Universidad del Valle de Guatemala

Modelación y Simulación

Sección 10

Lab 1a

Brian Carrillo - 21108

Carlos López - 21666

Josué Morales - 21116

Marco Ramírez - 21032

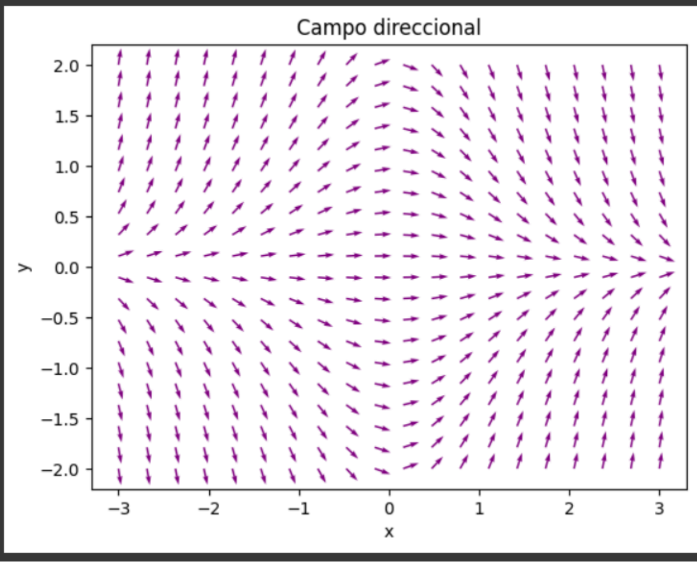
Guatemala, 25 de julio del 2024

Ejercicio 1

[Lab-1-ModSim.ipynb]

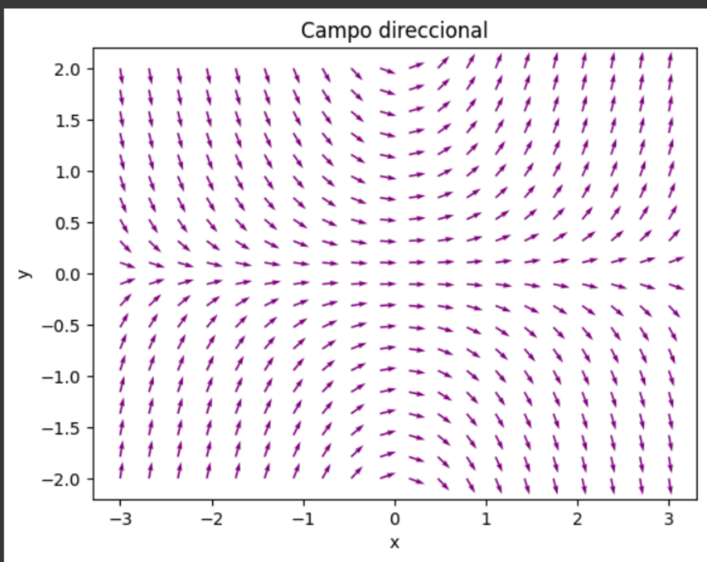
```python
[25] # Función auxiliar que define el campo vectorial
def F(x, y):
    u = 1
    v = -x*y
    return u, v

graficar_campo_direcciones(F, xmin=-3, xmax=3, ymin=-2, ymax=2, xstep=20, ystep=20, unitario=True, graficar_flujo=False)
```



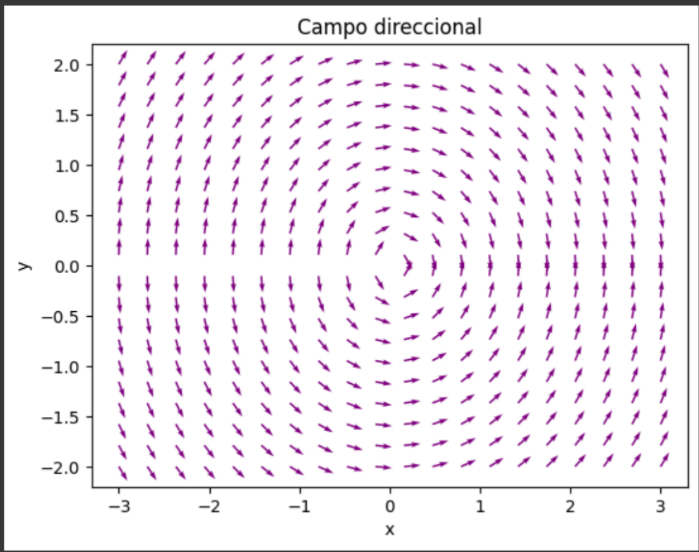

```python
# Función auxiliar que define el campo vectorial
def F(x, y):
    u = 1
    v = x*y
    return u, v

graficar_campo_direcciones(F, xmin=-3, xmax=3, ymin=-2, ymax=2, xstep=20, ystep=20, unitario=True, graficar_flujo=False)
```



