DOMANDE ALGEBRA

1) dei vett. $v_1 .. v_n$ di uno spazio vettoriale V sono l.i se ~~[illegible]~~ l'unica combinazione lineare di $v_1 .. v_n$ che dà il vett. nullo è quella con tutti gli scalari $\lambda = 0$

2) I vettori $v_1 .. v_n$ sono l.d. $\Longleftrightarrow$ uno è comb. lin degli altri.

DIM: • $v_1 .. v_n$ sono l.d. per ipotesi

3,2,4 $\Longrightarrow \exists\, \alpha_1 .. \alpha_n \neq 0$ tc $\alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n = \underline{0}$

dato che almeno uno scalare α è non nullo suppongo $\alpha_k \neq 0$

quindi $-\alpha_k v_k = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + .. + \alpha_n v_n$

$\Longrightarrow v_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k} v_1 - ... - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k} v_{k-1} - \frac{\alpha_{k+1}}{\alpha_k} v_k - .. - \frac{\alpha_n}{\alpha_k} v_n$

ho dimostrato che v_k è comb. lin. degli altri vett.

• $v_k = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + .. + \alpha_n v_n$ per ipo.

porto v_k al secondo membro

$\underline{0} = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_{k-1} v_{k-1} - 1 v_k + .. + \alpha_n v_n$

ho dimostrato che $v_1 .. v_n$ sono l.d. perché lo scalare $\alpha_k \neq 0$ e la comb. lineare $= \underline{0}$

3) $\langle v_1 .. v_n \rangle$ è detto span$\{v_1 .. v_n\}$. Siano $\{v_1 .. v_n\}$ un insieme di vettori di V. Lo span di $v_1 .. v_n$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1 .. v_n$:

$\langle v_1 .. v_n \rangle = \{ \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n \mid \lambda_1 .. \lambda_n \in \mathbb{R} \}$

DIM: sia V uno spazio vett. e $\{v_1 .. v_n\}$ un insieme di vettori di V.

Allora $\langle v_1 .. v_n \rangle$ è sottosp. di V. Inoltre se Z è un sottosp. di V contenente $v_1 .. v_n$, allora $\langle v_1 .. v_n \rangle \subseteq Z$, dunque $\langle v_1 .. v_n \rangle$ è il più piccolo sottosp. di V contenente $v_1 .. v_n$.

$\underline{0} \in \langle v_1 .. v_n \rangle$ infatti $\underline{0} = 0v_1 + .. + 0v_n$

Siano $v, w \in \langle v_1 .. v_n \rangle$ dunque $v = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n$

$w = \beta_1 v_1 + .. + \beta_n v_n$

Ne segue che $v + w = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + .. + (\alpha_n \beta_n) v_n \in \langle v_1 .. v_n \rangle$

Inoltre, sia $k \in \mathbb{R}$, $kv = k\alpha_1 v_1 + .. + k\alpha_n v_n \in \langle v_1 .. v_n \rangle$

Dunque $\langle v_1 .. v_n \rangle$ è chiuso rispetto alla somma, al prod per scalari e contiene $\underline{0}$, ciò significa che è sottosp. di V.

Sia $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n \in \langle v_1 .. v_n \rangle$ con $\lambda_1 .. \lambda_n \in \mathbb{R}$ e sia Z un sottospazio di V contenente $v_1 .. v_n$.

Allora $\lambda_1 v_1 .. \lambda_n v_n \in Z$ perché Z è chiuso rispetto al prod. per scalari. Inoltre Z è chiuso per la somma quindi $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n \in Z$. Dunque $\langle v_1 .. v_n \rangle \subseteq Z$ perché $\forall v \in \langle v_1 .. v_n \rangle$, $v \in Z$.

4) Sia V uno spazio vettoriale. L'insieme $\{v_1 .. v_n\}$ si dice base di V se $v_1 .. v_n$ sono l.i. e se $V = \langle v_1 .. v_n \rangle$

<u>DIM</u>: se $V \neq \{\underline{0}\}$ è generato da un numero finito di vettori $v_1 .. v_n$ allora V ha una base.

$V = \langle v_1 .. v_n \rangle$ per ipotesi.

Se $v_1 .. v_n$ sono l.i ho finito la dim. altrimenti so che $\exists v \in \{v_1 .. v_n\}$ che rende $v_1 .. v_n$ l.d. dunque v è comb. lin. dei vett di $\{v_1 .. v_n\} - \{v\}$. Rimuovendo v da $\{v_1 .. v_n\}$ ho un sottoinsieme di vett. di $\{v_1 .. v_n\}$ l.i. dunque questo sottoinsieme è base di V.

