DIMOSTRAZ. ALGEB

TEO: V è sp. vett, $v_1..v_n \in V$ allora $\langle v_1..v_n \rangle$ è (1) sottosp. di V
(2) Inoltre se Z è sottosp. di V che contiene $v_1..v_n$ allora $\langle v_1..v_n \rangle \subseteq Z$, quindi $\langle v_1..v_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio di Z che contiene $v_1..v_n$

DIM: (1) $\langle v_1..v_n \rangle = \{\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$
Controllo che $\langle v_1..v_n \rangle$ non sia vuoto, sia chiuso per somma e prod x scalari.
(2) Sia Z tc $v_1..v_n \in Z$ e sia $v \in \langle v_1..v_n \rangle$, mostro che $v \in Z$: Z contiene $\lambda_i v_i\ \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall i$, quindi $\langle v_1..v_n \rangle \in Z$, allora $v \in Z$.

TEO: V è sp. vett. contenente $v_1..v_n$
a) se v è comb. lin di $v_1..v_n \Rightarrow \langle v_1..v_n \rangle = \langle v_1..v_n, v \rangle$
b) se $\langle v_1..v_n, v \rangle = \langle v_1..v_n \rangle \Rightarrow v$ è comb. lin di $v_1..v_n$

DIM: b) $v \in \langle v_1..v_n, v \rangle \Rightarrow v \in \langle v_1..v_n \rangle \Rightarrow v$ è comb. lin di $v_1..v_n$
a) per IP $v \in \langle v_1..v_n \rangle$, devo dim (1) $\langle v_1..v_n \rangle \subseteq \langle v_1..v_n, v \rangle$ e anche che (2) $\langle v_1..v_n, v \rangle \subseteq \langle v_1..v_n \rangle$
(1) sia $w \in \langle v_1..v_n \rangle$, quindi $w = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$, allora
$w = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n + 0v$ quindi $w \in \langle v_1..v_n, v \rangle$
(2) $v \in \langle v_1..v_n \rangle$ per IP, quindi $\langle v_1..v_n, v \rangle \subseteq \langle v_1..v_n \rangle$

TEO: $v_1..v_n$ dip. $\in V \Leftrightarrow$ uno di essi è comb. lin degli altri

DIM: $\Rightarrow$) $v_1..v_n$ dip allora $\exists \lambda_1..\lambda_n \neq 0$ tc $\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n = 0$
sia $\lambda_k \neq 0 \Rightarrow -\lambda_k v_k = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + .. + \lambda_n v_n$
dividendo per $-\lambda_k$ trovo v_k comb. lin degli altri
$\Leftarrow$) $1 v_k = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + .. + \lambda_n v_n$, porto di là $1 v_k$ e trovo che $\exists \lambda_1..\lambda_n$ non tutti nulli tc $\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n = \underline{0}$

Scanned with CamScanner

TEO: se V è sp. vett. e $\{v_1..v_n\} \subseteq V$, sono equivalenti i seguenti:

I) $\{v_1..v_n\}$ è base di V

II) $\{v_1..v_n\}$ è insieme massimale di vett. l.i

III) $\{v_1..v_n\}$ è insieme minimale di generatori di V

NO DIM

TEO COMPLETAMENTO: sia V sp. vett. finitamente generato e $\mathcal{B}=\{v_1..v_n\}$ una base di V. Se $\{w_1..w_m\}$ l.i con $m \leq n$, allora è sempre possibile scegliere da $\mathcal{B}$ $n-m$ vett da aggiungere a $\{w_1..w_m\}$ per ottenere una nuova base di V.

NO DIM

TEO: due basi di uno stesso sp. vett. (fg) hanno la stessa cardinalità.