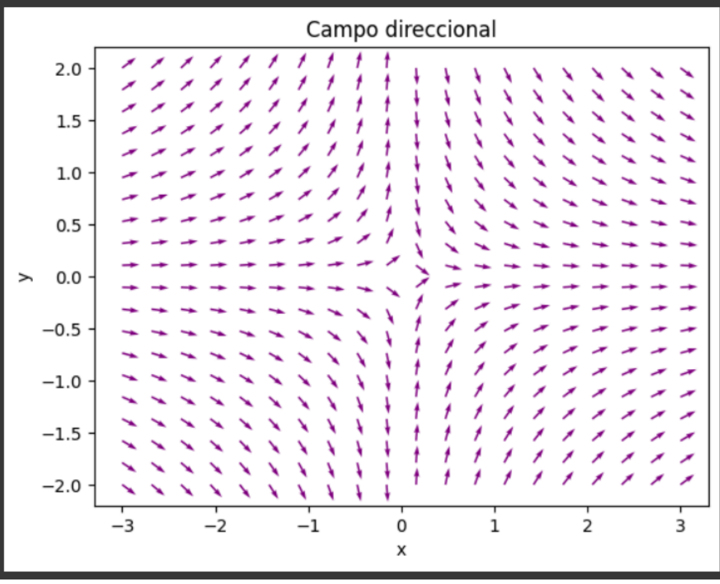
[22]
```python
# Función auxiliar que define el campo vectorial
def F(x, y):
    u = 1
    v = -x/y
    return u, v

graficar_campo_direcciones(F, xmin=-3, xmax=3, ymin=-2, ymax=2, xstep=20, ystep=20, unitario=True, graficar_flujo=False)
```



[23]
```python
# Función auxiliar que define el campo vectorial
def F(x, y):
    u = 1
    v = -y/x
    return u, v

graficar_campo_direcciones(F, xmin=-3, xmax=3, ymin=-2, ymax=2, xstep=20, ystep=20, unitario=True, graficar_flujo=False)
```



Ejercicio 2

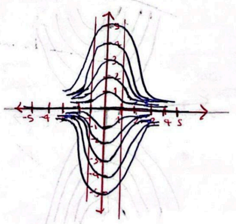
Ejercicio 2

i) $y' = -xy$ $\qquad y'' = -y - x(-xy) = y(x^2-1)$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -xy \end{pmatrix}$

Signo y'	Intervalos
+	$x>0, y<0$ o $x<0, y>0$
-	$x>0, y>0$ o $x<0, y<0$
0	$x=0$ o $y=0$

Signo y''	Intervalos
+	$y>0, \lvert x\rvert>1$ o $y<0, \lvert x\rvert<1$
-	$y>0, \lvert x\rvert<1$ o $y<0, \lvert x\rvert>1$
0	$y=0$ o $x^2=1$ $(x=1, x=-1)$

