Meilleur itinéraire pour un automobiliste

Présentée par:
Nabil Bernine
Kiril Gashteovski
Maximilien Perrad

Sous la direction du professeur **Yann Vaxès**

29 mars 2012

Master Informatique Avancée et Applications :
Algorithmique et Recherche Opérationnelle
Soutenance du Projet de Fin d'Année

Aix Marseille université

Plan de l'exposé

Introduction

Introduction

Contexte

La Fédération Française des Jeux Mathématiques et la Société de Calcul Mathématique S.A. organisent conjointement un concours concernant la résolution d'un problème mettant en œuvre des résolutions mathématiques et algorithmiques.
Le sujet est *Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste*. Il s'agit d'une simplification du problème de trouver un trajet optimal pour un automobiliste qui veut se rendre d'une ville à l'autre.

État de l'art

Les problèmes de parcours optimaux sont traités par la théorie des graphes.
Un graphe définit l'existence d'une relation entre objets tels qu'une ligne entre deux stations de métro, une relation d'amitié dans un réseau social ou encore une rue entre deux carrefours . . .
Des algorithmes exactes ont été développés dans ce contexte pour résoudre efficacement le problème du plus court chemin pour les poids à un seul critère.
Il existe des algorithmes pseudo-polynômiaux qui fonctionnent par marquage pour résoudre les problèmes de plus court chemins multicritères.

Introduction

Contexte

La Fédération Française des Jeux Mathématiques et la Société de Calcul Mathématique S.A. organisent conjointement un concours concernant la résolution d'un problème mettant en œuvre des résolutions mathématiques et algorithmiques. Le sujet est *Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste*. Il s'agit d'une simplification du problème de trouver un trajet optimal pour un automobiliste qui veut se rendre d'une ville à l'autre.

État de l'art

Les problèmes de parcours optimaux sont traités par la théorie des graphes.
Un graphe définit l'existence d'une relation entre objets tels qu'une ligne entre deux stations de métro, une relation d'amitié dans un réseau social ou encore une rue entre deux carrefours . . .
Des algorithmes exactes ont été développés dans ce contexte pour résoudre efficacement le problème du plus court chemin pour les poids à un seul critère.
Il existe des algorithmes pseudo-polynômiaux qui fonctionnent par marquage pour résoudre les problèmes de plus court chemins multicritères.

Introduction

Contexte

La Fédération Française des Jeux Mathématiques et la Société de Calcul Mathématique S.A. organisent conjointement un concours concernant la résolution d'un problème mettant en œuvre des résolutions mathématiques et algorithmiques. Le sujet est *Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste*. Il s'agit d'une simplification du problème de trouver un trajet optimal pour un automobiliste qui veut se rendre d'une ville à l'autre.

État de l'art

Les problèmes de parcours optimaux sont traités par la théorie des graphes.
Un graphe définit l'existence d'une relation entre objets tels qu'une ligne entre deux stations de métro, une relation d'amitié dans un réseau social ou encore une rue entre deux carrefours . . .
Des algorithmes exactes ont été développés dans ce contexte pour résoudre efficacement le problème du plus court chemin pour les poids à un seul critère.
Il existe des algorithmes pseudo-polynômiaux qui fonctionnent par marquage pour résoudre les problèmes de plus court chemins multicritères.

Introduction

Contexte

La Fédération Française des Jeux Mathématiques et la Société de Calcul Mathématique S.A. organisent conjointement un concours concernant la résolution d'un problème mettant en œuvre des résolutions mathématiques et algorithmiques.
Le sujet est *Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste*. Il s'agit d'une simplification du problème de trouver un trajet optimal pour un automobiliste qui veut se rendre d'une ville à l'autre.

État de l'art

Les problèmes de parcours optimaux sont traités par la théorie des graphes.
Un graphe définit l'existence d'une relation entre objets tels qu'une ligne entre deux stations de métro, une relation d'amitié dans un réseau social ou encore une rue entre deux carrefours . . .
Des algorithmes exactes ont été développés dans ce contexte pour résoudre efficacement le problème du plus court chemin pour les poids à un seul critère.
Il existe des algorithmes pseudo-polynômiaux qui fonctionnent par marquage pour résoudre les problèmes de plus court chemins multicritères.

Introduction

Contexte

La Fédération Française des Jeux Mathématiques et la Société de Calcul Mathématique S.A. organisent conjointement un concours concernant la résolution d'un problème mettant en œuvre des résolutions mathématiques et algorithmiques.
Le sujet est *Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste*. Il s'agit d'une simplification du problème de trouver un trajet optimal pour un automobiliste qui veut se rendre d'une ville à l'autre.

État de l'art

Les problèmes de parcours optimaux sont traités par la théorie des graphes.
Un graphe définit l'existence d'une relation entre objets tels qu'une ligne entre deux stations de métro, une relation d'amitié dans un réseau social ou encore une rue entre deux carrefours . . .
Des algorithmes exactes ont été développés dans ce contexte pour résoudre efficacement le problème du plus court chemin pour les poids à un seul critère.
Il existe des algorithmes pseudo-polynômiaux qui fonctionnent par marquage pour résoudre les problèmes de plus court chemins multicritères.

