Universidad del Valle de Guatemala
Inteligencia Artificial
Sección 30

Laboratorio #3

Problemas con experimentos aleatorios

Brian Carillo 21108

Guatemala, 14 de abril del 2024

Ejercicio 1. Dado tres eventos A, B y C, expresa los siguientes eventos usando la unión, la intersección y el evento complementario:

a. Solo ocurre el evento A.
   $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
b. Los tres eventos ocurren.
   $A \cap B \cap C$
c. Ocurren A y B, pero no C.
   $(A \cap B) \cap \overline{C}$
d. Al menos dos de los tres eventos ocurren.
   $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
e. Exactamente dos de los tres eventos ocurren.
   $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})$
f. Como máximo dos de los tres eventos ocurren.
   $\overline{A \cap B \cap C}$
g. Al menos uno de los tres eventos ocurre.
   $A \cup B \cup C$
h. Solo uno de los tres eventos ocurre.
   $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})$
i. Ninguno de los eventos ocurre.
   $\overline{A \cup B \cup C}$
j. Si P(A) = 0.2, P(B) = 0.4, P(C) = 0.3, P(A∩B) = 0.1 y (A∪B)∩C = ∅, ¿cuál es la probabilidad de cada uno de los eventos descritos en las 9 expresiones anteriores?
   $P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0$
   a. $P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.2 - 0.1 = 0.1$
   b. $P(A \cap B \cap C) = 0$
   c. $P((A \cap B) \cap \overline{C}) = P(A \cap B) = 0.1$
   d. $P((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = P(A \cap B) = 0.1$
   e. $P((A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (B \cap C \cap \overline{A})) = P(A \cap B) = 0.1$
   f. $P(\overline{A \cap B \cap C}) = 1$
   g. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) = 0.2 + 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.8$
   h. $P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{A} \cap \overline{B})) =$
      $P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) = 0.2 - 0.1 + 0.4 - 0.1 + 0.3 = 0.7$
   i. $P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = 1 - 0.8 = 0.2$

Ejercicio 2. Completa la expresión P(A∩ B∩C) = P(A) + P(B) + P(C) + …

$P(A \cap B \cap C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) - P(B \cap \overline{A} \cap \overline{C}) - P(C \cup \overline{A} \cap \overline{B})$
$- P(A \cap B \cap \overline{C}) - P(A \cap C \cap \overline{B}) - 2 * P(B \cap C \cap \overline{A}) - P(A \cap B) - P(A \cap C)$

Ejercicio 3. Un número de vuelo, cuando se combina con el nombre de la aerolínea y la fecha, identifica un vuelo en particular. La FAA limita los números de vuelo a cuatro dígitos (0001 a 9999). Los vuelos hacia el este y hacia el norte se les asignan números pares, mientras que los vuelos hacia el oeste y hacia el sur tienen números impares. Si todos los posibles números de vuelo para un vuelo hacia el este o hacia el norte son igualmente probables, ¿cuál es la probabilidad de que el número de vuelo de un vuelo hacia el este generado al azar sea 1562?

$n = \frac{9999}{2}$

$P(no.\ vuelo\ =\ 1562)\ =\frac{1}{9999/2} = \frac{2}{9999} = 2 * 10^{-4}$

Ejercicio 4. En un ensayo clínico controlado aleatorio (RCT, por sus siglas en inglés), cada sujeto de estudio se asigna aleatoriamente para recibir uno u otro de los tratamientos alternativos en estudio. Suponga que cinco sujetos participan en un RCT. Cada uno de ellos lanza tres monedas justas; si obtiene exactamente una cara, recibe un placebo; de lo contrario, recibe el fármaco en estudio. ¿Cuál es la probabilidad de que cuatro de los sujetos reciban el fármaco y uno reciba el placebo?

$P(placebo) = \frac{3}{2^3} = 0.375$

$P(fármaco) = 1 - 0.375 = 0.625$

$P(cuatro\ fármacos\ y\ un\ placebo) = 5 * (0.625)^4 * (0.375) = 0.286$

Ejercicio 5. Considera un experimento aleatorio que consiste en lanzar dos veces una moneda sesgada que resulta en cara el 60% de las veces. ¿Son los eventos H1 ≡ 'cara en el primer lanzamiento' y E ≡ 'resultado igual en ambos lanzamientos' independientes? (explica por qué).

Demostración: H1 y E no son eventos independientes.