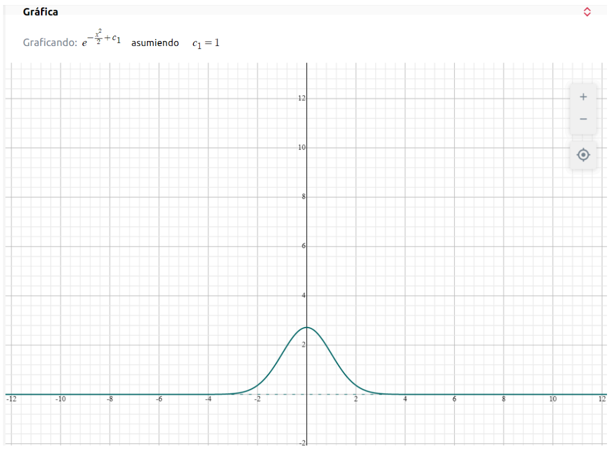


$y' = -xy$

$\int \frac{dy}{y} = -\int x\,dx$

$\ln|y| = -\frac{x^2}{2} + c_0$

$y = ce^{-x^2/2}$



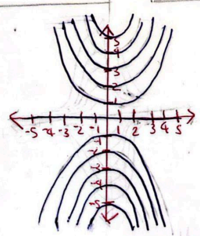
El esbozo cualitativo coincide con la forma de las soluciones de la ecuación.

ii) $y' = xy$

$F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \end{pmatrix}$ $\qquad y'' = y + x(xy) = y + x^2y = y(x^2+1)$

Signo y'	Intervalo
+	$x>0, y>0$ o $x<0, y<0$
-	$x<0, y>0$ o $x>0, y<0$
0	$x=0$ o $y=0$

Signo y''	Intervalo
+	$y>0$
-	$y<0$
0	$y=0$

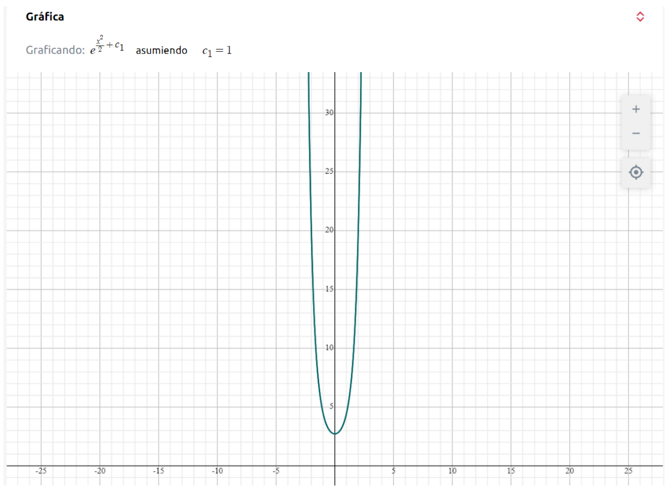


$y' = xy$

$\int \frac{dy}{y} = \int x\,dx$

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c_0$

$y = ce^{x^2/2}$



El esbozo cualitativo coincide con la forma de las soluciones de la ecuación.

iii)

$x\,dx + y\,dy = 0$

$y\,dy = -x\,dx$ $\quad F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -x/y \end{pmatrix}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ $\quad y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{y\left(\frac{d}{dx}x\right) - x\left(\frac{d}{dx}y\right)}{y^2}$

Siempre Positiva

$y'' = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$

$-\frac{x}{y} > 0, \quad \frac{x}{y} < 0$

$x<0, y>0$

$x>0, y<0$

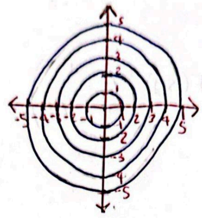
$\frac{x}{y} > 0$

$x>0, y>0$

$x<0, y<0$

Signo y'	Intervalo
+	$x<0, y>0$ $x>0, y<0$
-	$x>0, y>0$ $x<0, y<0$
0	$x=0$ $y=$ indefinido

Signo y''	Intervalo
+	$y>0$
-	$y<0$
0	—



$y' = -\frac{x}{y}$

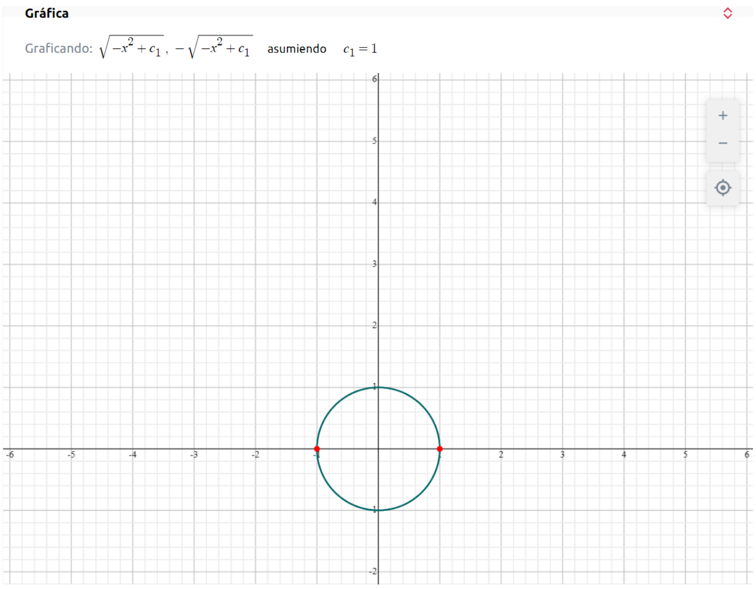
$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

