DSP大作业报告

马嘉成，2021011966，无18

Task1

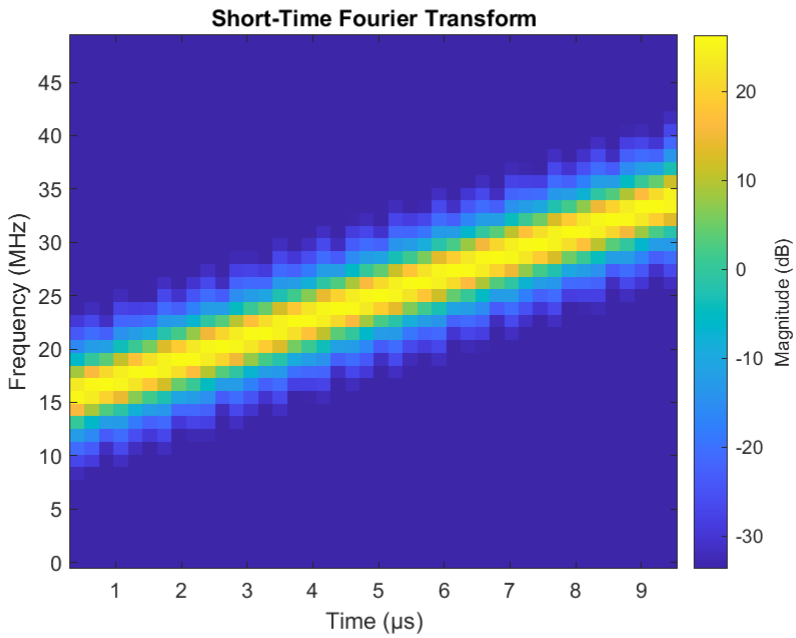
设计程序`my_chirp`生成chirp信号

```
function x = my_chirp(T, f0, f1, fs)
    B = f1 - f0; %带宽
    mu = B/T; %调频率
    t = 0 : 1/fs : T; %时间轴
    x = exp(1i*pi*(2*f0*t+mu*t.^2)); %输出信号
end
```

针对STFT分析设计MATLAB程序如下

```
fs = 5e7;
t_sample = 0 : 1/fs : 1e-5;
x = my_chirp(1e-5,15e6,35e6,fs);
stft(x, fs,"Window",hann(42,'periodic'),"FrequencyRange","twosided");
```

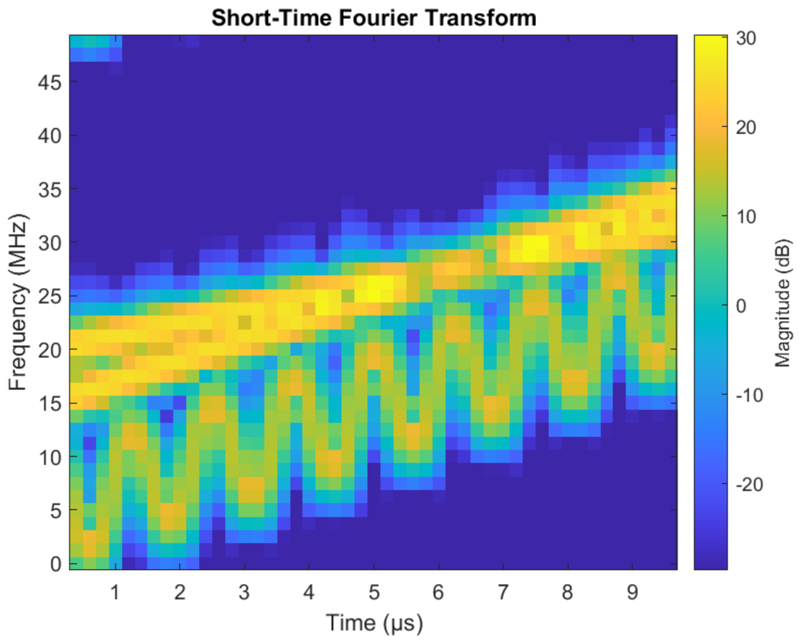
得到如下时频联合分布



可以看出该信号在0~10us内从15MHz线性调频变为35MHz，符合要求。

Task2

从频域分辨率角度，对于频域分布恒定的信号，想要将多个信号分辨开来，窗长越长越好。从时域分辨率的角度，对于频率分布随时间变化的信号，窗长越短，频率变化越小，信号就越接近平稳，就越能准确地描述各时间点的频谱特性。结合这两个角度，STFT的窗长要折中选择，不能太长也不能太短。若太长，则不同时间的频谱互相干扰，若太短，时域分辨率差。若太短，则对每个时间段内的频域分辨率不足。