DIM: sia $\mathcal{B}_1=\{v_1..v_k\}$ e $\mathcal{B}_2=\{w_1..w_s\}$, allora
se prendo $\mathcal{B}_1$ come base per teo completamento $s \leq k$
se prendo $\mathcal{B}_2$ come base $k \leq s$
quindi $k=s$

TEO: le righe non nulle di una matrice a scala sono l.i.

DIM: esempio su matrice con def. di l.i.

TEO: sia V sp. vett. con dimensione n, sia W sottosp. di V con $\dim W=m$ allora: I) $m \leq n$

II) $m=n \Rightarrow V=W$

DIM: I) se $\{w_1..w_m\}$ è base di W allora dal teo del completamento scelgo $n-m$ elementi da una base di V, $\Rightarrow m \leq n$

II) sia $\{w_1..w_m\}$ base di W, allora scelgo $n-m=n-n=0$ elem da base di V per ottenere una nuova base di V.
$\{w_1..w_m\}$ è già base di V quindi $W=\langle w_1..w_m\rangle=V$

Scanned with CamScanner

TEO GEL. sia V sp. vett. di $\dim V = n$ e siano $v_1 .. v_n \in V$, allora le seguenti sono equivalenti: I) $\{v_1 .. v_n\}$ è base di V

II) $v_1 .. v_n$ generano V

III) $v_1 .. v_n$ sono l.i.

DIM: I) $\Rightarrow$ II) e I) $\Rightarrow$ III) ovvio per def. di base.

II) $\Rightarrow$ I): se $v_1 .. v_n$ generano V allora c'è un sottoins. di $v_1 .. v_n$ che è base di V.

Dato che $\dim V = n$ la base di V ha n vettori, quindi $v_1 .. v_n$ sono già base di V.

III) $\Rightarrow$ I): se $v_1 .. v_n$ sono l.i allora sono una base di un sottospazio W di V. Dato che $\dim W = \dim V = n$ allora $W = V$ e $v_1 .. v_n$ sono base anche di V.

TEO: sia V sp. vett. con base $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$ e sia $v \in V$, allora $\exists \lambda_1 .. \lambda_n \in \mathbb{R}$ unici tc $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$

DIM: se $v \in V$ e $V = \langle v_1 .. v_n \rangle$ allora $v \in \langle v_1 .. v_n \rangle$ quindi $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$ ($V = \langle v_1 .. v_n \rangle$ perche $\{v_1 .. v_n\}$ è base di V)

Dimostriamone l'unicità:

$$\left.\begin{array}{l} v = \alpha_1 v_1 + .. + \alpha_n v_n \\ v = \beta_1 v_1 + .. + \beta_n v_n \end{array}\right. \Longrightarrow \underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + .. + (\alpha_n - \beta_n) v_n$$

e dato che $\mathcal{B}$ è una base $v_1 .. v_n$ sono l.i, ciò fa sì che $\alpha_i - \beta_i = 0 \ \forall i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i$

TEO: le operazioni elementari sulle righe di una matrice non cambiano il sottosp. vett. generato dalle righe della matrice stessa

DIM: • per lo scambio di righe è ovvio.

• $R_i \to \lambda R_i$ se $v = a_1 v_1 + .. + a_i v_i + .. + a_n v_n$ questo è uguale a $a_1 v_1 + .. + \frac{a_i}{\lambda}(\lambda v_i) + .. + a_n v_n$

• $R_i = R_i + cR_j$ bisogna mostrare che $\langle R_i, R_j \rangle = \langle R_i + cR_j, R_j \rangle$

$\langle R_i + cR_j, R_j \rangle \subseteq \langle R_i, R_j \rangle$ ovvio, invece per $\langle R_i, R_j \rangle \subseteq \langle R_i + cR_j, R_j \rangle$

Scanned with CamScanner

devo mostrare che ① $R_i \in \langle R_i + cR_j, R_j \rangle$ e che ② $R_j \in \langle R_i + cR_j, R_j \rangle$

$R_i = (R_i + cR_j) - cR_j$ quindi ① provato.

