Proposizione. Se $A = A^t \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è definita positiva, allora $\exists\, m>0$ tale che $\langle Ah, h\rangle \geq m|h|^2 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Dim. $(n=2)$ Scriviamo $h = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ con $r \geq 0$, $r = |h|$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Allora vale

$$\langle Ah, h\rangle = a_{11} r^2\cos^2\theta + 2a_{12} r^2 \cos\theta \sin\theta + a_{22} r^2 \sin^2\theta$$
$$= r^2\left[a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta\right]_{(\cdot)}$$

Poniamo $g(\theta) = [\cdots]_{(\cdot)}$ per $\theta \in [0, 2\pi]$. Per ipotesi $g(\theta) > 0 \ \forall \theta \in [0, 2\pi]$. (infatti $r^2 g(\theta) > 0$ $\forall r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi]$). Essendo g continua su $[0, 2\pi]$ per il Teorema di Weierstrass $\exists\, \bar\theta \in [0, 2\pi]$ tale che $g(\bar\theta) = \min_{[0,2\pi]} g$. Tale minimo è positivo e lo chiamiamo m. Dunque

$$\langle Ah, h\rangle = r^2 g(\theta) \geq r^2 m = m|h|^2 \quad \forall h. \quad \#$$

Teorema (formula Taylor ordine 2) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, f di classe C^2 su A. Allora vale $\forall\, \bar x \in A$ lo sviluppo

$$f(\bar x + h) = f(\bar x) + \langle \nabla f(\bar x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\bar x)h, h\rangle + o(|h|^2)$$
per $h \to 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo la seguente formula con resto "non uniforme". $\forall\, v \in \mathbb{R}^n$, $|v| = 1$, $\forall x \in A$ vale la formula

$$f(\bar x + tv) \underset{(*)}{=} f(\bar x) + \langle \nabla f(\bar x), tv\rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\bar x)tv, tv\rangle + o(t^2)$$
per $t \to 0$ in $\mathbb{R}$

Consideriamo la funzione $g:]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $g(t) = f(\bar x + tv)$, definita per ε sufficientemente piccolo. Poiché f è di classe C^2, si vede che

$\exists\ g'(t) = \langle \nabla f(\bar x + tv), v\rangle \quad \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

Inoltre $\exists$ continua $g''(t) = \langle Hf(\bar x + tv)v, v\rangle$

Scriviamo la Taylor in t per g con punto iniziale $t=0$. Otteniamo:

$$g(t) = g(0) + g'(0)\,t + g''(0)\frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

Trascrivendo in termini di f si trova esattamente la formula (*) da dimostrare. #

TEOREMA (classificazione punti critici, secondo ordine)
Se $f: A \to \mathbb{R}$ è C^2 sull'aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, vale quanto segue; per $\bar{x} \in A$.

(1) $\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ Hf(\bar{x}) > 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\bar{x}$ è punto di minimo locale

(2) $\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ Hf(\bar{x}) < 0 \end{cases} \Longrightarrow$ $\bar{x}$ è punto di massimo loc.

(3) $\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ Hf(\bar{x}) \text{ indefinita} \end{cases} \Longrightarrow$ $\bar{x}$ è di sella.

NOTA: $\bar{x}$ punto critico di f si dice di sella se $\forall r > 0$ $\exists$ $x_+, x_- \in B(\bar{x}, r)$ tale che $f(x_-) < f(\bar{x}) < f(x_+)$

~~OSS~~ Dimostrazione e altre osservazioni nella prossima lezione

ES Applicato il teorema per $f(x,y) = x^3 + y^3 + xy$

Dimostrazione (del teorema di classificazione.) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f: A \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Sia $\bar{x} \in A$ ~~di classe~~ un punto critico con $Hf(\bar{x}) > 0$. Dobbiamo dimostrare che $\exists\, \delta > 0$ tale che

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) \geq 0 \quad \forall\, h \in B(0,\delta).$$

Usiamo la formula di Taylor.

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(\bar{x})h, h\rangle + o(|h|^2)$$

per $h \to 0$

Visto che $\nabla f(\bar{x}) = 0$, analizziamo

$$\frac{1}{2}\langle Hf(\bar{x})h, h\rangle + o(|h|^2) \geq 0$$

Per il Teorema sulle forme positive $\exists\, m > 0$ tale che $\langle Hf(\bar{x})h, h\rangle \geq m|h|^2 \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n$.

Usando la definizione di o piccolo con $\varepsilon = \frac{m}{4}$, $\exists\, \delta > 0$ tale che $-\frac{m}{4} \leq \frac{o(|h|^2)}{|h|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall\, h \in B(0,\delta)$

Dunque, per $|h| < \delta$ vale

$$f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) \geq |h|^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{o(|h|^2)}{|h|^2}\right)$$

$$\geq |h|^2\left(\frac{m}{2} - \frac{m}{4}\right) = \frac{m}{4}|h|^2 \geq 0 \quad \forall\, h \in B(0,\delta)$$

Il teorema è dimostrato. I casi di punto di massimo o sella sono analoghi.

ESERCIZI SVOLTI. Punti critici e classificazione di $f(x,y) = \frac{x^2}{2}(y^2-1) - y^2$

$f(x,y) = \sqrt{1+(x+1)y} - x^2$ e

$f(x,y) = x^2 y - \frac{y^4}{4} - \frac{2}{3}x^3$ con analisi ad hoc del punto critico degenere $(0,0)$.

OSSERVAZIONE. Le condizioni $\nabla f(\bar{x}) = 0$ e $Hf(\bar{x}) > 0$ ~~è~~ non è necessarie affinché $\bar{x}$ sia di minimo.

Esempio $f(x,y) = y^2$, in $(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$.

Vale invece questo segue.

Proposizione: (Condizione necessaria 2° ordine affinché $\bar{x}$ sia di minimo). Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto, f è C^2 su A e $\bar{x}$ è di minimo, allora

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = 0 \\ \langle Hf(\bar{x})h, h \rangle \geq 0 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Si dice in tal caso che $Hf(\bar{x})$ è semidefinita positiva

---

FUNZIONI CONVESSE in $\mathbb{R}$

Def $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $]a,b[\subseteq A$, f derivabile in $]a,b[$. Si dice che f è convessa su $]a,b[$ se $\forall y \in]a,b[$ vale

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y) \quad \forall x \in]a,b[$$