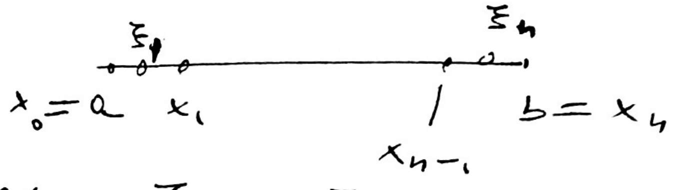
Somme di Riemann

Dato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, fissato $n \in \mathbb{N}$

poniamo $h = \dfrac{b-a}{n}$ e

$x_0 = a$, $x_1 = a+h$, ... $x_2 = a+2h$,

... $x_{n-1} = a+(n-1)h$, $x_n = a+nh = b$



$\forall\, k \in \{1, \dots, n\}$ fissiamo $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$

Sia f continua su $[a,b]$. Poniamo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, h = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, \frac{b-a}{n}$$

S_n = somma di Riemann n-esima.

Nota: S_n dipende dalla scelta di $\xi_1, \dots, \xi_n$, che è arbitraria.

<u>OSS 1</u> $a = b \implies S_n = 0 \;\; \forall n$

<u>OSS 2</u> $f(x) = c \;\; \forall x \in [a,b] \implies S_n = c(b-a)$

Dunque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è costante, ~~nei casi~~ in questi casi.

Teorema f continua su $[a,b]$. Allora $\exists$ finito $\lim_{n \to +\infty} S_n$. Tale limite non dipende dalla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$ fatta nella costruzione sopra

Si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f$$

e si dice che f è integrabile.

~~OSS~~ Dalle OSS 1 e 2 sopra si deduce:

OSS 3 $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a) \qquad \text{(integrale di } f \text{ costante)}$$

OSS 4 Esistono funzioni discontinue per cui

$\lim_{n\to\infty} S_n$ non esiste, oppure dipende dalla scelta dei punti $\xi_1, \dots, \xi_n$ fatta ad ogni passo.

OSS 5 Se f ha un numero finito di punti di discontinuità (con salto finito), allora f è integrabile.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

(1) Linearità: f, g continue su $[a,b]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Allora $\lambda f + \mu g$ è integrabile e vale

$$\int_a^b [\lambda f + \mu g] = \lambda \int f + \mu \int g$$

(2) Additività: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabile. Allora $\forall\, a, b, c \in \mathbb{R}$ vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

[Convenzione: $\displaystyle\int_a^b f = -\int_b^a f \quad \forall\, a, b$]

(3) (Monotonia) f, g continue su $[a b]$.

Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx \qquad (\text{NB: } \underline{a<b})$$

Teorema della media integrale - f $\underline{\text{continua}}$ su $[a b]$

Allora esiste $c \in [a b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Dimostrazione: siano x_0 e x_1 punti di min e max assoluti (Weierstrass). Allora

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \quad \forall x \in [a b]$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ f(x_0)(b-a)}}{\int_a^b f(x_0)\,dx} \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x_1)\,dx = f(x_1)(b-a)$$

Divido per $b-a$ e trovo

$$f(x_0) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(x_1)$$

Per il teorema dei valori intermedi applicato a f, esiste $c \in [a b]$ tale che

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

#

Def.1 $f:]a,b[\to \mathbb{R}$. $F:]a,b[\to \mathbb{R}$ si dice primitiva di f su $]a,b[$ se vale
$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$$

OSS 1 Se F è primitiva di f su $]a,b[$, allora $H:]a,b[\to \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) + c$ è primitiva di f $\forall c \in \mathbb{R}$

Prop. F e G primitive di f su $]a,b[$. Allora $\exists k \in \mathbb{R}$: $F(x) - G(x) = k \ \forall x \in]a,b[$

Dimostrazione: usiamo $H:]a,b[\to \mathbb{R}$, $H(x) = F(x) - G(x)$. Vale $H'(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[$ e dunque H è costante su $]a,b[$ (visto nel primo modulo).

OSS Proposizione valida purché si lavori su un intervallo $]a,b[$. Visto in classe un esempio in cui è falsa con $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$.

FUNZIONI INTEGRALI

Def: data $f:]a_0, b_0[\to \mathbb{R}$ continua e $c \in \mathbb{R}$ definiamo $\underline{I_c}:]a_0, b_0[\to \mathbb{R}$, $I_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt$.
(Funzione integrale di punto base c)

Proprietà di I_c: (a) $I_c(c) = 0$

(b) Dati $c_1, c_2 \in]a_0, b_0[$, $I_{c_1}(x) - I_{c_2}(x) = \int_{c_1}^{c_2} f(t)\,dt$
$\Rightarrow I_{c_1} - I_{c_2}$ è costante.

Teorema (fondamentale del calcolo integrale)
Sia f continua su $]a_0, b_0[$, sia $c \in]a_0, b_0[$.
Allora $\forall x \in]a_0, b_0[$ vale $I_c'(x) = f(x)$.

Dim Da provare $\lim_{h \to 0} \frac{I_c(x+h) - I_c(x)}{h} = f(x)$

$\forall x \in]a_0, b_0[$. Guardiamo il limite destro;

dunque dobbiamo provare ~~a~~ che $\forall h_n \to 0^+$

$h_n > 0 \ \forall n$ vale $\frac{I_c(x+h_n) - I_c(x)}{h_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$.

Si scrive $I_c(x+h_n) - I_c(x) = \int_c^{x+h_n} f - \int_c^x f =$

$= \int_x^{x+h_n} f(t)\,dt$. Per teorema media integrale

$\exists\, c_n \in [x, x+h_n]$ tale che

$\frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f(t)\,dt = f(c_n)$. Poiché f è continua

e $c_n \to x$, si ottiene $f(c_n) \to f(x)$, come

si voleva. #

Teorema (fondamentale del calcolo - 2 alias Formula di Torricelli). Se f è continua su $]a_0, b_0[$ e se F è primitiva di f su $]a_0, b_0[$ allora $\forall a, b \in]a_0, b_0[$ vale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Dimostrazione. Sia $c \in]a_0, b_0[$

I_c e F sono primitive di f su $]a_0, b_0[$.

Per il teorema di caratterizzazione delle primitive $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = I_c(x) + k \quad \forall x \in]a_0, b_0[$

Dunque $F(b) - F(a) = (I_c(b) + k) - (I_c(a) + k)$

$$= I_c(b) - I_c(a) = \int_c^b f - \int_c^a f \underset{\boxed{\text{additività}}}{=} \int_a^b f(x)\,dx,$$

come si voleva.

Tabella di primitive di funzioni elementari: potenze, esponenziale, sin, cos, ...

ESERCIZI SU FORMULE di Integrazione

$$\int_a^b g'(f(x))\, f'(x)\, dx = \Big[g(f(x)) \Big]_{x=a}^{x=b}$$

Con $g = \exp$, $\ln$, $\sin$, $\cos$, potenze