② ovvia.

TEO: sia $L: V \to W$ un app. lin. allora $\mathrm{Im}L = \langle L(v_1) .. L(v_n) \rangle$ con $V = \langle v_1 .. v_n \rangle$

DIM: • dimostriamo $\langle L(v_1) .. L(v_n) \rangle \subseteq \mathrm{Im}L$

sia $w \in \langle L(v_1) .. L(v_n) \rangle$ allora $w = \lambda_1 L(v_1) + .. + \lambda_n L(v_n) =$
$= L(\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n) \Rightarrow w \in \mathrm{Im}L$

• dimostriamo $\mathrm{Im}L \subseteq \langle L(v_1) .. L(v_n) \rangle$

sia $w \in \mathrm{Im}L = \{u \in W \mid F(v) = u\}$ dunque $w = L(v)$ con $v \in V$
quindi $v = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_n v_n$. $w = L(v) = \lambda_1 L(v_1) + .. + \lambda_n L(v_n)$
dunque $w \in \langle L(v_1) .. L(v_n) \rangle$

TEO DIMENSIONE: sia $L: V \to W$, allora $\dim V = \dim \mathrm{Ker}L + \dim \mathrm{Im}L$

DIM: sia $\dim V = n$ e $\dim \ker L = r$, dimostriamo $\dim \mathrm{Im}L = n - r$

Se $\dim \ker L = r \Rightarrow \exists B_{ker} = \{v_1 .. v_r\}$, per il teorema del completamento $B_V = \{v_1 .. v_r, z_{r+1} .. z_n\}$.

Mostriamo che $\{z_{r+1} .. z_n\}$ che base di $\mathrm{Im}L$

Sapiamo che $\langle L(v_1) .. L(v_r), L(z_{r+1}) .. L(z_n) \rangle = \mathrm{Im}L$ e dato che $v_1 .. v_r \in \ker L$ $L(v_1) = .. L(v_r) = \underline{0}$ quindi $\langle L(z_{r+1}) .. L(z_n) \rangle = \mathrm{Im}L$

Ho mostrato che $z_{r+1} .. z_n$ generano, ora mostriamo che sono li

$\lambda_{r+1} L(z_{r+1}) + .. + \lambda_n L(z_n) = \underline{0} \Longleftrightarrow L(\lambda_{r+1} z_{r+1} + .. + \lambda_n z_n) = \underline{0}$

quindi $\lambda_{r+1} z_{r+1} + .. + \lambda_n z_n \in \ker L$ quindi

$\lambda_{r+1} z_{r+1} + .. + \lambda_n z_n = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_r v_r$ e portando tutto da un lato

$\underline{0} = \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_r v_r - \lambda_{r+1} z_{r+1} - .. - \lambda_n z_n \Longleftrightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$ dunque

$\{z_{r+1} .. z_n\}$ è base di $\mathrm{Im}L$ con cardinalità $n-r$.

Scanned with CamScanner

TEO: sia $F: V \to W$ con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, allora

I) se $n < m \Rightarrow \nexists F: V \to W$ suriettiva

II) se $m < n \Rightarrow \nexists F: V \to W$ iniettiva

DIM: si dimostra grazie al teorema della dimensione.

TEO: sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, allora $rr(A) = rc(A)$

DIM: sia A come da ipotesi e $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tc $L_A(x) = Ax$

per il teorema della dimensione $n = \dim \ker L_A + \dim \operatorname{Im} L_A$

Sappiamo che $\ker L_A = \{\text{soluzioni di } Ax = \underline{0}\}$ e quindi $\dim \ker L_A$

$= n - \#\text{pivot}$ della matrice A a scala $= n - rr(A)$

Quindi $n = n - rr(A) + \dim \operatorname{Im} L_A \Rightarrow rr(A) = \dim \operatorname{Im} L_A$.

ma per definizione di rango colonne $rc(A) = \dim \langle \text{colonne di } A \rangle$

$= \dim \operatorname{Im} L_A$.