Position du problème

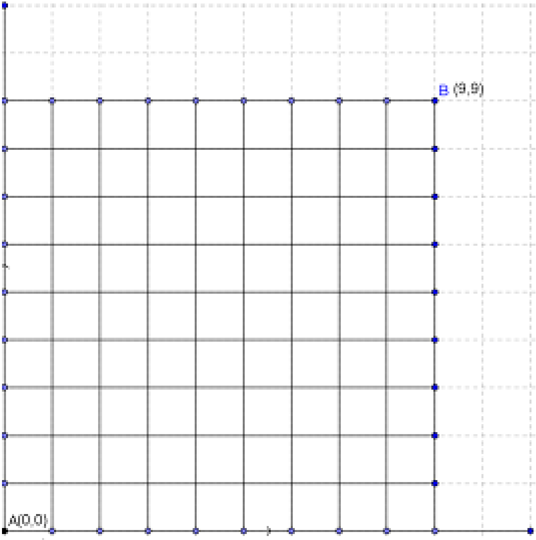

Fig.: Grille du déplacement de l'automobiliste

Position du problème

Données du problème

Taille de la grille $(m \times n)$;
La longueur des segments d ;
La position des radars fixes ;
Limitation de vitesse sur chaque ségment ;
Les coût pour : péages, consommation, temps passé sur un trajet ;
Le nombre de radars mobiles ;
Les règles de détection et les coûts engendré par les deux types de radars.

Problématique

1. Déterminer le trajet de temps minimal (T^o), avec un déplacement respectant les limitations de vitesse.
2. Quel est le trajet de coût minimal, si l'automobiliste respecte les limitations de vitesse ?
3. Si un conducteur souhaite faire le trajet en un temps ne dépassant pas les 80% du temps optimal T^o, quel trajet minimise l'espérance du coût total du trajet, et quelle est sa valeur ?

Position du problème

Données du problème

Taille de la grille $(m \times n)$;
La longueur des segments d ;
La position des radars fixes ;
Limitation de vitesse sur chaque ségment ;
Les coût pour : péages, consommation, temps passé sur un trajet ;
Le nombre de radars mobiles ;
Les règles de détection et les coûts engendré par les deux types de radars.

Problématique

1. Déterminer le trajet de temps minimal (T^o), avec un déplacement respectant les limitations de vitesse.
2. Quel est le trajet de coût minimal, si l'automobiliste respecte les limitations de vitesse ?
3. Si un conducteur souhaite faire le trajet en un temps ne dépassant pas les 80% du temps optimal T^o, quel trajet minimise l'espérance du coût total du trajet, et quelle est sa valeur ?

Position du problème

Données du problème

Taille de la grille $(m \times n)$;
La longueur des segments d;
La position des radars fixes;
Limitation de vitesse sur chaque ségment;
Les coût pour : péages, consommation, temps passé sur un trajet;
Le nombre de radars mobiles;
Les règles de détection et les coûts engendré par les deux types de radars.

Problématique

1. Déterminer le trajet de temps minimal (T^o), avec un déplacement respectant les limitations de vitesse.
2. Quel est le trajet de coût minimal, si l'automobiliste respecte les limitations de vitesse?
3. Si un conducteur souhaite faire le trajet en un temps ne dépassant pas les 80% du temps optimal T^o, quel trajet minimise l'espérance du coût total du trajet, et quelle est sa valeur?

Position du problème

Données du problème

Taille de la grille $(m \times n)$;
La longueur des segments d ;
La position des radars fixes ;
Limitation de vitesse sur chaque ségment ;
Les coût pour : péages, consommation, temps passé sur un trajet ;
Le nombre de radars mobiles ;
Les règles de détection et les coûts engendré par les deux types de radars.

Problématique

1. Déterminer le trajet de temps minimal (T^o), avec un déplacement respectant les limitations de vitesse.
2. Quel est le trajet de coût minimal, si l'automobiliste respecte les limitations de vitesse ?
3. Si un conducteur souhaite faire le trajet en un temps ne dépassant pas les 80% du temps optimal T^o, quel trajet minimise l'espérance du coût total du trajet, et quelle est sa valeur ?

Le problème déterministe

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x, y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1, y)_{x>0} & \leftarrow & (x, y) & \rightarrow & (x+1, y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x, y-1)_{y>0} & & \end{array} ;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;

Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;

Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.

Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x, y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1, y)_{x>0} & \leftarrow & (x, y) & \rightarrow & (x+1, y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x, y-1)_{y>0} & & \end{array} \;;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;
Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;
Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.
Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x, y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1, y)_{x>0} & \leftarrow & (x, y) & \rightarrow & (x+1, y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x, y-1)_{y>0} & & \end{array} ;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;

Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;

Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.

Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x, y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1, y)_{x>0} & \leftarrow & (x, y) & \rightarrow & (x+1, y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x, y-1)_{y>0} & & \end{array} ;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;
Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;
Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.
Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x, y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1, y)_{x>0} & \leftarrow & (x, y) & \rightarrow & (x+1, y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x, y-1)_{y>0} & & \end{array} \;;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;
Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;
Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.
Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe : Respect des limitations de vitesse !