Por contradicción

$P(H1 \cap E) = P(H1) * P(E)$

$P(H1) = 0.6$

$P(E) = P(cara\ en\ ambos\ lanzamientos) + P(cruz\ en\ ambos\ lanzamientos)$

$P(E) = (0.6 * 0.6) + (0.4 * 0.4)$

$P(E) = 0.36 + 0.16$

$P(E) = 0.52$

$P(H1 \cap E) = P(H1) * P(E) = 0.6 * 0.52 = 0.312$

La probabilidad $H1 \cap E$ es la probabilidad de obtener cara en el primer lanzamiento y también obtener el mismo resultado en ambos lanzamientos. Sin embargo, esto también se puede expresar como la probabilidad de obtener cara en el primer lanzamiento y obtener cara en el segundo lanzamiento.

$P(H1 \cap E) = P(cara\ en\ el\ primer\ lanzamiento) * P(cara\ en\ el\ segundo\ lanzamiento)$

$P(H1 \cap E) = 0.6 * 0.6 = 0.36$

$P(H1 \cap E) \neq P(H1) * P(E)\ \ contradicción$

$\therefore H1\ y\ E\ no\ son\ eventos\ independientes$

La ocurrencia de H1 afecta la probabilidad de E, ya que saber que el primer lanzamiento resultó en cara aumenta la probabilidad de que ambos lanzamientos tengan el mismo resultado (ambos cara).

Ejercicio 6. Una compañía de seguros tiene clientes clasificados como alto, medio y bajo riesgo. Estos clientes tienen una probabilidad de presentar reclamos igual a 0.02, 0.01 y 0.0025 respectivamente. Si la probabilidad de ser un cliente de alto riesgo es 0.1, de riesgo medio es 0.2 y de bajo riesgo es 0.7, ¿cuál es la probabilidad de que un reclamo seleccionado al azar provenga de un cliente de alto riesgo?

$¿P(cliente\ de\ alto\ riesgo\ |\ reclamo)?$

$P(reclamo\ |\ cliente\ alto\ riesgo) = 0.02$
$P(reclamo\ |\ cliente\ medio\ riesgo) = 0.01$
$P(reclamo\ |\ cliente\ bajo\ riesgo) = 0.0025$
$P(cliente\ alto\ riesgo) = 0.1$
$P(cliente\ medio\ riesgo) = 0.2$
$P(cliente\ bajo\ riesgo) = 0.7$

$P(reclamo) = P(cliente\ alto\ riesgo) * P(reclamo\ |\ cliente\ alto\ riesgo) +$
$P(cliente\ medio\ riesgo) * P(reclamo\ |\ cliente\ medio\ riesgo) +$
$P(cliente\ bajo\ riesgo) * P(reclamo\ |\ cliente\ bajo\ riesgo)$

$P(reclamo) = 0.1 * 0.02 + 0.2 * 0.01 + 0.7 * 0.0025 = 0.00575$

$P(cliente\ de\ alto\ riesgo\ |\ reclamo) = \frac{P(reclamo\ |\ cliente\ alto\ riesgo) * P(cliente\ de\ alto\ riesgo)}{P(reclamo)}$
$\frac{0.02 * 0.1}{0.00575} = 0.35$

Ejercicio 7. Una empresa tiene como objetivo predecir la probabilidad de retraso en la llegada de un vuelo hasta seis horas antes de que las aerolíneas notifiquen a los pasajeros, analizando datos sobre el clima, el estado del avión que realizó el vuelo de llegada previo, actualizaciones de la FAA, datos históricos y otra información. Supongamos que el 20% de todos los vuelos sufren algún tipo de retraso y que la empresa predice como retrasados el 50% de los vuelos que realmente se retrasan, mientras que (erróneamente) predice como retrasados el 5% de los vuelos que llegan a tiempo.

a. Si vas a tomar tres vuelos en tres días diferentes este verano, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos se retrase? En caso de que necesites hacer alguna suposición, explica cuál.

$P(todos\ a\ tiempo) = 0.8 * 0.8 * 0.8 = 0.51$
$P(al\ menos\ uno\ tarde) = 1 - 0.51 = 0.49$

b. ¿Qué porcentaje de vuelos son anunciados como retrasados por la compañía?

$P(anunciado\ retrasado) = P(anunciado\ retrasado\ |\ retrasado) * P(retrasado) +$
$P(anunciado\ retrasado\ |\ a\ tiempo) * P(a\ tiempo)$

$P(anunciado\, retrasado) = 0.5 * 0.2 + 0.05 * 0.8 = 0.14$

c. Si la compañía anuncia un retraso en un vuelo dado, ¿cuál es la probabilidad de que realmente se retrase?

$P(retresado \mid anunciado\, retrasado) = \frac{P(anunciado\, retrasado \mid retrasado) * P(retresado)}{P(anunciado\, retrasado)} = \frac{0.5*0.2}{0.14} = 0.71$