Grafici di funzioni radiali - esempi

14 ~~15~~/3/22

Derivate parziali $\boxed{\text{LEZIONI } 7-8}$

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$

Poniamo $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$

e $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}, \bar{y}+h) - f(\bar{x}, \bar{y})}{h}$

Se i due limiti esistono (finiti), diciamo che f è derivabile parzialmente in $(\bar{x}, \bar{y})$.

Poniamo $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\partial_x f(\bar{x}, \bar{y}),\ \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}) \right)$
~~(gradiente di f~~ (gradiente di f)

Esempi di calcolo di derivate parziali (svolti in classe)

Più in generale, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in A$ e $j \in \{1, \dots, n\}$,

poniamo $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h e_j) - f(\bar{x})}{h}$

(anche $\partial_j f(\bar{x})$). Derivata parziale rispetto a x_j.

Derivabilità e continuità

Ci domandiamo se l'esistenza delle derivate parziali implichi la continuità. La risposta è negativa grazie al seguente esempio

ES $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(1) $\exists\ \partial_x f(0,0)$, $\partial_y f(0,0)$

(2) f è discontinua in $(0,0)$

Verifica di (1).

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h\cdot 0}{h^2+0^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Analogamente $\partial_y f(0,0) = 0$.

Verifica di (2). Usiamo la definizione "per successioni": troviamo, scegliendo $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} (0,0)$,

$$f(x_n,y_n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} \underset{\forall n \in \mathbb{N}}{=} \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{\underline{\frac{1}{2} \neq 0}}$$

Dunque f non è continua in $(0,0)$.

Differenziabilità.

Ricordiamo che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\bar{x}$ con derivata $f'(\bar{x})$ se e solo se

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$$

dove il resto $o(h)$ soddisfa $\lim_{h\to 0} \left|\frac{o(h)}{h}\right| = 0$

Equivalentemente
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\left|\frac{o(h)}{h}\right| < \varepsilon \ \forall h \in]-\delta, \delta[$.

Definizione di "o piccolo" in $\mathbb{R}^2$.

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme aperto contenente $(0,0)$, sia $g: A \to \mathbb{R}$ e sia $p \geq 0$. Si scrive
$g(h,k) = o(\|(h,k)\|^p)$ ~~se vale~~ per $(h,k) \to (0,0)$ se vale
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $\left|\frac{g(h,k)}{\|(h,k)\|^p}\right| < \varepsilon$ ~~$\forall (h,k) \in A \cap B(0,0)$~~
$\forall (h,k) \in A \cap B((0,0), \delta)$

ESEMPI: $g(h,k) = hk = o(|(h,k)|)$ per $(h,k) \to (0,0)$
$g(h,k) = \sqrt{|h|^{1/2}} = o(|(h,k)|^0) = o(1)$
$g(h,k) = h^2k + k^3 = o(|(h,k)|^2)$ per $(h,k) \to (0,0)$

Def (funzione differenziabile) (A aperto) (16/3/22)
$A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$, $(\bar{x}\,\bar{y}) \in A$.
Si dice che f è differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y})$ se
(1) $\exists\ \partial_x f(\bar{x}, \bar{y})\ ,\ \partial_y f(\bar{x}, \bar{y})\ \in \mathbb{R}$
(2) Per ogni (h,k) tale che $(\bar{x}, \bar{y}) + (h,k) \in A$ vale lo sviluppo
$$f((\bar{x}\,\bar{y}) + (h\,k)) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h,k) \rangle + o(|(h,k)|)$$
per $(h,k) \to (0,0)$

Formula di Taylor

OSS: f differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y}) \in A \Longrightarrow$ f continua in $(\bar{x}, \bar{y})$. Basta osservare che $\forall\ (h_n, k_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} (0,0)$ risulta
$$f((\bar{x}\,\bar{y}) + (h_n, k_n)) - f(\bar{x}, \bar{y}) = \underbrace{\langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (h_n, k_n) \rangle}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0} + \underbrace{o(|(h_n, k_n)|)}_{\xrightarrow{n \to +\infty} 0}$$

Nelle coordinate $(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = (x, y) \in A$ si scrive
$$f(x\,y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle + o(|(x - \bar{x}, y - \bar{y})|)$$
per $(x,y) \to (\bar{x}, \bar{y})$

Da questa formula emerge

$$T_1(x,y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x - \bar{x}, y - \bar{y}) \rangle$$
T_1 = Polinomio di Taylor del primo ordine con punto iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$

Infine $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = T_1(x,y)\}$ è il piano tangente al grafico di f in $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$.