Modélisation du problème

Le quadrillage de déplacement est vue comme un graphe ;

$$\begin{array}{ccccc} & & (x,y+1)_{y<M} & & \\ & & \uparrow & & \\ (x-1,y)_{x>0} & \leftarrow & (x,y) & \rightarrow & (x+1,y)_{x<N} \\ & & \downarrow & & \\ & & (x,y-1)_{y>0} & & \end{array} ;$$

Pondérer les arcs par le temps passé sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 1 ;
Pondérer les arcs par le coût sur les segments correspondants pour répondre à la problématique 2 ;
Le problème revient dans les deux cas à retrouver un plus court chemin.

Temps minimal

Avoir le temps minimal sur chaque arc correspond à parcourir le segment avec la vitesse limite autorisée.
Chaque arc sera donc valué par le temps : $t_i = \frac{d}{V_i^l}$, où V_i^l est la limitation de vitesse sur l'arc i.

Le problème déterministe

Coût minimal

Ici les poids des arcs refléteront le coût minimum sur les segments correspondants.

Sur un arc donné, on a :

$$C_i^I = C_i^1 + C_i^2 + C_i^p \ ; \tag{1}$$

1. Coût lié au temps passé (hébergement, restauration,...) :

$$C_i^1 = \alpha \ \frac{d_i}{v_i}; \tag{2}$$

2. Coût de la consommation du carburant :

$$C_i^2 = \beta \ (av_i + b); \tag{3}$$

3. Coût des péages :

$$C_i^p = \begin{cases} 3 & \text{si } V_i^l = 130 \ [Km/h] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Le problème déterministe

Coût minimal

Ici les poids des arcs refléteront le coût minimum sur les segments correspondants. Sur un arc donné, on a :

$$C_i^I = C_i^1 + C_i^2 + C_i^p \; ; \tag{1}$$

1. Coût lié au temps passé (hébergement, restauration,. . .) :

$$C_i^1 = \alpha \, \frac{d_i}{v_i}; \tag{2}$$

2. Coût de la consommation du carburant :

$$C_i^2 = \beta \, (av_i + b); \tag{3}$$

3. Coût des péages :

$$C_i^p = \begin{cases} 3 & \text{si } V_i^l = 130 \; [Km/h] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Le problème déterministe

Coût minimal

Ici les poids des arcs refléteront le coût minimum sur les segments correspondants. Sur un arc donné, on a :

$$C_i^I = C_i^1 + C_i^2 + C_i^p \;; \tag{1}$$

1. Coût lié au temps passé (hébergement, restauration,...) :

$$C_i^1 = \alpha \, \frac{d_i}{v_i}; \tag{2}$$

2. Coût de la consommation du carburant :

$$C_i^2 = \beta \, (av_i + b); \tag{3}$$

3. Coût des péages :

$$C_i^p = \begin{cases} 3 & \text{si } V_i^l = 130 \; [Km/h] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Le problème déterministe

Coût minimal

Ici les poids des arcs reflèteront le coût minimum sur les segments correspondants. Sur un arc donné, on a :

$$C_i^I = C_i^1 + C_i^2 + C_i^p \ ; \tag{1}$$

1. Coût lié au temps passé (hébergement, restauration,. . .) :

$$C_i^1 = \alpha \ \frac{d_i}{v_i}; \tag{2}$$

2. Coût de la consommation du carburant :

$$C_i^2 = \beta \ (av_i + b); \tag{3}$$

3. Coût des péages :

$$C_i^p = \begin{cases} 3 & \text{si } V_i^l = 130 \ [Km/h] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4}$$

Le problème déterministe

Coût minimal - poids des arcs

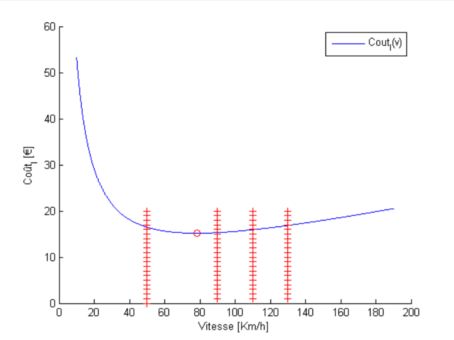

Fig.: Le coût sur chaque segment en fonction de la vitesse.

Le poids de chaque arc sera choisi comme le minimum de cette fonction sur l'espace des vitesses autorisées.

Le problème déterministe

Coût minimal - poids des arcs

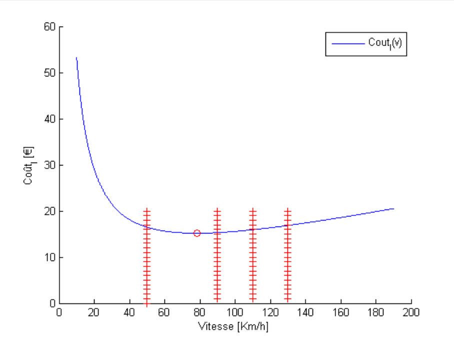

Fig.: Le coût sur chaque segment en fonction de la vitesse.

Le poids de chaque arc sera choisi comme le minimum de cette fonction sur l'espace des vitesses autorisées.

Le problème déterministe

Algorithme de résolution

Le problème du plus court chemin $\overset{O(n \log n)}{\longrightarrow}$ l'algorithme de Dijkstra (poids positifs).