Ho provato che $rr(A) = rc(A)$

TEO: se V, W sono isomorfi $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

DIM: $\Rightarrow$) se V, W isomorfi allora $\exists F: V \to W$ isomorfismo (biettiva)

se F è biettiva allora $\dim \ker F = 0$ e $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$

quindi per il teo della dimensione $\dim V = \dim W$

$\Leftarrow$) sia $\dim V = \dim W = n$, devo costruire un isomorfismo $F: V \to W$.

Sia $B_V = \{v_1 .. v_n\}$ e $B_W = \{w_1 .. w_n\}$ allora $\exists! F: V \to W$

tc $F(v_1) = w_1 .. F(v_n) = w_n$, ne segue che $\dim \operatorname{Im} F = \dim W$

quindi $\operatorname{Im} F = W$ cioè F è suriettiva. Per teorema della

dimensione $\dim V = \dim \ker F + \dim W$ ossia $n = \dim \ker F + n$

quindi F è anche iniettiva.

Ho quindi creato un isomorfismo $F: V \to W$, dunque

V e W sono isomorfi.

Scanned with CamScanner

TEO: sia $F: V \to W$ e $w \in W$, allora $F^{-1}(w) \neq \emptyset \iff w \in \operatorname{Im} F$,
inoltre se $w \in \operatorname{Im} F$, fissando $v \in F^{-1}(w)$ si ha che ①
$F^{-1}(w) = \{ v+z \mid z \in \ker F \}$

DIM: dimostriamo solo che se $F^{-1}(w) \neq \emptyset$ e $F(v) = w \implies$ ①

- mostriamo che $\{ v+z \mid z \in \ker F \} \subseteq F^{-1}(w)$.
  sia $u = v+z$ con $z \in \ker F$.
  $F(u) = F(v+z) = F(v) + \underline{0}$, allora $u \in F^{-1}(w)$ perché $F(v) = w$
- mostriamo che $F^{-1}(w) \subseteq \{ v+z \mid z \in \ker F \}$
  sia $u \in F^{-1}(w)$, devo trovare $z \in \ker F$ tc $u = v+z$.
  Scelgo $z = u - v$, quindi $u - v \in \ker F$ cioè $F(u) - F(v) = \underline{0}$ il che è ovvio perché $F(u) = w$ e $F(v) = w$ per ipotesi.

TEO ROUCHÉ-CAPELLI: un sistema lineare $Ax = b$ di m equazioni in n incognite ha soluzione $\iff r(A) = r(A|b) = r$
Inoltre ha: I) unica soluzione se $r(A) = r(A|b) = n$
II) infinite soluzioni dipendenti da $n-r$ par. se $n > r$.

DIM: sia $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^m$.
sia $r(A) = r$ e $r(A|b) = s$.
se $r = s$ il sistema è compatibile (perché $b \in \operatorname{Im} A$).
se $r < s$ $b \notin \operatorname{Im} A$.

Scanned with CamScanner

TEO: siano A e B due matrici $n \times n$. Allora:

I) Se B è ottenuta scambiando 2 righe in $A \Rightarrow \det A = -\det B$

II) Se B ha nella riga R_i una combinazione lineare delle altre righe di A e le altre righe di B sono uguali alle altre righe di $A \Rightarrow \det A = \det B$

III) Se A è una matrice triangolare superiore (o inferiore) $\Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

DIM: queste proprietà derivano dalle 4 proprietà del determinante.

TEO: Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora $\det A = \det A^T$

NO DIM:

TEO BINET: siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, allora $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

NO DIM

TEO: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

DIM: $\Longrightarrow$) sia B l'inversa di A, allora $AB = I$ e per teorema di Binet $\det A \cdot \det B = \det I = 1$ quindi $\det A \neq 0$

$\Longleftarrow$) sia $\det A \neq 0$, considero $B = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$ e vedo che $B = A^{-1}$

TEO: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $B \in M_n(\mathbb{R})$ tc $AB = I$. Allora B è l'inversa di A.