MATLAB的STFT默认使用Hanning窗，仅调整窗长，发现对本题参数与信号，当窗长为40~42左右可以取得较好的效果，在多数时间下可以检测出3个频率分量，且可以看出wave_data的频率变化特征。

Task3

写本题的过程不太顺利，我从一开始就想把第一和第二小问一起写。

直接用STFT

我意识到STFT的时频分辨率不够，而且如果想直接利用STFT得到结果需要在二维平面上对线段进行搜索，使用Radon变换也同样需要搜索二维平面内的极值点，实现起来较为复杂。如果SNR比较高还容易些，如果SNR较低则会很容易误判或出现较大误差。

Radon Wigner Transform

经过**文献调研[1]**，一开始我找到了**RWT(Radon Wigner Transform)**方法。这种方法利用了LFM信号的WVD为冲激线谱，即

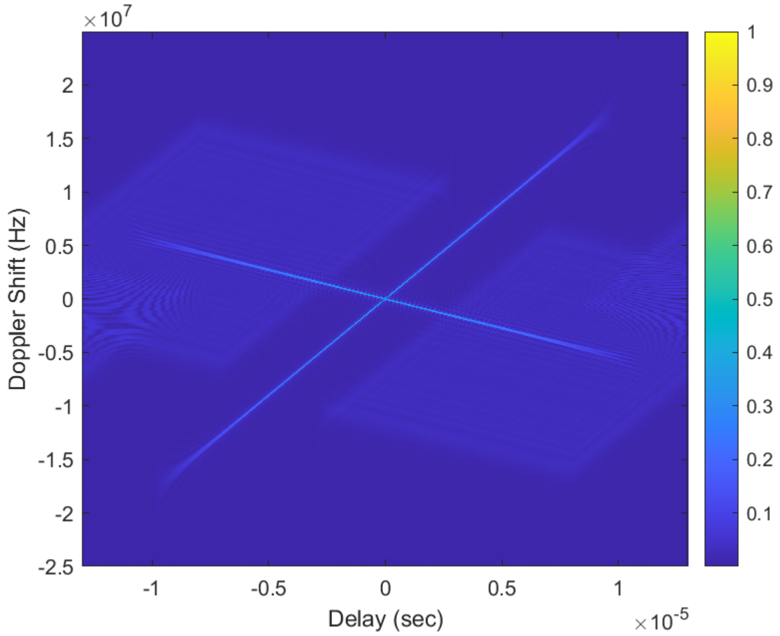
$$x(t) = e^{j(\omega_0 t + 0.5mt^2)}$$

$$W_x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau/2)x^*(t-\tau/2)e^{-j\omega\tau}d\tau = \delta(\omega - (\omega_0 + mt))$$

的特点，通过求原信号WVD的起止时间和起止频率得到所需参数。这种方法可以得到较为准确的结果，但需要在Radon变换的二维平面上搜索极值点，对斜率的求取精度要求较高，较为复杂。且WVD结果往往会有交叉项，使得对起止时间的判定更加困难。所以最终没有采用这种方法。

Radon Ambiguity Transform

后来我查到了一种使用**RAT(Radon Ambiguity Transform)[2]**的方法。这种方法利用了LFM信号的模棱函数(Ambiguity Function)为过原点线段的特点，将原来WVD的二维搜索问题转化为了一维搜索问题。只需关注Radon变换后过原点直线的斜率就好，极大简化了计算。(下图为某次实验中计算出的Ambiguity Function，可以看出有两个信号，根据其斜率可以确定原信号调频率f_m)



模糊函数：

$$\chi(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t-\tau)e^{i2\pi ft}\, dt$$

确定斜率的方法：Radon变换

计算图像中沿$\arg_{法线} = \theta$，距中心点距离为d的直线的积分，将图像中的每条不同的直线转化为变换域中不同的点。

具体地，我提取了Radon变换$d = 0$的那一行，然后根据已知的待估计信号个数N取前N个极大值对应的θ作为检测结果。真实的$\arg_{直线} = \phi = 90^\circ - \theta$。