5) la dimensione di uno spazio vettoriale V è la cardinalità della base di V.

6) sia $B = \{v_1 .. v_n\}$ una base di V ordinata e sia $v \in V$. allora le coordinate di v rispetto alla base B sono gli scalari $\lambda_1 .. \lambda_n$ tc $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$.

DIM: dimostriamo ora che gli scalari $\lambda_1 .. \lambda_n$ sono unici
4.2.8
$v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$ dato che $v \in V$
suppongo ora che $v = \mu_1 v_1 + .. + \mu_n v_n$.
Se sottraggo la prima eq. dalla seconda ho che:
$\underline{0} = (\mu_1 - \lambda_1) v_1 + . (\mu_n - \lambda_n) v_n$
ma dato che $v_1 .. v_n$ sono l.i perchè appartengono a B
vuol dire che $(\mu_i - \lambda_i) = 0 \ \forall i = 1..n \Rightarrow \mu_i = \lambda_i \ \forall i = 1..n$

7) se $U = \langle v_1 .. v_n \rangle$ l'algoritmo di Gauss in modo diretto mi permette di trovare una base di U perchè mettendo $v_1 .. v_n$ in riga e riducendo tramite operazioni elementari non cambia il sottospazio generato dai vettori riga ma si possono "eliminare" le righe che sono combinazione lin. delle altre ottenendo così una base di U. Ciò vale se U è sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

DIM: se $A \in M(\mathbb{R})$ è a scala per riga allora i suoi vettori riga non nulli sono l.i.
4.3.3
?
Siano $R_1 .. R_k$ le righe non nulle e $a_{1j_1} .. a_{kj_k}$ i rispettivi pivot.
Sia $\lambda_1 R_1 + .. + \lambda_k R_k = \underline{0}$, voglio dim $\lambda_1 .. \lambda_k = 0$.
Nel vettore $\lambda_1 R_1 + .. + \lambda_k R_k$ l'elemento di posto j_1 è $\lambda_1 a_{1j_1}$ ecc..
Dal fatto che $\lambda_1 R_1 + .. + \lambda_k R_k = \underline{0}$ segue che $\begin{cases} \lambda_1 a_{1j_1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 a_{1j_k} + .. + \lambda_k a_{k..} \end{cases}$

dato che $a_{1j_1} \neq 0$ perché è pivot, dalla prima eq. ottengo $\lambda_1 = 0$. Sostituendo e ripetendo trovo che $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ dunque $R_1 \dots R_k$ sono l.i.

8) se $v_1 \dots v_k \in \mathbb{R}^n$ posso capire se $v_1 \dots v_k$ generano $\mathbb{R}^n$ con Gauss diretto mettendo i vettori $v_1 \dots v_k$ per riga e riducendo per trovare quali vettori di $v_1 \dots v_k$ sono l.i, se questi vettori l.i. sono $m < n$ allora $\langle v_1 \dots v_k \rangle \neq \mathbb{R}^n$, se $m = n$ allora $\langle v_1 \dots v_k \rangle = \mathbb{R}^n$ perché in $v_1 \dots v_k$ c'è $\{v_1 \dots v_m\}$ base di $\mathbb{R}^n$.

9) Un sottospazio W di $\mathbb{R}^n$ può essere descritto in due modi: con la rappresentazione parametrica se si assegnano $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ tc $W = \langle v_1 \dots v_m \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \ \forall i = 1 \dots m\}$ o tramite una descrizione cartesiana con equazioni.

Data una matrice $A \in M_{k \times n}(\mathbb{R})$ si ha che l'insieme W delle soluzioni del sistema $Ax = \underline{0}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (lo si può considerare come $\ker F$ con $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ associata ad A). Quindi se $\{x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \underline{0}\}$ le eq. del sistema omogeneo sono le eq. cartesiane di W. Le eq. di W non sono uniche perché riducendo la matrice A le sue soluzioni non cambiano.

