Spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \;/\; x_1, x_2, x_n \in \mathbb{R} \}$$

(∘) Somma tra vettori $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

(∘) Prodotto con scalare: dato $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
poniamo $\lambda x := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$

Def (prodotto scalare euclideo) Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$,
poniamo $\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

PROPRIETÀ:

(1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (simmetria)

(2) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ e
$\langle z, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle z, x \rangle + \mu \langle z, y \rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (bilinearità)

(3) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
Inoltre vale $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Def (Vettori ortogonali) x e $y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se $\langle x, y \rangle = 0$

ES: $x = (\cos\theta, \sin\theta)$, $y = \left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\sin\theta, \cos\theta)$
con $\theta \in \mathbb{R}$

~~Def~~

Def (Norma euclidea)
Dato $x \in \mathbb{R}^n$, poniamo $\underbrace{|x|}_{\text{(norma di } x)} := \sqrt{\langle x, x \rangle} \in [0, +\infty[$ (anche $\|x\|$)

(∘) Interpretazione della norma come lunghezza (con il Teorema di Pitagora)

Proprietà della norma

(1) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ x \in \mathbb{R}^n$

(2) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$; inoltre $|x| = 0 \iff x = 0$

(3) $|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (disuguaglianza triangolare, con relativa interpretazione)

NORMALIZZATO DI UN VETTORE

Def: dato $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, il normalizzato di x è il vettore $\frac{x}{|x|}$, l'unico ~~m~~ multiplo positivo di x che ha norma 1

Scrittura del prodotto scalare in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Dato $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, scriviamo

$$x = |x| \cdot \frac{x}{|x|} = r(\cos\theta, \sin\theta), \quad \text{dove } r = |x|$$

e $\theta \in \mathbb{R}$ è opportuno. Presi $x = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ e $y = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$, risulta

$$\langle x, y \rangle = r\rho\cos(\varphi - \theta) = |x| \cdot |y| \cos(\varphi - \theta)$$

Come conseguenza otteniamo la

~~Cau~~ Disuguaglianza di Cauchy – Schwarz:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ vale $|\langle x, y \rangle| \overset{(\cdot)}{\leq} |x| \cdot |y|$

Inoltre vale l'uguaglianza in $(\cdot)$ se e solo se x e y sono dipendenti

---

Formula del "quadrato di un binomio"

Dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$

(verifica svolta usando le proprietà (1), (2) e (3) del prodotto scalare.

Dalle formule sopra segue che, se $x \perp y$ in $\mathbb{R}^n$, allora vale

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 \qquad \text{(Teorema di Pitagora)}$$

Disuguaglianza triangolare. Ancora dalla formula del "quadrato di un binomio" si può ottenere la dim. della disuguaglianza triangolare

$$|x+y| \leq |x| + |y| \qquad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

Infatti: $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x,y\rangle$

$\leq$ (per Cauchy-Schwartz) $\leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x|\cdot|y|$

$= (|x|+|y|)^2 \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n.$

Def: (distanza tra $x,y \in \mathbb{R}^n$) È il numero $|x-y|$.

<u>Intorni sferici</u>. Dato $x \in \mathbb{R}^n$ (centro) e $r>0$ (raggio), poniamo

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \,/\, |y-x| < r\}$$

(Palla o intorno sferico con centro x e raggio $r>0$)

Def (insieme limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice limitato se $\exists\, R>0$ tale che $A \subseteq B(0,R)$

Def (insieme aperto) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice aperto se $\forall\, x \in A$ $\exists\, r>0$ tale che $B(x,r) \subseteq A$

<u>ESEMPI</u>: Gli intervalli $]a,b[$, i rettangoli $A = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ con I, J aperti di $\mathbb{R}$.

Successioni in $\mathbb{R}^n$.

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^n$. Scriviamo

$x_k = (x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Def $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^n$; $x \in \mathbb{R}^n$

Si dice $x_k \to x$ per $k \to +\infty$ se vale

$$\lim_{k\to+\infty} x_k^j = x^j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Equivalentemente, se vale $\lim_{k\to+\infty} |x_k - x| = 0$)

Funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$. Data $f : \underset{\text{Dominio}}{A} \to \underset{\text{Codominio}}{B}$,

il grafico di f è

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \,/\, x \in A\} \subseteq A \times B$$

Def: $f : A \to B$ (con $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^q$).

f si dice continua in $\bar{x} \in A$ se vale quanto segue:

$\forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, (x_k) successione in A, $x_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \bar{x}$

$$\Rightarrow f(x_k) \longrightarrow f(\bar{x}) \text{ per } k \to +\infty$$

Si dimostra che la definizione di continuità "per successioni" appena data è equivalente alla seguente: $f : A \to B$ è continua in $\bar{x} \in A$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

$$\forall x \in A \cap B(\bar{x}, \delta)$$