DIM: se $AB = I$ allora $\det A \cdot \det B = 1$ quindi $\det A \neq 0$. Se $\det A \neq 0$ ho che A è invertibile; moltiplico a sinistra $AB = I$ per A^{-1} e ottengo $IB = A^{-1}I$ quindi $B = A^{-1}$.

Scanned with CamScanner

TEOREMONE: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(F)$, allora sono equivalenti:

I) F è isomorfismo

II) F è iniettiva

III) F è suriettiva

IV) $\dim \operatorname{Im} F = n$

V) $r(A) = n$

VI) le colonne di A sono l.i

VII) le righe di A sono l.i

VIII) $Ax = \underline{0}$ ha un unica soluzione

IX) $Ax = b$ ha un unica soluzione

X) A è invertibile

XI) $\det A \neq 0$

DIM: I) $\Rightarrow$ II) $\Rightarrow$ III) $\Rightarrow$ IV) $\Rightarrow$ V) ovvio

V) $\Rightarrow$ VI) $\Rightarrow$ VII) perché $rr(A) = rc(A) = r(A)$

VII) $\Rightarrow$ VIII) perché dopo aver ridotto $Ax = \underline{0}$ con Gauss ho soluzioni con $n - r(A) = 0$ parametri

VIII) $\Rightarrow$ IX) se $Ax = \underline{0}$ ha 1 soluz. anche $Ax = b$ ne ha 1.

I) $\Rightarrow$ X) sia G l'inversa di F tc $B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G) \Rightarrow F \circ G = G \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$ cioè $AB = BA = I$, dunque $B = A^{-1}$

X) $\Rightarrow$ I) se $B = A^{-1}$ e $B = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(G)$ con $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, allora $G = F^{-1}$, quindi F è invertibile (e biettiva).

XI) $\Leftrightarrow$ X) ovvio.

TEO: sia $F: V \to W$, $\mathcal{B}$ base ordinata di V e $\tilde{\mathcal{B}}$ di W. Allora esiste $A_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ tc $(F(v))_{\tilde{\mathcal{B}}} = A_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} (v)_{\mathcal{B}}$ dove $n = \dim V$ e $m = \dim W$. Inoltre la colonna C_i di $A_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}$ è data dalle coordinate di $F(v_i)$ rispetto a $\tilde{\mathcal{B}}$ con $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$:

$$A_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}} = \left((F(v_1))_{\tilde{\mathcal{B}}} \; .. \; (F(v_n))_{\tilde{\mathcal{B}}} \right)$$

NO DIM

Scanned with CamScanner

TEO: se $v \in \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{B}$ è una base ordinata di $\mathbb{R}^n$, allora
$(v)_{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \cdot v$

DIM: considero $id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sapendo che $(F(v))_{\tilde{\mathcal{B}}} = A_{\hat{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}} (F(v))_{\hat{\mathcal{B}}}$
e scegliendo $\mathcal{C}$ come $\hat{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}$ come $\tilde{\mathcal{B}}$ ho che:
$(id(v))_{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{C}\mathcal{B}} (id(v))_{\mathcal{C}}$ cioè $(v)_{\mathcal{B}} = I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} \cdot v$

TEO: sia $F: V \to V$. F è diagonalizzabile $\iff \exists \mathcal{B}_V$ costituita da autovettori di F.