Se ho $W = \langle v_1 \dots v_m \rangle$ con $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ ho che $W = \{\lambda_1 v_1 + \dots \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ sia $A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ tc le colonne di A sono $v_1 \dots v_m$, allora un vettore generico $\underline{x} = (x_1 \dots x_n) \in W$ sse $\exists \lambda_1 \dots \lambda_m$ tc $\underline{x}$ è comb. lin di $v_1 \dots v_m$ (ossia $A(\lambda_1 \dots \lambda_m) = \underline{x}$. Per Rouché-Capelli a noi interessa che $r(A) = r(A|x)$. Applichiamo gauss per ridurre $(A|x)$. Si otterrà
$$\left(\begin{array}{cccc|c} \bullet & \sim & \sim & & f_1(x) \\ 0 & \bullet & \sim & & f_2(x) \\ 0 & 0 & \bullet & \sim & f_3(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f_4(x) \end{array}\right)$$
. Se voglio $r(A) = r(A|x)$ allora anche $f_4(x) = 0$, dunque $\underline{x} \in W$ per i valori tc $f_4(x) = 0$. $f_4(x) = 0$ è l'equaz. cart. del sottospazio W.

$= 0$

10) Una aplicaz. lin. è una funzione $F: V \to W$ dove V, W sono spaz. vettoriali tc $F(u)+F(v)=F(u+v)$

$\lambda F(v) = F(\lambda v)$

mentre si dice nucleo di F l'insieme di vettori di V la cui imm. è $\underline{0}_W$ e si scrive $\ker F = \{v \in V \mid F(v) = \underline{0}_W\}$

DIM 5.4.8: F INIET $\Longleftrightarrow \ker F = \{\underline{0}_V\}$

- Caso F INIET $\Rightarrow \ker F = \{\underline{0}_V\}$

  sia $u \in \ker F$, allora $F(u) = \underline{0}_W$ e dato che F è INIET.

  $u = \underline{0}_V$

- Caso $\ker F = \{\underline{0}_V\} \Rightarrow$ F INIET

  suppongo che $F(u) = F(v)$ per qualche $u, v \in V$ allora

  $F(u) - F(v) = \underline{0}_W \longrightarrow F(u-v) = \underline{0}_W \longrightarrow u - v = \underline{0}_V \longrightarrow u = v$

11) sia $F: V \to W$ allora $\operatorname{Im} F = \{w \in W \mid w = F(v),\ v \in V\}$

DIM 5.4.4: se $F: V \to W$ lin. e $\mathcal{B} = \{v_1 \ldots v_n\}$ è base di V, allora $\operatorname{Im} F = \langle F(v_1) \ldots F(v_n) \rangle$

- Dimostro che $\operatorname{Im} F \subseteq \langle F(v_1) \ldots F(v_n) \rangle$.

  ImF è formata da tutti i vett. $F(v)$ al variare di $v \in V$

  Se $v \in V$ allora $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ quindi $F(v) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_n F(v_n)$ con $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{R}$. Allora $F(v) = \langle F(v_1) \ldots F(v_n) \rangle \Longrightarrow$

  $\Longrightarrow \operatorname{Im} F \subseteq \langle v_1 \ldots v_n \rangle$

- $\langle F(v_1) \ldots F(v_n) \rangle \subseteq \operatorname{Im} F$ è vero perchè ImF è sottosp. di W e $\langle F(v_1) \ldots F(v_n) \rangle$ è il pi ?

12) Sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, definire L_A e dare la motivaz. teorica del
13) calcolo del suo nucleo e della sua Im.

L_A può essere definita o stabilendo le immagini di una base del dominio o tramite la sua legge:

$L(e_1) = C_1 \dots L(e_n) = C_n$ oppure $L(x_1 \dots x_n) = (R_1 \dots R_m)$

Per trovare $\ker L_A$ si studiano le soluz. del sistema $A\underline{x} = \underline{0}$:

Se $A\underline{x} = \underline{0}$ ha 1 sol ($r(A) = r(A|\underline{0}) = n$) vuol dire che nel nucleo c'è solo un vettore, quello nullo, dunque L_A iniet., altrimenti la soluzione può essere parametrica. In tal caso $A\underline{x} = \underline{0}$ ha infinite sol dipendenti da $n - r(A)$ parametri, dunque nel ker non c'è solo il vett. nullo. *

L'immagine di A ha dim $= r(A)$, dunque una volta ridotta A si possono prendere $r(A)$ colonne indip. di A e quelle formano una base dell'immagine. Oppure posso prendere subito le colonne di A e metterle in riga per vedere quali sono l.i., questo procedimento coincide col ridurre con Gauss A^T. Ciò si può fare perché $rc(A) = rr(A) = r(A)$

* ricorda che $\ker F = \{\underline{x} \in V \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$

