Løsninger til Opgaver om Differentialligninger

Opgave 5

Opgavebeskrivelse

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x + \frac{y}{x}$$

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(3, 12)$

Løsning:

For at finde tangentens ligning skal vi bruge:

- Punktet $P(3, 12)$
- Hældningen i dette punkt

Hældningen findes ved at indsætte $x = 3$ og $y = 12$ i differentialligningen:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,12)} &= 2 \cdot 3^2 + 3 + \frac{12}{3} \\
&= 2 \cdot 9 + 3 + 4 \\
&= 18 + 3 + 4 \\
&= 25
\end{aligned}$$

Tangentens ligning er givet ved:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Hvor $(x_1, y_1) = (3, 12)$ og $m = 25$.

$$\begin{aligned}
y - 12 &= 25(x - 3) \\
y - 12 &= 25x - 75 \\
y &= 25x - 63
\end{aligned}$$

Svar: Tangentens ligning er $y = 25x - 63$

b) Undersøg, om funktionen $g(x) = x^3 + x^2 + 5x$ er en løsning til differentialligningen

Løsning:

For at $g(x)$ skal være en løsning, skal $g'(x)$ opfylde differentialligningen, dvs.:

$$g'(x) = 2x^2 + x + \frac{g(x)}{x}$$

Først beregner vi $g'(x)$:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 + x^2 + 5x \\ g'(x) &= 3x^2 + 2x + 5 \end{aligned}$$

Nu beregner vi højresiden af differentialligningen:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x + \frac{g(x)}{x} &= 2x^2 + x + \frac{x^3 + x^2 + 5x}{x} \\ &= 2x^2 + x + \frac{x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} \\ &= 2x^2 + x + x^2 + x + 5 \\ &= 3x^2 + 2x + 5 \end{aligned}$$

Vi ser at:

$$g'(x) = 3x^2 + 2x + 5 = 2x^2 + x + \frac{g(x)}{x}$$

Svar: Ja, $g(x) = x^3 + x^2 + 5x$ er en løsning til differentialligningen.

Opgave 4 (første version)

Opgavebeskrivelse

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = e^{2x} + x^2$$

a) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen $y' = 2(y + x - x^2)$

Løsning:

For at undersøge om f er en løsning, skal vi verificere at $f'(x) = 2(f(x) + x - x^2)$. Først beregner vi $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x} + x^2 \\ f'(x) &= 2e^{2x} + 2x \end{aligned}$$

Nu beregner vi højresiden af differentialligningen:

$$\begin{aligned} 2(f(x) + x - x^2) &= 2(e^{2x} + x^2 + x - x^2) \\ &= 2(e^{2x} + x) \\ &= 2e^{2x} + 2x \end{aligned}$$

Vi ser at:

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2x = 2(f(x) + x - x^2)$$

Svar: Ja, $f(x) = e^{2x} + x^2$ er en løsning til differentialligningen $y' = 2(y + x - x^2)$.

Opgave 4 (anden version)

Opgavebeskrivelse

En funktion f er løsning til differentialligningen

$$y' = x - y + 5$$

Det oplyses, at grafen for f går gennem punktet $P(1, 10)$.

a) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet P

Løsning:

For at finde tangentens ligning skal vi bruge:

- Punktet $P(1, 10)$
- Hældningen i dette punkt

Hældningen findes ved at indsætte $x = 1$ og $y = 10$ i differentialligningen:

$$\begin{aligned} y'(1) &= 1 - 10 + 5 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Tangentens ligning er:

$$\begin{aligned} y - 10 &= -4(x - 1) \\ y - 10 &= -4x + 4 \\ y &= -4x + 14 \end{aligned}$$

Svar: Tangentens ligning er $y = -4x + 14$

Opgave 7

Opgavebeskrivelse

Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$.

Funktionerne f, g og h er givet ved:

$$f(x) = e^{-0.5x}$$
$$g(x) = 4e^{-0.5x}$$
$$h(x) = 4e^{0.5x}$$

a) Argumentér for, hvilken af funktionerne f, g og h, der ikke kan være en løsning til differentialligningen

Løsning:

For en differentialligning på formen $y' = k \cdot y$ skal forholdet $\frac{y'}{y}$ være konstant og lig med k.

Lad os undersøge hver funktion:

For $f(x) = e^{-0.5x}$:

$$f'(x) = -0.5 \cdot e^{-0.5x}$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-0.5 \cdot e^{-0.5x}}{e^{-0.5x}} = -0.5$$

Så f opfylder $y' = -0.5 \cdot y$ med $k = -0.5$.