用Radon变换求直线的角度为ϕ，根据公式

$$k = \tan\phi$$
$$f_m = B/T$$
$$k = B/f_s(\text{归一化调频率})$$

得到

$$f_m = f_s^2 * \tan\phi$$

由此可以计算出调频率f_m。

一个细节问题：实际上由于MATLAB pambgfun函数输出频率间隔和f_s不同，代码中并非乘f_s^2，但原理上是一样的。

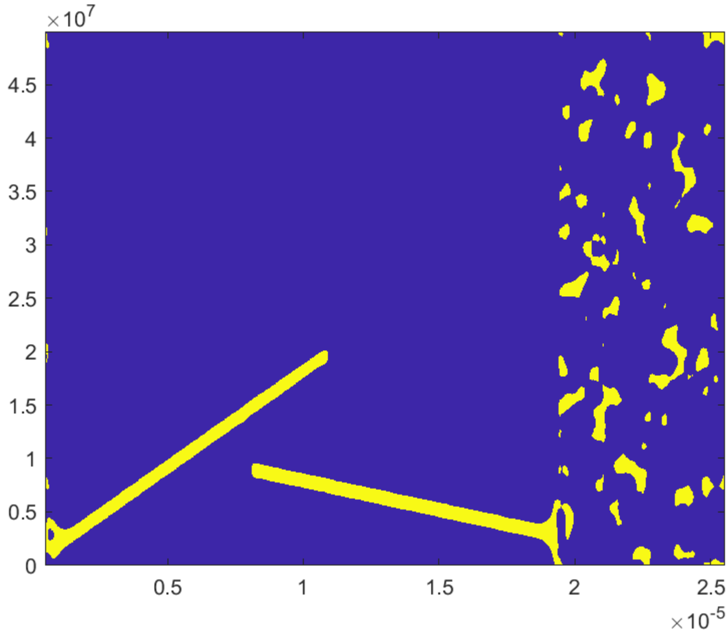
但这样也带来了问题，就是**信号的起止时间和起止频率无法得知**，仅能提取调频率f_m的大小。

虽然单用RAT无法达到要求，但可以用RAT得到的调频率在STFT的结果中简化搜索，使得基于STFT的直线搜索方法更加鲁棒。下面我是这样做的。

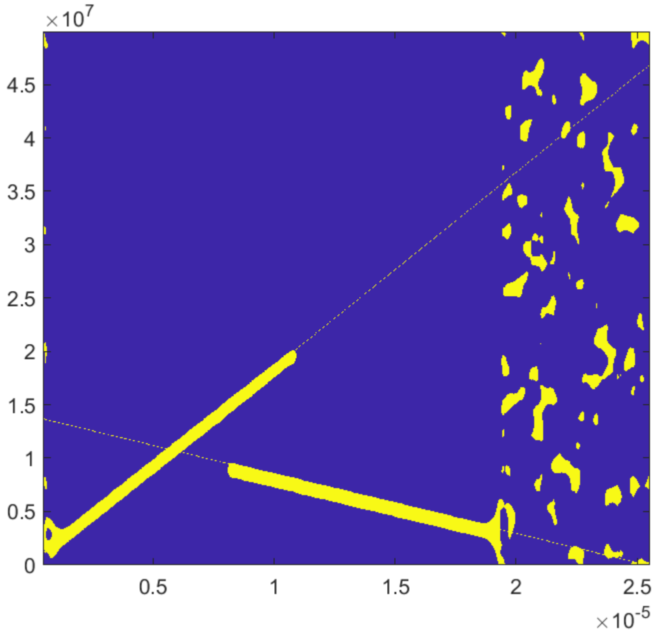
```
k = fm./fs./(f(2)-f(1));
```

我通过这行代码计算出信号在STFT图像中对应的线段的预期斜率。有了这个，就可以**使用一条斜率固定的直线从上到下将STFT图像扫描一遍**，假设信号的调频率可以区分，则可以根据调频率唯一确定我们想要寻找的那条线段，从而进一步找到信号的起始时间和持续时间。

具体地，我先将STFT结果在某阈值下二值化，这样可以在一定程度上滤除掉一部分噪声的影响，得到图像如下。



接下来，根据RAT求得的斜率，用一条直线扫描这张图象，**每扫到一个位置记录下扫描到的点数，取点数最大的位置作为结果**。得到了这条线段所在的直线位置，就可以进一步在直线上搜索线段的起止点，进而求出参数。就如下图所示，黄色的细线为最终确定的直线位置。