4) **DIM**: Siano V e W sp. vett. Se $\mathcal{B}=\{v_1 \dots v_n\}$ è base di V e $w_1 \dots w_n$
5.1.7
$\in W$ allora $\exists ! F: V \to W$ tc $F(v_1)=w_1 \dots F(v_n)=w_n$

Dato che $\mathcal{B}$ è base di V posso scrivere $v \in V$ come $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = v$ dove $\alpha_1 \dots \alpha_n$ sono unici (coordinate) quindi decidiamo che $F(v)=\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$ e controlliamo che I) $F(x+y)=F(x)+F(y)$, II) $F(\lambda x)=\lambda F(x)$ dove $\begin{cases} x=\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \\ y=\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \end{cases}$

I) $F(x+y)=F((\alpha_1+\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)v_n)=(\alpha_1+\beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_n+\beta_n)w_n$
II) $F(\lambda x)=F(\lambda \alpha_1 v_1 + \dots + \lambda \alpha_n v_n)=\lambda\alpha_1 w_1 + \dots + \lambda\alpha_n w_n = \lambda F(v)$
quindi F è app. lin. Se F non fosse unica allora $\exists G: V \to W$ tc $G(v_1)=w_1 \dots G(v_n)=w_n$ e allora $G(v)=\alpha_1 G(v_1) + \dots + \alpha_n G(v_n)$ $=\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n = F(v)$ quindi $F(v)$ è unica.

15) **DIM**: sia $F: V \to W$ lin. Allora $\dim V = \dim \ker F + \dim \operatorname{Im} F$
5.5.1

Sia $\{u_1 \dots u_r\}$ base di $\ker F$. Per teo completamento posso completarlo a una base $\mathcal{B}$ di V:
$\mathcal{B}=\{u_1 \dots u_r, z_{r+1} \dots z_n\}$. Devo dim $\{F(z_{r+1}) \dots F(z_n)\}$ è base di Im
Se associo a $z_{r+1} \dots z_n$ le loro immagini tramite F so che $\operatorname{Im} F = \langle F(z_{r+1}) \dots F(z_n) \rangle$. Devo ora dim $F(z_{r+1}) \dots F(z_n)$ l.i.
ossia $\alpha_{r+1} F(z_{r+1}) + \dots + \alpha_n F(z_n)=0$ solo se $\alpha_i=0$ $\forall i=r+1 \dots n$
Sia $\alpha_{r+1} F(z_{r+1}) + \dots + \alpha_n F(z_n)=0$ allora $F(\alpha_{r+1} z_{r+1} + \dots + \alpha_n z_n)=0$
quindi $z=\alpha_{r+1} z_{r+1} + \dots + \alpha_n z_n \in \ker F$ quindi z è comb. lin. di $u_1 \dots u_r$: $z=\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r$ e dunque
$\alpha_{r+1} z_{r+1} + \dots + \alpha_n z_n = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r \Rightarrow$
$\alpha_{r+1} z_{r+1} + \dots + \alpha_n z_n - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_r u_r) = \underline{0}$
Dato che $\{u_1 \dots u_r, z_{r+1} \dots z_n\}$ è base di $V \Rightarrow \alpha_i=0$ $\forall i=1 \dots n$
quindi $F(z_{r+1}) \dots F(z_n)$ sono l.i.

16) Il rango colonne di una matrice $A_{m \times n}(\mathbb{R})$ è il numero di colonne l.i. di A, cioè la dim del sottospazio di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne di A. Il rango righe di A è il numero di righe l.i.

DIM: Se $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $rr(A) = rc(A)$
6.2.3

Sia $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Il $\ker L_A$ è l'insieme delle sol. di $A\underline{x} = \underline{0}$ ed ha dim $n - rr(A)$. Per il teo della dim so che $\dim \ker L_A = n - \dim \mathrm{Imm} L_A \Rightarrow rr(A) = \dim \mathrm{Im} L_A$ cioè $rr(A) = rc(A)$

17) Un app. lin $F: V \to W$ si dice isomorfismo se è biettiva. Due spazi V e W sono isomorfi se $\exists F$ come sopra e si scrive $V \cong W$.