Dijkstra

FONCTION Dijkstra(source, nœuds, arcs, poids)
POUR TOUT u *DANS* $noeuds$ *FAIRE*
$dist[u] := +\infty$;
$pred[u] := \emptyset$;
$dist[source] := 0$;
$Q := noeuds$;
TANT QUE $Q \neq \emptyset$ *FAIRE*
$u \in Q \mid dist[u] = \min_{v \in Q} dist[v]$;
$Q := Q \backslash \{u\}$;
POUR TOUT $v \mid \overrightarrow{uv} \in arcs$ *FAIRE*
SI $(dist[v] > dist[u] + poids[u][v])$ *ALORS*
$dist[v] := dist[u] + poids[u][v]$;
$pred[v] := u$;
OUTPUT $dist$: Distances de chaque sommet à la source ;
Les chemins sont obtenus par récurrence sur $pred$.

Le problème déterministe

Algorithme de résolution

Le problème du plus court chemin $\overset{O(n \log n)}{\longrightarrow}$ l'algorithme de Dijkstra (poids positifs).

Dijkstra

FONCTION Dijkstra(source, nœuds, arcs, poids)
  POUR TOUT u *DANS* $noeuds$ *FAIRE*
    $dist[u] := +\infty$;
    $pred[u] := \emptyset$;
  $dist[source] := 0$;
  $Q := noeuds$;
  TANT QUE $Q \neq \emptyset$ *FAIRE*
    $u \in Q \mid dist[u] = \min_{v \in Q} dist[v]$;
    $Q := Q \backslash \{u\}$;
    POUR TOUT $v \mid \overrightarrow{uv} \in arcs$ *FAIRE*
      SI $(dist[v] > dist[u] + poids[u][v])$ *ALORS*
      $dist[v] := dist[u] + poids[u][v]$;
      $pred[v] := u$;
OUTPUT $dist$: Distances de chaque sommet à la source ;
  Les chemins sont obtenus par récurrence sur $pred$.

Le problème déterministe

Spécificité du problème pour l'algorithme de Dijkstra

1. Les coûts et les temps sur chaque segment sont à valeurs non-négatives, nécessaire pour l'algorithme de Dijkstra ;
2. De chaque sommet on a au plus 4 arcs possibles à emprunter. Une matrice d'adjacence serait creuse, il est donc intéressant de travailler avec les éléments non-nuls tel que définis dans les données du problème ;
3. Les sommet sont indexés par leurs deux coordonnée, une fonction de mapping est définie pour faire la correspondance avec les nœuds pour l'algorithme et exploiter les éléments non-nuls de la matrice d'adjacence sans pour autant la définir.

Le problème déterministe

Spécificité du problème pour l'algorithme de Dijkstra

1. Les coûts et les temps sur chaque segment sont à valeurs non-négatives, nécessaire pour l'algorithme de Dijkstra ;
2. De chaque sommet on a au plus 4 arcs possibles à emprunter. Une matrice d'adjacence serait creuse, il est donc intéressant de travailler avec les éléments non-nuls tel que définis dans les données du problème ;
3. Les sommet sont indexés par leurs deux coordonnée, une fonction de mapping est définie pour faire la correspondance avec les nœuds pour l'algorithme et exploiter les éléments non-nuls de la matrice d'adjacence sans pour autant la définir.

Le problème déterministe

Spécificité du problème pour l'algorithme de Dijkstra

1. Les coûts et les temps sur chaque segment sont à valeurs non-négatives, nécessaire pour l'algorithme de Dijkstra ;
2. De chaque sommet on a au plus 4 arcs possibles à emprunter. Une matrice d'adjacence serait creuse, il est donc intéressant de travailler avec les éléments non-nuls tel que définis dans les données du problème ;
3. Les sommet sont indexés par leurs deux coordonnée, une fonction de mapping est définie pour faire la correspondance avec les nœuds pour l'algorithme et exploiter les éléments non-nuls de la matrice d'adjacence sans pour autant la définir.