DIM: $\Rightarrow$) sia F diagonalizzabile e sia $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$ base di V tc
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Mostriamo che $\mathcal{B}$ è costituita da autovettori.
Sappiamo che $(F(v_1))_{\mathcal{B}}$ è nella prima colonna:
$(F(v_1))_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, 0 .. 0)$ perché $F(v_1) = \lambda_1 v_1 + 0 v_2 + .. + 0 v_n$
quindi v_1 è autovettore. In generale v_i è autovett. con λ_i per suo autovalore. $\mathcal{B}$ allora è base di autovettori

$\Leftarrow$) sia $\mathcal{B} = \{v_1 .. v_n\}$ base di autovettori, mostriamo che F è diagonaliz.
ossia che $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale.
Sappiamo che $F(v_i) = \lambda_i v_i \ \forall i$, costruisco per colonne $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$
$= \left((F(v_1))_{\mathcal{B}} \ .. \ (F(v_n))_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$, allora A è diagonaliz $\iff F$ lo è

DIM: $\Leftarrow$) sia F diagonalizzabile, quindi $\exists \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ tc $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ è diagonale
$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} A I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ quindi A è simile ad una matrice diagon.

$\Rightarrow$) sia A diagonalizzabile, quindi $\exists P$ tc $P^{-1}AP = D$.
Consideriamo $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = (C_1 .. C_n)$ dove $C_1 .. C_n$ sono le colonne di P.
Allora $P = I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ quindi $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1} A I_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e ne segue che F è diagonalizzabile

TEO: λ è autovalore di $F = L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \iff P_A(\lambda) = 0$

NO DIM

Scanned with CamScanner

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; se $\lambda_1 .. \lambda_k$ sono autovalori distinti di F e $v_1 .. v_k$ sono i rispettivi autovettori, allora $v_1 .. v_k$ sono li

NO DIM

TEO: due matrici quadrate simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Il viceversa non è vero.

NO DIM

TEO: se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha esattamente n autovalori distinti allora F è diagonalizzabile.

DIM: siano $\lambda_1 .. \lambda_n$ gli autovalori e $v_1 .. v_n$ gli autovettori rispettivi. Allora $v_1 .. v_n$ sono l.i. e dato che sono anche autovettori allora $\exists B = \{v_1 .. v_n\}$ per cui F è diagonalizzabile.

TEO: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e λ autovalore di A, allora $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$

NO DIM

TEO: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $\lambda_1 .. \lambda_r$ i suoi autovalori distinti con molteplicità geometriche $m_1 .. m_r$.
Allora A è diagonalizzabile $\iff \sum_{i=1}^{r} m_i = n$

DIM: siano $V_{\lambda_1} .. V_{\lambda_r}$ gli autospazi associati.
Allora in V_{λ_i} posso trovare al max $m_g(\lambda_i)$ autovettori li e mettendoli insieme trovo base di $\mathbb{R}^n$, quindi F è diagonalizz.

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1 .. \lambda_k$ i suoi autovalori distinti. Allora F è diagonalizzabile $\iff \sum_{i=1}^{k} m_a(\lambda_i) = n \wedge m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i) \; \forall i$

DIM: se $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ allora devo dim che F è diagonalizz. $\iff \sum_{i=1}^{k} m_g(\lambda_i) = n$.
Ovvio per il teorema precedente.

TEO: se $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha n autovettori distinti $\to F$ è diagonalizzabile.

NO DIM

Scanned with CamScanner

TEO: siano $v_1 .. v_k \in \mathbb{R}^n$ vettori non nulli e ortogonali fra loro, $\Rightarrow v_1 .. v_k$ sono l.i.

DIM: supponiamo che $\lambda_1 v_1 + .. + \lambda_k v_k = \underline{0}$ e mostriamo che $\lambda_1 = .. = \lambda_k = 0$.

Sappiamo che $0 = \langle v_1, \underline{0} \rangle = \langle v_1, \lambda_1 v_1 + .. + \lambda_k v_k \rangle =$
$= \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle + .. + \lambda_k \langle v_1, v_k \rangle$

ma dato che v_1 è ortogonale a $v_2 .. v_k$ allora $0 = \lambda_1 \langle v_1, v_1$
e poiché $v_1 \neq \underline{0}$ allora $\lambda_1 = 0$.