$\int y\,dy = -\int x\,dx$

$\frac{y^2}{2} + C_0 = -\frac{x^2}{2} + C_1$

$y^2 = -x^2 + C_2$

$\underline{y = \pm\sqrt{-x^2+C}}$ //



El esbozo cualitativo coincide con la forma de las soluciones de la ecuación.

iv) $y\,dx + x\,dy = 0$

$x\,dy = -y\,dx$

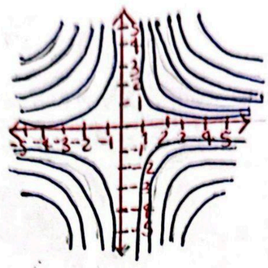
$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $\quad F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -y/x \end{pmatrix}$

$y'' = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{x\left(\frac{d}{dx}y\right) - y\left(\frac{d}{dx}x\right)}{x^2} = -\frac{x\left(-\frac{y}{x}\right) - y}{x^2}$

$= -\frac{-2y}{x^2} = \frac{2y}{x^2}$ ← Siempre positiva o 0

Signo y'	Intervalo
+	$x<0, y>0$ o $x>0, y<0$
-	$x>0, y>0$ o $x<0, y<0$
0	$y=0$ $x=$ indefinido

Signo y''	Intervalo
+	$y>0$
-	$y<0$
0	$y=0$ $x=$ indefinido

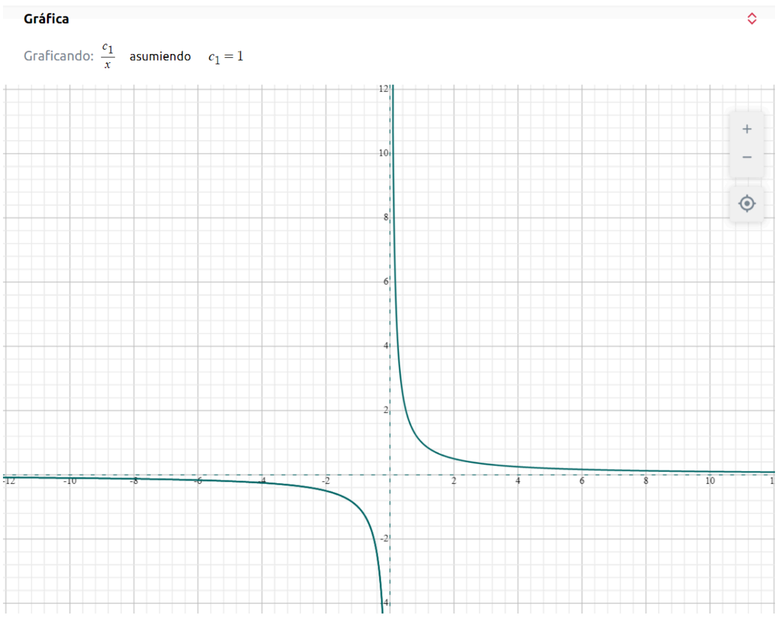


$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

$x\,dy = -y\,dx$

$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$

$\ln|y| = -\ln|x| + C_0$ $\quad y = Ce^{-\ln|x|} = \frac{c}{x}$

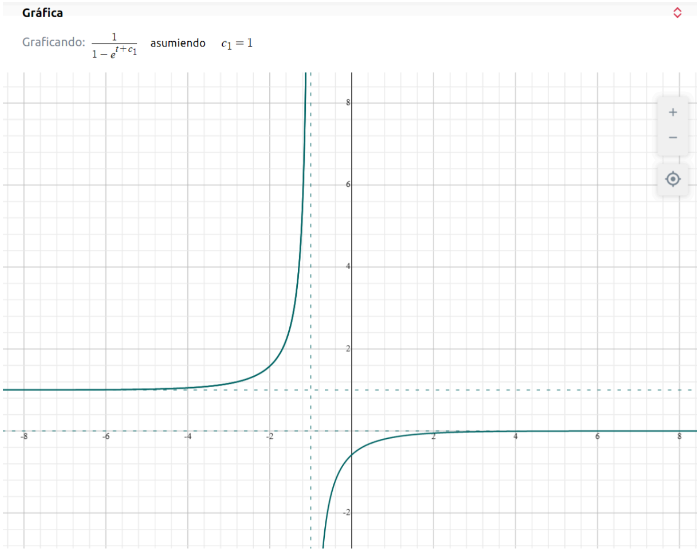


El esbozo cualitativo coincide con la forma de las soluciones de la ecuación.

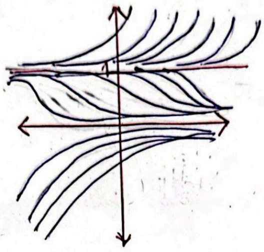
v) $\frac{dy}{dx} = y^2 - y$

$y' = y(y-1)$ ceros $y=0$ $y=1$

Intervalo	valor	Signo y	Comportamiento
$(-\infty, 0)$	-1	$+$	Creciente
$(0, 1)$	$1/2$	$-$	decreciente
$(1, +\infty)$	2	$+$	Creciente



El esbozo cualitativo coincide con la forma de las soluciones de la ecuación.



$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int dx$$

$$\frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$1 = A(y-1) + By$$

$$1 = (A+B)y - A$$

$$A + B = 0$$

$$-A = 1 \rightarrow A = -1, \; B = 1$$