但还有一个问题，那就是这样扫描会将没滤掉的噪声也计算进去。于是我对扫到的点的x坐标按顺序组成的向量做**差分**，这样就求出了每两个点之间的间隔大小。如果相邻两个扫到的点x坐标差别较大，则认为这两个点中至少有一个是噪声带来的。根据两点在整个向量中的位置可以决定该删掉哪一边。这样最终得到的结果就会和真实值比较接近了。现在可以计算出t_0, T, f_m(调频率)$, B$，可以直接根据线段左端点得到起始频率f_0，这样也很容易实现。**这也是我最终采用的方法。**

RAT-FrFT[3]

我在调研时还发现了一种比较有意思的方法：**分数阶傅里叶变换(FrFT)[4],[5]**。

通过RAT可以确定FrFT的阶数a

$$a = \frac{\cot^{-1}(-f_m/f_s^2)}{\frac{\pi}{2}}$$

在此阶数下对原信号做FrFT，在理想情况下会得到一个近似冲激函数的图像，结果在u处极大，其他处很小。而这个u与待估计的LFM信号的中心频率f_h存在关系：

$$f_h = |u * \csc(a * \pi/2)|$$

这样就可以用FrFT得到原信号的中心频率f_h，再用

$$f_0 = f_h - \frac{f_m T}{2}$$

即可计算出f_0。但在实际使用中我发现这样计算误差较大，所以最终没有采用这种方法。因为FrFT的结果受点数和阶数影响较大，如果求的阶数不够准确，或者点数不够，则频域可能不是一个理想的冲激函数。

使用FrFT方法的代码如下，在代码文件中被注释掉了

```
% for i = 1:num_signal %对每个chirp信号求中心频率
%     a(i) = 2/pi*acot(-fm(i)/(fs^2));
%     y = myfrft(x',a(i))';
%     u=linspace(-fs/2,fs/2-1,length(y));
% %     % % figure;
% %     % % plot(u,abs(y));
%     u_index = y>(max(y)*0.8);
%     u_mean = mean(u(u_index));
%     fh(i)=abs(u_mean*csc(a(i)*pi/2));%估计的中心频率
% end
```