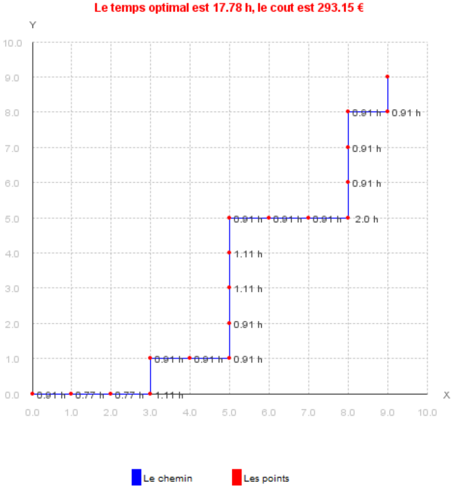

Fig.: Résultats Chemin Plus Rapide

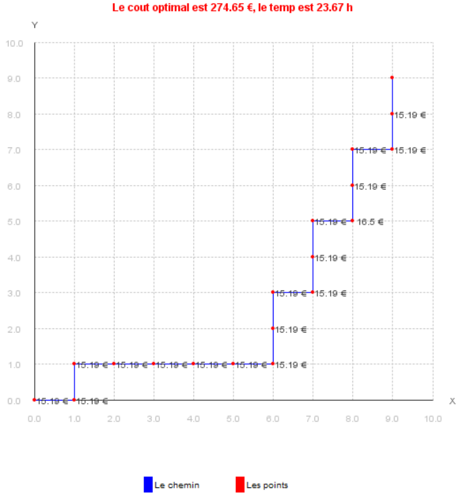

Fig.: Résultats Chemin Moins Coûteux

Le problème Probabiliste

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0,0)$ à $B = (9,9)$ en un temps t, inférieur à 80% T^o.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0, 0)$ à $B = (9, 9)$ en un temps t, inférieur à $80\%\ T^o$.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0,0)$ à $B = (9,9)$ en un temps t, inférieur à 80% T^o.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0, 0)$ à $B = (9, 9)$ en un temps t, inférieur à 80% T^o.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0, 0)$ à $B = (9, 9)$ en un temps t, inférieur à $80\%\ T^o$.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

Position du problème

Un conducteur pressé souhaite faire le trajet de $A = (0,0)$ à $B = (9,9)$ en un temps t, inférieur à 80% T^o.
Il risque de se faire flasher par des radars fixes ou mobiles.
Dans ce cas il aura un coût sur chaque radar qui le détecte.

Espérance du nombre de radars

Sur chaque segment$i$, on définit la variable aléatoire

$$X_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } \textit{Le radar j est sur le segment i}; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$E(X_i^j) = \mathbb{P}(X_i^j = 1) = p = \frac{1}{180}$.

L'espérance du nombre de radars est alors : $E(X) = \sum_{i=1}^{20} E(X_i) = 20p = \frac{1}{9}$.

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \ ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \Big[\mathbf{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\Big] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbf{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \qquad\qquad v_i \leq 1.1V_i^l ; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l < v_i \leq 1.5V_i^l ; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l < v_i . \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \; ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \Big[\mathbf{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\Big] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbf{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad & v_i \leq & 1.1V_i^l; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l & < v_i \leq & 1.5V_i^l; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l & < v_i. \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \; ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \left[\mathbf{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\right] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbf{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v_i \leq 1.1V_i^l; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l < v_i \leq 1.5V_i^l; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l < v_i. \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \; ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \Big[\mathbb{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\Big] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbb{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad & v_i \leq & 1.1V_i^l; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l & < v_i \leq & 1.5V_i^l; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l & < v_i. \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \ ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \left[\mathbb{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\right] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbb{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v_i \leq 1.1V_i^l; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l < v_i \leq 1.5V_i^l; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l < v_i. \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

Le problème probabiliste

La fonction Coût

La fonction coût sera alors la somme du coût calculé dans la premiere partie plus l'espérance du coût lié aux radars.

$$C_i^{II} = C_i^I + C_i^R \ ; \tag{5}$$

Le coût C_i^I est celui calculé en premiere partie (Eq.2) ; Le coût $C_i^R(v_i)$ s'écrit :

$$C_i^R(v_i) = \left[\mathbb{1}_{(R_{fix})} + E(\mathcal{X}_i)\right] penalite(v_i)$$

Où :

$$\mathbb{1}_{(R_{fix})} = \begin{cases} 1, & \text{si il y a un radar fixe sur le segment ;} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{6}$$

$$penalite(v_i) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad v_i \leq 1.1V_i^l; \\ 100 * 0.7, & \text{si} \quad 1.1V_i^l < v_i \leq 1.5V_i^l; \\ 200 * 0.9, & \text{si} \quad 1.5V_i^l < v_i. \end{cases} \tag{7}$$

Sa courbe aura une forme discontinue en trois paliers comme suit :

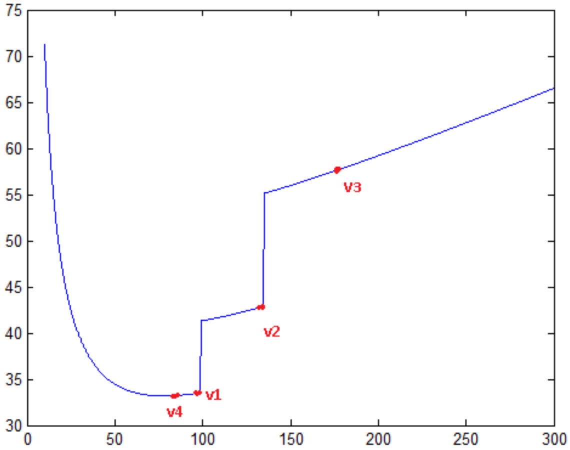

Fig.: Forme générale de courbe de coût

Le problème probabiliste

Choix de discrétisation de l'ensemble de vitesse

La forme de la courbe du coût suggère que l'automobiliste sera amené a prendre son choix de vitesse parmi un nombre de points définis, correspondants aux points particuliers de la courbe.

$$\bar{v} = \begin{cases} \bar{v_1} & = & 1.1V_i^l \\ \bar{v_2} & = & 1.5V_i^l \\ \bar{v_3} & = & 2V_i^l \\ \bar{v_4} & = & \tilde{v} \end{cases}$$

Le segment i est alors vu comme quatre arcs, chaque arc j est valué par $(t_j = \frac{d}{\bar{v_j}}, C_i^{II}(\bar{v_j})),\ j = \overline{1,4}$.