$$\int \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}\right) dy = x + c_0$$

$$-\ln|y| + \ln|y+1| = x + c_0$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + c_0$$

$$\left|\frac{y-1}{y}\right| = ce^x$$

$$\frac{y-1}{y} = ce^x \quad \circ \quad \frac{1-y}{y} = ce^x$$

$y - 1 = yce^x$ $1 - y = yce^x$

$y - yce^x = 1$ $-y - yce^x = -1$

$y(1 - ce^x) = 1$ $y(-1 - ce^x) = -1$

$y = \frac{1}{1 - ce^x}$ // $y = \frac{1}{1 + ce^x}$ //

Ejercicio 3

Ejercicio 3

$xy'' + 2y' = 6x$

$y' = z$

$y'' = z'$

$xz' + 2z = 6x$

$z' + \frac{2z}{x} = 6$ - EDO 1er Orden

$f(x,z) = 6 - \frac{2z}{x}$

$z' = 6 - \frac{2z}{x}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{2z}{x}\right) = -\frac{2}{x}$

La ecuación diferencial está definida para (x,z) con $x \neq 0$

La derivada parcial está definida para (x,z) con $x \neq 0$

El Teorema se cumple en dos regiones

$R_1 = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$ y $R_2 = (0, \infty) \times \mathbb{R}$

Para los puntos fuera de $R_1 \cup R_2$, es decir el eje z, ocurre lo siguiente:

- Para el origen $(0,0)$ hay una única solución cuando $C = 0$.
- En los puntos de la forma $(0, z)$ con $z \neq 0$ no pasa ninguna solución.

$z' = 6 - \frac{2z}{x}$

$P(x) = \frac{2}{x}$ $\quad Q(x) = 6$

$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2\ln|x|} = |x|^2 = x^2$

$x^2 z' + x^2 \cdot \frac{2z}{x} = 6x^2$

$x^2 z' + 2zx = 6x^2$

$\frac{d}{dx}(x^2 z) = 6x^2$

$x^2 z = \int 6x^2 dx$

$x^2 z = 2x^3 + C$

$z = 2x + \frac{C}{x^2}$

$y' = 2x + \frac{C}{x^2}$

$y = \int \frac{C}{x^2} dx + \int 2x dx$

① $C\left(\frac{x^{-1}}{-2+1}\right) = C\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{C}{x}$ $\quad$ ② $2\left(\frac{x^2}{2}\right) = x^2$