DIM: V e W sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$
5.6.3

- Supponiamo che $\dim V = \dim W = n$ e consideriamo $B_V = \{v_1 .. v_n\}$ e $B_W = \{w_1 .. w_n\}$ basi di V e W.
  Allora $F: V \to W$ è isomorfismo se definita come $F(v_i) = w_i \ \forall i$ perché $\mathrm{Im} F = \langle F(v_1) .. F(v_n) \rangle = \langle w_1 .. w_n \rangle$ ma dato che $w_1 .. w_n$ generano anche W allora F è su.
  Dunque per teo dimensione $n = \dim \ker F + n \Rightarrow \ker F = \{0\}$ $\Rightarrow$ F è INIET.
- Suppongo che V e W isomorfi, allora $\exists F: V \to W$ isomorfismo $\Rightarrow \dim \ker F = 0$ e $\mathrm{Im} F = W \Rightarrow$ per teo dimensione ho $\dim V = 0 + \dim \mathrm{Im} F \Rightarrow \dim V = \dim W$

18) Sia $F: V \to W$ app. lin. e sia $w \in W$. La preimmagine o controimmagine di w attraverso F è l'insieme
$F^{-1}_{(w)} = \{v \in V \mid F(v) = w\}$

Inoltre $F^{-1}_{(w)} \neq \emptyset \iff w \in W$ e in tal caso
$F^{-1}_{(w)} = \{v+z \mid F(v) = w,\ z \in \ker F\}$.

DIM se $w \notin W$ per def $F^{-1}_{(w)} = \emptyset$.
6.1.4 se invece $w \in W$ dimostriamo il precedente enunciato
Per def. di $\operatorname{Im} F$ $\exists v \in V$ tc $F(v) = w$. Non è detto che v sia unico, supponiamo infatti $\exists v' \in F^{-1}_{(w)}$.
Allora $F(v) = F(v') = w \Rightarrow F(v-v') = 0_W \Rightarrow$
$\Rightarrow v - v' \in \ker F$ quindi un qualsiasi elemento v' di $F^{-1}_{(w)}$ si può scrivere come $v' = v + (v' - v) = v + z$ con $z \in \ker F$. Allora $F(v+z) = F(v) + 0_W = W$

19) Un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in n incognite ammette soluzioni se, e solo se, $r(A) = r(A|b)$.
Se $r(A) = r(A|b) = n$ c'è una sola soluzione.
Se $r(A) = r(A|b) < n$ ci sono infinite soluzioni che dipendono da $n - r(A)$ parametri.

20) Il determinante è una funzione che ad ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ associa un numero reale e che gode delle seguenti proprietà:
I) se la riga j è somma di due vettori u e $v \in \mathbb{R}^n$ allora $\det A = \det A[u/j] + \det A[v/j]$
II) se la riga j è il prodotto fra $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^n$ allora $\det A = \lambda \det A[v/j]$
III) se due righe sono uguali $\det A = 0$
IV) se I è la matrice identità $\det I = 1$

Inoltre la funzione che soddisfa queste 4 proprietà è unica.
Inoltre valgono le ulteriori 3 proprietà:

a) se B è ottenuta scambiando due righe di A $\det B = -\det A$

b) se B è ottenuta sommando alla riga j di A una comb. lin. delle righe di A, $\det B = \det A$

c) se B è triangolare superiore (o inferiore) allora $\det A$ è uguale al prod. degli elementi sulla diagonale.

Vale inoltre il teorema di Binet: siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

21) Una matrice quadrata A si dice invertibile se esiste B tc $AB = BA = I$

DIM: se la matrice A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

7.4.2

- Se A è invertibile $\Rightarrow \det A \neq 0$ perché se A è invertibile $\exists A^{-1}$ tc $AA^{-1} = I$ dunque $\det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I \Rightarrow \det A \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$
- Se $\det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ si dimostra direttamente costruendo A^{-1}

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} (-1)^{i+j} \det((A_{ji}))$$

22) dimostra che se $AB = I$ allora B è l'inversa di A, sapendo che $A, B \in M_n(\mathbb{R})$

$\det(AB) = \det A \det B = \det I \Rightarrow \det A \det B = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$AB = I \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}I \Rightarrow B = A^{-1}$

23) Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo, $F = L_A$ allora sono equiv.:

I) F è isomorfismo
II) F è iniettiva
III) F è suriettiva
IV) $\dim \operatorname{Im} F = n$
V) $r(A) = n$
VI) le colonne di A sono l.i
VII) le righe di A sono l.i.
VIII) Il sistema $Ax = \underline{0}$ ha una sola soluzione
IX) $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$ ha una sola soluzione
X) A è invertibile
XI) $\det A \neq 0$