Analogamente si avrà che $\lambda_i = 0$ ripetendo con $0 = \langle v_i, \underline{0} \rangle \forall i$

TEO: sia $W = \langle w_1 .. w_k \rangle$, allora $W^\perp = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w_i \rangle = 0 \ \forall i = 1 .. k \}$

DIM: è ovvio che $W^\perp \subseteq \text{span}\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w_i \rangle = 0 \ \forall i \}$, dimostriamo invece che $\text{span}\{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w_i \rangle = 0 \ \forall i \} \subseteq W^\perp$

?

mostriamo che $\langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W$.

Sia $u \in W$, quindi $u = \lambda_1 w_1 + .. + \lambda_k w_k$

$\langle v, u \rangle = \langle v, \lambda_1 w_1 + .. + \lambda_k w_k \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + .. + \lambda_k \langle v, w_k \rangle =$
$= 0 + .. + 0 = 0$

TEO: sia W sottospazio di $\mathbb{R}^n$, allora $\dim W^\perp = n - \dim W$

DIM: sia $\dim W = r$ e $\mathcal{B}_W = \{ w_1 .. w_r \}$ base di W.

Sappiamo che $x \in W^\perp \iff \langle x, w_i \rangle = 0 \ \forall i = 1 .. r \iff x$ è soluzione del sistema omogeneo $Ax = 0$ dove le righe di A sono i vettori di $\mathcal{B}_W$.

Le soluzioni dipendono da $n - r(A)$ parametri ma dato che $\{ w_1 .. w_r \}$ è una base $r(A) = r = \dim W$. Quindi $\dim W^\perp = n - \dim W$.

TEO: sia W sottospazio di $\mathbb{R}^n \Rightarrow W \cap W^\perp = \{ \underline{0} \}$.

DIM: sia $x \in W \cap W^\perp$ quindi $x \in W$ e $\langle x, w \rangle = 0 \ \forall w \in W$, in particolare anche $\langle x, x \rangle = 0$ e ciò è possibile solo per $x = \underline{0}$.

Scanned with CamScanner

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $A = M_c^c(F)$, allora A è ortogonale $\iff$ F è ortogonale

NO DIM

TEO: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora sono equivalenti i seguenti:

I) $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$

II) $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$

III) $A^T = A^{-1}$

IV) le colonne di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

DIM: I) $\Rightarrow$ II) ovvio scegliendo $y = x$

I) $\Rightarrow$ IV) sia $L_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $A = (L_A(e_1) \dots L_A(e_n))$.

sappiamo che $\{e_1 \dots e_n\}$ è base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Per ipotesi $\langle e_i, e_j \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle L(e_i), L(e_j) \rangle = \delta_{ij}$

perche $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ e quindi le colonne di A sono $B_{\mathbb{R}^n}$

III) $\Rightarrow$ IV) sia $A = (C_1 \dots C_n)$ e quindi $A^T = (C_1 \dots C_n)^T$. Suppongo che $A^{-1} = A^T$ quindi $A^T A = A^{-1} A = I$

$(C_1 \dots C_n)(C_1 \dots C_n)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ne segue che $\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$

dunque le colonne di A sono ortonormali

TEO: se A è ortogonale $\Rightarrow \det A = \pm 1$

DIM: A ortogonale $\Rightarrow A^T = A^{-1}$, ma so anche che $\det A = \det A^T$.

e che $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ quindi $\det A = \frac{1}{\det A}$ cioè

$\det A = \pm 1$

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $A = M_c^c(F)$, allora A è simmetrica $\iff$ F è simmetrica ($\langle F(u), v \rangle = \langle F(v), u \rangle$)

NO DIM

Scanned with CamScanner

TEO SPETTRALE: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo simmetrico.
Allora $\exists B_{\mathbb{R}^n}$ base ortonormale costituita da autovettori di F.