Résolution

On définit sur chaque sommet une liste de labels non dominés.
Un label sur un sommet u est $l_u = (t, c, pred)$.
On étends un label l_u sur chaque sommet voisin v en ajoutant à la liste des labels de v,le label $l_v = (t + t_{\overrightarrow{uv}}, c + c_{\overrightarrow{uv}}, u)$ si il n'est pas dominé.

Le problème probabiliste

Choix de discrétisation de l'ensemble de vitesse

La forme de la courbe du coût suggère que l'automobiliste sera amené a prendre son choix de vitesse parmi un nombre de points définis, correspondants aux points particuliers de la courbe.

$$\bar{v} = \begin{cases} \bar{v_1} & = & 1.1V_i^l \\ \bar{v_2} & = & 1.5V_i^l \\ \bar{v_3} & = & 2V_i^l \\ \bar{v_4} & = & \tilde{v} \end{cases}$$

Le segment i est alors vu comme quatre arcs, chaque arc j est valué par $(t_j = \frac{d}{\bar{v_j}}, C_i^{II}(\bar{v_j})),\ j = \overline{1,4}$.

Résolution

On définit sur chaque sommet une liste de labels non dominés.
Un label sur un sommet u est $l_u = (t, c, pred)$.
On étends un label l_u sur chaque sommet voisin v en ajoutant à la liste des labels de v,le label $l_v = (t + t_{\overrightarrow{uv}}, c + c_{\overrightarrow{uv}}, u)$ si il n'est pas dominé.

Le problème probabiliste

Choix de discrétisation de l'ensemble de vitesse

La forme de la courbe du coût suggère que l'automobiliste sera amené a prendre son choix de vitesse parmi un nombre de points définis, correspondants aux points particuliers de la courbe.

$$\bar{v} = \begin{cases} \bar{v_1} & = & 1.1V_i^l \\ \bar{v_2} & = & 1.5V_i^l \\ \bar{v_3} & = & 2V_i^l \\ \bar{v_4} & = & \tilde{v} \end{cases}$$

Le segment i est alors vu comme quatre arcs, chaque arc $\jmath$ est valué par $(t_\jmath = \frac{d}{\bar{v_\jmath}}, C_i^{II}(\bar{v_\jmath})), \ \jmath = \overline{1,4}$.

Résolution

On définit sur chaque sommet une liste de labels non dominés.
Un label sur un sommet u est $l_u = (t, c, pred)$.
On étends un label l_u sur chaque sommet voisin v en ajoutant à la liste des labels de v,le label $l_v = (t + t_{\overrightarrow{uv}}, c + c_{\overrightarrow{uv}}, u)$ si il n'est pas dominé.

Le problème probabiliste

Choix de discrétisation de l'ensemble de vitesse

La forme de la courbe du coût suggère que l'automobiliste sera amené a prendre son choix de vitesse parmi un nombre de points définis, correspondants aux points particuliers de la courbe.

$$\bar{v} = \begin{cases} \bar{v_1} & = & 1.1V_i^l \\ \bar{v_2} & = & 1.5V_i^l \\ \bar{v_3} & = & 2V_i^l \\ \bar{v_4} & = & \tilde{v} \end{cases}$$

Le segment i est alors vu comme quatre arcs, chaque arc $\jmath$ est valué par $(t_\jmath = \frac{d}{\bar{v_\jmath}}, C_i^{II}(\bar{v_\jmath})),\ \jmath = \overline{1,4}$.

Résolution

On définit sur chaque sommet une liste de labels non dominés.
Un label sur un sommet u est $l_u = (t, c, pred)$.
On étends un label l_u sur chaque sommet voisin v en ajoutant à la liste des labels de v,le label $l_v = (t + t_{\overrightarrow{uv}}, c + c_{\overrightarrow{uv}}, u)$ si il n'est pas dominé.

Le problème probabiliste

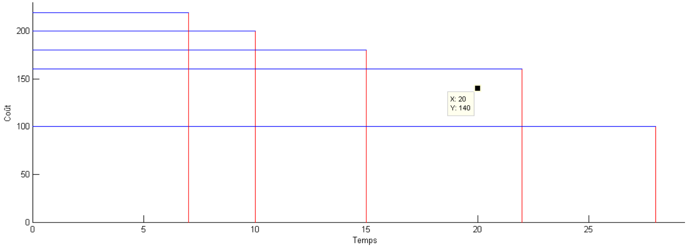

Fig.: Illustration de la relation de dominance

Algorithme de labels

Initialisation : Toute les listes de labels sont vides sauf celle de la source : $\mathfrak{L}_A = \{(0, 0, A)\}$;

Boucle : Tant qu'il existe un label l non examiné : *étendre* l ;

Fin Renvoyer le label de la destination B qui a le coût le plus petit parmi tous ceux pour lesquels $t \leq 0.8T^o$.