$y = -\frac{C}{x} + x^2 + \cancel{C_0}^{\,0}$

a) $y(1) = 2$

$2 = -C + 1$

$C = -1$

b) $y(1) = -2$

$-2 = -C + 1$

$C = 3$

c) $y(1) = 1$

$1 = -C + 1$

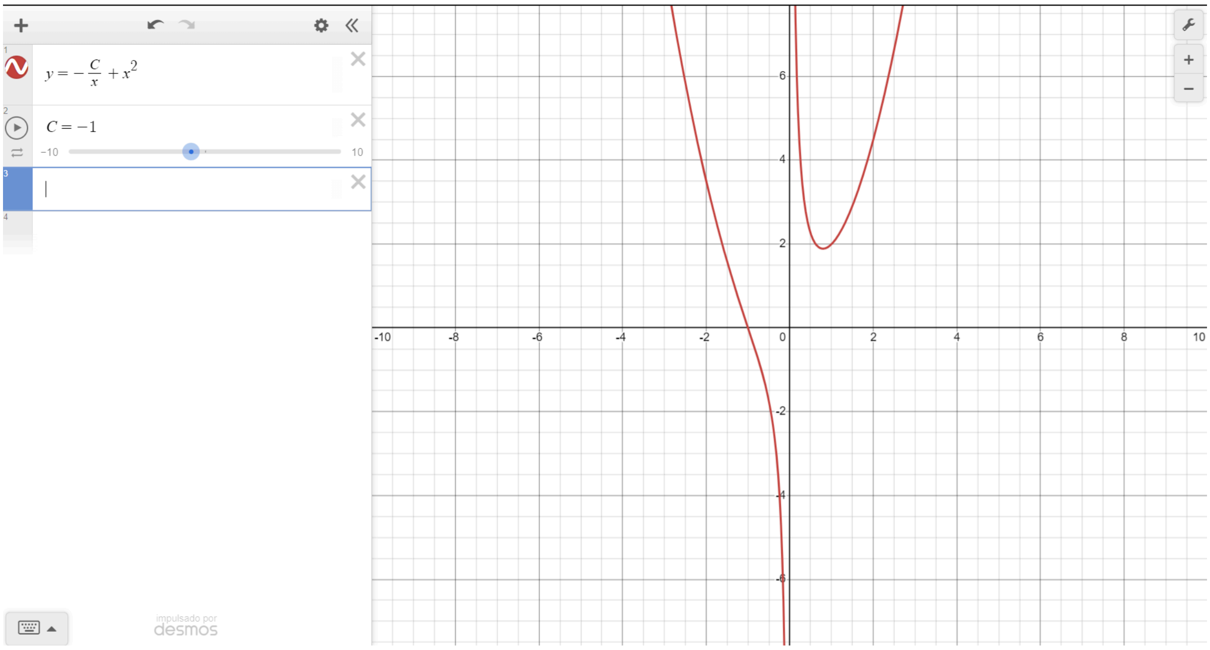
$C = 0$

d) $y(\emptyset) = -3$

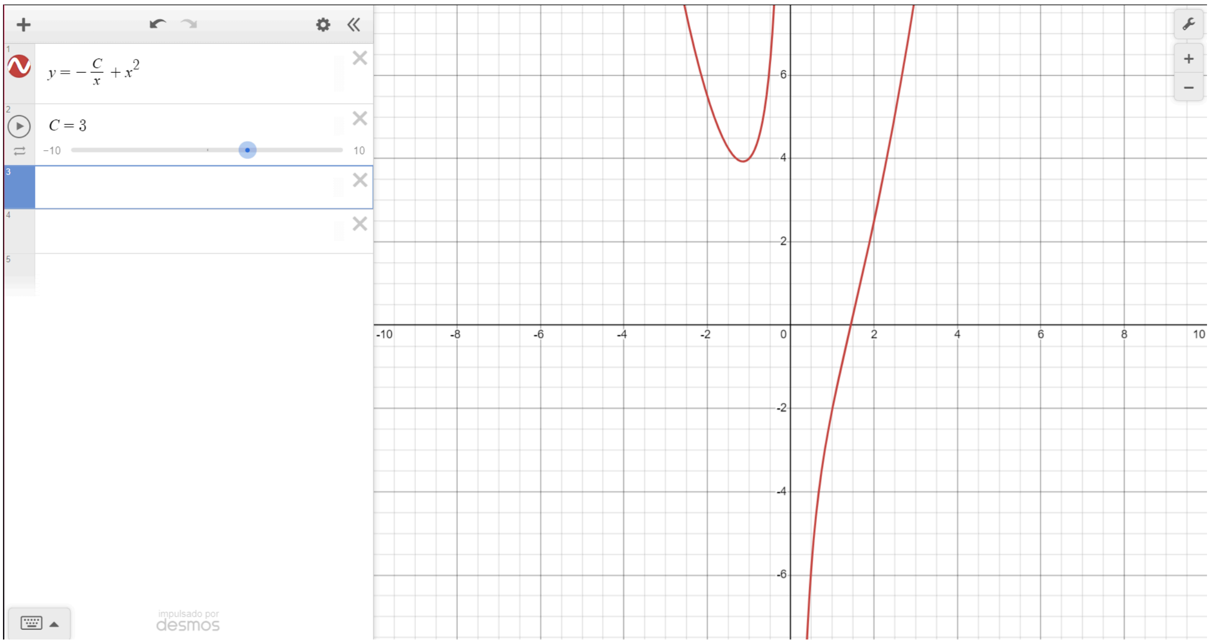
$-3 = -\frac{C}{\emptyset} + 0$

Indefinido

