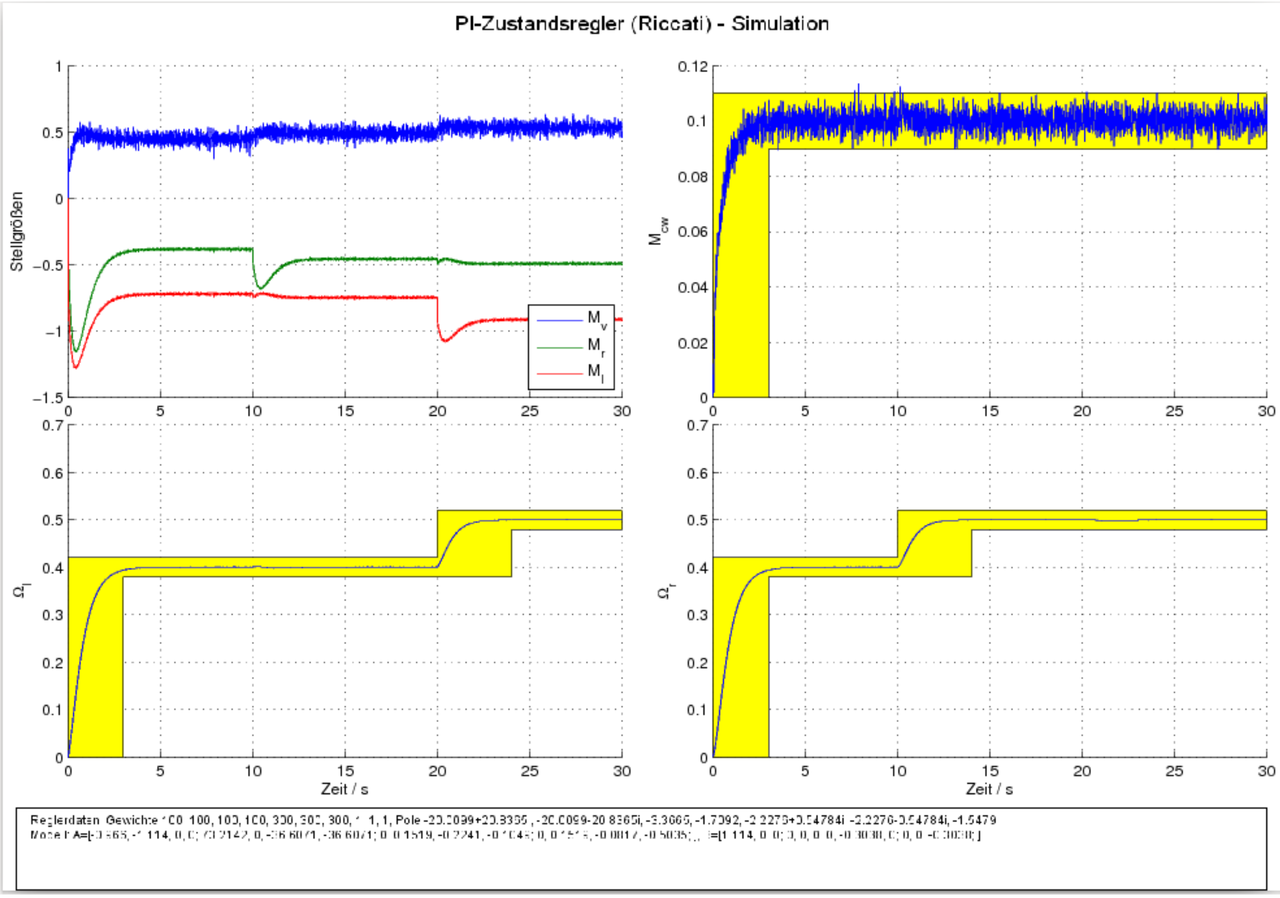

Abbildung 3.37 Simulationergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(100,100,100,100,300,300,300),S = diag(1,1,1))