对应结果保存在task3_x/error_xdB_old.mat中。

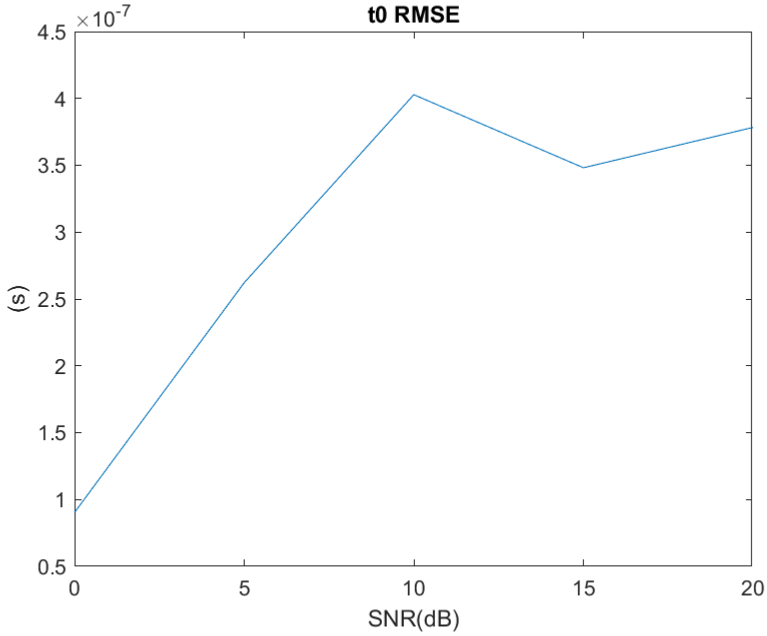
Task3.1结果

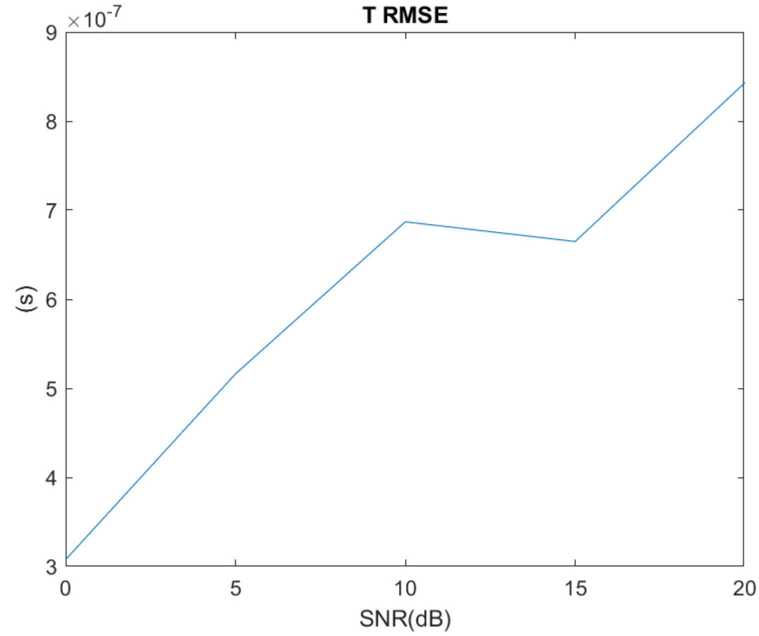
总时长$26\mu s$

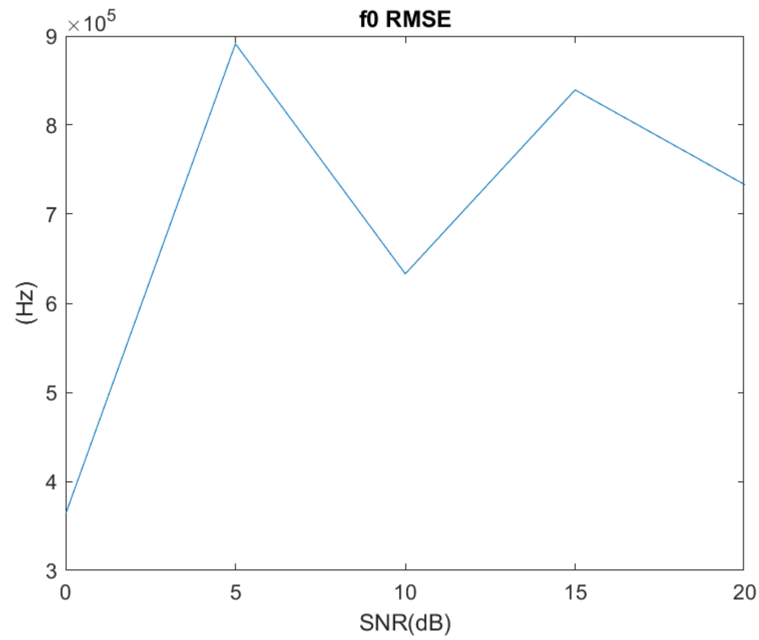
采用一固定信号，真值：

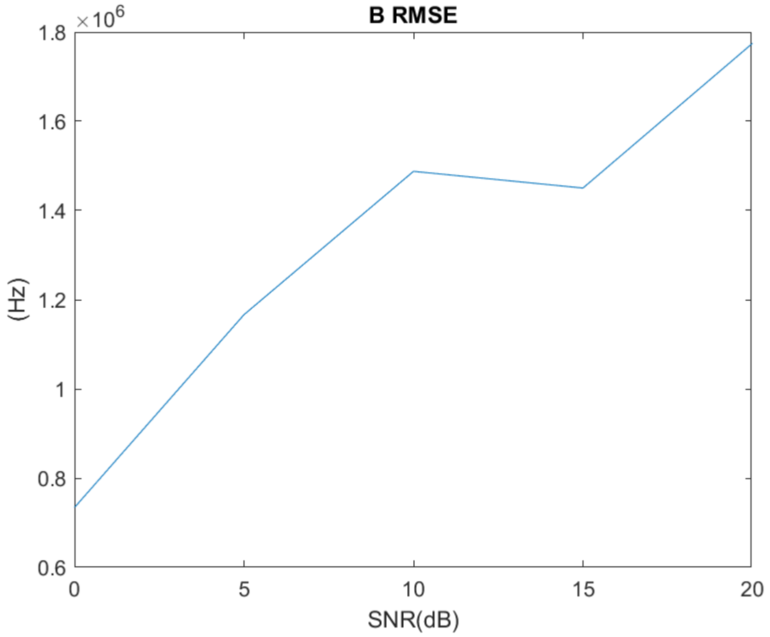
$$f_0 = 2e6$$
$$B = 1.8e7$$
$$T = 10e(-6)$$
$$t_0 = 1e(-6)$$