Le problème probabiliste

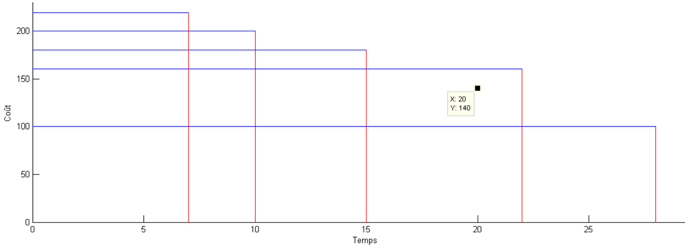

Fig.: Illustration de la relation de dominance

Algorithme de labels

Initialisation : Toute les listes de labels sont vides sauf celle de la source : $\mathfrak{L}_A = \{(0, 0, A)\}$;

Boucle : Tant qu'il existe un label l non examiné : *étendre* l ;

Fin Renvoyer le label de la destination B qui a le coût le plus petit parmi tous ceux pour lesquels $t \leq 0.8T^o$.

Le problème probabiliste

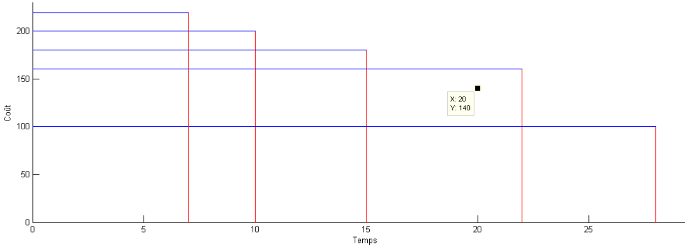

Fig.: Illustration de la relation de dominance

Algorithme de labels

Initialisation : Toute les listes de labels sont vides sauf celle de la source : $\mathfrak{L}_A = \{(0, 0, A)\}$;

Boucle : Tant qu'il existe un label l non examiné : *étendre* l ;

Fin Renvoyer le label de la destination B qui a le coût le plus petit parmi tous ceux pour lesquels $t \leq 0.8T^o$.

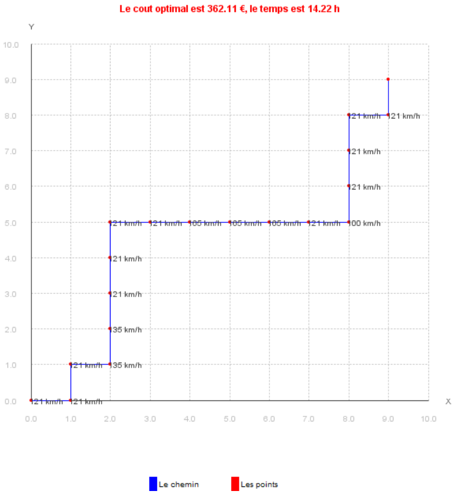

Fig.: Résultats

Présentation de l'application

Présentation de l'application

Implémentation

La résolution du problème est implémentée avec *Java*.

Elle comporte :

- Interface graphique pour la lecture des données et leurs visualisation ;
- Intégration des méthodes d'optimisation décrites pour le problème ;
- Outils de visualisation des résultats obtenus.

Présentation de l'application

Implémentation

La résolution du problème est implémentée avec *Java*.
Elle comporte :

- Interface graphique pour la lecture des données et leurs visualisation ;
- Intégration des méthodes d'optimisation décrites pour le problème ;
- Outils de visualisation des résultats obtenus.

Présentation de l'application

Implémentation

La résolution du problème est implémentée avec *Java*.
Elle comporte :

- Interface graphique pour la lecture des données et leurs visualisation ;
- Intégration des méthodes d'optimisation décrites pour le problème ;
- Outils de visualisation des résultats obtenus.

Présentation de l'application

Implémentation

La résolution du problème est implémentée avec *Java*.
Elle comporte :

- Interface graphique pour la lecture des données et leurs visualisation ;
- Intégration des méthodes d'optimisation décrites pour le problème ;
- Outils de visualisation des résultats obtenus.