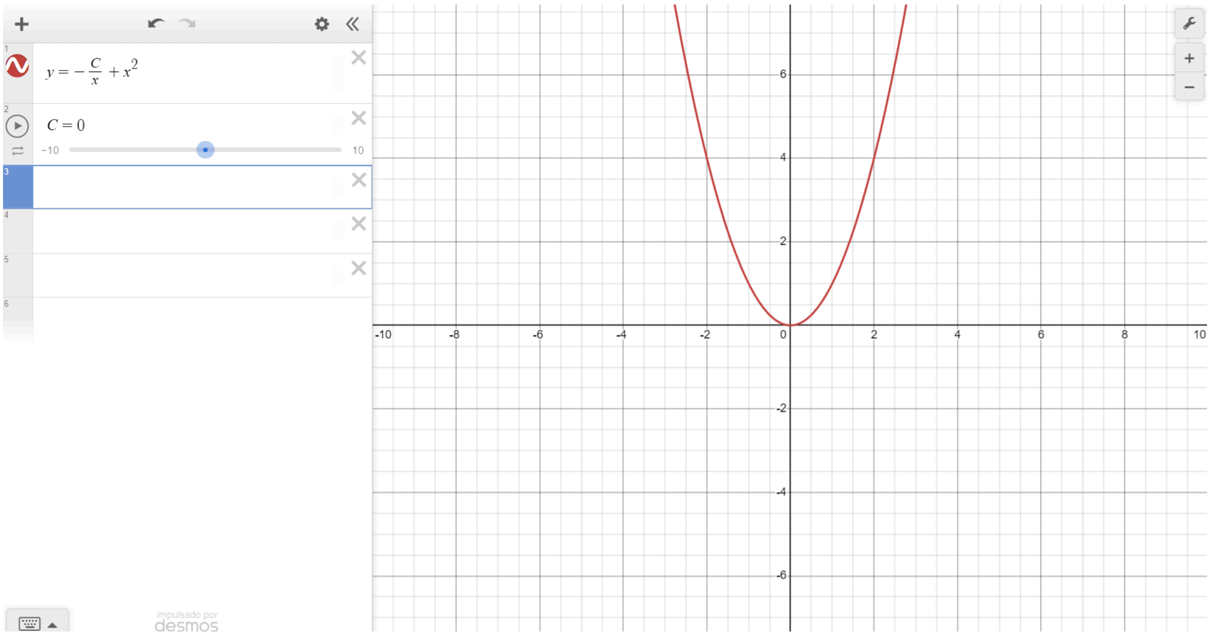
Gráficas



$y = -\frac{C}{x} + x^2$
$C = -1$
-10
10
impulsado por desmos



$y = -\frac{C}{x} + x^2$
$C = 3$
-10
10
impulsado por desmos


$y = -\frac{C}{x} + x^2$
$C = 0$
−10
10
6
4
2
0
-2
-4
-6
-10
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
10
impulsado por
desmos