DIM: 7.6.1
I) ⇒ II) ⇒ III) ⇒ IV ⇒ V ovvio

V) ⇒ VI) ⇒ VII) $r(A) = rc(A) = rr(A)$

VII) ⇒ VIII) perché se le righe di A sono l.i ⇒ $r(A) = r(A|\underline{0}) = n$ (dopo aver usato Gauss)

VIII) ⇒ IX) se $Ax = \underline{0}$ ha una sola sol allora anche $Ax = b$ ha una sola sol dopo Gauss

IX) ⇒ II) perché $\ker F = \{\underline{0}\}$

I) ⇒ ... ⇒ IX) ⇒ II) ⇒ I)

Vediamo I) ⇒ X) sia G l'inversa di F ⇒ $F \circ G = G \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$, sia $G = L_B$ allora $AB = BA = I$, dunque B è l'inversa di A

Vediamo X) ⇒ I) perché se $B = A^{-1}$ e $G = L_B: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora G è l'inversa di $F = L_A$ dunque F è invertibile e biunivoca.

X) ⇔ XI) ovvio

24) sia $F: V \to W$, con $B = \{v_1 .. v_n\}$ base di V e $B' = \{w_1 .. w_m\}$ base
25) di W allora la matrice associata a F è

$M^{B'}_{B}(F) = \left((F(v_1))_{B'} \; .. \; (F(v_n))_{B'} \right)$ e per determinare l'immagine

di un qualsiasi vettore x trovo $(x)_B$ e poi faccio
$M^{B'}_{B}(F) \cdot (x)_B$.

La matrice $I_{B,C} = M^{C}_{B}(id) = \left((v_1)_C \; .. \; (v_n)_C \right) = \left(v_1 \; .. \; v_n \right)$ con $B = \{v_1 .. v_n\}$

La matrice $I_{BB} = M^{B}_{B}(id) = \left((v_1)_B \; .. \; (v_n)_B \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ perché
$v_1 = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n = 1 v_1 + 0 v_2 + .. + 0 v_n \Rightarrow (v_1)_B = (1, 0, 0 .. 0)$

26) ?

27) Un endomorfismo $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ si dice diagonalizz. se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ tc $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ sia una matrice diagonale.

<u>DIM</u>: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F) = A$ è diagonalizzab.

9.1.4

- Supponiamo che F sia diagonaliz. Allora $\exists \mathcal{B}$ tc $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale. Sia $P = I_{\mathcal{BC}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)$ allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{BC}}^{-1} A I_{\mathcal{BC}}$ dunque A è diagonalizzabile.
- Supponiamo A sia diagonalizzabile ($\exists P$ tc $P^{-1}AP = D$) allora $\exists P$ invertibile come da ipotesi e consideriamo una base $\mathcal{B}$ che ha per elementi le colonne di P, allora $P = I_{\mathcal{BC}}$ (matrice di cambio di base) per cui $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è proprio $I_{\mathcal{BC}}^{-1} A I_{\mathcal{BC}}$ ed è diagonale, quindi F è diagonalizzabile.

28) Sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo, allora $v \neq \underline{0}$, $v \in \mathbb{R}^n$ si dice autovett.
29) di autovalore λ se $F(v) = \lambda v$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

<u>DIM</u>: se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ allora F è diagonaliz. $\Longleftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di F.

9.2.3

- Se $\exists \mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$ di autovettori allora $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale, infatti $F(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + . + 0 v_n$ ecc. quindi

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$ dunque per def. F è diagonalizzabile.

- Se F è diagonalizz. allora $\exists \mathcal{B}$ tc $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale ed è $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ allora essa ha gli autoval proprio sulla diagonale dato che $(F(v_1))_{\mathcal{B}} = \lambda_1 \, .. \, (F(v_n))_{\mathcal{B}} = \lambda_n$

perché $(F(v_1))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ecc..

dunque $F(v_1) = \lambda_1 v_1 \, .. \, F(v_n) = \lambda_n v_n$ e $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori.

30) Il polinomio caratteristico di una matrice A, denotato con P_A, è un polinomio in x: $P_A(x) = \det(A - xI)$.
Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $P_A(x)$ ha grado n e può cominciare solo con $\pm x^n$ ed il termine noto è $\det A$:
$P_A(x) = (-1)^n x^n + \dots + \det A$

Se F è la applicazione lin. associata ad A allora gli zeri di $P_A(x)$ sono gli autovalori di F.