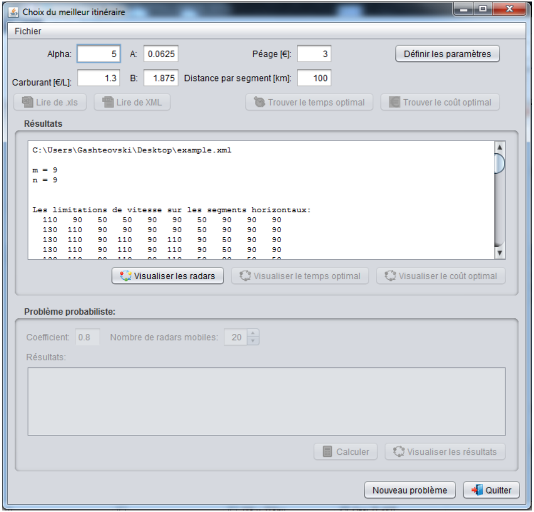

Fig.: Lecture et visualisation des données

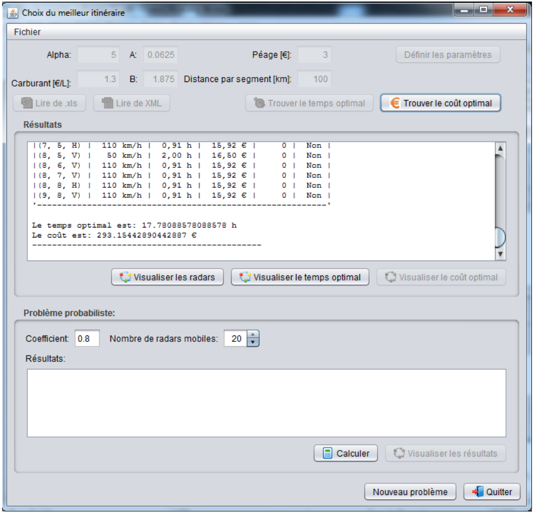

Fig.: Calcul du temps

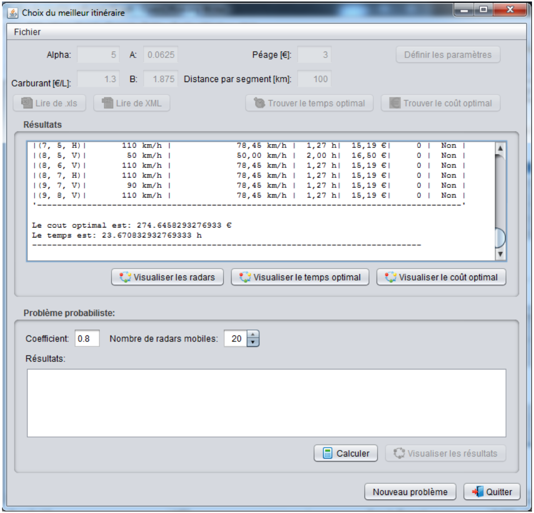

Fig.: Calcul coût optimal

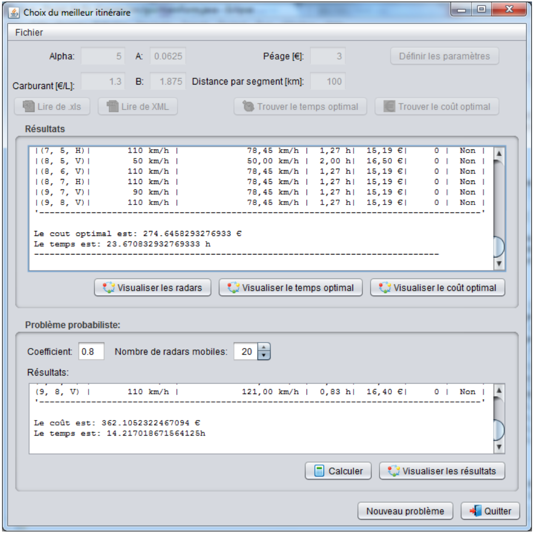

Fig.: Résolution de la partie probabiliste

Conclusion

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié une problématique concrète et nous avons mis en pratique l'application de l'algorithme de Dijkstra pour retrouver le plus court chemin en termes de temps puis en termes de coût.
Nous avons aussi, mis en œuvre un algorithme basé sur des labels pour un problème à deux critères. Cette algorithme se base sur une discrétisation particulière des vitesse afin d'obtenir des solutions les plus avantageuses.

Perspective

Il est intéressant d'améliorer notre dernière solution en gardant le même itinéraire et en essayant d'optimiser le coût en variant la vitesse.(Une recherche locale par exemple.)
Un problème que nous n'avons pas pu traiter faute de temps.

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié une problématique concrète et nous avons mis en pratique l'application de l'algorithme de Dijkstra pour retrouver le plus court chemin en termes de temps puis en termes de coût.
Nous avons aussi, mis en œuvre un algorithme basé sur des labels pour un problème à deux critères. Cette algorithme se base sur une discrétisation particulière des vitesse afin d'obtenir des solutions les plus avantageuses.

Perspective

Il est intéressant d'améliorer notre dernière solution en gardant le même itinéraire et en essayant d'optimiser le coût en variant la vitesse.(Une recherche locale par exemple.)
Un problème que nous n'avons pas pu traiter faute de temps.

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié une problématique concrète et nous avons mis en pratique l'application de l'algorithme de Dijkstra pour retrouver le plus court chemin en termes de temps puis en termes de coût.
Nous avons aussi, mis en œuvre un algorithme basé sur des labels pour un problème à deux critères. Cette algorithme se base sur une discrétisation particulière des vitesse afin d'obtenir des solutions les plus avantageuses.

Perspective

Il est intéressant d'améliorer notre dernière solution en gardant le même itinéraire et en essayant d'optimiser le coût en variant la vitesse.(Une recherche locale par exemple.)
Un problème que nous n'avons pas pu traiter faute de temps.

Conclusion

Dans ce travail nous avons étudié une problématique concrète et nous avons mis en pratique l'application de l'algorithme de Dijkstra pour retrouver le plus court chemin en termes de temps puis en termes de coût.
Nous avons aussi, mis en œuvre un algorithme basé sur des labels pour un problème à deux critères. Cette algorithme se base sur une discrétisation particulière des vitesse afin d'obtenir des solutions les plus avantageuses.

Perspective

Il est intéressant d'améliorer notre dernière solution en gardant le même itinéraire et en essayant d'optimiser le coût en variant la vitesse.(Une recherche locale par exemple.) Un problème que nous n'avons pas pu traiter faute de temps.

Merci pour votre attention