Matricola..

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
20 maggio 2025
Versione A

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - kx_2 + x_3 + kx_4, 2x_1 + 4x_2 - kx_3 - 4x_4, x_1 + x_2 + 4x_3 - (k+3)x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.
b) Scelto un valore a di k tale che F_a sia suriettiva, si determinino una base del nucleo e una base dell'immagine di F_a.
c) Si stabilisca per quale valore di k si ha che il vettore $(1, 0, 1, -1)$ appartiene alla controimmagine $F_k^{-1}(-2, 2, 12)$.
d) Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata ad F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio.

Esercizio 2. (10 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si verifichi che T ha un autospazio W di dimensione 2 e se ne determini una base $\mathcal{B}$.
b) Si stabilisca per quali valori di a si ha che $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T. Esistono valori di a per cui $\mathbf{v} \in W$? Se si, per tali valori determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
c) Si determinino, se possibile, due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^T A P_1 = P_2^T A P_2 = D$, ove D è una matrice diagonale.

Esercizio 3. (8 punti) Sia W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca per quale valori a di k la dimensione di W_a è 2.
b) Posto $k = a$, si determini una base ortonormale di $W_a^{\perp}$;
c) Posto $k = a$, si determini la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (1, 4, -1, 0)$ su W.

Esercizio 4 (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza: $47x \equiv_{116} -2$.

Matricola..

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
20 maggio 2025
Versione B

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - kx_2 + x_3 + kx_4, 3x_1 + 9x_2 - kx_3 - 9x_4, x_1 + x_2 + 4x_3 - (k+4)x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva.
b) Scelto un valore a di k tale che F_a sia suriettiva, si determinino una base del nucleo e una base dell'immagine di F_a.
c) Si stabilisca per quale valore di k si ha che il vettore $(1, 1, 0, -1)$ appartiene alla controimmagine $F_k^{-1}(9, 21, 2)$.
d) Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata ad F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio.

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si verifichi che T ha un autospazio W di dimensione 2 e se ne determini una base $\mathcal{B}$.
b) Si stabilisca per quali valori di a si ha che $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T. Esistono valori di a per cui $\mathbf{v} \in W$? Se si, per tali valori determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
c) Si determinino, se possibile, due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^T A P_1 = P_2^T A P_2 = D$, ove D è una matrice diagonale.

Esercizio 3.(8 punti)
Sia W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca per quale valori a di k la dimensione di W_a è 2.
b) Posto $k = a$, si determini una base ortonormale di $W_a^{\perp}$;
c) Posto $k = a$, si determini la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (0, 3, 0, 1)$ su W.

Esercizio 4 (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza: $52x \equiv_{119} 3$.

Matricola...

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
20 maggio 2025
Versione A con soluzioni

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - kx_2 + x_3 + kx_4, 2x_1 + 4x_2 - kx_3 - 4x_4, x_1 + x_2 + 4x_3 - (k+3)x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva. $[k \neq -2]$
b) Scelto un valore a di k tale che F_a sia suriettiva, si determinino una base del nucleo e una base dell'immagine di F_a.
c) Si stabilisca per quale valore di k si ha che il vettore $(1, 0, 1, -1)$ appartiene alla controimmagine $F_k^{-1}(-2, 2, 12)$. $[k = 4]$
d) Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata ad F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio.
$$\left[I^{-1}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'} A_0 I_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

Esercizio 2. (10 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si verifichi che T ha un autospazio W di dimensione 2 e se ne determini una base $\mathcal{B}$. $[\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (-2, 1, 0)\}]$
b) Si stabilisca per quali valori di a si ha che $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T. Esistono valori di a per cui $\mathbf{v} \in W$? Se si, per tali valori determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. $[a \in \{-1, 2\}]$
c) Si determinino, se possibile, due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^T A P_1 = P_2^T A P_2 = D$, ove D è una matrice diagonale.

Esercizio 3. (8 punti) Sia W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + kx_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca per quale valori a di k la dimensione di W_a è 2. $[k = 2]$
b) Posto $k = a$, si determini una base ortonormale di $W_a^\perp$;
$[\{(0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)\}]$
c) Posto $k = a$, si determini la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (1, 4, -1, 0)$ su W. $[(0, 1, -2, 1)]$

Esercizio 4 (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza: $47x \equiv_{116} -2$. $[x = 74 + 116k, k \in \mathbb{Z}]$

Matricola..

Algebra e Geometria - Corso di Laurea in Informatica
docente: prof.ssa Marta Morigi
20 maggio 2025
Versione B con soluzioni

Nota: Le risposte vanno motivate. I calcoli e le motivazioni delle risposte sono parte integrante dello svolgimento dell'esercizio.

Esercizio 1. (9 punti)
Sia $F_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$F_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - kx_2 + x_3 + kx_4, 3x_1 + 9x_2 - kx_3 - 9x_4, x_1 + x_2 + 4x_3 - (k+4)x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di k si ha che F_k è suriettiva. $[k \neq -3]$

b) Scelto un valore a di k tale che F_a sia suriettiva, si determinino una base del nucleo e una base dell'immagine di F_a.

c) Si stabilisca per quale valore di k si ha che il vettore $(1, 1, 0, -1)$ appartiene alla controimmagine $F_k^{-1}(9, 21, 2)$. $[k = -4]$

d) Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^4$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\}$ un'altra base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Posto $k = 0$, si determini la matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ associata ad F_0 rispetto alla base $\mathcal{B}$ nel dominio e alla base $\mathcal{B}'$ nel codominio.

$$\left[I_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}^{-1} A_0 I_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -3 & 2 \\ -5 & -3 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

Esercizio 2. (9 punti)
Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = -5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 \qquad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$$

e sia A la matrice associata a T rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

a) Si verifichi che T ha un autospazio W di dimensione 2 e se ne determini una base $\mathcal{B}$. $[\mathcal{B} = \{(-1, 0, 1), (2, 1, 0)\}]$

b) Si stabilisca per quali valori di a si ha che $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ è un autovettore di T. Esistono valori di a per cui $\mathbf{v} \in W$? Se si, per tali valori determinare le coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$. $[a \in \{1, -2\}]$

c) Si determinino, se possibile, due matrici distinte P_1 e P_2 tali che $P_1^T A P_1 = P_2^T A P_2 = D$, ove D è una matrice diagonale.

Esercizio 3.(8 punti)
Sia W_k il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca per quale valori a di k la dimensione di W_a è 2. $[k = 3]$

b) Posto $k = a$, si determini una base ortonormale di $W_a^{\perp}$;
$[\{(0, -1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), (1/2, 1/2, -1/2, 1/2)\}]$

c) Posto $k = a$, si determini la proiezione ortogonale del vettore $\mathbf{v} = (0, 3, 0, 1)$ su W. $[(-1, 1, 1, 1)]$

Esercizio 4 (4 punti)
Si determinino tutte le soluzioni intere della congruenza: $52x \equiv_{119} 3$. $[x = -48 + 119k, k \in \mathbb{Z}]$