31) due matrici A, B si dicono simili se $\exists P$ tc $B = P^{-1}AP$.
Due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.
Osserviamo che se A, B sono simili allora corrispondono alla stessa app. lin. rispetto a basi diverse. Ne segue che matrici simili hanno lo stesso determinante.

32) due matrici con lo stesso $p(x)$ ma non simili sono, ad esempio,
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$P_A(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$ $\quad P_B(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2$

A e B non sono simili perché A è diagonaliz. mentre B no: $m_a(1) = 2 \neq m_g(1) = 1$

33) Uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice autovalore di un endomorfismo $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
34) se $\exists v \in V \setminus \{0\}$ tc $F(v) = \lambda v$.
La molteplicità algebrica di un autovalore λ è k tc
$P_A(x) = (x-\lambda)^k g(x)$ con $g(\lambda) \neq 0$ e scriviamo $m_a(\lambda) = k$.

La molteplicità geometrica di λ ($m_g(\lambda)$) è la dimensione dell'autospazio $V_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ ed è sempre ≥ 1 ($\nexists V_\lambda = \{0\}$).
Se $\lambda = 0$ è autovalore allora F non è iniettiva perché $V_0 = \ker F$ ma $\dim V_0 = m_g(0) \geq 1$ quindi $\dim \ker F \geq 1$.

35) Il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ è una funzione della forma

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle$$

Essa ha le seguenti proprietà:

I) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ Simmetria

$$\left.\begin{array}{l} \text{II) } \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\ \text{III) } \langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle \end{array}\right\} \text{Il prod. scalare è bilineare}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{IV) } \langle u, u \rangle \geq 0 \\ \text{V) } \langle u, u \rangle = 0 \iff u = \underline{0} \end{array}\right\} \text{Il prod. scalare è definito positivo}$$

In generale se una funzione gode di I), II) e III) allora si dice forma bilineare simmetrica.

Se $u = (x_1 .. x_n)$ e $v = (y_1 .. y_n)$ allora $\langle u, v \rangle = x_1 y_1 + .. + x_n y_n$

Diciamo che i vettori $v_1 .. v_k \in \mathbb{R}^n$ sono ortogonali se $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$, si dicono ortonormali se $\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

36) Sia $W \subseteq V$ un sottospazio di V, allora l'insieme $W^\perp$ è un sottospazio di V con $W^\perp = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$

DIM: sia W sottosp. di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp = n - \dim W$ e $W \cap W^\perp = \{0\}$

Sia $\dim W = r$ e B una base di W tc $B = \{w_1 \dots w_r\}$.

$x \in W^\perp \iff \begin{cases} \langle x, w_1 \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle x, w_r \rangle = 0 \end{cases} \iff x$ è soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$ dove le righe di A sono $w_1 \dots w_r$.

Le soluzioni dipendono da $n - r(A)$ parametri e dato che $w_1 \dots w_r$ sono l.i le sol. dipendono da $n - r$ param ossia da $n - \dim W$.

Sia ora $v \in W \cap W^\perp$, allora $\langle v, w_i \rangle = 0 \ \forall i$ perché $v \in W^\perp$ ma anche $v \in W$.

In particolare questo vale anche per $w \in B_W$ quindi $\langle w, w \rangle = 0$ e ciò vale solo per $w = \underline{0}$

37) La proiezione di un vettore v su un vettore u è:

$$pr_u(v) = \frac{\langle v, u \rangle}{\langle u, u \rangle} u.$$

Per la proiezione di un vettore v su un sottospazio U è necessario avere una base ortogonale di U $B_U = \{w_1 \dots w_k\}$ così da trovare $B_{U^\perp} = \{z_1 \dots z_{n-k}\}$ sempre ortogonale.

$z_1 \dots z_{n-k}, w_1 \dots w_k$ sono perpendicolari tra loro (e non nulli) quindi sono l.i. e dato che sono n sono una base di $\mathbb{R}^n$

$v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow v = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_k w_k + \mu_1 z_1 + \dots + \mu_{n-k} z_{n-k} =$

$= v_1 + v_2$ con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ dove v_1 si dice proiezione di v su U: $pr_U(v) = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \dots + \frac{\langle v, w_k \rangle}{\langle w_k, w_k \rangle} w_k$ e v_2 è invece $v - v_1$