For $g(x) = 4e^{-0.5x}$:

$$g'(x) = 4 \cdot (-0.5) \cdot e^{-0.5x} = -2e^{-0.5x}$$
$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{-2e^{-0.5x}}{4e^{-0.5x}} = -0.5$$

Så g opfylder også $y' = -0.5 \cdot y$ med $k = -0.5$.

For $h(x) = 4e^{0.5x}$:

$$h'(x) = 4 \cdot 0.5 \cdot e^{0.5x} = 2e^{0.5x}$$
$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{2e^{0.5x}}{4e^{0.5x}} = 0.5$$

Så h opfylder $y' = 0.5 \cdot y$ med $k = 0.5$.

Analyse af hældningsfeltet:

For differentialligningen $y' = k \cdot y$ afhænger hældningens fortegn af både k og y:

Hvis $k < 0$ (negativ):

- Når $y > 0$: $y' = k \cdot y = (\text{negativ}) \times (\text{positiv}) = \text{negativ}$

  $\rightarrow$ hældningen er negativ (kurven falder)

- Når $y < 0$: $y' = k \cdot y = (\text{negativ}) \times (\text{negativ}) = \text{positiv}$

  $\rightarrow$ hældningen er positiv (kurven stiger)

Hvis $k > 0$ (positiv):

- Når $y > 0$: $y' = k \cdot y = (\text{positiv}) \times (\text{positiv}) = \text{positiv}$
  $\rightarrow$ hældningen er positiv (kurven stiger)
- Når $y < 0$: $y' = k \cdot y = (\text{positiv}) \times (\text{negativ}) = \text{negativ}$
  $\rightarrow$ hældningen er negativ (kurven falder)

Observation fra figuren:
Fra hældningsfeltet i opgaven kan vi se:

- Over x-aksen ($y > 0$): Pilene peger nedad til højre $\rightarrow$ **negativ hældning**
- Under x-aksen ($y < 0$): Pilene peger opad til højre $\rightarrow$ **positiv hældning**

Dette mønster matcher situationen hvor $k < 0$.
Konklusion:
Siden:

- $f(x) = e^{-0.5x}$ har $k = -0.5 < 0$
- $g(x) = 4e^{-0.5x}$ har $k = -0.5 < 0$
- $h(x) = 4e^{0.5x}$ har $k = 0.5 > 0$

Svar: Funktionen $h(x) = 4e^{0.5x}$ kan ikke være en løsning til differentialligningen, fordi den har $k = 0.5 > 0$. Dette ville give positive hældninger når $y > 0$, men hældningsfeltet viser negative hældninger når $y > 0$, hvilket indikerer at $k < 0$.

1 Opgave 10: Vektorfunktion

Givet vektorfunktionen:

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}t^4 + 2t \\ t^3 - t + 2 \end{pmatrix}$$

Eller skrevet som:

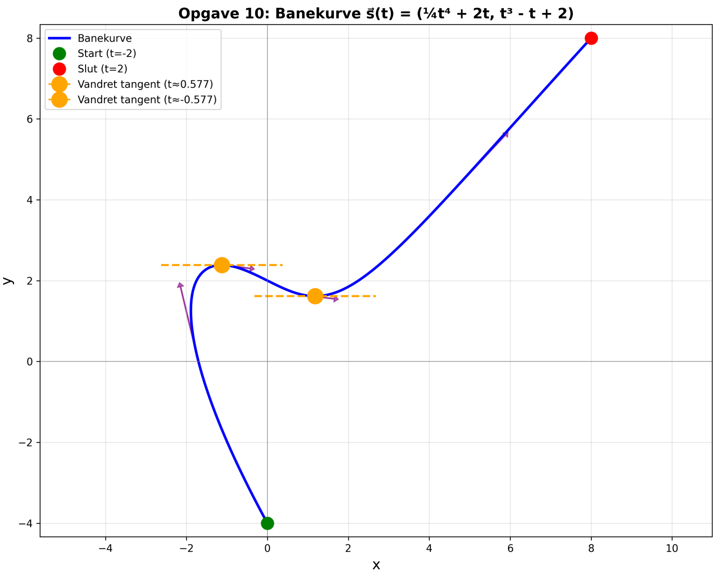
$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 + 2t$$
$$y(t) = t^3 - t + 2$$

2 Forskellige typer tangenter

2.1 1. Vandret tangent (allerede fundet)

En **vandret tangent** opstår når $\frac{dy}{dt} = 0$ (mens $\frac{dx}{dt} \neq 0$).

$$y'(t) = 3t^2 - 1 = 0$$
$$t^2 = \frac{1}{3}$$
$$t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577$$



Figur 1: Vektorfunktion med vandret tangent ved $t \approx -0.577$ og $t \approx 0.577$