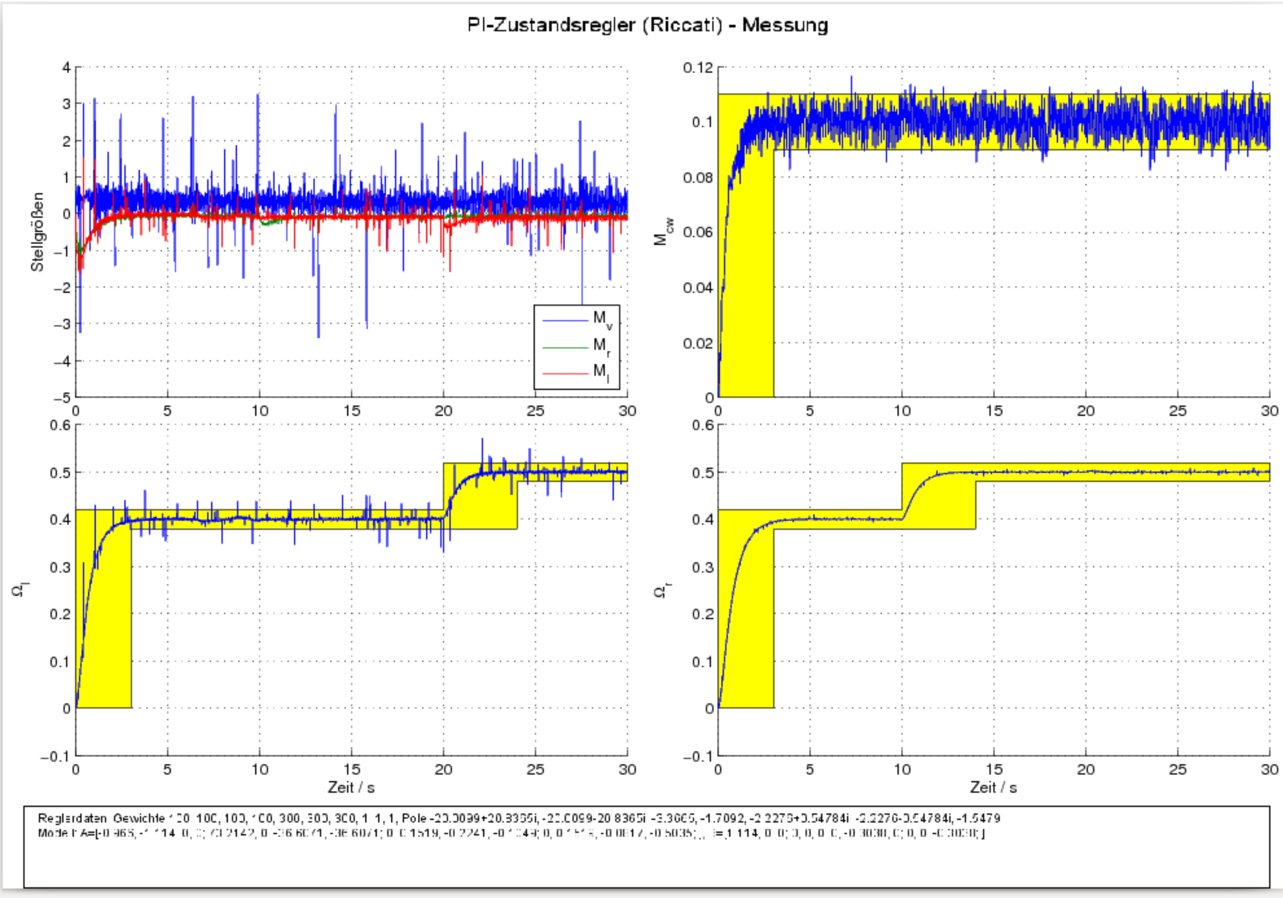

Abbildung 3.38 Testergebnis des PI-Zustandsreglers (Riccati)

(Q = diag(100,100,100,100,300,300,300),S = diag(1,1,1))

4. Auftretende Probleme beim Test und Diskussion

Zusammenfassend können wir sagen, dass wir uns für den PI-Zustandsregler entscheiden würden. Das Testergebnis eines geeigneten PI-Zustandsreglers mithilfe Riccati-Reglers ist deutlich besser als die anderen Regelungen.In PI-Zustandsregelung werden die Störeinflüsse berücksichtigt. Die Schwankungen sind kleiner als das System mit Entkopplungsregelung. Außerdem ist der Entwurf einsichtig.

5. Literatur

[1] FÖLLINGER, OTTO: Regelungstechnik. VDE Verlag, Berlin, 12. Auflage, 2016.

[2] KLUWE, MATHIAS: Regelung linearer Mehrgrößensysteme. Mitschrieb zur Vorlesung, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, KIT, WS 2012/2013.