Lezioni 3 e 4

Integrazione per parti: Applicazione a esempi del tipo $\int x^k e^x$, $\int x^k \sin x$, $\int x^k \ln x$

Variante del teorema fondamentale del calcolo

Proposizione: sia $h : I \to J$ derivabile e $f : J \to \mathbb{R}$ continua ($I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli aperti). Definiamo $F : I \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_c^{h(x)} f(t)\,dt.$$

Allora F è derivabile in ogni $x \in I$ e vale $F'(x) = f(h(x))\,h'(x)$.

Dimostrazione: scrivo $I_c(z) = \int_c^z f(t)\,dt$ $\forall z \in J$. Allora si scrive $F = I_c \circ h$.

Dalla formula per la derivata di funzioni composte otteniamo $F'(x) = I_c'(h(x))\,h'(x) = f(h(x))\,h'(x)$ #

Esercizi: derivate ~~di~~ $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^c \sin(t^2)\,dt$

$$\frac{d}{dx} \int_{e^{2x}}^{x^2} \sqrt{1+|t|+\sin t}\;dt \qquad \text{etc} \ldots$$

Formule per il cambio variabile

Teorema: ~~Sia h: I~~ I, J intervalli aperti.
$h: I \to J$ con derivata h' continua su I; $f: J \to \mathbb{R}$
continua. Allora $\forall\, \alpha, \beta \in I$ vale

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))\,h'(t)\,dt$$

Dimostrazione: siano $F: I \to \mathbb{R}$, $G: I \to \mathbb{R}$,

$$F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)\,dx \quad , \quad G(z) = \int_{\alpha}^{z} f(h(t))\,h'(t)\,dt$$

le funzioni integrande sono continue, h' è continua.
Dunque F e G sono derivabili in I.
Vale $F'(z) = f(h(z))\,h'(z)$ e $G'(z) = f(h(z))\,h'(z)$ $\forall z \in I$.
Dunque $F - G$ è costante su I.
Poiché $F(\alpha) = 0$, $G(\alpha) = 0$, si conclude che
$F(z) = G(z)$ $\forall z \in I$ #

Esempi svolti $\int_2^3 e^{\sqrt{x}}$, $\int_a^b \sin(x^{1/3})\,dx$ $(a, b > 0)$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ (area del cerchio)

Integrali generalizzati

Definizione $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continua. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se

$\exists$ finito $\lim_{z \to +\infty} \int_a^z f(x)\, dx \quad \left(=: \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \right)$

Esempi svolti $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ con $p = \frac{1}{2}, 2$

Definizione analoga per $f:]-\infty, b] \to \mathbb{R}$

Def: $f:]a, b] \to \mathbb{R}$, continua. Si dice che f è integrabile in S.G. su $]a, b]$ se $\exists$ finito

$$\lim_{z \to a+} \int_z^b f(x)\, dx \quad \left(=: \int_a^b f(x)\, dx \right)$$

ESEMPI VISTI:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p \in \mathbb{R}, \qquad \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}$$