

Algebra e Geometria
Cdl in Informatica
Esempi di domande per la prova di teoria

- (1) Definizione di vettori linearmente indipendenti. Se possibile, fornire esempi dei seguenti vettori, o motivare perchè non esistono:
 - 3 vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}_3[x]$;
 - 3 vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}_3[x]$;
 - 5 vettori linearmente dipendenti di $\mathbb{R}_3[x]$ che non generano $\mathbb{R}_3[x]$;
 - 4 vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}_3[x]$ che non generano $\mathbb{R}_3[x]$.
- (2) Definizione di vettori linearmente indipendenti e di combinazione lineare. Enunciare e dimostrare il seguente teorema: I vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ di uno spazio vettoriale V sono linearmente dipendenti se e solo se...
- (3) Definizione di $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Dimostrare che $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio.
- (4) Definizione di base di un sottospazio. Esempio di una base di $\mathbb{R}_3[x]$ diversa dalla base canonica. Dimostrare che uno spazio vettoriale finitamente generato ha sempre una base.
- (5) Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.
- (6) Coordinate di un vettore rispetto ad una base ordinata: definizione, esistenza e unicità .
- (7) Sia $U = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$. Perché l'uso dell'algoritmo di Gauss in modo diretto permette di trovare una base di U ?
- (8) Siano $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Perché l'uso dell'algoritmo di Gauss in modo diretto permette stabilire se $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ generano \mathbb{R}^n ?
- (9) Equazioni cartesiane di un sottospazio W di \mathbb{R}^n e motivazione teorica del loro calcolo a partire da un insieme di generatori di W .
- (10) Definizione di applicazione lineare e di nucleo. Dimostrare che una applicazione lineare è iniettiva se e solo se il suo nucleo contiene solo il vettore nullo.
- (11) Definizione di applicazione lineare e immagine. Completare e dimostrare il seguente enunciato: Se $F : V \rightarrow W$ è un'applicazione lineare e $\mathcal{B} = \{\dots\}$ è una base di ..., allora $\text{Im } F = \langle \dots \rangle$.
- (12) Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, definire l'applicazione lineare L_A ad essa associata e dare la motivazione teorica del calcolo del suo nucleo.
- (13) Data una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, definire l'applicazione lineare L_A ad essa associata e dare la motivazione teorica del calcolo della sua immagine.
- (14) Dimostrare il seguente teorema: Siano V, W spazi vettoriali, sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V e siano $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n \in W$. Allora esiste una ed una sola applicazione lineare $F : V \rightarrow W$ tale che $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \dots, F(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.
- (15) Enunciare e dimostrare il Teorema della Dimensione.
- (16) Definire il rango righe e il rango colonne di una matrice e dimostrare che sono uguali.
- (17) Definizione di isomorfismo tra spazi vettoriali e di spazi vettoriali isomorfi. Enunciare e possibilmente dimostrare il teorema che caratterizza gli spazi vettoriali isomorfi.
- (18) Controimmagine (o preimmagine) di un vettore tramite una applicazione lineare: definizione e sua caratterizzazione.
- (19) Enunciare il teorema di Rouché-Capelli.
- (20) Determinante di una matrice: Definizione e proprietà.
- (21) Definizione di matrice quadrata invertibile. Se una matrice quadrata è invertibile allora il suo determinante è diverso da zero.
- (22) Definizione di matrice quadrata invertibile. Se A, B sono matrici quadrate tali che $AB = I$, allora B è l'inversa di A .
- (23) Enunciare il seguente teorema e dimostrare qualche implicazione ("teoremone"). Sia $F = L_A$ un endomorfismo di \mathbb{R}^n : sono equivalenti:(a) F è iniettiva, (b)....

- (24) Matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a due basi fissate \mathcal{B} del dominio e \mathcal{B}' del codominio: come si costruisce e perché permette di determinare l'immagine di un qualsiasi vettore. La matrice $I_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)$ associata all'identità di \mathbb{R}^n .
- (25) Matrice associata ad una applicazione lineare rispetto a due basi fissate \mathcal{B} del dominio e \mathcal{B}' del codominio: come si costruisce e perché permette di determinare l'immagine di un qualsiasi vettore. La matrice $I_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(id)$ associata all'identità di \mathbb{R}^n .
- (26) Dimostrare che $I_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = I_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$, cioè che $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(id) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id)^{-1}$.
- (27) Definizione di endomorfismo diagonalizzabile e di matrice diagonalizzabile. Sia F un endomorfismo di \mathbb{R}^n e sia A la matrice associata ad F rispetto alla base canonica. Dimostrare che F è diagonalizzabile se e solo se A è diagonalizzabile.
- (28) Definizione di endomorfismo diagonalizzabile e di autovettore di un endomorfismo. Dimostrare che se F è un endomorfismo di \mathbb{R}^n ed esiste una base di \mathbb{R}^n costituita da autovettori di F allora F è diagonalizzabile.
- (29) Definizione di endomorfismo diagonalizzabile e di autovettore di un endomorfismo. Dimostrare che se un endomorfismo F di \mathbb{R}^n è diagonalizzabile allora esiste una base di \mathbb{R}^n costituita da autovettori di F .
- (30) Il polinomio caratteristico di una matrice: definizione e sue proprietà .
- (31) Relazione di similitudini tra matrici. Matrici simili hanno lo stesso determinante? E lo stesso polinomio caratteristico? Motivare con la dimostrazione (se fatta a lezione).
- (32) Esempio di due matrici che hanno lo stesso polinomio caratteristico ma non sono simili (spiegando il motivo).
- (33) Definizione di autovalore di un endomorfismo, molteplicità algebrica e geometrica. Proprietà equivalenti al fatto che un endomorfismo o una matrice siano diagonalizzabili (solo enunciato).
- (34) Definizione di autovalore di un endomorfismo. Se un endomorfismo ha 0 come autovalore, cosa possiamo dedurre e perché?
- (35) Definizione di prodotto scalare euclideo in \mathbb{R}^n e sue proprietà .
- (36) Definizione di sottospazio ortogonale di un sottospazio dato W . Enunciare e dimostrare il seguente teorema: Se W è un sottospazio di \mathbb{R}^n di dimensione k allora W^\perp ha dimensione... e $W \cap W^\perp = \dots$
- (37) Proiezione ortogonale di un vettore su di un sottospazio di \mathbb{R}^n .
- (38) Proprietà equivalenti affinché una matrice quadrata sia ortogonale.
- (39) Enunciare il teorema spettrale.
- (40) Definire le classi resto modulo n , a partire da un'opportuna relazione di equivalenza in \mathbb{Z} . I particolare caratterizzare $[a]_n = \{\dots\}$.
- (41) Definire \mathbb{Z}_n e caratterizzarlo elencandone gli elementi.
- (42) Enunciare e dimostrare il seguente teorema: La classe $[a]_n$ è invertibile in \mathbb{Z}_n se e solo se...