各信噪比下蒙特卡洛实验所得RMSE


t0 RMSE
×10^-7
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
(s)
0
5
10
15
20
SNR(dB)


T RMSE
×10^-7
9
8
7
6
5
4
3
(s)
0
5
10
15
20
SNR(dB)


f0 RMSE
×10^5
9
8
7
6
5
4
3
(Hz)
0
5
10
15
20
SNR(dB)



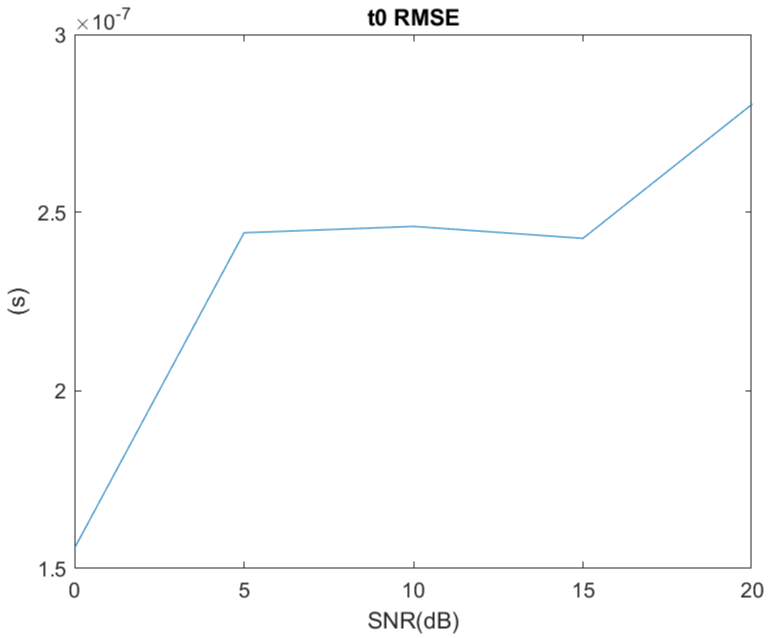
Task3.2结果

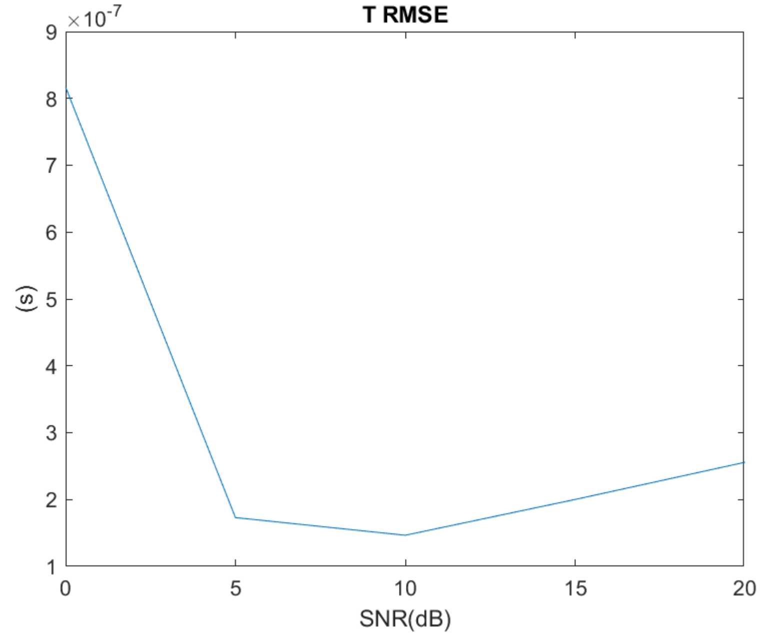
总时长$26\mu s$

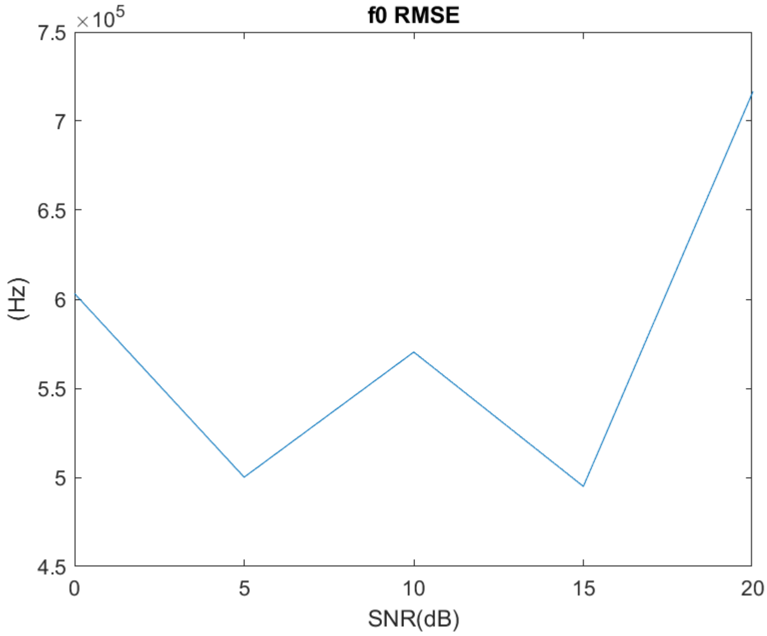
已知有两个LFM信号，真值(对程序未知)为

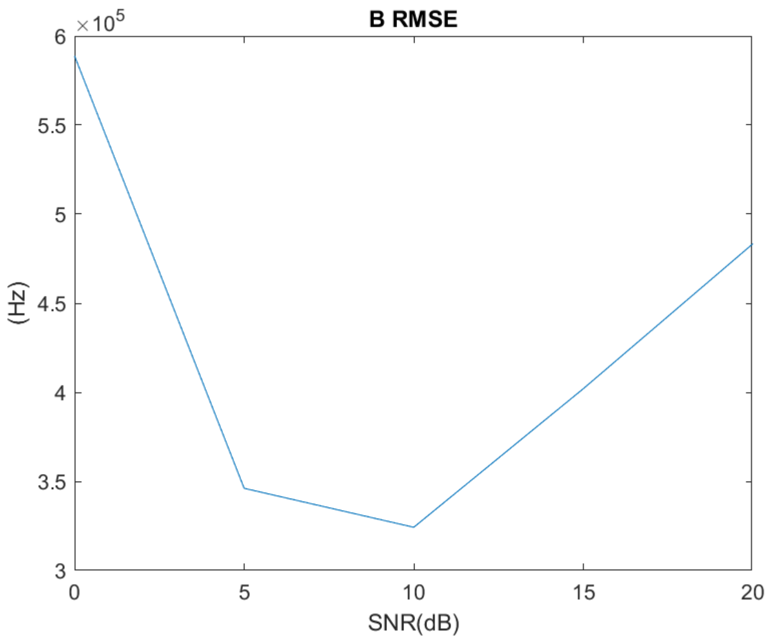
$$
f_0=[2e6,9e6]
$$
$$
B=[1.8e7,6e6]
$$
$$
T=[10e-6,11e-6]
$$
$$
t0=[1e-6,8e-6]
$$

各信噪比下蒙特卡洛实验得RMSE




T RMSE
$\times 10^{-7}$
9
8
7
6
5
4
3
2
1
(s)
0
5
10
15
20
SNR(dB)


f0 RMSE
$\times 10^{5}$
7.5
7
6.5
6
5.5
5
4.5
(Hz)
0
5
10
15
20
SNR(dB)


B RMSE
$\times 10^{5}$
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
(Hz)
0
5
10
15
20
SNR(dB)

参考文献

[1] ***Mixed LFM Signal Estimation Based on RadonWigner Transform and Matching Pursuit***, *Dong Wang and Hong Tang*

[2] ***Linear Frequency-Modulated Signal Detection Using Radon-Ambiguity Transform***, *Minsheng Wang, Andrew K. Chan, Senior Member, IEEE, and Charles K. Chui, Fellow, IEEE*

[3] ***基于Radon-Ambiguity变换和分数阶傅里叶变换的Chirp信号检测及多参数估计***, *赵兴浩, 陶然, 周思永, 王越*

[4] ***基于分数阶傅里叶变换的chirp信号检测与参数估计(原理附代码)***, [*https://blog.csdn.net/weixin_42845306/article/details/120281437*](https://blog.csdn.net/weixin_42845306/article/details/120281437)

[5] ***Computation of the fractional Fourier transform***, *Adhemar Bultheel and Héctor E. Martínez Sulbaran*

其余参考了Matlab说明文档的地方不一一列出