NO DIM

TEO: sia $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo simmetrico. Allora:

I) F è sempre diagonalizzabile

II) se λ_i, λ_j sono autovalori distinti di $F \Rightarrow V_{\lambda_i}$ e V_{λ_j} sono ortogonali tra loro.

III) se $A = M_C^C(F) \Rightarrow \exists P$ ortogonale tc $P^T A P = D$ (cioè A è simile ad una matrice ortogonale.

DIM: I) ovvio

II) sappiamo che c'è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ fatta da autovettori.
Siano $\lambda_1 .. \lambda_k$ autovalori di F e siano $v_1 .. v_{n_1}$ base di V_{λ_1}, $w_1 .. w_{n_2}$ base di V_{λ_2} .. $z_1 .. z_{n_k}$ base di V_{λ_k} ove $\{v_1 .. z_{n_k}\}$ è una base ortonormale.
siccome gli autovettori sono ortogonali tra loro allora lo saranno anche gli autospazi.

III) sia $B = \{v_1 .. v_n\}$ base ortonormale di autovettori, sappiamo che $I_{BC}^{-1} A I_{BC} = D$.
Osserviamo che se $P = I_{BC}$ è matrice ortogonale $P^T = P^{-1}$
quindi $P^T A P = D$

Scanned with CamScanner

TEO: dati $n, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ allora esistono unici quoziente q e resto r tc $n = qb + r$ con $0 \leq r < b$

NO DIM

TEO BEZOUT: siano $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e sia $d = mcd(a,b)$ allora esistono u, v non unici tc $d = au + bv$

NO DIM

TEO: $p \in \mathbb{N}$ è primo se $p > 1$ e $p | ab \Rightarrow p | a \vee p | b$

NO DIM

TEO: $\mathbb{Z}_n = \{[0]_n .. [n-1]_n\}$ e $\# \mathbb{Z}_n = n$

DIM: per definizione $\mathbb{Z}_n = \{[a]_n \mid a \in \mathbb{Z}\}$

sia $a \in \mathbb{Z}$, allora $a = nq + r$ quindi $n | a - r$ ossia $a \equiv_n r$

quindi $[a]_n = [r]_n$

TEO: $[a]_n$ è invertibile $\Leftrightarrow mcd(a,n) = 1$

DIM: $\Rightarrow$) dall'ipotesi $\exists b \in \mathbb{Z}$ tc $[a]_n [b]_n = [1]_n$ ossia $[ab]_n = [1]_n$ e passando alle congruenze $ab \equiv_n 1$ ossia $n | ab - 1$. Sia $d = mcd(a,n)$ che implica $d | ab$ (perché $d | a$) e $d | n$

Se $d | n$ e $n | ab - 1$ ho che $d | ab - 1$.

Ne segue $d | ab - 1 - ab$ quindi $d = 1$

$\Leftarrow$) Se $mcd(a,n) = 1$ posso usare Bezout: $1 = au + nv$ e passando alle classi resto $[1]_n = [a]_n [u]_n + [n]_n [v]_n$ e poiché $[n]_n = [0]_n$ ho che $[1]_n = [a]_n [u]_n$

quindi $[u]_n = [a]_n^{-1}$

TEO: se n è primo ogni elemento non nullo è invertibile e quindi $\mathbb{Z}_n$ è un campo.

NO DIM

Scanned with CamScanner

TEO: se $mcd(a,n)=1$ allora $[a]_n x = [b]_n$ ha una sola soluzione $x = [b]_n [a]_n^{-1}$ dove x è una classe

NO DIM

TEO: siano $a, n \in \mathbb{Z}$ e sia $d = mcd(a,n)$, allora:

I) $[a]_n x = [b]_n$ ha soluzioni se $d | b$

II) in tal caso l'equazione ha $[d]_n$ soluzioni

NO DIM

Scanned with CamScanner