~~Teoria~~

Teorema (sulla differenziabilità) - Se f è C^1 su $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto, allora $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in A$ f è differenziabile.

Lemma preliminare. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è C^1 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in A$, $\forall h,k \in \mathbb{R}$ tali che $(\bar{x}+h, \bar{y})$, $(\bar{x}, \bar{y}+k) \in A$, ~~ci~~ esistono $\theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ tali che

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y}) \overset{(1)}{=} \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y}) \quad \text{e}$$

$$f(\bar{x}, \bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) \overset{(2)}{=} \partial_y f(\bar{x}, \bar{y}+\theta_2 k)$$

Dim di (1). Per semplicità $A = \mathbb{R}^2$.
Considero la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t, \bar{y})$
Si verifica che g è derivabile e vale

$$g(t) = \partial_x f(t, h) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ora uso Lagrange sull'intervallo di estremi $\bar{x}$ e $\bar{x}+h$ per la funzione g. $\Longrightarrow \exists \theta_1 \in]0,1[$ tale che $g(\bar{x}+h) - g(\bar{x}) = g'(\bar{x}+\theta_1 h)\, h$
Trascrivendo in termini di f, si trova
$f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y}) = \partial_x f(\bar{x}+\theta_1 h, \bar{y})\, h$, come richiesto. Dim di (2): è analoga

---

Dim. (del teorema sulla differenziabilità)
Per semplicità. $A = \mathbb{R}^2$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ classe C^1 e $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathbb{R}^2$. Per $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ vale

$$f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x},\bar{y}) =$$

$$= [f(\bar{x}+h, \bar{y}+k) - f(\bar{x}+h, \bar{y})] + [f(\bar{x}+h, \bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})]$$

$$=: (1) + (2)$$

Grazie al lemma precedente $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in]0,1[$ tali che

$$\begin{cases} (1) = \partial_y f(\bar{x}+h, \bar{y}+\theta_1 k)\, k \\ (2) = \partial_x f(\bar{x}+\theta_2 h, \bar{y})\, h \end{cases}$$

Per concludere basta mostrare che

$$(1) = \partial_y f(\bar{x}\bar{y})\, k + o(|(h,k)|)$$

$$(2) = \partial_x f(\bar{x},\bar{y})\, h + o(|(h,k)|) \qquad \text{per } (h,k) \to (0,0)$$

In altri termini, dobbiamo vedere che (analizziamo (2), ad esempio)

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che

$$(*) = \frac{|[\partial_x f(\bar{x}+\theta_2 h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x},\bar{y})]\, h|}{|(h,k)|} < \varepsilon$$

$\forall\, (h,k) \neq (0,0)$
$|(h,k)| < \delta$

Siccome $\partial_x f$ è continua, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ tale che

$$|\partial_x f(u,v) - \partial_x f(\bar{x},\bar{y})| < \varepsilon \quad \forall\, (u,v) \in B((\bar{x},\bar{y}),\delta)$$

Con questa scelta di δ, ~~abbi~~ usando $\left|\frac{h}{|(h,k)|}\right| \leq 1$, abbiamo

$$(*) \leq |\partial_x f(\bar{x}+\theta_2 h, \bar{y}) - \partial_x f(\bar{x},\bar{y})| < \varepsilon,$$

perché $(\bar{x}+\theta_2 h, \bar{y}) \in B((\bar{x},\bar{y}),\delta)$
$\forall\, \theta_2 \in]0,1[,\ \forall\, (h,k) \in B((0,0),\delta)$

L'analisi del termine (1) si svolge in modo analogo.