38) Un endomorfismo F si dice ortogonale se $\langle F(v), F(u)\rangle = \langle v, u\rangle$ $\forall u, v \in \mathbb{R}^n$. Si dice che F conserva il prodotto scalare standard.
$A \in M_n(\mathbb{R})$ è ortogonale se conserva il prod. scalare.
Sia $F = L_A$ $\quad F$ è ortogonale $\Longleftrightarrow A$ è ortogonale

<u>DIM</u>: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora sono equivalenti

I) $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$

II) $\langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle$

III) $A^T = A^{-1}$

IV) le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

- I) $\Rightarrow$ II) ovvio scegliendo $y = x$

- I) $\Rightarrow$ IV) sia $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $A = (L_A(e_1) \dots L_A(e_n))$
$$\underline{x} \longrightarrow A\underline{x}$$
sappiamo che $\{e_1 \dots e_n\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
cioè $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$

$\langle e_i, e_j\rangle = \langle L_A(e_i), L_A(e_j)\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle$ dunque $\langle L_A(e_i), L_A(e_j)\rangle$
$= \delta_{ij}$ cioè $L_A(e_1) \dots L_A(e_n)$ sono base ortonormale

- III) $\Rightarrow$ IV) sia $A = (C_1 \dots C_n)$ e $A^T = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ e supponiamo che $A^T = A^{-1}$ allora $A^T A = A^{-1} A$ quindi $A^T A = I$ ossia
$\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} (C_1 \dots C_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ quindi nel posto $i = j$ c'è 1
perché c'è $\langle C_i, C_i\rangle$ dunque le colonne di A sono ortonormali

39) Il teorema spettrale dice: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare simmetrico, allora esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ costituita da auto-vettori di F.

Ne segue che:

I) un endomorfismo simmetrico è sempre diagonalizzabile

II) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ con λ_1, λ_2 autovalori allora V_{λ_1} è ortogonale a V_{λ_2}

III) se $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$, $\exists P$ matrice ortogonale tc $P^T A P = D$

40) siano $a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$ diciamo che a è congruo a b

41) modulo n $(a \equiv_n b)$ se $n | b-a$. La congruenza è una relazione di equivalenza:

I) $a \equiv_n a$ perché $n | a-a$ ossia $n | 0$

II) $b \equiv_n a \Rightarrow a \equiv b$

III) $a \equiv_n b$, $b \equiv_n c \Longrightarrow a \equiv_n c$

Allora definiamo $[a]_n$ classe resto di a modulo n come $\{b \in \mathbb{Z} : b \equiv_n a\} = \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Definiamo $\mathbb{Z}_n = \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}$

<u>DIM</u>: $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n .. [n-1]_n\}$

Sia $a \in \mathbb{Z}$, allora $a = nq + r$ con $0 \leq r < n$

quindi $n | a-r$ quindi $a \equiv_n r$ cioè $[a]_n = [r]_n$

quindi ho dim che $\mathbb{Z} = \{[0]_n .. [n-1]_n\}$

In $\mathbb{Z}_n$ definiamo due operazioni: $+$ e $\cdot$, ne segue che $\mathbb{Z}_n$ è un anello:

La somma è commutativa (e anche il prodotto); Sia per la somma che per il prodotto esiste l'elemento neutro; Esiste l'opposto di $[a]_n$ ossia $[-a]_n$; Vale la proprietà distributiva

42) $[a]_n \in \mathbb{Z}_n$ si dice invertibile se $\exists [b]_n$ tc $[a]_n[b]_n = [1]_n$, allora $[b]_n$ è detto l'inverso di $[a]_n$

DIM: $[a]_n$ è invertibile $\Longleftrightarrow mcd(a,n) = 1$

- Suppongo $mcd(a,n) = 1$
  Per il teorema di Bezout $\exists u,v$ tc $1 = au + nv$, passando alle classi resto: $[1]_n = [a]_n [u]_n + [n_n][v]_n = [a]_n [u]_n$ quindi $[u]_n$ è l'inverso di $[a]_n$

- Suppongo $[a]_n$ invertibile, dunque $\exists b$ tc $[a]_n [b]_n = [1]_n$, ovvero $[ab]_n = [1]_n$ cioè $ab \equiv_n 1$ cioè $n | ab-1$.
  Sia $d = mcd(a,n)$, allora $d|n$ e ne segue che $d | ab-1$. Ma so anche che $d|a$ che implica $d|ab$. Se $d|ab-1$ e $d|ab$ allora $d|ab-1-ab$ quindi $d|1$ e l'unico intero d che divide 1 è 1 stesso, quindi $d = 1 = mcd(a,n)$